

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

**Ашуров Денис Абдулвагабович**

**Модальный и немодальный рост возмущений в  
некоторых гидродинамических течениях**

Специальность 1.1.9.Механика жидкости, газа и плазмы

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., проф. В.В. Веденеев

Москва — 2026

# Оглавление

Введение . . . . .	4
1 Обзор литературы . . . . .	14
1.1 Использование податливых покрытий для стабилизации пограничного слоя . . . . .	14
1.2 Немодальный рост возмущений в струйных течениях . . . . .	22
2 Устойчивость и переход к турбулентности в пограничных слоях над податливым покрытием. . . . .	28
2.1 Постановка задачи . . . . .	28
2.2 Численный метод . . . . .	32
2.3 Предсказание перехода к турбулентности при помощи $e^N$ -метода . . . . .	35
2.4 Свойства покрытия . . . . .	36
2.5 Валидация метода . . . . .	37
2.6 Результаты расчетов . . . . .	38
2.7 Выводы по второй главе . . . . .	41
3 Оптимальные возмущения в круглой затопленной струе . . . . .	44
3.1 Постановка задачи и метод решения . . . . .	44
3.2 Численный алгоритм . . . . .	53
3.3 Результаты и обсуждение . . . . .	60
3.4 Выводы по третьей главе . . . . .	75
4 Анализ механизмов немодального роста в ламинарной струе на основе результатов экспериментального исследования . . . . .	78
4.1 Исследуемое струйное затопленное течение с длинным ламинарным участком . . . . .	78
4.2 Методика расчета оптимальных возмущений для профиля рассматриваемой струи . . . . .	80

4.3	Результаты расчетов . . . . .	81
4.4	Сравнение эксперимента с теорией . . . . .	86
4.5	Выводы по четвёртой главе . . . . .	87
5	Оптимальный отклик струи на внешнее гармоническое воз- действие . . . . .	89
5.1	Постановка задачи о вынужденных возмущениях и ре- зольвента . . . . .	89
5.2	Численный алгоритм . . . . .	93
5.3	Результаты расчётов . . . . .	94
5.4	Выводы по пятой главе . . . . .	95
	Заключение . . . . .	98
	Литература . . . . .	101

# Введение

## Актуальность темы

Исследование устойчивости течений жидкости и ламинарно-турбулентного перехода сохраняет высокую научную и практическую актуальность в связи с потребностями современных технологий, где управление течениями играет ключевую роль. В частности, задачи снижения гидродинамического сопротивления в авиации, судостроении и трубопроводном транспорте требуют глубокого понимания физических механизмов, определяющих переход к турбулентности.

Особый интерес представляет изучение немодальных механизмов роста возмущений, которые могут доминировать над классической экспоненциальной неустойчивостью в широком диапазоне параметров течения. Несмотря на значительные успехи в теоретическом описании таких механизмов для канонических течений, их экспериментальная идентификация и валидация математических моделей остаются сложными задачами, особенно для струйных течений.

Актуальность настоящей работы подчеркивается также необходимостью разработки эффективных методов управления переходом с использованием податливых вязкоупругих покрытий. Хотя потенциал таких покрытий для затягивания перехода известен, количественные оценки их эффективности в реальных условиях, особенно при наличии градиента давления, остаются малоизученными. **Степень разработанности темы** подробно проанализирована в главе 1.

## Цели и задачи работы

- 1 Разработка комплекса численных методов и алгоритмов для анализа устойчивости, включающих: реализацию метода коллокаций на основе полиномов Чебышёва для решения спектральных задач; создание и реализация алгоритма расчёта оптимальных возмущений в пространственной постановке; реализацию алгоритма расчёта оптимального от-

клика на внешнее распределённое воздействие на основе анализа нормы резольвенты; разработку критериев выделения физически реализуемых мод, распространяющихся вниз по потоку. Апробация разработанной методики на тестовых задачах с известными аналитическими и численными решениями.

- 2 Проведение комплексного теоретического исследования механизмов роста возмущений в гидродинамических течениях, включающего: анализ влияния монолитных вязкоупругих покрытий на устойчивость пограничного слоя с градиентом давления для различных значений параметра Хартри; изучение немодального роста возмущений в круглых затопленных струях в зависимости от профиля скорости струи, числа Рейнольдса, частоты и азимутального волнового числа; анализ оптимального отклика круглой затопленной струи на внешнее распределённое воздействие в зависимости от формы и частоты внешнего возмущения; идентификация и сравнительный анализ механизмов неустойчивости в струйных течениях и пограничных слоях.
- 3 Выполнение валидации теоретических моделей и практическая апробация результатов: сопоставление расчетных характеристик оптимальных возмущений и картин течения с экспериментальными данными для струйных течений; разработка практических рекомендаций по управлению течениями на основе полученных результатов, включая оценку возможности затягивания ламинарно-турбулентного перехода с использованием податливых покрытий.

## Новизна работы

Получены количественные оценки эффективности монолитных вязкоупругих покрытий для затягивания ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях с различными градиентами давления. Показано, что основной эффект в затягивании перехода обусловлен не изменением критического числа Рейнольдса, а модификацией инкрементов нарастания возмущений со смещением вниз по потоку зоны перехода на 32—41% в зависимости от величины градиента давления.

Комплексный теоретический анализ выявил возможность значительного немодального роста возмущений в струйных течениях. Теоретически предсказанный и экспериментально подтвержденный новый сценарий перехода к турбулентности, связанный с развитием «лепестковых» структур, расширяет фундаментальные представления о механизмах ламинарно-турбулентного перехода и открывает новые возможности для управления течениями в практических приложениях.

Теоретическое исследование отклика затопленной струи на гармоническое воздействие показало, что максимальный отклик достигается на частотах наименее устойчивых собственных мод. С уменьшением продольного волнового числа резонансные пики усиливаются, при этом во всех случаях доминируют истинные резонансы, а не псевдорезонансы, в отличие от ряда пристенных течений.

Разработанный комплекс верифицированных вычислительных алгоритмов позволяет с высокой точностью исследовать устойчивость как пограничных слоев над податливыми поверхностями, так и струйных течений. Это обеспечивает научную основу для создания новых методов управления течениями.

## **Теоретическая и практическая значимость работы**

Теоретическая значимость работы заключается в развитии методов анализа гидродинамической устойчивости и углублении понимания физических механизмов ламинарно-турбулентного перехода. Полученные результаты по идентификации и описанию механизмов немодального роста в струйных течениях, а также количественные оценки влияния податливых покрытий на инкременты нарастания возмущений в ламинарном пограничном слое вносят существенный вклад в теорию гидродинамической устойчивости.

Практическая значимость работы определяется возможностью применения полученных результатов для управления течениями в различных инженерных приложениях. Разработанные методики и алгоритмы могут быть использованы для прогнозирования ламинарно-турбулентного перехода и оптимизации течений в авиационной технике, судостроении и системах трубопроводного транспорта. Количественные оценки эффективности подат-

ливых покрытий позволяют разрабатывать практические рекомендации по их применению для затягивания перехода и снижения гидродинамического сопротивления. Результаты работы по исследованию струйных течений могут быть использованы для улучшения характеристик камер сгорания двигателей, систем охлаждения и распыления. Теоретически предсказанные сценарии перехода к турбулентности открывают новые возможности для управления процессами перемешивания и теплообмена в различных технических устройствах.

## Методология и методы исследования

Методологической основой работы является комплексный подход к исследованию гидродинамической устойчивости. Он сочетает аналитические методы теории устойчивости, современные численные алгоритмы, анализ их сходимости, верификацию и валидацию результатов путем сравнения с экспериментальными данными и результатами расчетов, представленными в литературе.

Теоретическая часть исследования базируется на использовании методов линейной теории устойчивости. Это включает анализ спектра для уравнений Навье-Стокса, линеаризованных относительно основного течения, анализ оптимальных возмущений, для построения которых решается задача условной оптимизации, резольвентный анализ для расчета отклика течения на внешнее воздействие.

Для решения спектральных задач устойчивости применен метод коллокации на основе полиномов Чебышёва с алгебраическим отображением физической области на расчетную. Анализ оптимальных возмущений проводился с использованием метода, основанного на решении задачи условной оптимизации, — максимизации прироста энергии. Для выделения физически реализуемых мод, распространяющихся вниз по потоку, разработана методика анализа движения собственных значений в комплексной плоскости, основанная на принципе причинности. Отклик круглой ламинарной плоскопараллельной затопленной струи на гармоническое воздействие изучался в рамках резольвентного подхода. Максимальное усиление возмущений для каждой гармоники определялось как норма резольвенты линейно-

го оператора Навье-Стокса.

Верификация численных методов выполнена на тестовых задачах с известными решениями, включая задачи об устойчивости течения Пуазейля в круглой трубе, пограничного слоя Блазиуса, задаче об оптимальных возмущениях в круглой трубе.

Разработанный комплекс методов позволяет с единых позиций исследовать устойчивость различных классов течений, включая пограничные слои с градиентом давления над податливыми поверхностями и затопленные струйные течения.

## Положения, выносимые на защиту

1. Установлено, что применение монолитных вязкоупругих покрытий позволяет существенно (до 41% по расстоянию вниз по потоку) затянуть ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое с благоприятным градиентом давления. Показано, что основной эффект обусловлен не изменением критического числа Рейнольдса, а уменьшением инкрементов нарастания возмущений.
2. Впервые рассчитаны стационарные оптимальные возмущения в затопленной струе с профилем скорости Михалке в пространственной постановке. Теоретически исследован и детально описан немодальный механизм роста возмущений в круглых затопленных струях. Для стационарных возмущений подтвержден классический закон квадратичного роста энергии  $G_{max} \sim Re^2$ . Обнаружены и объяснены пространственные осцилляции энергии, связанные с взаимодействием наименее затухающих мод. Выявлены и описаны два различных механизма немодального роста в струйных течениях: механизм «shift-up» для возмущений с азимутальным числом  $m = 1$  и механизм «lift-up», аналогичный механизму в пристенных течениях, для возмущений с  $m > 1$ .
3. Максимальный отклик на внешнее гармоническое возмущение в затопленной струе достигается на частотах её наименее устойчивых собственных мод, что подтверждает доминирующую роль истинных резонансов. С уменьшением продольного волнового числа резонансные пики откли-

ка усиливаются, а полоса значительного усиления сужается.

## **Достоверность и апробация результатов**

Основные результаты докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях: семинар по механике сплошных сред имени А.Г. Куликовского и А.А. Бармина, под руководством д.ф.-м.н. В.П. Карликова, д.ф.-м.н. А.Н. Осипцова, чл.-корр. РАН А.А. Афанасьева и д.ф.-м.н. Н.В. Никитина; семинар «Вычислительная математика и приложения» под руководством академика РАН Е.Е. Тыртышников, д.ф.-м.н. Ю.М. Нечепуренко, д.ф.-м.н. В.И. Агошкова, чл.-корр. РАН Ю.В. Василевского, д.ф.-м.н. А.Б. Богатырева; конференция-конкурс молодых учёных НИИ механики МГУ (Москва, 2021, 2022, 2023); всероссийская конференция молодых учёных-механиков «YSM» (Сочи, 2021); XXVI Всероссийский семинар с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям (Санкт-Петербург, 2022); XVII Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (Новосибирск – Шерегеш, 2023); 26<sup>th</sup> International Congress of Theoretical and Applied Mechanics «ICTAM» (Тэгу, Республика Корея, 2024); X Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2025); 18<sup>th</sup> Asian Congress of Fluid Mechanics (Сеул, Республика Корея, 2025); 16-я международная конференция — школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 2025). Результаты диссертции опубликованы в пяти статьях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus [1, 2, 53, 54, 56], а также в работе [55].

## **Личный вклад**

Все основные результаты и выводы работы получены лично автором. Автор лично произвел написание, тестирование, верификацию и валидацию программных кодов алгоритмов, описанных в работе. Научному руководителю принадлежат постановки линейных задач устойчивости пограничного слоя над податливым покрытием и устойчивости струйного течения, обсуждение

результатов. Группа соавторов соискателя занималась экспериментальной частью представленной работы, в которых соискатель участия не принимал. Экспериментальный раздел главы 4 приведен в тексте для полноты описания.

## Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 107 страниц, включая 40 рисунков и 8 таблиц. Список литературы содержит 60 наименований.

В главе 1 приводится обзор литературы, состоящий из двух частей. Первая часть посвящена исследованиям влияния податливых покрытий на характеристики устойчивости пограничных слоёв, нарастающих на таких покрытиях, вторая часть — исследованиям немодального роста возмущений в струйных течениях.

Глава 2 посвящена исследованию линейной устойчивости пограничных слоев с градиентом давления (автомодельных течений Фолкнера-Скэн, обтекающих монолитное вязкоупругое податливое покрытие). Целью работы была оценка влияния такого покрытия на характеристики устойчивости и положение ламинарно-турбулентного перехода. В разделе 2.1 формулируется задача устойчивости системы пограничный слой — податливое покрытие. Записываются уравнения описывающие эволюцию возмущений в потоке и в покрытии. Использовалась модель покрытия как монолитного слоя вязкоупругого материала, что позволило учесть продольные перемещения в покрытии и поведение возмущений внутри него. Далее, в разделе 2.2 описывается численный метод — метод коллокаций, который использовался для дискретизации задачи устойчивости. Для прогнозирования положения точки перехода к турбулентности применялся  $e^N$ -метод, подробно описанный в разделе 2.3. Свойства материала покрытия задавались экспериментальными зависимостями модуля Юнга и коэффициента потерь от частоты, этому посвящен раздел 2.4. Затем в разделе 2.5 описана валидация реализованного метода на задачах для которых характеристики устойчивости описаны в литературе, было продемонстрировано, что реализованный метод демонстрирует необходимую точность и воспроизводит результаты рас-

четов других исследователей. В следующих разделах (2.6, 2.7) главы приводятся результаты расчетов. Было выявлено, что даже достаточно жесткое покрытие способно существенно затянуть ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое. Обнаружено, что эффект затягивания перехода усиливается с ростом толщины покрытия (до некоторого значения, при котором происходит насыщение) и скорости набегающего потока. Для течений с неблагоприятным градиентом давления влияние исследуемого покрытия оказалось незначительным вблизи нейтральной кривой, рассчитанной для твёрдой стенки. Хотя изменение критического числа Рейнольдса было невелико (5-7%), влияние на зону перехода оказалось гораздо существеннее из-за смещения изолиний инкремента нарастания возмущений в область больших чисел Рейнольдса.

В главе 3 проведен детальный анализ пространственных оптимальных возмущений в круглых затопленных струях. Исследование выполнено для различных профилей скорости основного течения из семейства профилей скорости, предложенного Михалке, и широкого диапазона параметров, включая различные числа Рейнольдса, частоты возмущений и азимутальные волновые числа. В разделе 3.1 описана задача об оптимальных возмущениях в круглой затопленной струе вязкой несжимаемой жидкости. Оптимальные возмущения определялись как решения вариационной задачи максимизации прироста кинетической энергии возмущения в сечении при заданной продольной координате при фиксированной величине энергии возмущения в начальном сечении. Раздел 3.2 посвящен описанию особенностей численной реализации поиска оптимальных возмущений. Сначала описывается алгоритм поиска собственных мод, а затем метод поиска коэффициентов разложения возмущений по базису, доставляющее максимум функционалу прироста кинетической энергии возмущений. В последующих разделах описываются результаты. Для стационарных возмущений ( $\omega = 0$ ) подтвержден классический закон квадратичного роста их энергии с числом Рейнольдса ( $G_{max} \sim Re^2$ ). Координата максимума энергии  $z_{max}$  продемонстрировала линейную зависимость от числа Рейнольдса. Для нестационарных возмущений был обнаружен эффект «накачки энергии» в экспоненциально растущую моду. Установлено, что отношение энергии

оптимального возмущения к энергии наиболее растущей моды с ростом продольной координаты стремилось к постоянному значению, которое слабо возрастало с увеличением числа Рейнольдса. Выявлены два различных механизма нестационарного роста возмущений: для азимутального числа  $m = 1$  преобладал механизм «shift-up», проявляющийся в виде квазиоднородного смещения струи. Для высших азимутальных чисел ( $m \geq 2$ ) наблюдался механизм, аналогичный «lift-up» в пограничном слое, связанный с образованием системы вихревых структур. Обнаружены пространственные осцилляции энергии оптимальных возмущений. Анализ спектральной структуры показал, что частота этих осцилляций соответствует частотам двух наименее затухающих дискретных собственных мод.

В главе 4 описывается теоретическое исследование развития стационарных возмущений в затопленной ламинарной струе воздуха, направленное на идентификацию и изучение немодального (алгебраического) механизма роста возмущений, аналогичного механизму «lift-up» в пристенных течениях. Проводится сравнение полученных в расчете оптимальных возмущений, с результатами экспериментальных исследований. В разделе 4.1 подробно описывается исследуемое струйное течение. Раздел 4.2 кратко воспроизводит методы и алгоритмы поиска оптимальных возмущений, подробное описание которых можно найти в главе 3. В следующем разделе 4.3 подробно описаны результаты расчетов. Показано, что наибольший немодальный рост демонстрируют стационарные возмущения ( $\omega = 0$ ). Для них были характерны квадратичный рост энергии  $G(z)$  с расстоянием, линейный рост осевой компоненты скорости возмущения при примерно постоянной поперечной компоненте и формирование вихревых структур в поперечном сечении, количество которых определялось азимутальным числом  $m$ . Для  $m = 1$  преобладал механизм «shift-up» всей струи, для  $m \geq 2$  — механизм «lift-up», приводящий к образованию структур типа «лепестков». Раздел 4.4 посвящен сравнению теоретических экспериментальных возмущений с алгебраически растущими возмущениями, полученными в экспериментах. Экспериментальные данные качественно и количественно (по порядку величины) согласуются с результатами теоретического анализа оптимальных возмущений.

Глава 5 описывает расчет отклика ламинарной затопленной струи на внешнее гармоническое воздействие. Раздел 5.1 формулирует задачу об оптимальном отклике течения на внешнее распределенное гармоническое воздействие. Описано понятие вне резонансного оптимального отклика, объясняется отличие от случая резонанса. В разделе 5.2 описывается численный алгоритм, позволяющий определить величину оптимального отклика, а так же определить форму внешнего возмущения и отклика системы на него. В дальнейших разделах главы описаны результаты расчетов. В результате параметрического исследования в диапазонах  $0 \leq \alpha \leq 11$  и  $m = 0, \dots, 6$  установлено, что максимальный отклик системы на внешнее воздействие достигается на частотах наименее устойчивых собственных мод. Показано, что с уменьшением продольного волнового числа  $\alpha$  резонансные пики усиливаются, а спектр отклика становится более узкополосным. Во всех случаях доминирующими оказались истинные резонансы. Отсутствие в струе псевдорезонансов, характерных для пристенных течений, по-видимому, вызвано значительно более сильной неустойчивостью, имеющей невязкую природу. Кроме того, для всех исследованных гармоник был обнаружен низкочастотный резонанс, обусловленный возбуждением мод сплошного спектра.

# 1 Обзор литературы

## 1.1 Использование податливых покрытий для стабилизации пограничного слоя

Одним из первых идею использования податливых покрытий для снижения трения высказал М. О. Крамер [3]. В серии экспериментов, проведенных в буксируемом бассейне при числах Рейнольдса  $Re = 1.5 \times 10^7$ , Крамер продемонстрировал, что покрытие, состоящее из тонкой диафрагмы, поддерживаемой массивом резиновых заглушек, пространство между которыми было заполнено демпфирующей жидкостью, способно задерживать ламинарно-турбулентный переход и снижать сопротивление трения до 59% по сравнению с абсолютно твердой поверхностью. Ключевым параметром эффективности покрытия Крамер определил его упругость. Однако, несмотря на впечатляющие экспериментальные результаты, теоретическое обоснование механизма стабилизации отсутствовало.

Значительный вклад в понимание физики взаимодействия потока с податливой границей был сделан Т. Бенджамином. В работе [4] он предложил классификацию неустойчивостей в системах «вязкий поток – податливое покрытие», основанную на энергетическом анализе возмущений:

- Класс А, неустойчивости, для возбуждения которых требуется извлечение энергии из системы. Например, к ним относятся волны Толлмина – Шлихтинга. Ключевой особенностью таких возмущений является то, что демпфирование в покрытии их дестабилизирует. Это противоречило интуитивным ожиданиям Крамера и объясняло сделанные им замечания в работе [3] о том, что чрезмерное демпфирование ухудшает эффективность покрытия по снижению сопротивления.
- Класс В, неустойчивости, требующие подвода энергии для возбуждения. Например, поверхностные волны на покрытии. Демпфирование их стабилизирует.
- Класс С, неустойчивости типа Кельвина – Гельмгольца, возникающие при недостаточной жесткости покрытия. Эти неустойчивости практи-

чески не зависят от демпфирования и определяются консервативными силами.

Комбинируя результаты Крамера и Бенджамина, можно получить физическую картину взаимодействия вязкого потока и податливого покрытия. Стабилизация волн Толмина – Шлихтинга в потоке происходит за счет упругих свойств покрытия, однако чрезмерное демпфирование снижает эффективность этой стабилизации. Подавление поверхностных неустойчивостей требует оптимального демпфирования, достаточного для стабилизации поверхностных волн, но не дестабилизирующего волны класса А. Обеспечение достаточной жесткости покрытия позволяет избежать возникновения неустойчивостей класса С.

## Теоретические модели податливых покрытий

**Модель пластины на упругом основании.** Упрощенная модель податливого покрытия, восходящая к работам Бенджамина [4] и развитая Карпендером и Гаррадом [5], представляет покрытие как тонкую упругую пластину или мембрану, закрепленную на вязкоупругом основании. Динамика такой системы описывается уравнением движения пластины:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + d \frac{\partial w}{\partial t} + B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K w = -p(x, t),$$

где  $w$  — нормальное смещение поверхности,  $m$  — поверхностная массовая плотность пластины,  $d$  — коэффициент демпфирования,  $B$  — изгибная жесткость пластины,  $T$  — продольное натяжение,  $K$  — жесткость упругого основания,  $p(x, t)$  — возмущение давления со стороны потока.

Главное преимущество такой модели заключается в относительной простоте математической формулировки, позволяющей получать аналитические оценки критических параметров. Кроме того, модель обеспечивает физическую наглядность, она адекватно описывает основные физические механизмы взаимодействия покрытия с потоком. Как показали Карпендер и Гаррад [5], модель позволяет предсказывать существенную задержку ламинарно-турбулентного перехода при использовании податливых покрытий.

Среди недостатков модели – отсутствие учета продольных перемещений в материале покрытия, что приводит к неточностям при анализе волновых процессов внутри покрытия. В такой модели невозможно исследовать распространение сдвиговых и продольных волн в материале покрытия. Модель покрытия как пластины на пружинно-демпферном основании становится некорректной при длине волны возмущения, сравнимой с толщиной пластины, что ограничивает ее применимость при высоких числах Рейнольдса: как показали Карпентер и Гаррад [5] (рис. 11), зона применимости модели (в стандартных координатах число Рейнольдса  $Re$  — волновое число  $\alpha$ ) находится выше прямой которая соответствует равенству длины волны толщине пластины. Кроме того, такая модель неспособна адекватно описывать многослойные структуры с различными механическими свойствами слоев.

Как отмечается в обзоре [6], несмотря на упрощения, модель пластины на упругом основании сыграла ключевую роль в понимании физических механизмов стабилизации пограничного слоя. Карпентер и Гаррад [7] показали, что оптимизация параметров модели позволяет достичь компромисса между подавлением неустойчивостей класса А и В, что теоретически обеспечивает задержку перехода.

**Модель монолитного вязкоупругого слоя.** Более физически обоснованный подход, развитый в работах Ландаля [8], Йео [9], Бойко и Кулика [10–12] и других исследователей, рассматривает покрытие как монолитный слой (или систему слоев) вязкоупругого материала.

Рассмотрим одну из простейших моделей вязкоупругого материал — модель Кельвина-Фойгта. Эта простейшая механическая модель состоит из пружины и демпфера, соединённых параллельно (Рис. 1.1). В этом случае, при одноосном растяжении, связь между напряжением и деформацией представляется в виде [13]:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (1.1)$$

где  $\sigma(t)$  — напряжение,  $\varepsilon(t)$  — деформация,  $E$  — модуль упругости,  $\eta$  — коэффициент вязкости. При гармонических движениях  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-i\omega t}$  и

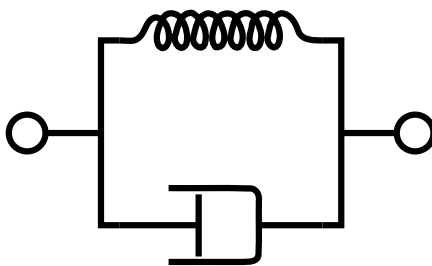


Рис. 1.1: Модель Кельвина – Фойгта.

$\sigma(t) = \sigma e^{-i\omega t}$ . Тогда соотношение (1.1) принимает следующий вид:

$$\sigma_0 = (E - i\omega\eta) \varepsilon_0 = E(1 - i\mu) \varepsilon_0 = E^* \varepsilon_0, \quad (1.2)$$

где вводятся  $E^*$  – комплексный модуль упругости,  $\mu$  – коэффициент потерь. Аналогичным образом для сдвиговых деформаций можно записать соотношение:

$$\sigma(t) = G\gamma(t) + \eta_s \frac{d\gamma(t)}{dt}, \quad (1.3)$$

где  $\gamma$  – сдвиговая деформация,  $G$  – модуль сдвига,  $\eta_s$  – коэффициент сдвиговой вязкости. И для гармонических движений соотношение (1.3) принимает вид:

$$\sigma_0 = (G - i\omega\eta_s) \gamma_0 = G(1 - i\mu_s) \gamma_0 = G^* \gamma_0. \quad (1.4)$$

Необходимо упомянуть, что физический смысл коэффициента потерь достаточно прост — фазовый сдвиг между деформацией и напряжениям равен  $\arctg \mu$  в одноосном растяжении и  $\arctg \mu_s$  в чистом сдвиге. В общем случае для изотропного вязкоупругого материала коэффициент Пуассона может быть комплексным, так как он связан с отношением модулей:

$$\nu^* = \frac{E^*}{2G^*} - 1 \quad (1.5)$$

Популярное упрощение для податливых покрытий, обоснованное результатами экспериментов — предположение о том, что продольные и поперечные волны затухают по одному закону [14]. В этом случае фазовый сдвиг между продольными и поперечными волнами совпадает —  $\arctg \mu_s = \arctg \mu$ ,

тогда соотношение (1.5) принимает следующий вид:

$$\nu^* = \frac{E(1-\mu)}{2G(1-\mu_s)} - 1 = \frac{E(1-\mu)}{2G(1-\mu)} - 1 = \frac{E}{2G} - 1, \quad (1.6)$$

таким образом  $\nu \in \mathbb{R}$ . Далее везде будет предполагаться коэффициент Пуассона вещественным. С учетом сделанных выше предположений, динамика гармонических движений в покрытии описывается уравнениями Навье-Ламе. Для однородного изотропного материала эти уравнения в безразмерной форме имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\eta}}{\partial t^2} = C_T^2 \nabla^2 \boldsymbol{\eta} + (C_L^2 - C_T^2) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}),$$

где  $\boldsymbol{\eta}$  — вектор смещения,  $C_T$  и  $C_L$  — скорости поперечных и продольных волн в материале, определяемые через комплексные модули упругости:

$$C_T = \sqrt{\frac{E^*}{2\rho_s(1+\nu)}}, \quad C_L = \sqrt{\frac{E^*(1-\nu)}{\rho_s(1+\nu)(1-2\nu)}},$$

где  $E^* = E(1-i\mu)$  — комплексный модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\rho_s$  — плотность материала.

Граничные условия на границе жидкость-покрытие обеспечивают связь между возмущениями в потоке и покрытии. Кинематические условия описывают равенства скоростей. Динамические условия выражают непрерывность векторов напряжений на границе.

Основной результат Йео [9] заключается в разработке единой формулировки задачи устойчивости для покрытий с произвольным числом слоев, постановке задачи на собственные значения, объединяющая уравнение Орра-Зоммерфельда для потока и уравнения Навье для покрытий через условия сопряжения на границах раздела.

В отличие от модели «пластина на упругом основании», монолитная модель позволяет исследовать волновые процессы внутри покрытия, адекватно описывать многослойные структуры с различными механическими свойствами, учитывать продольные перемещения, а так же анализировать влияние анизотропии материала.

Как показал Йео [9], для многослойных покрытий оптимальная стра-

тегия заключается в использовании жесткого тонкого верхнего слоя, который подавляет высокочастотные неустойчивости класса В, и постепенного снижения жесткости с глубиной, для обеспечения проникновения низкочастотных волн Толлмина-Шлихтинга вглубь покрытия.

Таким образом, полная модель вязкоупругого слоя, несмотря на вычислительную сложность, предоставляет наиболее физически обоснованную основу для проектирования эффективных податливых покрытий и понимания механизмов их взаимодействия с пограничным слоем.

### **Экспериментальные исследования податливых покрытий**

Большая часть экспериментальных работ с использованием податливых покрытий посвящено исследованию возможности снижением трения в развитом турбулентном пограничном слое. Они непосредственно не связаны с работами по затягиванию ламинарно-турбулентного перехода в системах «вязуий поток – податливое покрытие», однако для полноты изложения, необходимо упомянуть об известных результатах.

Как уже сообщалось ранее, первые эксперименты с податливыми покрытиями были проведены Крамером [3]. В буксируемых испытаниях при покрытии, состоящие из тонкой диафрагмы на резиновых «штырьках» с вязким демпфирующим наполнителем, демонстрировали снижение сопротивления трения до 59 % по сравнению с жёсткой поверхностью. Однако последующие попытки воспроизвести результаты в основном оказались неудачными – в ряде работ наблюдалось даже увеличение сопротивления. Основными причинами неудач стали [15]: отсутствие измерений вязкоупругих свойств покрытий в диапазоне частот, релевантном для неустойчивостей пограничного слоя, изменение свойств материалов при контакте с водой, недостаточная прочность «мягких» покрытий, приводившая к образованию складок и росту сопротивления.

В работе [16] Куликом, Погудой и Семёновым проведено экспериментальное исследование влияния однослойных вязкоупругих покрытий на турбулентное трение и пульсации давления. Испытания выполнялись в открытом бассейне с буксировочной системой. Изучение 10 монолитных покрытий различной толщины продемонстрировало снижение трения до 17%.

Независимая верификация результатов Кулика, Погуды и Семёнова выполнена в работе [17], в канале Университета Ньюкасла. Использована та же модель тела вращения. Тестировались два покрытия из силиконовой резины с различными модулями упругости. Получено снижение трения до 7% для одного из покрытий.

Новая экспериментальная методика была предложена Куликом и соавторами [18]. Разработанная ими установка позволяет измерять комплексный модуль упругости и коэффициент потерь кремнийорганических резин в диапазоне частот, соответствующем частотам колебаний давления в турбулентном вязком подслое при скоростях потока 10–20 м/с. Эти данные впервые позволили проводить расчёты устойчивости с использованием реальных параметров покрытий.

В работе Иванова и др. [19] исследовано влияние монолитных однослойных покрытий толщиной 4–10 мм (материал — кремнийорганическая резина Mold Max 10) на трение в турбулентном пограничном слое при скоростях потока до 20 м/с. При всех испытанных толщинах наблюдалось увеличение трения до 4% по сравнению с жёсткой стенкой. Авторы связывают это с недостаточной оптимизацией параметров покрытия и отсутствием учёта частотной зависимости при проектировании. Кулик и др. [12] предложили концепцию двухслойных покрытий, сочетающих прочный тонкий наружный слой, толщиной 1–2 мм, и мягкий внутренний слой, толщиной 4–8 мм. В гидротрубе при скоростях 6–16 м/с такие покрытия обеспечили снижение локального коэффициента трения до 4%. Ключевым фактором успеха стало: измерение для каждого слоя в релевантном частотном диапазоне; обеспечение прочности наружного слоя, предотвращающей образование дефектов; оптимизация соотношения толщин слоёв для максимизации динамической податливости в диапазоне частот неустойчивостей. Эти результаты подтверждают, что эффективность податливых покрытий критически зависит от точного знания их волновых свойств, включая нестационарные характеристики вязкости и податливости.

## Устойчивость пограничного слоя над монолитными податливыми покрытиями

В работе Бойко, Кулика и Филимонова [10] проведены расчёты с использованием экспериментальных зависимостей комплексного модуля упругости и коэффициента потерь от частоты  $E^*(\omega) = E(\omega)(1 - i\mu(\omega))$  для кремнийорганических резин. Кроме расчета нейтральной кривой, авторы оценили число Рейнольдса перехода к турбулентности на основе  $e^N$ -метода. Ключевые результаты работы заключаются в том, что при скорости потока  $U_0 = 20$  м/с и оптимальных параметрах покрытия критическое число Рейнольдса увеличивается примерно в 2 раза по сравнению с критическим числом для твёрдой стенки, а число Рейнольдса перехода к турбулентности  $Re_t$ , оценённое на основе  $e^N$ -метода увеличивается до 20%.

Многослойная архитектура покрытий позволяет разрешить фундаментальный компромисс между прочностью, требующей высокой жёсткости, и эффективностью стабилизации, требующей податливости. В работе [11] проведён систематический анализ устойчивости пограничного слоя над двухслойным покрытием с экспериментальными параметрами вязкоупругости. При фиксированной скорости  $U_0 = 15$  м/с обнаружена немонотонная зависимость  $Re_{crit}$  от толщины верхнего слоя, этому эффекту дано обоснование. Максимум  $Re_{crit} \approx 640$  достигается при  $h_1 \approx 0.15$  мм и  $h_2 \approx 2$  мм, что на 23% превышает значение для однослойного покрытия с аналогичными средними свойствами.

Большинство теоретических работ посвящено пограничному слою Блазиуса – без градиента давления. Однако для практических приложений (обтекание судовых корпусов, лопастей гребных винтов) критически важна устойчивость пограничных слоёв с градиентом давления, описываемых профилями Фолкнера-Скэн [20]. В работе [21] показано, что путём сопоставления распределения давления, полученного из RANS-расчётов для реального судового корпуса, с распределением для автомодельных пограничных слоёв Фолкнера-Скэн можно подобрать параметр  $\beta$ , при котором профиль скорости Фолкнера-Скэн достаточно точно аппроксимирует реальное течение. Это позволяет использовать теорию устойчивости для профилей Фолкнера-Скэн при прогнозировании перехода на реальных конструкциях.

## 1.2 Немодальный рост возмущений в струйных течениях

Классическая теория гидродинамической устойчивости, восходящая к работам Рэля [22], фокусировалась на анализе собственных значений линейризованных уравнений Навье–Стокса. В соответствии с этой теорией неустойчивость течения при заданной форме возмущения определяется наличием собственных мод с положительной мнимой частью фазовой скорости. Значительно позже появились работы, указывающие на принципиально иной механизм усиления возмущений — алгебраический рост, обусловленный неортогональностью собственных функций оператора линейризованной задачи.

### Теоретическое исследование немодального роста возмущений в сдвиговых течениях.

В работе Элингсена и Палма [23] было показано, что для невязкого параллельного течения без точки перегиба профиля скорости  $U(z)$  возможен линейный рост продольной компоненты возмущения скорости даже при отсутствии экспоненциально неустойчивых мод. Авторы рассмотрели трехмерные возмущения, независимые от продольной координаты  $x$ , и получили из линейризованных уравнений Эйлера для компонент возмущений скорости  $\langle u, v, w \rangle$ , что

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{dU}{dz} = 0 \quad (1.7)$$

где основное течение —  $\langle U(z), 0, 0 \rangle$ , возмущения скорости —  $\langle u, v, w \rangle$ . Кроме того, вследствие независимости возмущений от  $x$ , из уравнения неразрывности следует, что можно ввести функцию тока  $\psi$ , такую, что  $v = \frac{\partial \psi}{\partial z}$ , а  $w = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ . При это из уравнения для завихренности следует, что функция тока не зависит от времени, а как следствие и компоненты  $v$  и  $w$  возмущений скорости.

Из (1.7) следует, что  $u = u(0) - w \frac{dU}{dz} t$ . Таким образом, продольная компонента возмущения  $u$  растет линейно со временем при любом ненулевом поперечном возмущении  $w$  и градиенте скорости  $\frac{dU}{dz}$ . Этот результат, по-

лученный для идеальной жидкости, продемонстрировал принципиальную возможность усиления возмущений без нарушения критерия Рэлея. Физический механизм, лежащий в основе этого роста, позже получил название «lift-up»: поперечное перемещение элементов жидкости в область с другой средней скоростью приводит к усилению продольных возмущений.

Ландау показал [24], что любое параллельное невязкое сдвиговое течение постоянной плотности неустойчиво к широкому классу локализованных трёхмерных возмущений в следующем смысле: кинетическая энергия возмущения растёт по крайней мере линейно со временем ( $E(t) \gtrsim t$  при  $t \rightarrow \infty$ ), даже если само течение устойчиво по критерию Рэлея – отсутствует точка перегиба профиля скорости  $U'' \neq 0$ ).

Халтгрэн и Густавссон [25] рассмотрели задачу Коши для линеаризованных уравнений Навье–Стокса в пограничном слое Блазиуса, применяя комбинацию преобразования Фурье по продольной координате  $x$  и преобразования Лапласа по времени  $t$ . Они указали, что при обратном преобразовании выделяются два вклада: полюсы на комплексной плоскости, соответствующие дискретным модам Толлмина – Шлихтинга и ветвь разреза, связанную с непрерывным спектром оператора Орра–Зоммерфельда. Кроме того, в пределе исчезающей вязкости их результат согласовывался с результатами Элингсена и Палма.

Батлер и Фаррелл [26] предложили вариационную формулировку задачи об оптимальных возмущениях, решение которой сводится к вычислению максимального сингулярного значения оператора эволюции возмущений. Этот подход стал основой современного немодального анализа и объяснил возможность обходного механизма перехода в течениях, устойчивых модально. Трефтен и др. [27] продемонстрировали, что неортогональность собственных векторов оператора Орра–Зоммерфельда (вследствие его несамосопряженности  $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}^\dagger$ ) приводит к значительному, но ограниченному по времени и по величине, росту возмущений даже при строгом соблюдении критерия линейной устойчивости течения. Эта работа установила, что классический спектральный анализ недостаточен для прогнозирования перехода к турбулентности, и обосновала необходимость немодального подхода. Фаррелл и Иоанноу [28] продемонстрировали, что

несамосопряжённость линейного оператора эволюции возмущений в сдвиговых течениях обуславливает значительный алгебраический рост энергии возмущений даже при отсутствии экспоненциальной неустойчивости. Оптимальные возмущения, представляют комбинацию двумерного механизма Орра, в котором под действием сдвига, волновые фронты поворачиваются, увеличивая поперечные возмущений скорости, вследствие сохранения завихренности, и трёхмерного механизма «lift-up», в котором продольные вихри создают поперечную циркуляцию, которая перемещает жидкость из областей с высокой скоростью основного потока в области с низкой скоростью и наоборот, поскольку жидкость сохраняет свой импульс в невязком приближении, возникают возмущения продольной скорости и область, куда переместилась жидкость из быстрого слоя, становится зоной избыточной продольной скорости, и наоборот.

После того как основные методы анализа немодального роста были сформированы, различные исследователи начали их применять для анализа конкретных течений.

Оптимальные возмущения в течении в круглой трубе были систематически исследованы в рамках немодального анализа. В работе [29] решена задача о временных оптимальных возмущениях (т.е. возмущениях, которые растут сильнее всего при заданном вещественном волновом числе) – начальных возмущениях, доставляющих максимум отношения кинетической энергии  $G(t) = E(t)/E(0)$  при фиксированном времени  $t$  и вещественном волновом числе  $\alpha$ . Наибольший переходный рост достигается для осесимметричных возмущений  $m = 1$ , где  $m$  – азимутальное волновое число, не зависящих от продольной координаты  $\alpha = 0$ . Такие возмущения имеют структуру продольных вихревых полос, ориентированных вдоль оси трубы. Максимальное усиление энергии масштабируется как квадрат числа Рейнольдса  $G_{max} \sim Re^2$ . Это объясняется следующим образом: в невязком пределе возмущение продольной скорости растёт линейно со временем  $u \sim t$ , поскольку энергия пропорциональна квадрату скорости, то  $E \sim u^2 \sim t^2$ , вязкое затухание становится существенным на вязком временном масштабе  $t_{visc} = Re$ , оптимальное время роста  $t_{opt}$  достигается, когда линейный рост сравнивается с вязким затуханием, то есть  $t_{opt} \sim Re$ ,

таким образом, получаем  $G_{max} \sim Re^2$ . Физически этот рост обусловлен эффектом «lift-up»: радиальные возмущения скорости переносят элементы жидкости в область с другой осевой скоростью, создавая возмущение (дефект) продольной скорости. В работе [30] рассмотрена пространственная постановка задачи: поиск возмущений, максимизирующих усиление энергии на фиксированном расстоянии  $x$  вниз по потоку при заданной частоте  $\omega$ . Для обеспечения корректности задачи авторы ограничились рассмотрением только распространяющихся вниз по потоку волн. Максимальный пространственный рост достигается для стационарных возмущений  $\omega = 0$ , что согласуется с результатами временного анализа.

Исследование немодального роста возмущений в пограничном слое стало ключевым для понимания байпасного механизма перехода – ламинарно-турбулентного перехода, не связанного с экспоненциальным ростом неустойчивой волны Толлмина – Шлихтинга. В работе [31] на основе линейаризованных уравнений пограничного слоя была решена задача об оптимальных возмущениях — начальных возмущениях, доставляющих максимум отношения кинетической энергии  $G = E(x_{out})/E(x_{in})$  между двумя продольными сечениями. Как было показано, в начальном сечении  $x_{in}$  оптимумы представляют собой продольные вихри с азимутальным волновым числом  $\beta \approx 0.45$  и пренебрежимо малым продольным волновым числом ( $\alpha \approx 0$ ). При распространении вниз по потоку эти вихри трансформируются в полосчатые структуры – чередующиеся области повышенной и пониженной продольной скорости, локализованные в пристеночной области. Доминирующий вклад в усиление вносит «lift-up» эффект. При больших числах Рейнольдса максимальный рост энергии масштабируется как

$$G_{max} \sim Re_{\delta^*}^2,$$

где  $Re_{\delta^*} = U_{\infty}\delta^*/\nu$  — число Рейнольдса, построенное по толщине вытеснения  $\delta^*$ . Авторы предложили феноменологическую модель, связывающую уровень турбулентности внешнего потока  $Tu$  с критическим числом Рейнольдса перехода  $Re_T$  ( $Re_T = \frac{U_{\infty}l_T}{\nu}$ , где  $U_{\infty}$  — скорость набегающего потока,  $l_T$  — координата перехода,  $\nu$  — кинематическая вязкость). Исходя из трёх предположений: входная энергия возмущений пропорциональна  $Tu^2$ , рост

энергии происходит с оптимальной скоростью  $G \sim \text{Re}_{\delta^*}^2$ , переход инициируется при достижении фиксированной пороговой энергии  $E_{cr}$ , получена зависимость

$$\text{Re}_T \sim \frac{1}{Tu^2}.$$

Эта простая модель  $\sqrt{\text{Re}_T} Tu = K$ , с одним подгоночным параметром  $K \approx 1200$ , демонстрирует хорошее согласие с экспериментальными данными для уровней турбулентности  $1\% \leq Tu \leq 5\%$  [31].

Работа Лучини [32] дополнила анализ Андерссона и др. асимптотическим исследованием в пределе  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . Ключевой результат: при корректной нормировке энергии (учёт только продольной компоненты  $u$ , доминирующей в пограничном слое) максимальный рост становится независимым от числа Рейнольдса. Это объясняет универсальность структуры полосчатых структур (стриков), наблюдаемых в экспериментах при различных  $\text{Re}$ .

Тумин и Решотко [33] развил пространственную теорию оптимальных возмущений на основе полных линеаризованных уравнений Навье–Стокса. Рассматривая задачу как распространение сигнала от точечного источника вниз по потоку, он представил решение в виде суперпозиции затухающих собственных мод непрерывного спектра и волн Толлмина–Шлихтинга. Показано, что даже при отсутствии модальной неустойчивости ( $\alpha_i < 0$ ) непрерывный спектр обеспечивает значительный переходный рост за счёт неортогональности собственных функций. Учёт непараллельности течения (изменение  $\delta^*$  вдоль пластины) улучшает количественное согласие с экспериментом, хотя качественная картина остаётся неизменной: оптимальные возмущения — продольные вихри, эволюционирующие в стрики.

Исследование немодального роста в свободных сдвиговых слоях, и в частности в круглых струях, началось значительно позже, чем для течений с твёрдыми стенками. Отсутствие жёстких границ усложняет постановку граничных условий [34], наличие модальных неустойчивостей (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца) с большим инкрементом, которые затрудняют выделение и анализ чисто немодального механизма роста. Боронин, Хейли и Сажин [35] выполнили первый систематический пространственный немодальный анализ круглых струй вязкой жидкости. Авторы рассмотрели как затопленные струи, так и двухфазные струи (жидкость в газе),

решая задачу об оптимальных возмущениях в рамках приближения плоскопараллельного течения. Максимальный немодальный рост достигается для низкочастотных возмущений  $\omega \rightarrow 0$ , что согласуется с результатами для пограничного слоя и течения в трубе. Наибольший рост наблюдается для неосесимметричных возмущений с азимутальными волновыми числами  $m = 1$ . Осесимметричные возмущения ( $m = 0$ ) демонстрируют значительно меньший переходный рост. Структура оптимальных возмущений соответствует продольным вихревым полосам, ориентированным вдоль оси струи. Хименес-Гонсалес и Бранчер [36, 37] провели детальный временной немодальный анализ параллельных круглых струй. В работе [36] исследована зависимость оптимального роста от продольного  $\alpha$  и азимутального  $m$  волновых чисел для профилей скорости с различным отношением радиуса струи к толщине сдвигового слоя. Для всех  $m$  максимальный рост достигается при  $\alpha \rightarrow 0$  (возмущения, независимые от продольной координаты), что подтверждает универсальность стрик-структуры как оптимального возмущения. В последующей работе [37] авторы учли нестационарность базового течения, моделируя его диффузию, авторы показали, что для  $m \geq 2$  стационарное приближение остаётся приемлемым. Для  $m = 1$  необходимо использовать нестационарный профиль скорости. При этом сохраняется качественная картина: оптимальные возмущения – продольные вихри, эволюционирующие в осевые полосчатые структуры (стрики) скорости. Для  $m = 1$  наблюдается «shift-up» эффект: дипольная структура начальных вихрей индуцирует почти однородное смещение ядра струи в радиальном направлении. В случае  $m = 2$  обнаружен аналог «lift-up» эффекта, с поправкой на цилиндрическую геометрию – система противовращающихся вихрей переносит флюид из более быстрых слоев струи в более медленные и наоборот.

## 2 Устойчивость и переход к турбулентности в пограничных слоях над податливым покрытием.<sup>1</sup>

В данной главе исследуется устойчивость и переход к турбулентности в пограничных слоях над податливыми покрытиями, при наличии градиента давления. Рассматриваемые ниже течения, в случае благоприятного гра-

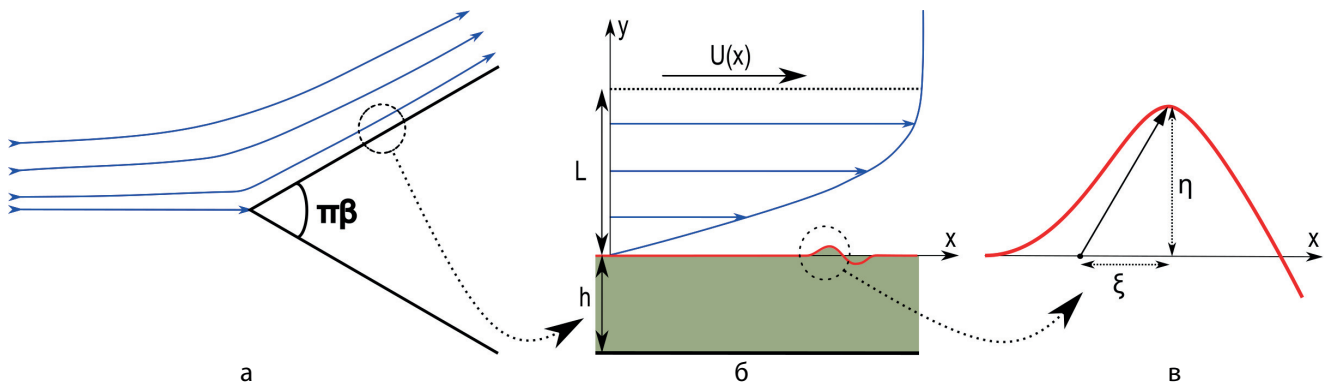


Рис. 2.1: К постановке задачи.

диента давления, могут быть интерпретированы как пограничные слои на бесконечных клиньях с углом раствора  $\pi\beta$  [20]. Схема изучаемого течения представлена на Рис. 2.1. В соответствии с теорией пограничного слоя, внешнее течение (обтекание клина) считается невязким (Рис. 2.1 а). Начиная от кромки клина нарастает пограничный слой. В силу того, что пограничный слой – течений локальное, для исследования устойчивости его можно считать плоскопараллельным (Рис. 2.1 б). Поверхность клина покрыта вязкоупругим покрытием конечной толщины, задачей которого является пассивное изменение характеристик устойчивости системы (Рис. 2.1 в).

### 2.1 Постановка задачи

Ось  $x$  декартовой системы координат направим вдоль поверхности клина, ось  $y$  – перпендикулярно (Рис. 2.1). Начало системы координат совме-

<sup>1</sup>При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [1].

стим с критической точкой потока (остриём клина). После линеаризации, при предположении плоскопараллельности потока, двумерные уравнения Навье-Стокса примут следующий вид [38]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{dU}{dy} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где  $U(y)$  — распределение скорости невозмущенного потока (автомодельное решение Фолкнера-Скэн для пограничного слоя с градиентом давления [20]);  $u, v, p$  — возмущения продольной, поперечной скорости и давления соответственно;  $\nu, \rho_f$  — кинематическая вязкость и плотность жидкости.

Возмущения в податливом покрытии удовлетворяют уравнениям Навье-Лапе [39]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= C_T^2 \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + (C_L^2 - C_T^2) \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= C_T^2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + (C_L^2 - C_T^2) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} \right),\end{aligned}\tag{2.2}$$

где  $C_T$  и  $C_L$  — скорости распространения поперечных и продольных волн соответственно;  $\xi, \eta$  — компоненты вектора смещения возмущения в покрытии. Воспользуемся методом нормальных мод, будем искать решение в виде:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ p \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} (x, y, t) = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \\ \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} (y) \exp(i(\alpha x - \omega t)).$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
i(\alpha U - \omega) \hat{u} + \frac{dU}{dy} \hat{v} + \frac{i\alpha}{\rho_f} \hat{p} - \nu (\hat{u}'' - \alpha^2 \hat{u}) &= 0, \\
i(\alpha U - \omega) \hat{v} + \frac{1}{\rho_f} \hat{p}' - \nu (\hat{v}'' - \alpha^2 \hat{v}) &= 0, \\
i\alpha \hat{u} + \hat{v}' &= 0, \\
\omega^2 \hat{\xi} + C_T^2 (-\alpha^2 \hat{\xi} + \hat{\xi}'') + (C_L^2 - C_T^2) (-\alpha^2 \hat{\xi} + i\alpha \hat{\eta}') &= 0, \\
\omega^2 \hat{\eta} + C_T^2 (-\alpha^2 \hat{\eta} + \hat{\eta}'') + (C_L^2 - C_T^2) (i\alpha \hat{\xi}' + \hat{\eta}'') &= 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Обезразмерим систему (2.3). За характерную скорость примем местную скорость внешнего потока  $V = U_e(x)$ . В качестве характерного размера выберем местную толщину вытеснения пограничного слоя  $L = \delta^*(x)$ , где

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty (U_e(x) - U(y, x)) dy / U_e(x).$$

Характерная плотность — плотность жидкости  $\rho_f$ . Число Рейнольдса определим как  $\text{Re}_{\delta^*}(x) = \frac{U_e(x)\delta^*(x)}{\nu}$ . Тогда  $\tilde{\alpha} = \alpha\delta^*$ ,  $\tilde{\omega} = \omega \frac{\delta^*}{U_e}$ . Далее, знак  $\sim$  над безразмерными величинами опустим. В результате уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}
i(\alpha U - \omega) \hat{u} + \frac{dU}{dy} \hat{v} + i\alpha \hat{p} - \frac{1}{\text{Re}_{\delta^*}} (\hat{u}'' - \alpha^2 \hat{u}) &= 0, \\
i(\alpha U - \omega) \hat{v} + \hat{p}' - \frac{1}{\text{Re}_{\delta^*}} (\hat{v}'' - \alpha^2 \hat{v}) &= 0, \\
i\alpha \hat{u} + \hat{v}' &= 0, \\
\omega^2 \hat{\xi} + C_T^2 (-\alpha^2 \hat{\xi} + \hat{\xi}'') + (C_L^2 - C_T^2) (-\alpha^2 \hat{\xi} + i\alpha \hat{\eta}') &= 0, \\
\omega^2 \hat{\eta} + C_T^2 (-\alpha^2 \hat{\eta} + \hat{\eta}'') + (C_L^2 - C_T^2) (i\alpha \hat{\xi}' + \hat{\eta}'') &= 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Далее, нам понадобится скорость внешнего потока и толщина покрытия как функции числа Рейнольдса. При исследовании устойчивости пограничных слоев число Рейнольдса можно интерпретировать как координату вдоль потока, таким образом, параметрическая зависимость от продольной координаты  $x$  становится параметрической зависимостью от числа

Рейнольдса  $\text{Re}_{\delta^*}$ . Для семейства пограничных слоёв Фолкнера-Скэн:

$$U_e(x) = Qx^m, \quad \text{Re}_{\delta^*}(x) = \frac{U_e(x)\delta^*(x)}{\nu}, \quad \delta^*(x) = A(m) \sqrt{\frac{2\nu}{(m+1)Q}} x^{\frac{1-m}{2}}, \quad (2.5)$$

где  $A(m)$  – безразмерная (в переменных Блазиуса) толщина вытеснения пограничного слоя, а величина  $Q$  – отношение скорости внешнего потока к расстоянию до критической точки в степени  $m$ . Заметим, что тогда зависимость числа Рейнольдса от координаты  $x$  следующая:

$$\text{Re}_{\delta^*}(x) = A(m) \sqrt{\frac{2Q}{(m+1)\nu}} x^{\frac{1+m}{2}}. \quad (2.6)$$

Отсюда получаем:

$$U_e(\text{Re}_{\delta^*}) = \nu^{\frac{m}{m+1}} Q^{\frac{1}{m+1}} \left( \frac{(m+1)\text{Re}_{\delta^*}^2}{2A(m)^2} \right)^{\frac{m}{1+m}}.$$

Выражение  $\nu^{\frac{m}{m+1}} Q^{\frac{1}{m+1}} \left( \frac{m+1}{2A(m)^2} \right)^{\frac{m}{1+m}}$  имеет размерность скорости, обозначим его  $U_e^\dagger$ . Далее, вместо  $m$  будем использовать параметр Хартри  $\beta = \frac{2m}{m+1}$ , тогда получаем следующую формулу для скорости:

$$U_e(\text{Re}_{\delta^*}) = U_e^\dagger \text{Re}_{\delta^*}^\beta.$$

Чтобы охарактеризовать толщину покрытия, введем следующий безразмерный параметр  $\text{Re}_c = \frac{U_e^\dagger h}{\nu}$ , где  $h$  – толщина покрытия, тогда для безразмерной толщины покрытия  $\tilde{h}$  получаем следующее выражение:

$$\tilde{h}(\text{Re}_{\delta^*}) = \frac{h}{\delta^*} = \frac{\text{Re}_c}{\text{Re}_{\delta^*}^{1-\beta}}.$$

В теории устойчивости пограничного слоя вводят частотный параметр  $F$  [?] так, что  $F \times \text{Re}_{\delta^*} = \omega$ . Тогда:

$$F(\text{Re}_{\delta^*}) = \frac{2\pi f\nu}{U_e^2} = \frac{2\pi f\nu}{U_e^{\dagger 2}} \text{Re}_{\delta^*}^{-2\beta} = F^\dagger \text{Re}_{\delta^*}^{-2\beta},$$

где  $f$  – физическая частота,  $F^\dagger$  – угловая частота возмущения, обезразмеренная без использования величин, зависящих от  $x$ .

Рассмотрим для системы (2.4) граничные условия: возмущения в потоке затухают на бесконечности, податливое покрытие приклеено к твёрдой поверхности, на границе покрытие-жидкость ставятся условия прилипания и непрерывности вектора напряжений. Последнее условие используется в линеаризованной форме. Подробный вывод представлен в [10].

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= \hat{v} = 0 && \text{при } y \rightarrow \infty, \\
-i\omega\hat{\xi} &= \hat{u} + \hat{\eta}\frac{dU}{dy}, && -i\omega\hat{\eta} = \hat{v} && \text{при } y = 0, \\
2\rho C_T^2 \left( \hat{\eta}' + \left( \frac{C_L^2}{2C_T^2} - 1 \right) (i\alpha\hat{\xi} + \hat{\eta}') \right) &= \frac{2}{Re_{\delta^*}}\hat{v}' - \hat{p} && \text{при } y = 0, \\
\rho C_T^2 \left( \hat{\xi}' + i\alpha\hat{\eta} \right) &= \frac{1}{Re_{\delta^*}} \left( \hat{u}' + i\alpha\hat{v}' + \frac{d^2U}{dy^2}\hat{\eta} \right) && \text{при } y = 0, \\
\hat{\xi}' &= \hat{\eta}' = 0 && \text{при } y = -h,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где  $\rho = \frac{\rho_c}{\rho_f}$  – безразмерная плотность покрытия,  $C_T$  и  $C_L$  – безразмерные скорости распространения волн в покрытии.

Таким образом, для решения задачи об устойчивости пограничного слоя Фолкнера-Скэн над податливым покрытием необходимо задать следующие параметры:  $\beta$  – параметр Хартри;  $U_e^\dagger$  – скорость внешнего потока при  $Re_{\delta^*} = 1$ ;  $C_T, C_L$  – скорости распространения волн в податливом покрытии;  $\rho$  – безразмерная плотность покрытия. Затем, варьируя в определённых пределах  $F^\dagger$  и  $Re_{\delta^*}$ , можно построить нейтральную кривую и изолинии инкремента нарастания волн.

## 2.2 Численный метод

Система уравнений (2.4) с граничными условиями (2.7) составляет дифференциальную задачу на собственные значения. Для её решения воспользуемся методом коллокаций [40]. Физическую область потока оборвем для некоторого  $y_{max}$  и отобразим, используя преобразование  $y = L\frac{1+\zeta}{b-\zeta}$ , где  $b = 1 + 2L/y_{max}$ , на расчётную область  $[-1, 1]$ . Физическую область покрытия отобразим на  $[-1, 1]$ , используя линейное преобразование  $y = \frac{h}{2}(\zeta - 1)$ .

Затем, в соответствии с методом коллокаций, заменим оператор дифференцирования  $'$  на матрицу дифференцирования  $D_N$  [40]:

$$(D_N)_{jl} = \begin{cases} \frac{\bar{c}_j (-1)^{j+l}}{\bar{c}_l x_j - x_l}, & j \neq l, \\ -\frac{2(1-x_j^2)}{2(N-1)^2+1}, & 1 \leq j = l \leq N-2, \\ \frac{6}{2(N-1)^2+1}, & j = l = 0, \\ -\frac{6}{2(N-1)^2+1}, & j = l = N-1, \end{cases}$$

где  $x_j = \cos \frac{\pi j}{N-1}$ ,  $\bar{c}_j = 2$  для  $j = 0, N-1$  и  $\bar{c}_j = 1$  иначе. Функции-параметры  $U$ ,  $\frac{dU}{dy}$  и неизвестные функции  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{\xi}, \hat{\eta}$  заменим на векторы их значений на сетке. Матрицу дифференцирования для области потока обозначим  $D_f$ , а для области покрытия –  $D_c$ , они получаются по правилу дифференцирования сложной функции из  $D_N$ .

В результате дискретизации получаем следующую задачу на собственные значения:

$$\begin{pmatrix} L_f & O \\ O & L_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_f \\ \hat{q}_c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} G_f & O \\ O & G_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_f \\ \hat{q}_c \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

где  $L_f$  и  $G_f$  – матрицы, соответствующие дискретным линеаризованным уравнениям Навье-Стокса,  $L_c$  и  $G_c$  – дискретным уравнениям для покрытия. Порядок уравнений (2.1) и (2.2) был понижен по  $\alpha$  введением дополнительных переменных  $\hat{f} = \alpha \hat{v}$ ,  $\hat{g} = \alpha \hat{\xi}$ ,  $\hat{h} = \alpha \hat{\eta}$ . Выражения для

$L_f, L_c, G_f, G_c$ :

$$\begin{aligned}
L_f &= \begin{pmatrix} -i\omega I - \frac{1}{\text{Re}} D_f^2 & \text{diag}(U') & O & O \\ O & -i\omega I - \frac{1}{\text{Re}} D_f^2 & D_f & O \\ O & D_f & O & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix}, & L_c &= \begin{pmatrix} \omega^2 I + C_T^2 D_c^2 & O & O & O \\ O & \omega^2 I + C_L^2 D_c^2 & O & O \\ O & O & I & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix}, \\
G_f &= \begin{pmatrix} -i \text{diag}(U) & -\frac{i}{\text{Re}} D_f & -iI & O \\ O & -i \text{diag}(U) & O & -\frac{i}{\text{Re}} I \\ -iI & O & O & O \\ O & I & O & O \end{pmatrix}, & G_c &= \begin{pmatrix} O & iC_d^2 D_c & C_L^2 I & O \\ iC_d^2 D_c & O & O & C_T^2 I \\ I & O & O & O \\ O & I & O & O \end{pmatrix}, \\
\hat{q}_f &= \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \\ \hat{f} \end{pmatrix}, & \hat{q}_c &= \begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \\ \hat{g} \\ \hat{h} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

каждый блок здесь – матрица  $N \times N$ ,  $O$  и  $I$  – нулевая и единичная матрицы,  $\text{diag}(U)$  и  $\text{diag}(U')$  – диагональные матрицы, порожденные векторами  $U$  и  $U'$  значений скорости основного потока и ее производной на сетке. Для удобства введено обозначение  $C_d^2 = (C_T^2 - C_L^2)$ . Порядок узлов сетки в покрытии и в потоке следующий: первая точка сетки в покрытии ( $\hat{\xi}_0$  и  $\hat{\eta}_0$ ) соответствует границе жидкость–покрытие  $y = 0$ , последняя точка сетки в покрытии ( $\hat{\xi}_{N-1}$  и  $\hat{\eta}_{N-1}$ ) соответствует границе покрытие–твёрдое основание  $y = -h$ , первая точка в потоке ( $\hat{u}_0$  и  $\hat{v}_0$ ) соответствует  $y = +\infty$ , последняя точка в потоке ( $\hat{u}_{N-1}$  и  $\hat{v}_{N-1}$ ) соответствует границе жидкость–покрытие  $y = 0$ .

Для удовлетворения однородных граничных условий (2.7) удалим из матриц соответствующие строки и столбцы с номерами:

$$\begin{array}{cccc}
0, & N, & 5N - 1, & 6N - 1. \\
u_0 & v_0 & \xi_{N-1} & \eta_{N-1}
\end{array}$$

Условия на границе раздела сред перепишем в дискретном виде:

$$\begin{aligned}
-i\omega \hat{\xi}_0 &= \hat{u}_{N-1} + \hat{\eta}_0 U'_{N-1}, & -i\omega \hat{\eta}_0 &= \hat{v}_{N-1}, \\
2\rho C_T^2 \left( \hat{\eta}'_0 + \left( \frac{C_L^2}{2C_T^2} - 1 \right) (i\alpha \hat{\xi}_0 + \hat{\eta}'_0) \right) &= \frac{2}{\text{Re}_{\delta^*}} \hat{v}'_{N-1} - \hat{p}_{N-1}, & (2.9) \\
\rho C_T^2 \left( \hat{\xi}'_0 + i\alpha \hat{\eta}_0 \right) &= \frac{1}{\text{Re}_{\delta^*}} (\hat{u}'_{N-1} + i\alpha \hat{v}'_{N-1} + U''_{N-1} \hat{\eta}_0).
\end{aligned}$$

Для применения граничных условий (2.9) заменим соответствующие строки в итоговых матрицах системы (2.8).

С целью вычисления функций-параметров  $U$ ,  $\frac{dU}{dy}$ , входящих в задачу (2.8), решается уравнение Фолкнера-Скэн, сводящиеся к системе:

$$\frac{d}{d\eta} \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \beta (\Psi_1^2 - 1) - \Psi_0 \Psi_2 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

здесь  $\eta$  — автомодельная переменная Блазиуса, связанная с безразмерной переменной  $\frac{y}{\delta^*}$  как  $A(\beta)\eta = \frac{y}{\delta^*}$ , где  $A(\beta) = \int_0^\infty (1 - \Psi_1) d\eta$ . После нахождения  $\Psi$  можно вычислить  $\frac{U}{U_e} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$  и  $\frac{dU}{dy} = U_e \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$ .

Для решения (2.10) используется стандартная функция `scipy.integrate.solve_bvp` библиотеки SciPy. Для решений полученной алгебраической задачи на собственные значения используется стандартный алгоритм `scipy.linalg.eigvals` библиотеки SciPy. Далее для краткости будем опускать индекс  $\delta^*$  у числа Рейнольдса.

## 2.3 Предсказание перехода к турбулентности при помощи $e^N$ -метода

Рассмотрим линейное развитие растущих волн Толлмина-Шлихтинга в потоке. В силу линейности, волны различных частот развиваются независимо. Зафиксируем частоту возмущения  $f$ , тогда для данной координаты вдоль поверхности тела  $x_1$  логарифм отношения амплитуды возмущения в точке  $x_1$  к начальной амплитуде равен:  $\ln \frac{A_1}{A_0}(f) = - \int_{x_F}^{x_1} \alpha_i^d(x) dx$ , где  $x_F$  — координата нижней ветви нейтральной кривой для данной частоты возмущения,  $\alpha_i^d$  — мнимая часть размерного волнового числа, соответствующего волне Толлмина-Шлихтинга.

Для того чтобы охарактеризовать поведение возмущений «в целом», строится огибающая кривых нарастания для волн всевозможных частот:  $N(x_1) = \sup_f \ln \frac{A_1}{A_0}(f)$  — так называемый «N-фактор». В соответствии с  $e^N$  методом можно предсказать координаты начала и конца ламинарно-турбулентного перехода, воспользовавшись следующими эмпирическими

зависимостями, полученными Ван Ингеном [41]:

$$N_{t1} = 2.13 - 6.18 \log_{10} Tu,$$

$$N_{t2} = 5 - 6.18 \log_{10} Tu,$$

где  $Tu$  – уровень внешней турбулентности в %,  $N_{t1}$  – N-фактор начала перехода,  $N_{t2}$  – N-фактор конца перехода.

Представим формулу логарифма отношения амплитуд возмущения, используя переменные, в которых решается задача на собственные значения (2.8):

$$\begin{aligned} N(\text{Re}, \text{Re}_F) &= - \int_{x_F}^x \alpha_i^d dx = - \int_{x_F}^x \frac{\alpha_i}{\delta^*(x)} dx = \\ &= - \int_{\text{Re}_F}^{\text{Re}} \frac{\alpha_i}{\frac{\nu}{U_e^\dagger} \text{Re}^{1-\beta}} \frac{\nu}{U_e^\dagger} \frac{(2-\beta) \text{Re}^{1-\beta}}{A(\beta)^2 (2-\beta)} d\text{Re} = - \frac{1}{A(\beta)^2} \int_{\text{Re}_F}^{\text{Re}} \alpha_i d\text{Re}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, решая задачи на собственные значения для области параметров на плоскости  $(\text{Re}, F^\dagger)$ , можно вычислить значение интеграла в (2.11) и построить кривые нарастания для различных частот. Графически определяя огибающую для этого семейства кривых, получим значения  $\text{Re}_{t1}$  и  $\text{Re}_{t2}$  чисел Рейнольдса начала ламинарно-турбулентного перехода и конца, соответственно. В дальнейших вычислениях значение параметра  $Tu$  принято равным 0.15%, поскольку для этого значения турбулентности внешнего потока предсказания  $e^N$  метода хорошо согласуются с экспериментальными данными [41].

## 2.4 Свойства покрытия

При гармонической зависимости напряжений или деформаций от времени, перемещения в вязкоупругом материале описываются уравнениями Ламе с комплексными коэффициентами [42]. Для более детального представления свойств покрытия, используются экспериментальные зависимости модуля Юнга  $E$  и коэффициента потерь  $\mu$  от частоты. Используя эти экспериментальные зависимости, вычисляется комплексный модуль Юнга  $E^* = E(1 - i\mu)$ . Коэффициент Пуассона принят равным 0.47, поскольку

рассматриваемые монолитные податливые покрытия слабосжимаемы. Используя указанные величины, можно вычислить входящие в уравнения значения скоростей распространения волн в покрытии. В качестве материала покрытия выбрана кремнийорганическая резина PENTA-710, физические свойства которой представлены в таблице 1, где  $f$  – физическая частота в Гц [12].

PENTA-710	
Свойство	Значение
$E^*$	$(0.1004 \log_{10}(f) + 0.9394) (1 - i(0.0016 \log_{10}(f) + 0.0511))$
$\sigma$	0.47
$\rho_c$	1120

Таблица 1: Свойства податливого покрытия, используемого в расчётах. Модуль Юнга в МПа, плотность в кг/м<sup>3</sup>.

## 2.5 Валидация метода

Для того чтобы удостовериться в правильности расчета указанными выше методами, было проведено несколько расчетов для задач с известными решениями.

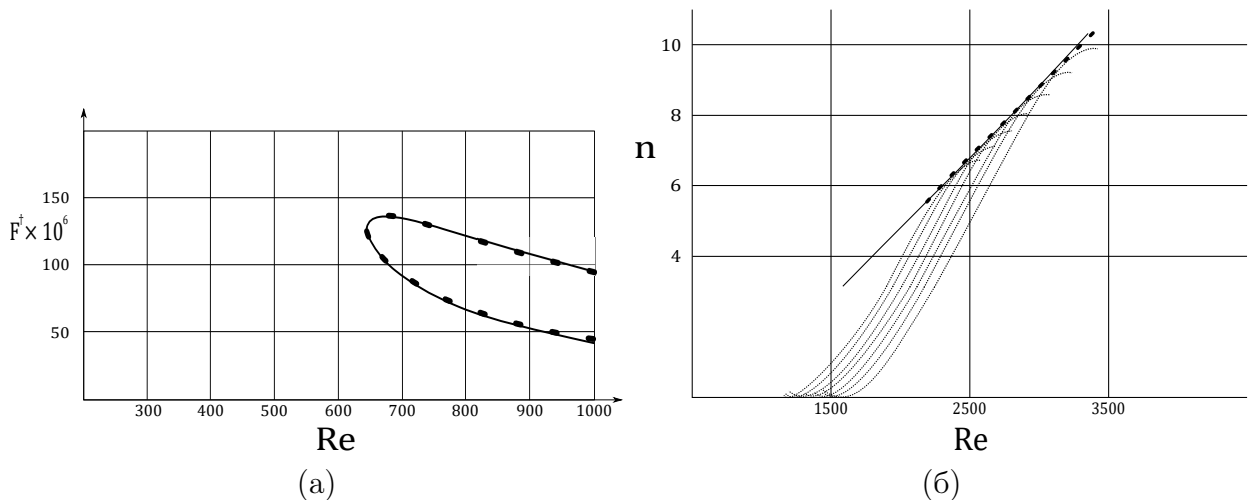


Рис. 2.2: К валидации метода.

На рисунке 2.2а представлено сравнение нейтральных кривых пограничного слоя Блазиуса над податливым покрытием, исследованным в работе [10], свойства которого представлены в таблице 2.

Свойство	Значение
$E^*$	$(0.287 \log_{10}(f) - 0.036)(1 - 0.1i)$
$\sigma$	0.48
$\rho_c$	1100

Таблица 2: Свойства податливого покрытия, используемого для валидации. Модуль Юнга в МПа, плотность в кг/м<sup>3</sup>.

На рисунке 2.2б показано сравнение огибающих кривых нарастания для пограничного слоя Блазиуса на твердой пластине. Сплошная и пунктирная линии соответствуют огибающим, полученным в [10] и в настоящей работе соответственно, тонкие пунктирные линии иллюстрируют индивидуальные кривые нарастания волн. Таким образом, можно заключить, что реализованный численный алгоритм позволяет строить нейтральные кривые и огибающие кривых нарастания с достаточной точностью.

## 2.6 Результаты расчетов

Были построены нейтральные кривые и линии уровня инкремента нарастания для различных значений  $\beta$ , различных толщин покрытия и различных скоростей набегающего потока. Число Рейнольдса покрытия  $Re_c$  выбиралось таким образом, чтобы для данных значений  $\nu$  и  $U_e^\dagger$  представлять две размерные толщины покрытия – 3 мм и 9 мм соответственно. Значения  $U_e^\dagger$  выбирались таким образом, чтобы скорость внешнего потока, при числе Рейнольдса равном критическому для твёрдой стенки, составляла заданные 10 и 15 м/с соответственно.

Значение кинематической вязкости  $\nu$  принято равным  $1.3 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Для удобства параметры расчетов объединены в таблицу 3.

По построенным в результате расчётов нейтральным кривым и линиям уровня инкремента нарастания волн видно, что для пограничных слоёв с благоприятным градиентом давления (рисунок 2.3) увеличение толщины покрытия и скорости набегающего потока снижает интенсивность нарастания возмущений в пограничном слое, затягивая ламинарно-турбулентный переход.

Для каждого из рассчитанных течений существовала некоторая толщи-

Рис. 2.3	$\beta$	$U_e^\dagger$ [м/с]	$Re_c$	$U_e (Re_{crit})$ [м/с]	h [мм]
a	0.2	3.06	7060 21180	15	3 9
b	0.2	2.04	4700 14100	10	3 9
c	0.1	7.28	16800 50400	15	3 9
d	0.1	4.85	11200 33600	10	3 9

Рис. 2.4	$\beta$	$U_e^\dagger$ [м/с]	$Re_c$	$U_e (Re_{crit})$ [м/с]	h [мм]
a	-0.05	20.0	46170 138510	15	3 9
b	-0.05	13.34	30780 92340	10	3 9
c	-0.1	25.47	58770 176310	15	3 9
d	-0.1	16.98	39180 117540	10	3 9

Таблица 3: Параметры, используемые в расчетах

на, начиная с которой, дальнейшее увеличение толщины покрытия не изменяло нейтральные кривые. Это происходит, потому что растущая волна в покрытии небольшой толщины отражается от нижней абсолютно твёрдой стенки и возвращается в поток. Для покрытия достаточно большой толщины растущая волна полностью затухает, не доходя до нижней стенки.

Объяснение влияния скорости набегающего потока состоит в следующем. Рассмотрим граничные условия (2.7). Пренебрегая слагаемыми при  $\frac{1}{Re}$ , после несложных преобразований получаем соотношение:

$$\hat{\xi}_0'' + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \alpha^2 \hat{\xi}_0 = \frac{i\alpha}{\rho C_L^2} \hat{p}_{N-1},$$

которое допускает следующую интерпретацию: слагаемое  $\frac{1}{\rho C_L^2}$ , или в размерном виде  $\frac{\rho_f U_e(x)^2}{\rho_c \tilde{C}_L^2}$ , где  $\tilde{C}_L$  – размерная скорость распространения продольных волн, определяет амплитуду возмущений, передаваемых в покры-

$\beta$	$\Delta x$ [%]
0.0	32
0.1	37
0.2	41

Таблица 4: Изменение продольной координаты конца ламинарно-турбулентного перехода при использовании податливых покрытий.

тие из потока. Увеличивая это слагаемое за счет увеличения скорости набегающего потока, получаем большие амплитуды возмущений в покрытии. Таким образом, взаимодействие покрытия с потоком увеличивается.

Для течений с неблагоприятным градиентом давления, при заданных параметрах (таблица 3, рисунок 2.4), в пределах расчетной области неустойчивая мода затухает с глубиной уже в покрытии толщиной 3мм. Это происходит из-за того, что рост возмущений в таких течениях происходит при числах Рейнольдса меньших, чем для пограничных слоёв с благоприятным градиентом давления, что приводит к росту безразмерной толщины покрытия. Поэтому на рисунке изображены нейтральные кривые и линии уровня инкремента нарастания только для этого покрытия.

Несмотря на то, что во всех представленных течениях изменение нейтральной кривой и критического числа Рейнольдса незначительны, линии уровня мнимой части волнового числа неустойчивой моды смещаются в область больших чисел Рейнольдса, что обеспечивает затягивание ламинарно-турбулентного перехода.

Поскольку для исследования было выбрано достаточно твёрдое покрытие, то изменение критического числа Рейнольдса для всех исследованных течений незначительно – 5-7 % (рисунок 2.5а). Тем не менее, изменение чисел Рейнольдса перехода значительно для большей скорости набегающего потока ( $U_e(\text{Re}_{crit}) = 15$  м/с) и больших значений  $\beta$ . В случае  $\beta = 0.1$ , увеличение числа Рейнольдса конца перехода составляет 18 % (рисунок 2.5б). Учитывая нелинейную зависимость продольной координаты от числа Рейнольдса  $\text{Re}_{\delta^*} \sim x^{\frac{1}{2-\beta}}$ , такое изменение приводит к увеличению координаты перехода на  $\approx 37$  %. В случае  $\beta = 0.2$ , продольная координата конца перехода увеличивается 41 % соответственно.

Для сравнения, в пограничном слое Блазиуса ( $\beta = 0$ ) получаем 15 и

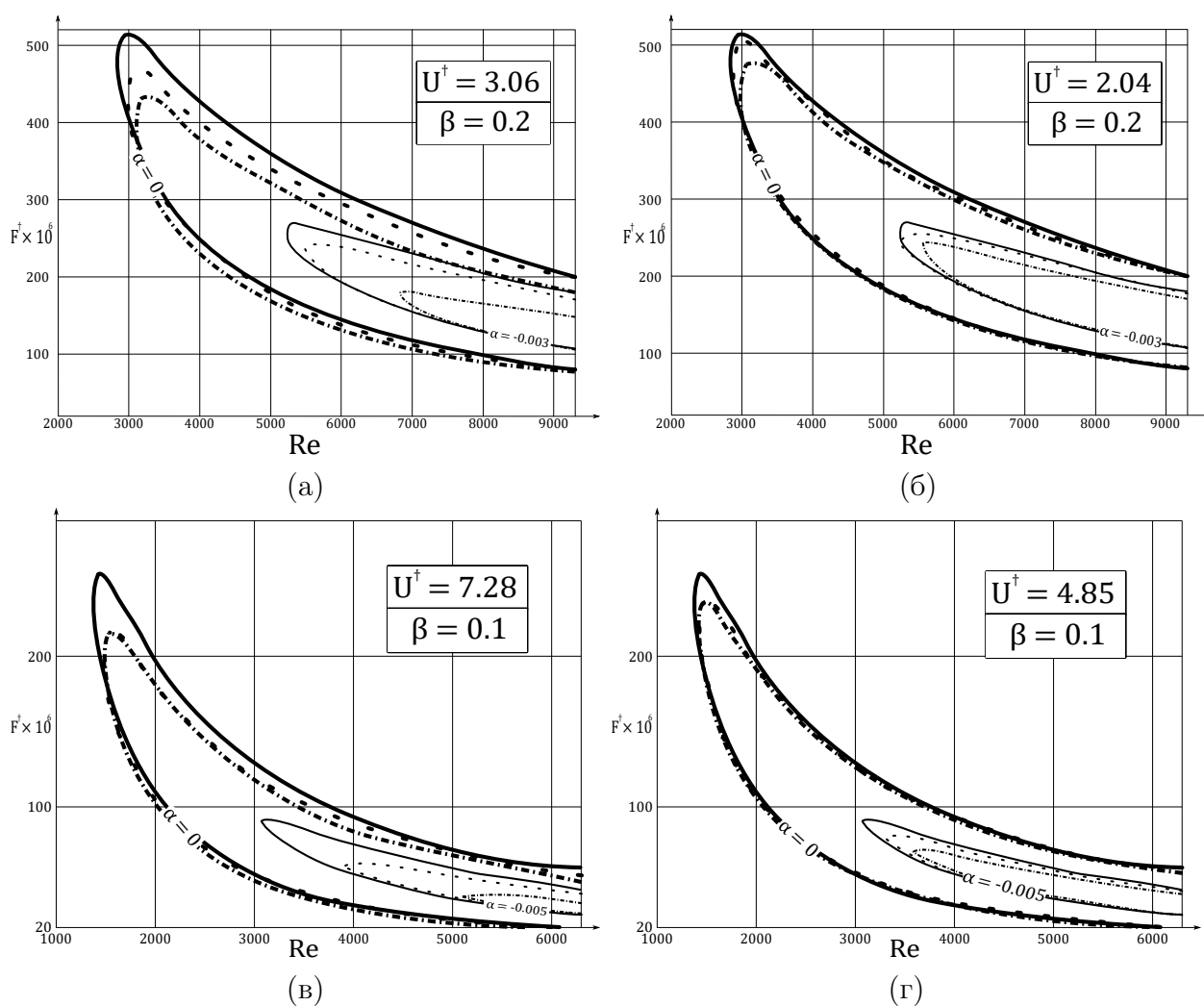


Рис. 2.3: Нейтральные кривые в случае благоприятного градиента давления. Сплошная линия — твёрдая стенка, пунктирная линия — податливое покрытие, штрихпунктирная линия — податливое покрытие увеличенной толщины.

32 % соответственно. С уменьшением  $\beta$  эффект податливого покрытия на затягивание ламинарно-турбулентного перехода снижается.

Для перспективных приложений податливых покрытий, однако, характерны течения с благоприятным градиентом давления, как например, в носовой части судна, где трение максимально.

## 2.7 Выводы по второй главе

В работе была исследована задача об устойчивости параметрического семейства автомодельных пограничных слоёв Фолкнера-Скэн над монолитным податливым покрытием. Показано, что для течений с благоприят-

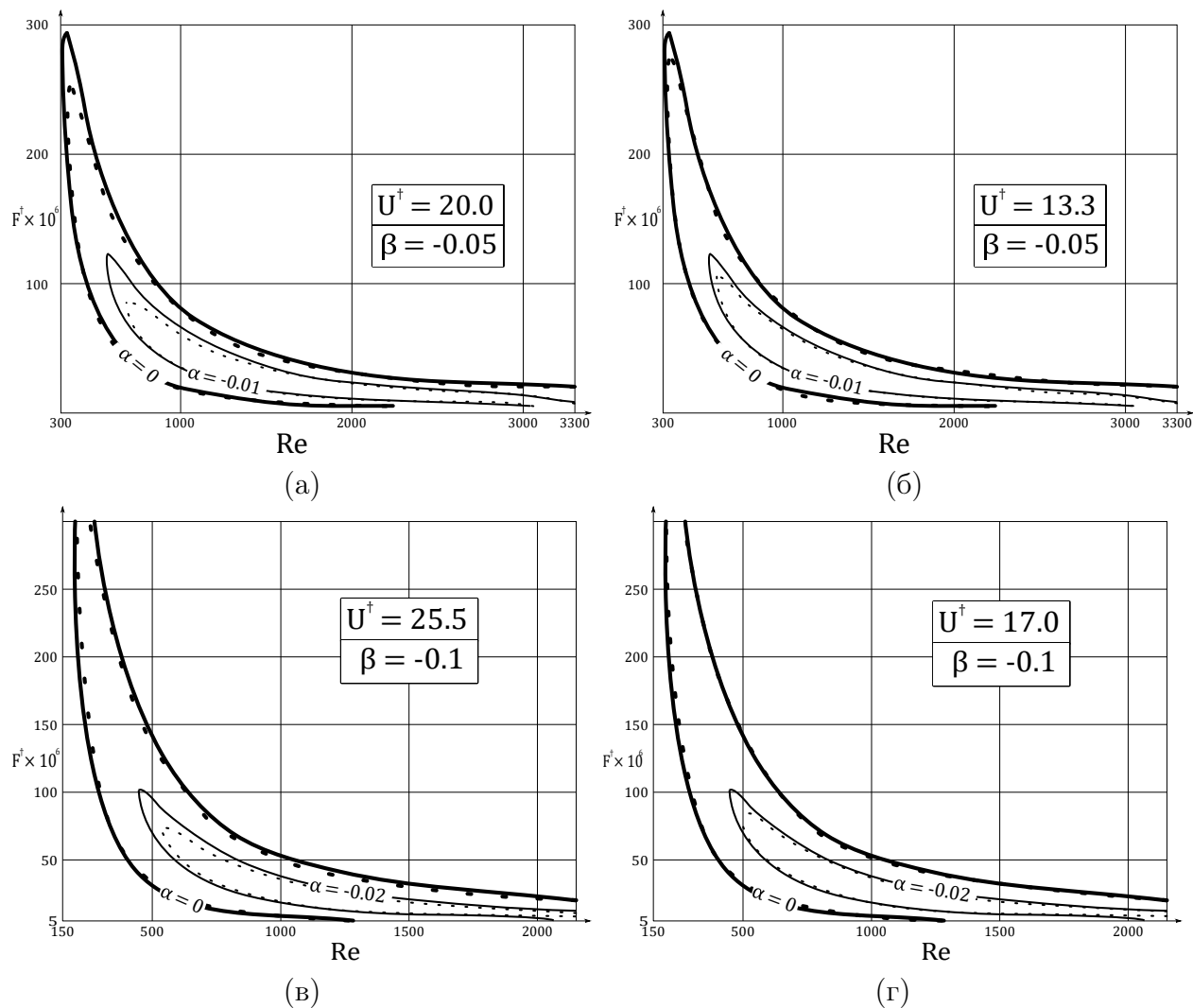


Рис. 2.4: Нейтральные кривые в случае неблагоприятного градиента давления. Сплошная линия – твёрдая стенка, пунктирная линия – податливое покрытие.

ным градиентом давления способность покрытия затягивать ламинарно-турбулентный переход увеличивается, по сравнению с пограничными слоями без градиента давления и с неблагоприятным градиентом. Приведены результаты смещения области ламинарно-турбулентного перехода вниз по потоку. В силу жесткости используемого для расчетов покрытия, изменение критического числа Рейнольдса не так значительно, как в работах [10, 11], однако расчеты показывают более существенное влияние покрытия на ламинарно-турбулентный переход, чем на изменение критического числа Рейнольдса. Так, для течений с благоприятным градиентом давления, при  $\beta = 0.1, 0.2$ , рассматриваемое покрытие увеличивает координату конца ламинарно-турбулентного перехода на 37 и 41 %, соответ-

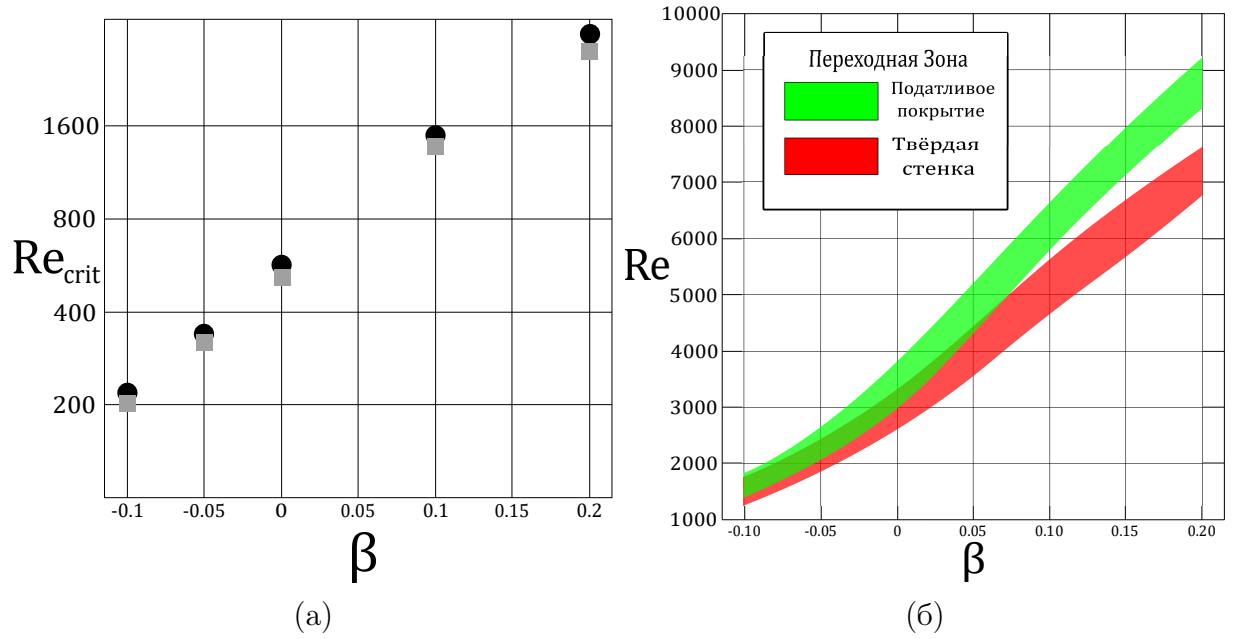


Рис. 2.5: Изменение критического числа Рейнольдса (твёрдая стенка – квадраты, податливая – круги) и переходной зоны.  $U_e(Re_{crit}) = 15$  м/с,  $h = 3$  мм.

ственно, по сравнению с увеличением на 32 % для пограничного слоя Блазиуса ( $\beta = 0$ ).

## 3 Оптимальные возмущения в круглой затопленной струе<sup>1</sup>

### 3.1 Постановка задачи и метод решения

В настоящей главе исследуется развитие малых возмущений в затопленной струе вязкой несжимаемой жидкости (Рис.3.1). Основное течение предполагается ламинарным, в таком случае расширением струи можно пренебречь. Здесь и далее струи, расширением которых можно пренебречь, будут называться круглыми. В соответствии с этим предположением, течение локально можно считать плоскопараллельным. Для описанного струйного

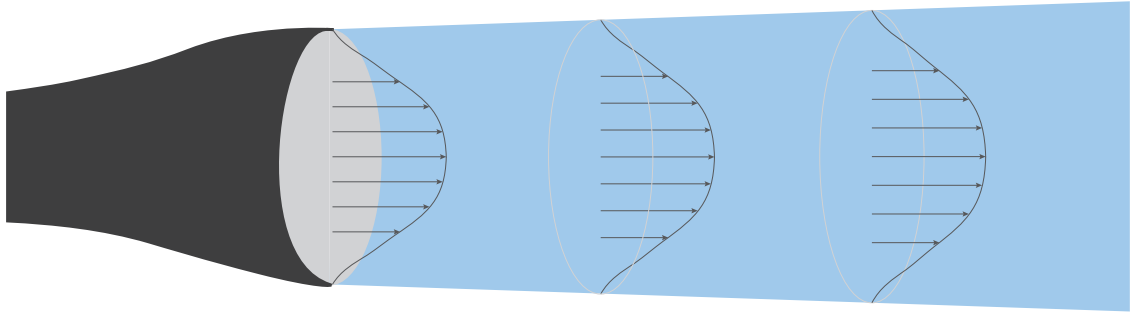


Рис. 3.1: Затопленная ламинарная струя вязкой несжимаемой жидкости.

течения будут исследованы малые возмущения особого вида — достигающие максимума значения кинетической энергии в фиксированной точке вниз по течению.

### Уравнения движения

Несжимаемая затопленная струя в цилиндрической системе координат, с осью  $z$ , направленной вдоль течения, описывается уравнениями Навье-Стокса для несжимаемой жидкости [43]:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [2].

где  $\mathbf{u}(r, \theta, z, t)$  и  $p(r, \theta, z, t)$  — безразмерные поля скорости и давления, и  $\text{Re} = UL/\nu$  — число Рейнольдса, построенное по максимальной скорости струи  $U$ , характерной ширине струи  $L$  и кинематической вязкости жидкости  $\nu$ .

Чтобы вывести уравнения, описывающие эволюцию бесконечно малых возмущений, подставим поля скорости и давления в виде  $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{U} + \mathbf{u}', P + p')$ , где  $(\mathbf{U}, P)$  — основное течение, а  $(\mathbf{u}', p')$  — возмущение (т.е.  $\|\mathbf{u}'\|/\|\mathbf{U}\| \ll 1$ ), в уравнения (3.1). Линеаризуя уравнения, получим:

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_t + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}', \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.2) дополняется следующими граничными условиями:

$$\|\mathbf{u}'\| \rightarrow 0, \quad |p'| < \infty, \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

При заданном начальном возмущении  $\mathbf{u}'(0), p'(0)$  система (3.2) с граничными условиями (3.3) описывает эволюцию возмущения.

### Основное течение

Основное струйное течение предполагается одномерным и осесимметричным, его развитие вниз по течению не учитывается. Профиль скорости и давление в цилиндрических координатах  $(r, \theta, z)$  выражаются как:

$$\mathbf{U} = U(r) \mathbf{e}_z, \quad P = \text{const}. \quad (3.4)$$

Рассматриваются несколько профилей основной скорости из параметрического семейства, предложенного в [44]. Упомянутая выше характерная ширина струи  $L$  определяется как радиальная координата  $L$  такая, что  $U(L) = 0.5$ .

Параметрическое семейство профилей имеет вид:

$$U(r) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{1}{4\delta} \left( \frac{1}{r} - r \right) \right) \right). \quad (3.5)$$

где параметр, характеризующий профили скорости, — это толщина потери импульса  $\delta$ , определяемая как:

$$\delta = \int_0^{\infty} U(1 - U) dr. \quad (3.6)$$

Эти профили скорости основного течения могут быть интерпретированы с использованием эмпирического соотношения для пространственно развивающихся струй [44], в обозначениях настоящей статьи:

$$\delta = 0.06 \frac{z}{D} + 0.04, \quad (3.7)$$

где  $D$  — диаметр сопла,  $z$  — координата вниз по течению. Таким образом, увеличение  $\delta$  приводит к тому, что профиль струи становится более развитым.

Таким образом, для дальнейших вычислений используются различные профили скорости основного течения, соответствующие разным значениям  $\delta$ . Профили с малыми значениями  $\delta$  представляют струйное течение вблизи среза сопла, тогда как профили с большими значениями  $\delta$  представляют эволюцию струи вниз по течению, как можно видеть на Рис. 3.2.

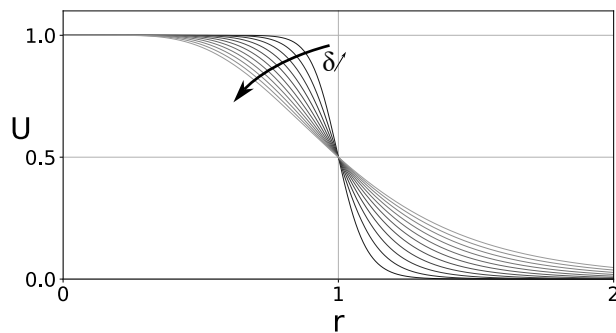


Рис. 3.2: Профили скорости (3.5) при изменении  $\delta$  от 0.05 до 0.25.

## Модальный анализ

Следуя [45], подставим возмущения  $(\mathbf{u}', p') = (u', v', w', p')$  в следующем виде в (3.2):

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{pmatrix} (r, \theta, z, t) = e^{i(\alpha z + m\theta - \omega t)} \begin{pmatrix} iF \\ G \\ H \\ \Pi \end{pmatrix} (r), \quad (3.8)$$

где  $\omega$  — безразмерная частота,  $\alpha$  — безразмерное осевое волновое число и  $m \in \mathbb{Z}$  — азимутальное волновое число.

Далее рассматривается задача пространственной устойчивости, где  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . После подстановки (3.8) в (3.2) получаем следующую задачу на собственные значения:

$$\mathcal{A}_S \tilde{\mathbf{q}} = \alpha \mathcal{B}_S \tilde{\mathbf{q}}, \quad (3.9)$$

где  $\tilde{\mathbf{q}} = (F, G, H, \Pi, \alpha F, \alpha G, \alpha H)$  — расширенный вектор состояния, который используется для сведения задачи к линейной относительно  $\alpha$ . Операторы  $\mathcal{A}_S$  и  $\mathcal{B}_S$  вместе с граничными условиями:

$$\mathcal{A}_S = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & \frac{m}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta & -\frac{2m}{r^2} & 0 & i \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2m}{r^2} & \Delta & 0 & -\frac{i \operatorname{Re} m}{r} & 0 & 0 & 0 \\ -i \operatorname{Re} \frac{\partial U}{\partial r} & 0 & \Delta_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{B}_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i \operatorname{Re} U & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i \operatorname{Re} U & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \operatorname{Re} U & i \operatorname{Re} & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + i \operatorname{Re} \omega - \frac{m^2 + 1}{r^2}, \\ \Delta_z &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + i \operatorname{Re} \omega - \frac{m^2}{r^2}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Граничные условия для приведенных выше дифференциальных уравнений: при  $r = \infty$ :

$$F = G = H = P = 0.$$

при  $r = 0$ :

$$\begin{aligned}\text{если } m = 0 : & \quad \begin{cases} F = G = 0, \\ |H| < \infty, \\ |P| < \infty. \end{cases} \\ \text{если } |m| = 1 : & \quad \begin{cases} H = P = 0, \\ F + G = 0, \\ 2 \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial r} = 0. \end{cases} \\ \text{если } |m| \geq 2 : & \quad F = G = H = P = 0.\end{aligned}$$

Решение задачи на собственные значения (3.9) — это набор собственных значений и собственных векторов как из дискретного, так и из непрерывного спектра, поскольку область не ограничена в радиальном направлении. Эти собственные моды будут в дальнейшем использоваться для построения решения задачи Коши.

Если существует развивающаяся вниз по течению собственная мода с собственным значением  $\alpha$ , такой что  $\Im(\alpha) < 0$ , течение считается неустойчивым. Известно, что струйные течения модально неустойчивы для широкого диапазона параметров из-за невязкого механизма неустойчивости, вызванного точкой перегиба профиля скорости [46].

Случай пространственной устойчивости следует рассматривать с особой осторожностью, потому что задача с начальными значениями для пространственно развивающихся возмущений является некорректно поставленной, как указал Тумин [33]. Возмущения с  $\Im(\alpha) < 0$  могут быть ложно восприняты растущими вниз по течению, тогда как в действительности они представляют возмущения, движущиеся против течения от генератора воз-

мущений. Поэтому в данном анализе учитывается только одна (если есть) собственная мода с  $\Im(\alpha) < 0$ , а именно растущая вниз по течению мода. Произвольное возмущение заданной частоты и азимутального волнового числа трактуется как разложение (3.12), в котором используются только распространяющиеся вниз по течению собственные моды.

Это означает, что различие усиливающихся мод, развивающихся вниз по течению, и затухающих мод, развивающихся вверх по течению (обе имеют  $\Im(\alpha) < 0$  для  $\omega \in \mathbb{R}$ ), является чрезвычайно важным.

Чтобы отличить усиливающиеся моды, развивающиеся вниз по течению, от затухающих мод, развивающихся вверх по течению (обе имеют  $\Im(\alpha) < 0$  для  $\omega \in \mathbb{R}$ ), использовался следующий метод [47]. В силу принципа причинности, при  $\Im(\omega) \rightarrow +\infty$  все моды однозначно разделяются на распространяющиеся вверх по течению ( $\Im(\alpha) < 0$ ) и вниз по течению ( $\Im(\alpha) > 0$ ) волны. Для фиксированного значения  $\Re(\omega)$  увеличивалось значение  $\Im(\omega)$  от нуля до  $\Im(\omega) > 0$  и наблюдалось движение собственных значений на комплексной плоскости  $\alpha$ , как показано на Рис. 3.3.

Увеличивая  $\Im(\omega)$ , выбирались собственные значения  $\alpha$ , которые перемещались в верхнюю полуплоскость, что указывало на распространение вниз по течению. Как и ожидалось, только неустойчивая мода, связанная с точкой перегиба профиля скорости, изначально расположенная при  $\Im(\alpha) < 0$ , смещалась в верхнюю полуплоскость и, таким образом, включалась в разложение (3.12).

### Задача с начальными значениями и оптимальные возмущения

Следуя [48], предполагается, что произвольное возмущение, периодическое по времени, может быть достаточно точно аппроксимировано конечной суммой собственных мод.

Для фиксированных  $\omega$  и  $m$  произвольное возмущение имеет вид:

$$\mathbf{q}^S(r, \theta, z, t) = \sum_{n=1}^N \gamma_n^S \mathbf{q}_n^S(r) e^{i(\alpha_n z + m\theta - \omega t)}, \quad (3.12)$$

где  $\mathbf{q}_n^S$  и  $\alpha_n$  —  $n$ -й собственный вектор и собственное значение (3.9) соответ-

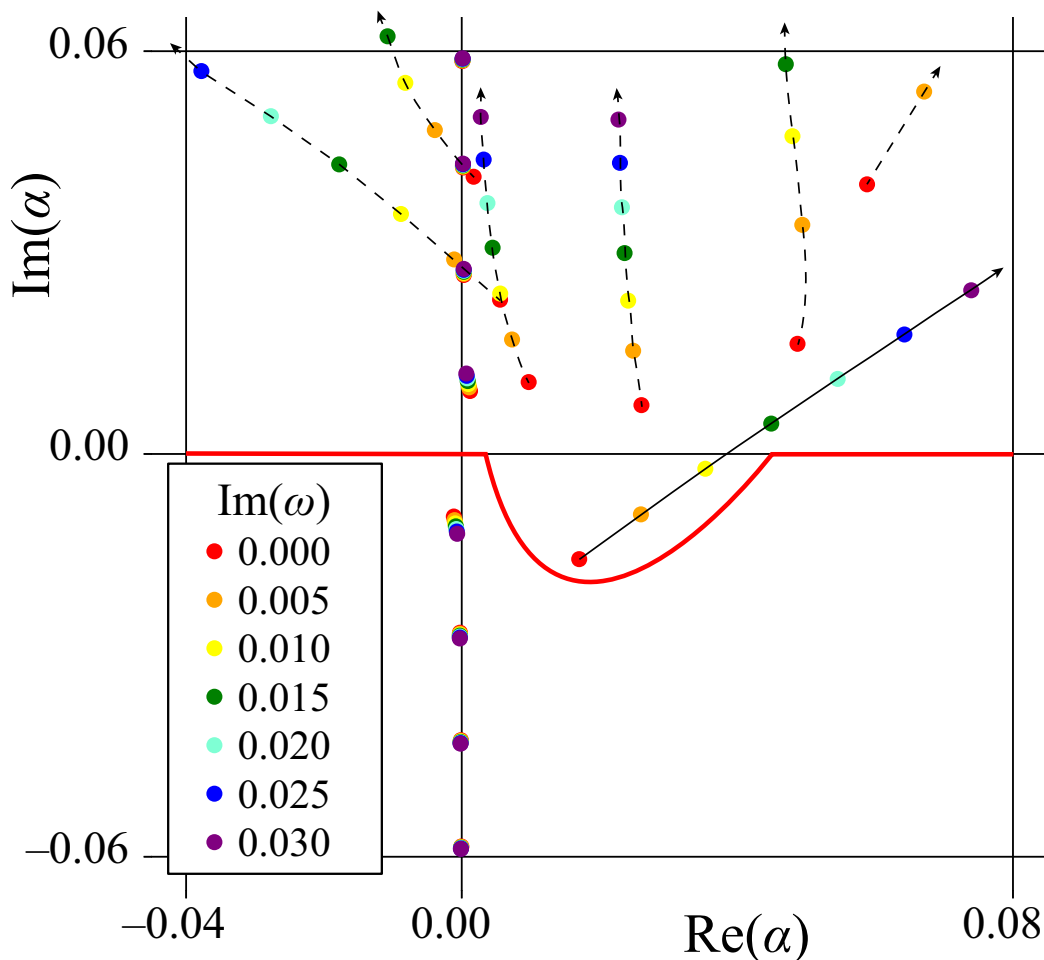


Рис. 3.3: Геометрические места собственных значений на комплексной плоскости  $\alpha$  с увеличением  $\text{Im} \omega$  для  $\text{Re} \omega = 0.01$ ,  $m = 1$ . Пунктирные стрелки показывают движение затухающих мод, распространяющихся вниз по течению, а сплошная стрелка представляет усиливающуюся моду, распространяющуюся вниз по течению. Красная кривая разделяет моды, распространяющиеся вниз и вверх по течению.

ственно,  $\gamma^S = (\gamma_1^S, \dots, \gamma_N^S)$  — вектор спектральной проекции, и  $N$  — число мод, используемых в расчетах.

Очевидно, что оценка роста возмущений в виде (3.12) зависит от выбранной нормы. Обычный выбор при изучении оптимальных возмущений — кинетическая энергия возмущений:

$$\begin{aligned}
 E(u', v', w', z) &= \\
 &= \frac{1}{2ab} \int_0^\infty \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \Re(u')^2 + \Re(v')^2 + \Re(w')^2 \right) r \right] d\theta dt dr, \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

где  $a = 2\pi/\omega$  и  $b = 2\pi/m$ . Можно показать [35], что кинетическая энер-

гия для возмущений в виде (3.12) является квадратичной формой вектора спектральной проекции  $\gamma^S$ :

$$E(\mathbf{q}^S, z) = \gamma^{S\dagger} \mathbf{E}(z) \gamma^S, \quad (3.14)$$

где  $\mathbf{E}(z)$  — матрица этой квадратичной формы, зависящая только от  $z$  (3.15). Элементы матрицы  $\mathbf{E}(z)$  имеют вид [35]:

$$E_{jk}(z) = \frac{1}{4} e^{(-i\alpha_j^\dagger + i\alpha_k)z} \int_0^\infty \left( F_j^\dagger F_k + G_j^\dagger G_k + H_j^\dagger H_k \right) r \, dr, \quad (3.15)$$

Для заданной осевой координаты  $z$  возмущение с наибольшей кинетической энергией  $\mathbf{q}^{opt}$ , при условии, что его начальная кинетическая энергия равна 1, называется оптимальным возмущением в точке  $z$ . Поиск оптимального возмущения  $\mathbf{q}^{opt} = \sum_{n=1}^N \gamma_n \mathbf{q}_n^S(r) e^{i(\alpha_n z + m\theta - \omega t)}$  сводится к решению следующей задачи условной оптимизации:

$$\gamma^\dagger \mathbf{E}(z) \gamma \rightarrow \max, \quad \text{при условии} \quad \gamma^\dagger \mathbf{E}(0) \gamma = 1. \quad (3.16)$$

Используя метод множителей Лагранжа, можно преобразовать задачу условной оптимизации (3.16) в безусловную с лагранжианом  $\mathcal{L} = \gamma^\dagger \mathbf{E}(z) \gamma - \lambda (\gamma^\dagger \mathbf{E}(0) \gamma - 1)$ . Чтобы найти экстремумы, можно вычислить градиент лагранжиана и приравнять его к нулю:

$$\mathbf{E}(z) \gamma = \lambda \mathbf{E}(0) \gamma. \quad (3.17)$$

Соответственно, оказывается, что наша исходная задача условной оптимизации приводит к нахождению наибольшего собственного значения  $\lambda_{max}$  пары  $(\mathbf{E}(z), \mathbf{E}(0))$ . Поскольку  $\mathbf{E}(z)$  эрмитова, набор собственных значений пары  $(\mathbf{E}(z), \mathbf{E}(0))$  вещественный, и наибольшее собственное значение и соответствующий собственный вектор представляют энергию оптимального возмущения и вектор его спектральной проекции соответственно.

Другой способ вычисления энергии оптимальных возмущений [30, 48] —

это вычисление 2-нормы следующей матрицы:

$$\max \frac{E(z)}{E(0)} = \|\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}_z\mathbf{F}^{-1}\|_2^2, \quad (3.18)$$

где  $\mathbf{F}$  определяется как квадратный корень матрицы  $\mathbf{E}(0)$ ,  $\mathbf{F}^\dagger\mathbf{F} = \mathbf{E}(0)$  и  $\mathbf{\Lambda}_z$  — это  $\text{diag}(e^{i\alpha_1 z}, \dots, e^{i\alpha_N z})$ .

В настоящей статье использовались оба метода, однако второй метод оказался более численно устойчивым. Покажем эквивалентность этих методов. Как упомянуто ранее в (3.12), произвольное возмущение может быть выражено как разложение по собственным функциям. Как предполагалось, оптимальное возмущение может быть получено как 2-норма матрицы  $\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}^{-1}$ , где  $\mathbf{F}^\dagger\mathbf{F} = \mathbf{E}(0)$ , где  $\mathbf{E}$  определена в и  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(e^{\alpha_1 z} \dots e^{\alpha_N z})$ , как это было подробно описано в (3.18). Начинается доказательство с определения 2-нормы матрицы  $\mathbf{M}$ . Это её наибольшее сингулярное значение, которое, в свою очередь, является квадратным корнем наибольшего собственного значения матрицы  $\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M}$ . Чтобы найти наибольшее собственное значение  $\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M}$ , нам нужно решить задачу на собственные значения:

$$\mathbf{M}^\dagger\mathbf{M}u = \lambda u. \quad (3.19)$$

Вместо  $\mathbf{M}$  подставим матрицу  $\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}^{-1}$ :

$$\mathbf{F}^{-\dagger}\mathbf{\Lambda}^\dagger\mathbf{F}^\dagger\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \quad (3.20)$$

Заменим вектор  $\mathbf{u}$  на вектор  $\mathbf{F}\mathbf{w}$ , затем умножим предыдущее уравнение слева на  $\mathbf{F}^\dagger$  чтобы получить:

$$\mathbf{\Lambda}^\dagger\mathbf{F}^\dagger\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{F}^\dagger\mathbf{F}\mathbf{w}. \quad (3.21)$$

Можно видеть, что компоненты матрицы  $\mathbf{\Lambda}^\dagger\mathbf{F}^\dagger\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}$  имеют вид:

$$\|\mathbf{\Lambda}^\dagger\mathbf{F}^\dagger\mathbf{F}\mathbf{\Lambda}\|_{kj} = e^{(-i\alpha_j^\dagger + i\alpha_k)z} \int_0^\infty \left( F_j^\dagger F_k + G_j^\dagger G_k + H_j^\dagger H_k \right) r \, dr.$$

в то время как компоненты матрицы  $\mathbf{F}^\dagger \mathbf{F}$  имеют вид:

$$\|\mathbf{F}^\dagger \mathbf{F}\|_{kj} = \int_0^\infty \left( F_j^\dagger F_k + G_j^\dagger G_k + H_j^\dagger H_k \right) r \, dr.$$

Теперь очевидно, что матрицы  $\mathbf{E}(z)$  и  $\mathbf{\Lambda}^\dagger \mathbf{F}^\dagger \mathbf{F} \mathbf{\Lambda}$  (3.15) равны с точностью до множителя 4. То же самое верно для  $\mathbf{E}(0)$  и  $\mathbf{F}^\dagger \mathbf{F}$ . Итак, это означает, что нахождение 2-нормы матрицы  $\mathbf{F} \mathbf{\Lambda} \mathbf{F}^{-1}$  эквивалентно нахождению максимального собственного значения пары  $\{\mathbf{E}(z), \mathbf{E}(0)\}$ . Это доказывает эквивалентность подходов (3.17) и (3.18).

## 3.2 Численный алгоритм

### Задача на собственные значения

Решается задача на собственные значения (3.9) используя метод коллокации Чебышева [45], кратко обсуждаемый ниже.

Прежде всего, для численного решения отсекается полубесконечная область  $[0, +\infty) \rightarrow [\varepsilon, R_{out}]$ . После этого отображается эта усеченная физическая область на вычислительную  $[-1, +1]$  используя алгебраическое отображение  $r = L \frac{a+\zeta}{b-\zeta}$ . Константы отображения  $a, b, L$  выбираются так, чтобы обеспечить адекватное распределение узлов сетки в ядре струи и в окружающей жидкости следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= \frac{R_{out} + \varepsilon}{R_{out} - \varepsilon} + \frac{2R_{out}\varepsilon}{L(R_{out} - \varepsilon)}, \\ b &= \frac{R_{out} + \varepsilon}{R_{out} - \varepsilon} + \frac{2L}{R_{out} - \varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Оказывается, что единственным параметром отображения является  $L$ . Влияние  $L$  на сетку в физической области можно увидеть на Рис. 3.4, по сравнению с линейным отображением. Значение  $\varepsilon$  выбиралось достаточно малым, чтобы не влиять на результаты расчетов, но чтобы избавиться от особенности в  $r = 0$ . Во всех дальнейших расчетах значение  $\varepsilon$  принималось равным  $10^{-7}$ . Значение  $R_{out}$  варьировалось до достижения сходимости по значению оптимальной энергии. Для разных значений азимутального вол-

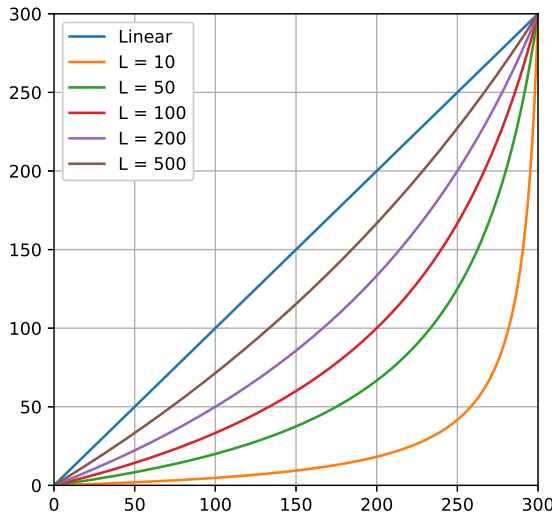


Рис. 3.4: Влияние параметра отображения  $L$  на сетку,  $R_{out} = 300$ .

нового числа  $m$  подходящее значение отличалось.

После этого на вычислительной области определяется сетка Гаусса-Лобатто из  $N$  точек, следующим образом:  $\zeta_j = \cos \frac{\pi j}{N-1}$ , для  $j = 0, \dots, N-1$ . Из этой сетки вычисляется сетка на физической области  $x_j = L \frac{a-\zeta_j}{b-\zeta_j}$ , для  $j = 0, \dots, N-1$ . Все неизвестные функции интерполируются на сетку физической области и могут быть заменены конечными векторами их значений в узлах интерполяции. Основная особенность метода заключается в том, что дифференцирование заменяется умножением на так называемую матрицу дифференцирования Чебышева  $D_N$  [40]. Для физической области матрица дифференцирования Чебышева может быть вычислена с использованием цепного правила и матрицы дифференцирования Чебышева для вычислительной области [40]. Граничные условия могут быть применены следующим образом. Для граничных условий Дирихле удаляются соответствующие строки и столбцы матриц, тогда как для других граничных условий заменяются эти строки граничными условиями. Полученная обобщенная алгебраическая задача на собственные значения решается стандартным алгоритмом QZ [49].

Чтобы проверить код, разработанный для расчета оптимальных возмущений, было проведено несколько процедур валидации. Во-первых, чтобы проверить алгоритм нахождения собственных значений, были вычислены

собственные значения течения в трубе и сравнены с представленными в [48] для различных значений  $m$ ,  $Re = 2280, \omega = 0.96$  (Таб. 5, 6, 7, 8). Можно видеть, что значения совпадают с хорошей точностью, что доказывает, что алгоритм поиска собственных значений работает правильно.

Таблица 5: Собственные значения для течения в трубе,  
 $Re = 2280, \omega = 0.96, m = 0$ .

$\Re(\alpha)$ [48]	$\Im(\alpha)$ [48]	$\Re(\alpha)$	$\Im(\alpha)$
1.0179142	0.06206459	1.01791421396735	0.062064593335264
1.0179143	0.06206472	1.01791432516685	0.0620647171041207
1.0754886	0.13105881	1.07548858395882	0.131058814092828
1.0754915	0.13105898	1.0754914758516	0.13105898139671
1.1324143	0.20770561	1.1324143108218	0.2077056096385
1.1323954	0.20772219	1.13239539246535	0.207722186191795
1.1883721	0.29232825	1.18837208552338	0.29232825046144
1.1883601	0.2924735	1.18836011319098	0.292473502697641
1.2430636	0.38525837	1.24306362750018	0.385258371425261
1.2434624	0.385758	1.24346243094634	0.385757996121829
1.296204	0.48683492	1.29620401139916	0.486834924221732
1.2984931	0.4871603	1.29849307325838	0.487160301255878
1.3530214	0.5928706	1.35302136017726	0.592870639149454
1.3475094	0.5973831	1.34750942637319	0.597383120036996

Таблица 6: Собственные значения для течения в трубе,  
 $Re = 2280, \omega = 0.96, m = 1$ .

$\Re(\alpha)$ [48]	$\Im(\alpha)$ [48]	$\Re(\alpha)$	$\Im(\alpha)$
1.0635965	0.05122505	1.06359649190972	0.0512250545679265
1.0029119	0.10410148	1.00291194580173	0.104101484553922
1.1321799	0.11728354	1.13217986611512	0.117283544043971
1.0521692	0.1793126	1.05216924939309	0.179312606004527
1.1997767	0.1923576	1.19977671937306	0.192357615802547
1.101562	0.2601731	1.1015618564961	0.260173076685814
1.267542	0.2763042	1.267541568136	0.276304201017633
1.1504159	0.34804764	1.15041590722871	0.34804763883684
1.3366018	0.37010973	1.33660184364034	0.370109735603527
1.5592829	0.44034987	1.55928293696533	0.440349871475357
1.1983124	0.4437593	1.19831240401881	0.443759336850492
1.4077545	0.4794744	1.40775450875564	0.479474400359542
1.2449138	0.5479323	1.24491379657864	0.547932288904625
1.466419	0.61187152	1.46641927284618	0.611871519919917

Таблица 7: Собственные значения для течения в трубе,  
 $Re = 2280, \omega = 0.96, m = 2$ .

$\Re(\alpha)$ [48]	$\Im(\alpha)$ [48]	$\Re(\alpha)$	$\Im(\alpha)$
1.091291	0.07696552	1.09129126505684	0.0769655173269889
1.021789	0.13485084	1.02178900599244	0.134850841830025
1.1580435	0.14749418	1.15804351827006	0.147494181030688
1.0710396	0.2125134	1.07103960402762	0.21251344692256
1.2235639	0.22684628	1.22356392427313	0.226846285727053
1.11977	0.29668867	1.1197703753514	0.296688668587699
1.288132	0.31497875	1.28813199658766	0.314978754474593
1.1674405	0.38829801	1.16744052455769	0.388298008986709
1.351907	0.4122068	1.35190716805191	0.412206767500048
1.2136651	0.4879833	1.21366511903118	0.487983297659373
1.4156198	0.5191714	1.41561982214519	0.519171447165626
1.2581277	0.59625491	1.25812772224275	0.596254913649208
1.4822959	0.63631208	1.48229594411353	0.636312078688251
1.3004755	0.71352031	1.30047548581177	0.713520312002541

Таблица 8: Собственные значения для течения в трубе,  
 $Re = 2280, \omega = 0.96, m = 3$ .

$\Re(\alpha)$ [48]	$\Im(\alpha)$ [48]	$\Re(\alpha)$	$\Im(\alpha)$
1.119773	0.1092144	1.11977345985013	0.109214398187236
1.045175	0.16798574	1.04517546652923	0.167985738114233
1.1852898	0.18413389	1.18528984853234	0.184133887253378
1.094342	0.2483563	1.09434175878579	0.248356302162394
1.2496671	0.2678519	1.24966708482731	0.267851902944475
1.142572	0.33579408	1.14257176611812	0.335794081448097
1.312932	0.36048367	1.31293216084896	0.36048367118526
1.1894143	0.43099097	1.18941431545463	0.430990967956117
1.375158	0.4623577	1.37515765372516	0.462357707723637
1.2345223	0.53449396	1.23452229395936	0.534493963896476
1.4369407	0.57373813	1.43694072229469	0.573738132468341
1.277596	0.6467463	1.27759596887111	0.646746271713451
1.4998787	0.69353671	1.49987870358049	0.693536714213694
1.3182548	0.76810573	1.31825478686017	0.768105733060894

Исследована сходимость спектров с увеличением  $N$ . Наблюдалось, что для  $m \neq 1$ ,  $N = 800$  было достаточно для сходимости расчетов спектров. Проверена сходимость расчетов оптимальных возмущений с увеличением количества используемых собственных мод. Например, для  $\theta = 0.05$  оптимальные возмущения рассчитывались для 600, 700, 800 и 900 мод. Относительная средняя ошибка между расчетами для 600 и 700 мод составила 0.0094, для 700 и 800 она составила 0.0041, а для 800 и 900 составила 0.002. Это означает, что сходимость с увеличением количества используемых для расчетов собственных мод почти квадратичная.

Случай  $m = 1$  оказался более сложным и потребовал по крайней мере  $N = 1300$  для достаточной сходимости расчетов спектров. Значение  $R_{out}$  изменялось до достижения сходимости по значению оптимальной энергии. В случае  $m > 1$  сходимость достигалась довольно быстро, но в случае  $m = 1$  необходимо было значительно увеличить  $R_{out}$  для достижения сходимости. Итоговые вычислительные параметры, для которых сходимость считалась достаточной, скомпилированы в таблице ниже.

$m$	размер сетки	число собственных мод	$R_{out}$
1	1400	1200	600
0, 2, 3, 4...	900	900	300

Что касается расчета оптимальных возмущений, оба метода (3.17) и (3.18) дали практически идентичные результаты, хотя второй метод в некоторых ситуациях (например,  $\omega > 0.5$ ,  $\text{Re} > 1000$ ) вел себя значительно более робастно. Основная проблема с первым методом заключалась в том, что при определенных условиях неотрицательная матрица при приведении к диагональному виду имела очень маленькие ( $\approx 10^{-17}$ ) отрицательные числа на диагонали. В то же время, обнуление этих значений портило сходимость метода. Поэтому в ситуациях, когда первый метод не сходился или имел проблемы со сходимостью, использовался второй метод.

### Оптимизация начальных условий

Расчеты оптимальных возмущений сводятся к решению обобщенной эрмитовой задачи на собственные значения (3.16), (3.17).

Интегралы в (3.15) вычисляются на ранее использованной сетке Гаусса-Лобатто с использованием спектрального интегрирования. Спектральное интегрирование можно интерпретировать следующим образом. Чтобы проинтегрировать функцию  $f$  по области  $[a, b]$  с сеткой Гаусса-Лобатто на ней, рассматривается значение  $\int_a^b f \, dx$  как значение  $y(b)$ , где  $y$  — решение дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = f$  с начальным условием  $y(a) = 0$ . Решается это дифференциальное уравнение, используя спектральный метод: заменяя функции  $y, f$  векторами их значений на сетке Гаусса-Лобатто  $\tilde{y}, \tilde{f}$  и заменяя дифференцирование умножением на матрицу дифференцирования Чебышева  $D$ . Чтобы применить граничное условие  $y(a) = 0$ , отбрасывается последний столбец и последнюю строку матрицы  $D$  (поскольку сетка Гаусса-Лобатто направлена в противоположном направлении от  $b$  к  $a$ ), чтобы получить  $\tilde{D}$ , а также отбрасываем последний компонент вектора  $\tilde{f}$ . В конце получаем уравнение  $\tilde{D}\tilde{y} = \tilde{f}$ . Поскольку нам нужно только значение  $\tilde{y}_1$ , переписываем уравнение как  $\tilde{y} = \tilde{D}^{-1}\tilde{f}$ , чтобы получить формулу  $\tilde{y}_1 = \sum_j \tilde{D}_{1j}^{-1} \tilde{f}_j$ .

Если используется первый способ расчета оптимальных возмущений (3.17), то, после того как элементы матрицы вычислены, обобщенная эрмитова задача на собственные значения решается методом степенной итерации, чтобы получить наибольшее собственное значение. Наибольшее собственное значение  $\lambda_{max}$  равно энергии оптимального возмущения в заданной координате вниз по течению  $z$ . Используя соответствующий собственный вектор  $\gamma_{opt}$ , можно построить оптимальное возмущение из собственных мод, полученных в разделе 3.2, используя (3.12).

Если используется другой способ вычисления оптимальных возмущений (3.18), то, чтобы вычислить 2-норму матрицы, требуется сингулярное разложение, потому что для данной матрицы  $A$  её 2-норму  $\|A\|_2$  — это именно её наибольшее сингулярное число. Результат сингулярного разложения может быть использован для вычисления вектора спектральной проекции  $\gamma$ . Правый сингулярный вектор  $v$ , соответствующий наибольшему сингулярному значению  $\sigma_{max}$  (которое равно  $\sqrt{\lambda_{max}}$ ), преобразуется к базису собственных векторов  $\{\mathbf{q}_n\}_{n=1}^N$  как  $\gamma_{opt} = \mathbf{F}^{-1}v$ .

Эта процедура выполняется для каждого значения координаты вниз по течению  $z$ , что означает, что полученная кривая оптимальной энергии является огибающей кривой графиков энергии индивидуальных возмущений. Пример графиков энергии индивидуальных возмущений и их огибающей для пространственной задачи показан на Рис. 3.5, где  $G$  — это энергетическое усиление, определяемое следующим образом:

$$G(z) = \max \frac{E(z)}{E(0)}.$$

где максимум берется по всем возмущениям.

Для дальнейшей проверки кода была вычислена энергия оптимальных возмущений для течения в трубе и сравнена с представленной в . Здесь представлены кривые оптимального роста для различных значений  $m$ ,  $\text{Re} = 3000$  и  $\omega = 0$  (Рис. 3.6). Эти рисунки отлично согласуются с представленными в . Таким образом, можем заключить, что реализованный код корректно вычисляет оптимальные возмущения.

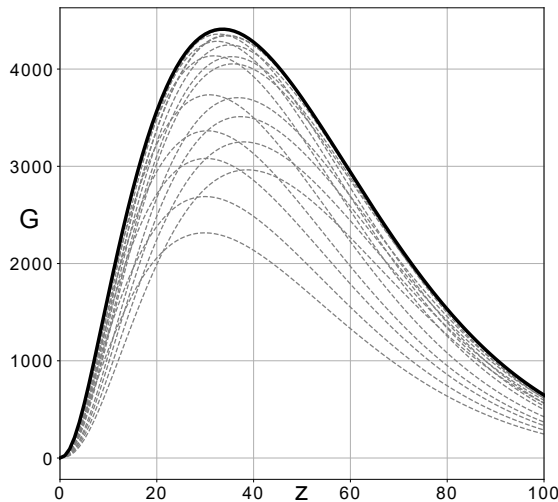


Рис. 3.5: Пример кривой огибающей,  $\delta = 0.05$ ,  $m = 3$ ,  $\omega = 0$ ,  $\text{Re} = 1000$ .

### 3.3 Результаты и обсуждение

Поскольку невозмущенный профиль осесимметричен, для каждого винтового возмущения  $m \neq 0$  существует решение, закрученное против часовой стрелки для  $m > 0$ , и аналогичное решение, закрученное по часовой стрелке для  $-m < 0$ . Оптимальное решение без закрутки получается, когда возмущение симметризовано:

$$\tilde{\mathbf{q}}^m(r, \theta, z) = \frac{\mathbf{q}^m(r, \theta, z) e^{im\theta} + \mathbf{q}^{-m}(r, \theta, z) e^{-im\theta}}{2}, \quad (3.23)$$

где  $\mathbf{q}^m$  — оптимальное возмущение для заданных  $m$ ,  $\omega$  и  $z$  — координата вниз по течению. Три оптимальных возмущения, два с закруткой в противоположных направлениях и одно без закрутки, эквивалентны в том смысле, что они имеют одинаковую скорость роста.

#### Общие результаты

Во-первых, представим  $G$  как функцию  $\omega$  и  $z$ . Поскольку известно, что струйные течения неустойчивы для большого интервала частот (т.е. в пределе  $z \rightarrow \infty$  такие возмущения всегда более энергичны, чем устойчивые модально), сосредотачиваемся на умеренных значениях координаты вниз

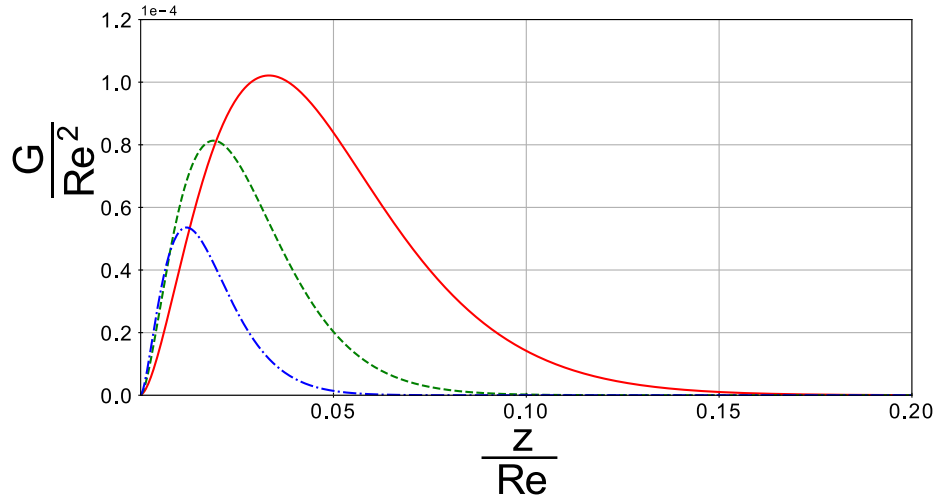


Рис. 3.6: Кривые пространственного оптимального роста  $\omega = 0$  для течения в трубе,  $Re = 3000$ .  $m = 1$  – красная сплошная линия,  $m = 2$  – зеленая пунктирная линия,  $m = 3$  – синяя штрихпунктирная линия.

по течению  $z$ . Рис. 3.7 отображает оптимальное энергетическое усиление для различных значений  $m$  для различных  $\omega$  и умеренных значений осевой координаты  $z$ .

Наблюдается, что возмущения с  $m = 0$  и  $m = 1$  испытывают наибольший переходный рост для умеренных значений  $\omega$ , в то время как для низкочастотных возмущений  $\omega \rightarrow 0$  наибольший рост демонстрируют  $m = 1, 2, 3$ . Более того, наблюдается, что переходный энергетический рост  $G$  изменяется довольно резко при  $\omega \rightarrow 0$ , как можно видеть для  $m = 1$  на Рис. 3.9. Такое поведение можно объяснить изменением механизма, ответственного за рост возмущений: при  $\omega \rightarrow 0$  все моды становятся затухающими, и природа роста возмущений становится чисто немодальной.

Была проанализирована зависимость энергетического усиления оптимального возмущения  $G$  от числа Рейнольдса  $Re$  для различных значений  $\omega$  и  $m$ . В пределе  $\omega \rightarrow 0$ , когда неустойчивость становится чисто немодальной, можно наблюдать хорошо известный в пристенных течениях закон масштабирования [48]  $G_{max} \sim Re^2$ . Пример графика для  $m = 3, \delta = 0.16$  показан на Рис. 3.10. Построен график  $G$  как функции  $z$  для различных значений  $Re$ . Видно, что глобальные максимумы оптимальной энергии  $G_{max}$  ведут себя квадратично по  $z$ , в то время как их осевые координаты  $z_{max}$  ведут себя линейно. Для лучшей иллюстрации кривая  $G_{max}(z_{max})$  построена

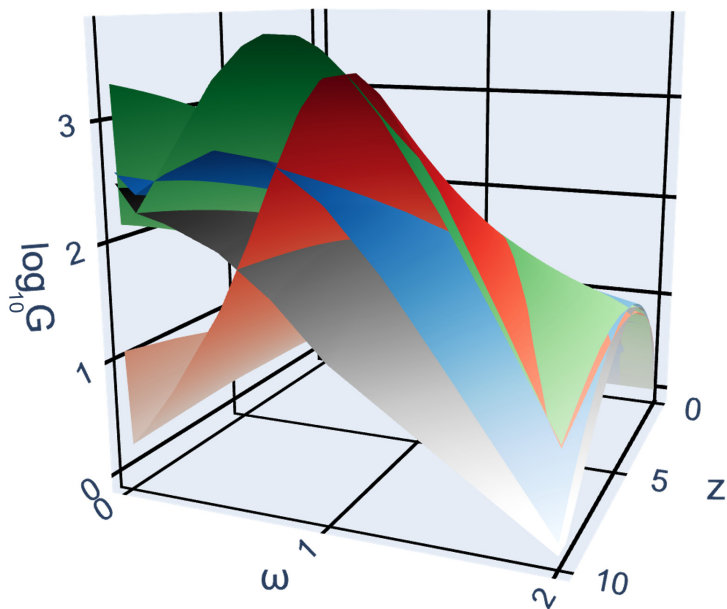


Рис. 3.7: Оптимальное энергетическое усиление  $G(\omega, z)$ ,  $\delta = 0.16$ ,  $\text{Re} = 500$ .  $m = 0$  (красная поверхность),  $m = 1$  (зеленая поверхность),  $m = 2$  (синяя поверхность),  $m = 3$  (серая поверхность). Для деталей см. Рис. 3.8.

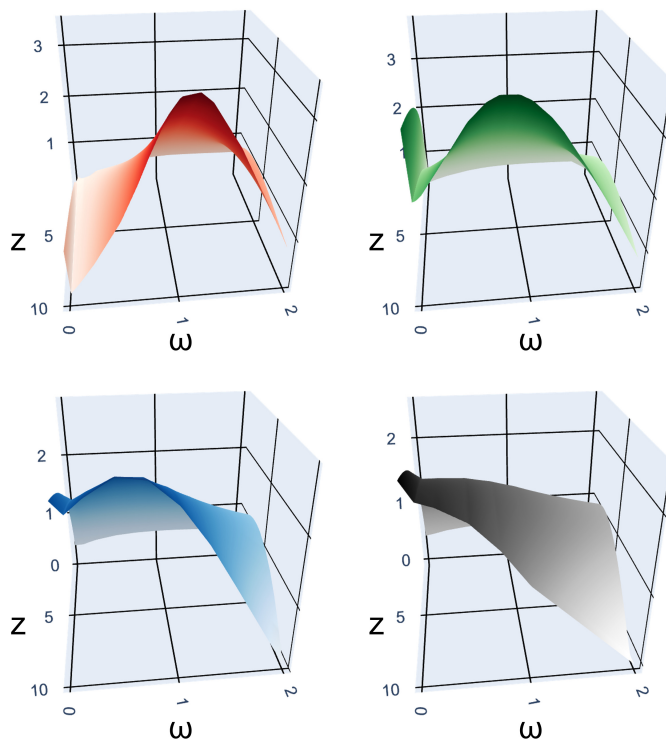


Рис. 3.8: Рис. 3.7 разобран на отдельные графики и виден под другим углом.

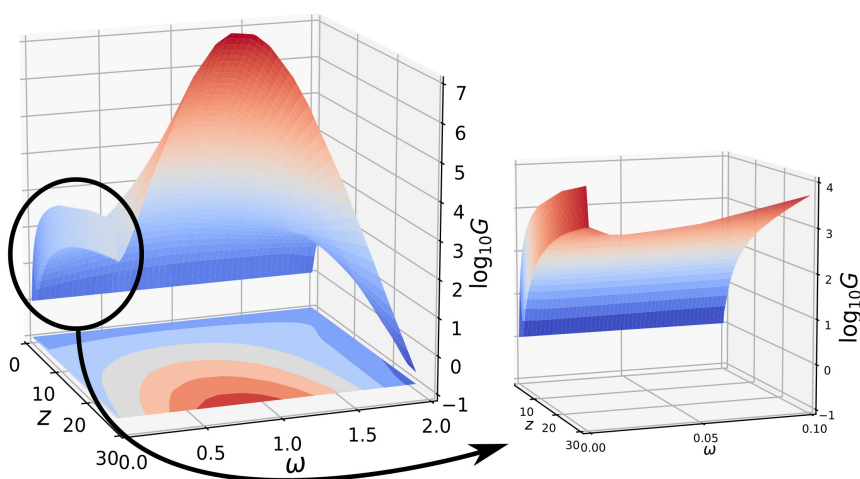


Рис. 3.9: Оптимальное энергетическое усиление  $G(\omega, z)$ ,  $m = 1$ ,  $\delta = 0.16$ ,  $\text{Re} = 500$ .

на Рис. 3.10 (тонкая сплошная линия). Это, в свою очередь, демонстрирует, что  $G_{max} \sim \text{Re}^2$  (на Рис. 3.10  $G_{max} \approx 0.002377 \text{Re}^2$ ,  $z_{max} \approx 0.04477 \text{Re}$ ).

Для ненулевых значений частоты, когда механизм неустойчивости сочетает алгебраический рост с экспоненциальным ростом неустойчивой моды, обнаружена зависимость отношения энергетического усиления оптимальных возмущений к энергии наиболее неустойчивой моды  $\frac{G}{E_m}$  от числа Рейнольдса. Стоит отметить, что зависимость  $\max \frac{G}{E_m}$  от  $\text{Re}$  не подчинялась закону масштабирования чисто немодального роста ( $G \sim \text{Re}^2$ ) для всех изученных значений  $m$  и  $\omega$ . В [50] авторы изучали временные неустойчивости и переходный рост и доказали, что в неустойчивом случае для больших времен  $t$  энергия оптимального возмущения ведет себя следующим образом:

$$\ln G(t) = \ln \left( \frac{1}{(\mathbf{U}_1 | \mathbf{U}_1^+)^2} \right) + 2\Re(\sigma_{km})t. \quad (3.24)$$

где  $\mathbf{U}_1$  — собственная мода, соответствующая неустойчивому собственному значению  $\sigma_{km}$ ,  $\mathbf{U}_1^+$  — сопряжённая собственная мода, соответствующая неустойчивому собственному значению  $\sigma_{km}$ , и  $t$  — время.

Из (3.24) следует:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G}{E_m} = \frac{1}{(\mathbf{U}_1 | \mathbf{U}_1^+)^2} \quad (3.25)$$

Это означает, что во временной задаче  $\frac{G}{E_m} \rightarrow \text{const}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Наблюдалось аналогичное поведение при  $z \rightarrow \infty$  для всех изученных неустойчивых возмущений в настоящей пространственной задаче. Пример для  $m = 2$ ,  $\delta = 0.16$  и  $\omega = 0.7$  показан на Рис. 3.11. Построен график  $\frac{G}{E_m}$ , отношение оптимального энергетического усиления к энергии неустойчивой моды  $E_m = \exp^{-2\Im(\alpha_u)z}$ , где  $\alpha_u$  — собственное значение, соответствующее неустойчивой моде (на Рис. 3.11 вычтена 1 для удобства). Наблюдается, что  $\frac{G}{E_m}(z \rightarrow \infty)$  слегка увеличивается с  $\text{Re}$ , точнее,  $\log \frac{G}{E_m}(z \rightarrow \infty) \sim \log \text{Re}$  (на Рис. 3.11, например,  $\frac{G}{E_m}(z \rightarrow \infty, m = 2, \omega = 0.7, \delta = 0.16) = 1.751 \text{Re}^{0.5508}$ ). Именно это соотношение (3.25) показывает возможность «накачки энергии» в случае комбинации алгебраического роста с модальным ростом. Начальный алгебраический рост, как бы, накачивает энергию в растущую моду, которая сохраняет эту накачку вниз по течению.

Настоящие результаты относительно поведения  $\frac{G}{E_m}$  для больших значений  $z$  согласуются с результатами [35].

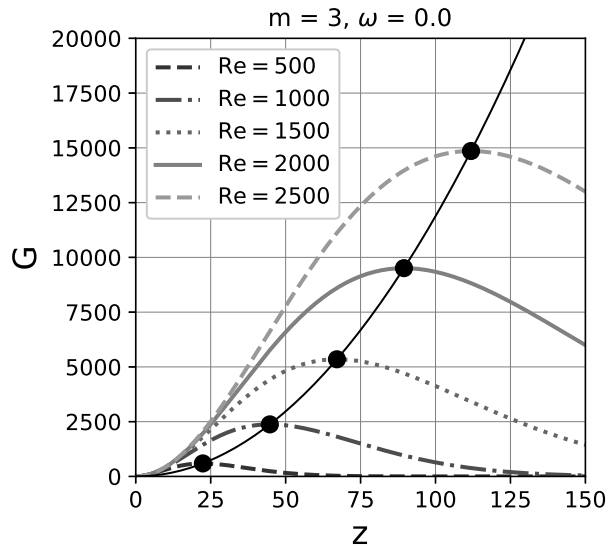


Рис. 3.10: Оптимальное энергетическое усиление  $G(z)$ ,  $m = 3$ ,  $\delta = 0.16$ ,  $\omega = 0$ .

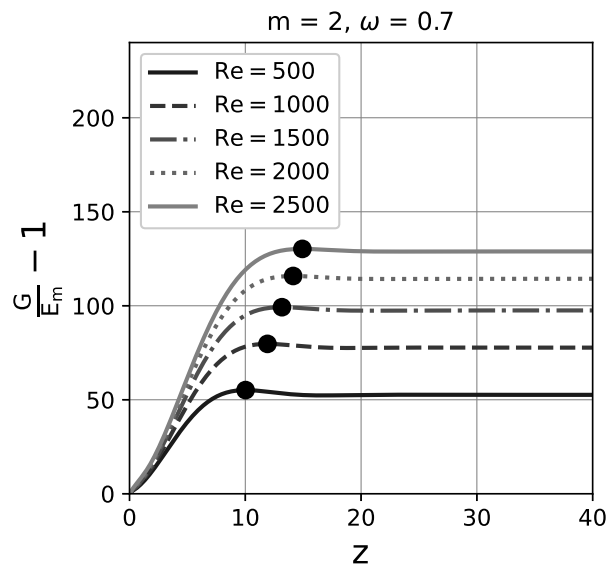


Рис. 3.11: Отношение оптимальной энергии к энергии одной моды  $\frac{G}{E_m}(z)$ ,  $m = 2$ ,  $\delta = 0.16$ ,  $\omega = 0.7$ .

### Стационарные оптимальные возмущения

Как упомянуто выше, в пределе  $\omega \rightarrow 0$  природа роста возмущений становится чисто алгебраической. Кратковременное увеличение энергии возму-

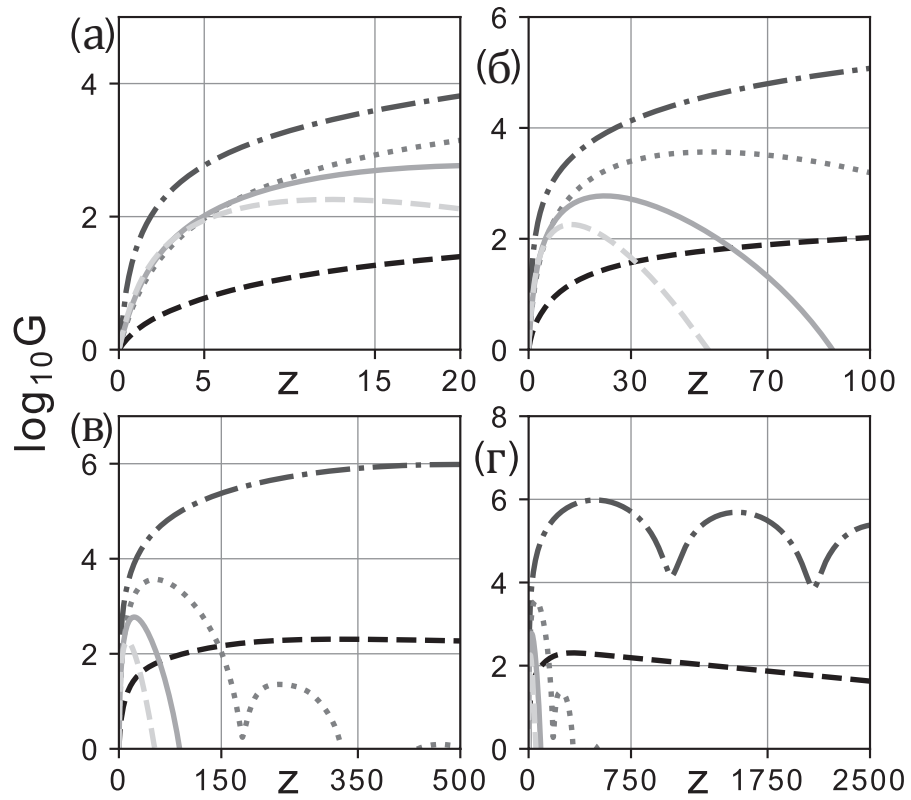


Рис. 3.12: Оптимальное энергетическое усиление  $G(z)$ ,  $\delta = 0.16$ ,  $\text{Re} = 500$ .  $m = 0$  (темная пунктирная линия),  $m = 1$  (штрихпунктирная линия),  $m = 2$  (точечная линия),  $m = 3$  (сплошная линия),  $m = 4$  (светлая пунктирная линия). Графики (а)-(г) соответствуют разным диапазонам  $z$ .

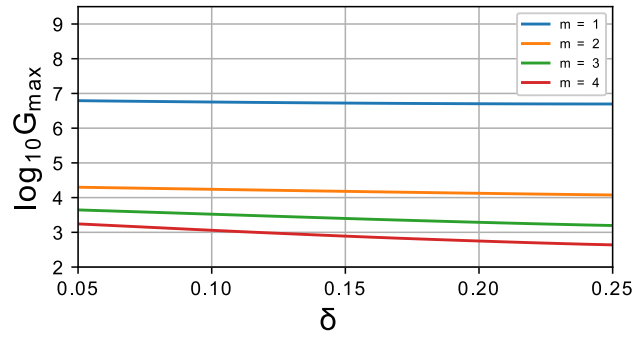
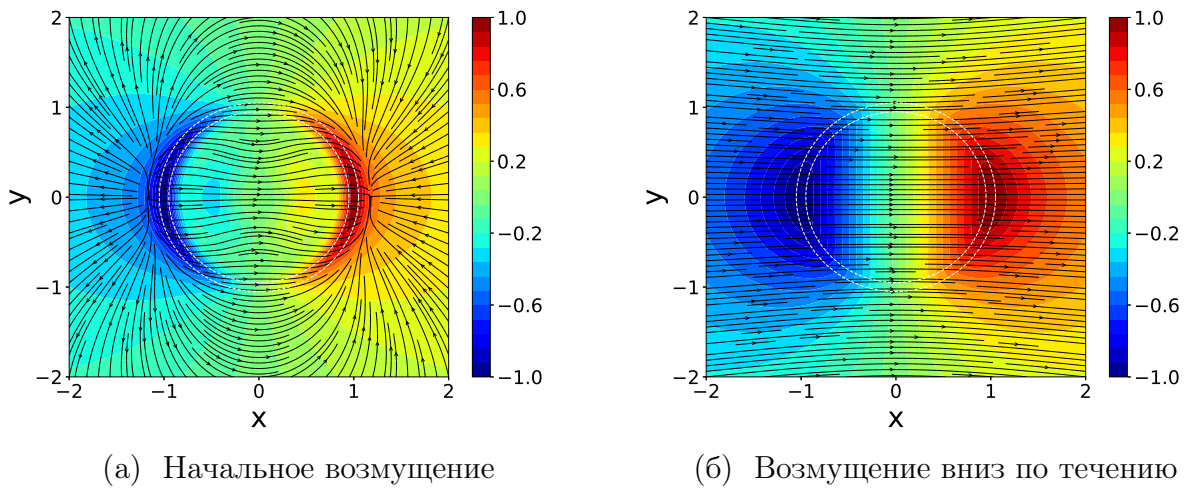


Рис. 3.13: Влияние толщины потери импульса на максимальный переходный энергетический рост.  $Re = 1000$ .



(а) Начальное возмущение

(б) Возмущение вниз по течению

Рис. 3.14: Пространственные оптимальные возмущения  $m = 1$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $Re = 1000$ . Поперечное сечение  $y$  среза сопла,  $z = 0$  (а) и в оптимальном месте вниз по течению,  $z = z_{max}$  (б). Цвет показывает нормированную величину продольной компоненты возмущения, линии тока в плоскости показывают поперечные компоненты возмущения.

щений в этом случае происходит из-за неортогональности собственных мод. Несмотря на то, что каждая мода затухает вниз по течению, комбинация этих мод может расти на определенном расстоянии, увеличивая энергию возмущений [48]. Чтобы проиллюстрировать, как ведут себя возмущения в этом случае, представлена зависимость  $G$  для различных значений  $m$  для струи с  $\delta = 0.16$  и  $Re = 500$  на Рис. 3.12. Из верхнего левого графика на Рис. 3.12 можно выделить три типа возмущений основываясь оп том, как они ведут себя при малых значениях  $z$ , а именно возмущение  $m = 1$ , которое растет быстрее всего, возмущения  $m = 2, 3, \dots$ , которые имеют

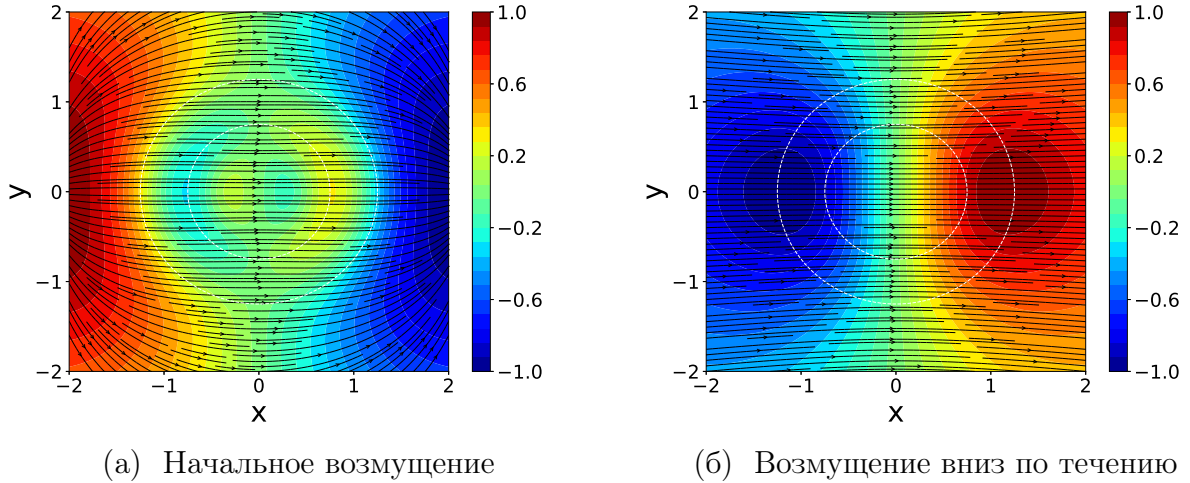


Рис. 3.15: Пространственные оптимальные возмущения  $m = 1, \delta = 0.25, \text{Re} = 1000$ . Поперечное сечение  $y$  среза сопла,  $z = 0$  (а) и в оптимальном месте вниз по течению,  $z = z_{max}$  (б). Цвет показывает нормированную величину продольной компоненты возмущения, линии тока в плоскости показывают поперечные компоненты возмущения.

умеренную скорость роста при малых  $z$ , и  $m = 0$ , который имеет самую маленькую скорость роста среди всех остальных. Из трех других графиков видно, что наиболее энергичным является винтовое возмущение ( $m = 1$ ), достигающее своего максимума  $\approx 10^6$  при  $z \approx 500$ , в то время как другие возмущения значительно менее энергичны. Это согласуется с результатами решения временной задачи [37].

### Влияние толщины потери импульса

Проварьировав толщину потери импульса струи  $\delta$  при фиксированном  $\text{Re}$  обнаружено, что для меньших значениях  $\delta$  кривая роста для каждого  $m$  была немного более крутой. Чтобы обобщить эти результаты, представлен график зависимости максимума немодального энергетического усиления от толщины потери импульса Рис. 3.13.

Аналогично временной задаче [36, 37], случаи  $m = 1$  и  $m > 1$  различаются по своей пространственной структуре. В случае  $m = 1$  оптимальное возмущение представляет собой близкое к равномерному смещение струи, и можно наблюдать так называемый эффект «shift-up» [37] (Рис. 3.14). В результате смещения более быстрых слоев, движущихся из ядра струи в

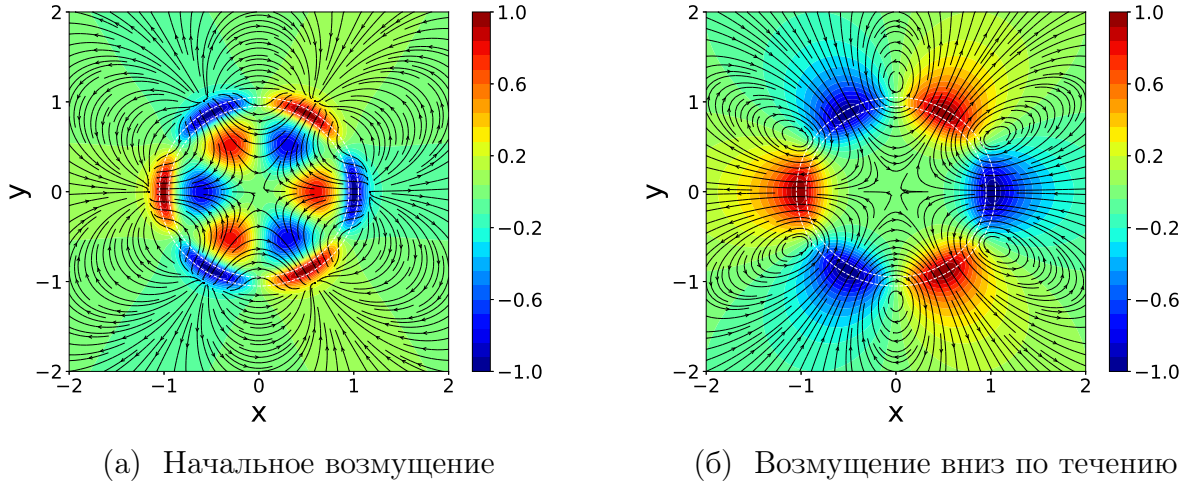


Рис. 3.16: Пространственные оптимальные возмущения  $m = 3, \delta = 0.05, \text{Re} = 1000$ . Поперечное сечение  $y$  среза сопла,  $z = 0$  (а) и в оптимальном месте вниз по течению,  $z = z_{max}$  (б). Цвет показывает нормированную величину продольной компоненты возмущения, линии тока в плоскости показывают поперечные компоненты возмущения.

сдвиговой слой, происходит смещение, которое вызывает увеличение продольной скорости в направлении сдвига, одновременно уменьшая продольную скорость в противоположном направлении. Когда  $m > 1$ , оптимальное возмущение состоит из нескольких вихрей ( $2m$  всего), которые создают область ускорения и замедления струи. Это происходит из-за обмена быстрых слоев с медленными слоями, напоминая эффект «lift-up», наблюдаемый в пограничном слое, с поправкой на цилиндрическую геометрию струйного течения (Рис. 3.16, 3.17).

Структура пространственных оптимальных возмущений очень похожа на структуру во временной задаче [37]. Вращающиеся вихри в пространственном случае, кажется, более вытянуты в радиальном направлении для случаев  $m > 1$ . Более того, в случае  $m = 1$  для временной задачи центры вихрей расположены в свободном потоке на расстоянии порядка нескольких радиусов струи от оси, в то время как для пространственной задачи они расположены далеко в окружающей жидкости.

Аналогично случаю временной задачи, максимальные энергетические усиления для разных  $m$  в пространственном случае быстро уменьшаются с увеличением  $m$ . Также можно отметить, что с увеличением  $\delta$  область,

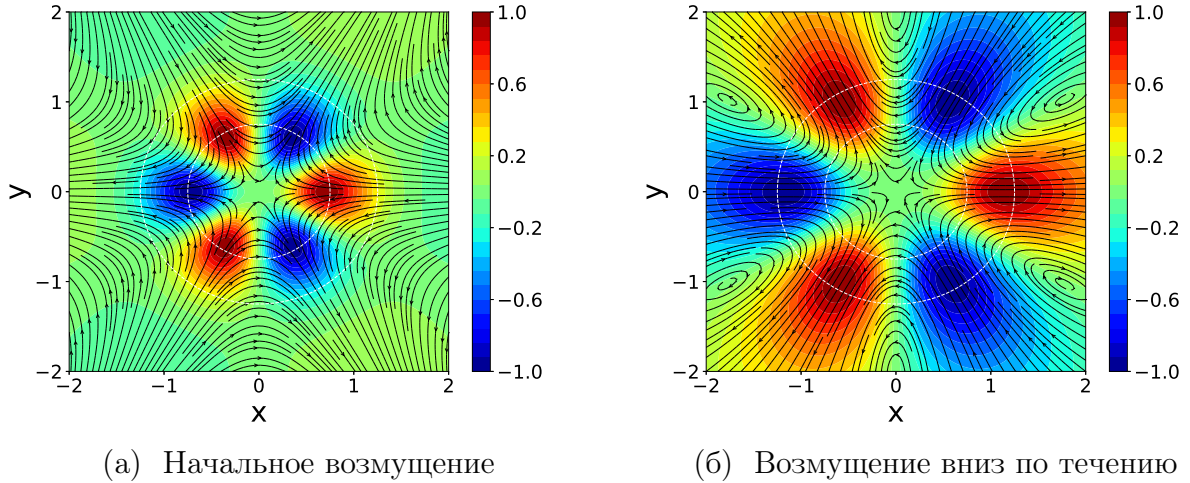


Рис. 3.17: Пространственные оптимальные возмущения  $m = 3, \delta = 0.25, \text{Re} = 1000$ . Поперечное сечение  $y$  среза сопла,  $z = 0$  (а) и в оптимальном месте вниз по течению,  $z = z_{max}$  (б). Цвет показывает нормированную величину продольной компоненты возмущения, линии тока в плоскости показывают поперечные компоненты возмущения.

занятая возмущением, также увеличивается. Это можно видеть, сравнивая Рис. 3.14, 3.16 с Рис. 3.15, 3.17, область возмущения зависит от  $\delta$ .

Распределение начальных возмущений — это заметное различие между случаем временной и пространственной задачи. В то время как результирующие возмущения вниз по течению качественно схожи, начальные возмущения отличаются [37]. Во временной задаче начальные условия напоминают результат вниз по течению: встречно-вращающиеся вихри переносят жидкость из ядра струи в окружающую жидкость и наоборот, в то время как для пространственного случая распределение начальных возмущений более сложное, с несколькими слоями полос с вихрями, которые не напоминают те возмущения, что появляются вниз по течению.

### Немонотонность энергий оптимальных возмущений

Особенность пространственной задачи, заметная на Рис. 3.12, — немонотонное поведение энергии оптимального возмущения вниз по течению. Аналогично, такая картина может быть замечена на графиках других авторов [35]. Рассмотрим это явление более подробно. На Рис. 3.18 можно видеть графики энергий индивидуальных возмущений вместе с графиком

оптимального энергетического усиления, который является их огибающей. Этот график приведен в качестве примера; аналогичное поведение наблюдается для всех рассчитанных стационарных возмущений для различных азимутальных волновых чисел и  $\omega = 0$ . Более того, получены похожие результаты для течения в трубе. После обнаружения немонотонного поведения энергии оптимальных возмущений в струйных течениях в пространственном случае, проверено, наблюдается ли такое поведение в течении в трубе. На Рис. 3.19 можно видеть кривые оптимального роста для различных значений  $m$ ,  $Re = 3000$  и  $\omega = 0$  в логарифмическом масштабе и для более длинного участка вниз по течению, чем на Рис. 3.6.

Хотя известно, что временная задача для  $\alpha = 0$  и пространственная задача для  $\omega = 0$  обладают достаточно похожими свойствами для оптимального энергетического роста, а также формами оптимальных возмущений вниз по течению, проведённые в настоящей работе расчёты и работы других авторов [36, 37] подчеркивают, что во временной задаче такое немонотонное энергетическое поведение не наблюдается. В этом разделе объясняется это различие и обсуждается поведение энергии оптимального возмущения в пространственном случае.

Чтобы прояснить различия между графиками энергии во временном и пространственном случаях, рассмотрим соответствующие спектры. На Рис. 3.20 можно видеть пространственный спектр для  $m = 2$ ,  $\delta = 0.16$ ,  $Re = 500$ , выбранный в качестве примера. Границу физической области  $R_{out}$  в расчетах варьировалась, чтобы отличить дискретный спектр от непрерывного [51].

Рис. 3.18 и Рис. 3.20 показывают, что длина волны колебаний энергии оптимальных возмущений ( $\lambda$  на Рис. 3.18) очень близка к длинам волн наименее затухающих дискретных мод (то есть действительной части соответствующих собственных значений). Конкретно, для этого случая  $m = 2$ ,  $\delta = 0.16$ ,  $Re = 500$ ,  $\omega = 0$ , оценивается длина волны осцилляций немодальной энергии возмущения как расстояние  $\lambda$  между двумя последовательными максимумами (Рис. 3.18). Получено следующее соответствующее волновое число  $\pi/(231.6 - 53.0) = 0.0176$ , в то время как волновое число двух наименее затухающих мод составляет 0.0173, таким образом,

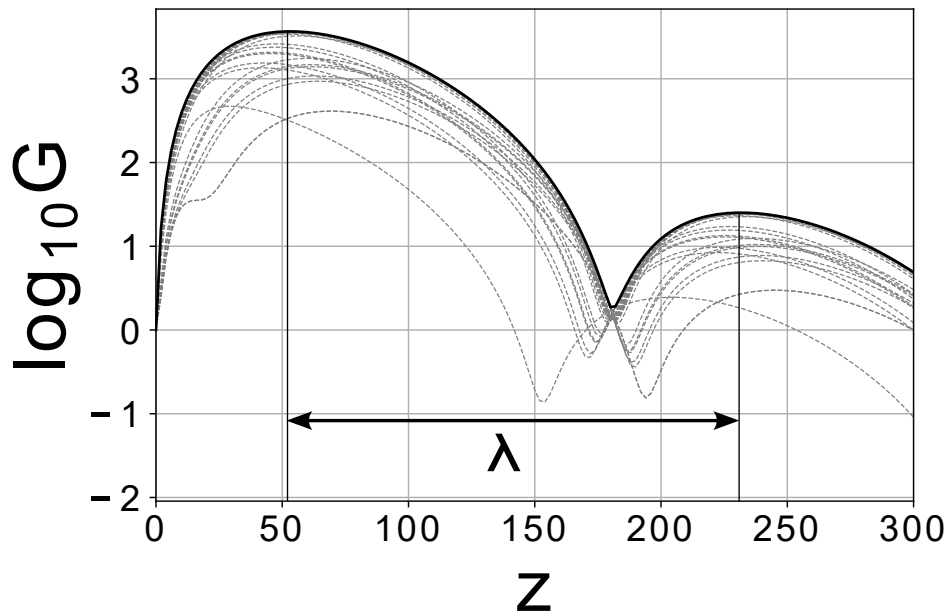


Рис. 3.18: Оптимальное энергетическое усиление  $G(z)$  показано сплошной линией, энергии индивидуальных возмущений показаны пунктирными линиями.  $\omega = 0$ ,  $m = 2$ ,  $\delta = 0.16$ ,  $\text{Re} = 500$ .

они отличаются примерно на 1%. Это предположение подтверждается во всех проверенных случаях. Итак, длина волны колебаний энергии оптимального возмущения совпадает с длинами волн, соответствующими двум наименее затухающим дискретным собственным модам (для которых длины волн совпадают, несмотря на различие в самих модах).

Напротив, если посмотреть на спектр во временной задаче, там не найдутся колеблющиеся моды (Рис. 3.21). Таким образом, в силу отсутствия дискретных собственных мод с ненулевой частотой, оптимальная энергия монотонно уменьшается со временем.

Возвращаясь к пространственной задаче, проанализировано колебательное поведение  $G(z)$  более подробно. Уменьшая количество собственных мод в разложении (3.12) и наблюдая за поведением энергии оптимальных возмущений, замечено, что пока две наименее затухающие дискретные моды оставались в разложении, энергия оптимальных возмущений, хотя и уменьшалась, сохраняла колебательное поведение. Длина волны колебаний энергии оставалась той же. Таким образом, колебательное поведение энергии оптимальных возмущений обеспечивалось исключительно этими двумя

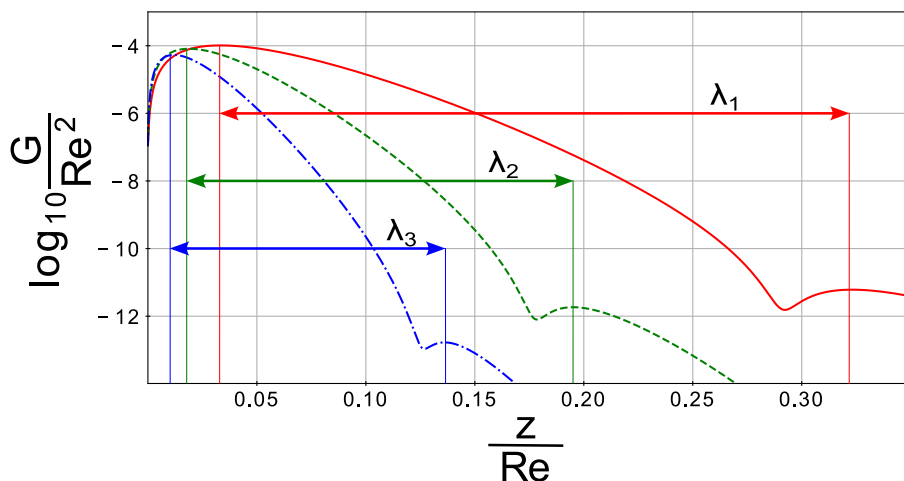


Рис. 3.19: Кривые пространственного оптимального роста  $\omega = 0$  для течения в трубе,  $Re = 3000$ .  $m = 1$  – красная сплошная линия,  $m = 2$  – зеленая пунктирная линия,  $m = 3$  – синяя штрихпунктирная линия.

модами.

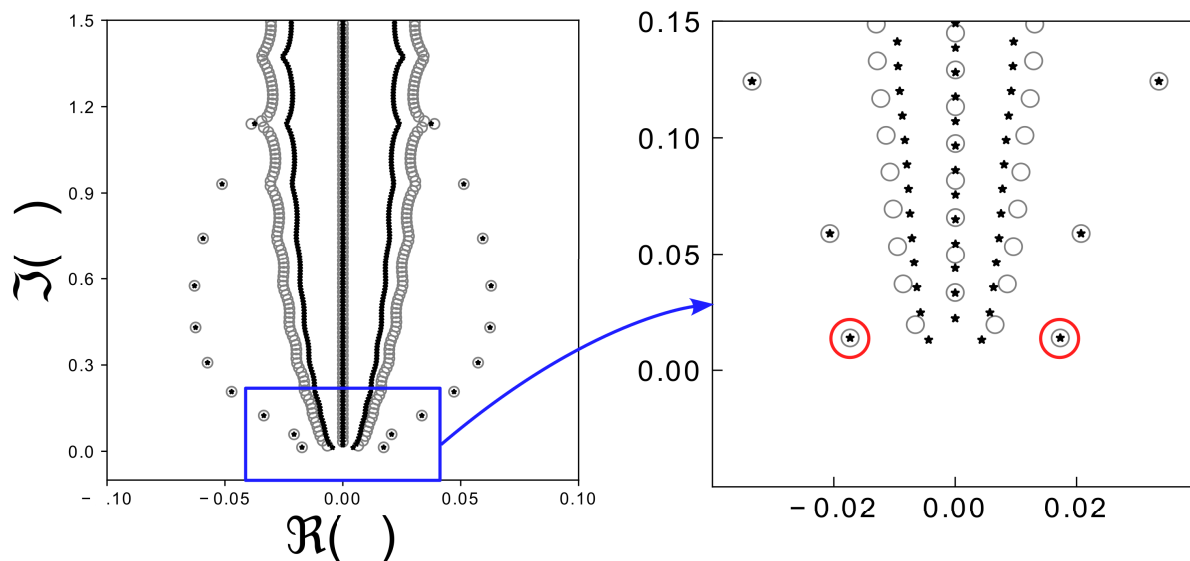


Рис. 3.20: Пространственный спектр струйного течения для  $\omega = 0$ ,  $m = 2$ ,  $\delta = 0.16$ ,  $Re = 500$ .  $\circ$ ,  $\star$  представляют спектры, вычисленные для  $R_{out} = 200$  и  $R_{out} = 300$  соответственно. Наименее затухающие дискретные собственные значения обведены красным.

Основываясь на этих наблюдениях, построена простая модель, которая демонстрирует это поведение энергии. Рассмотрим систему обыкновенных автономных дифференциальных уравнений:

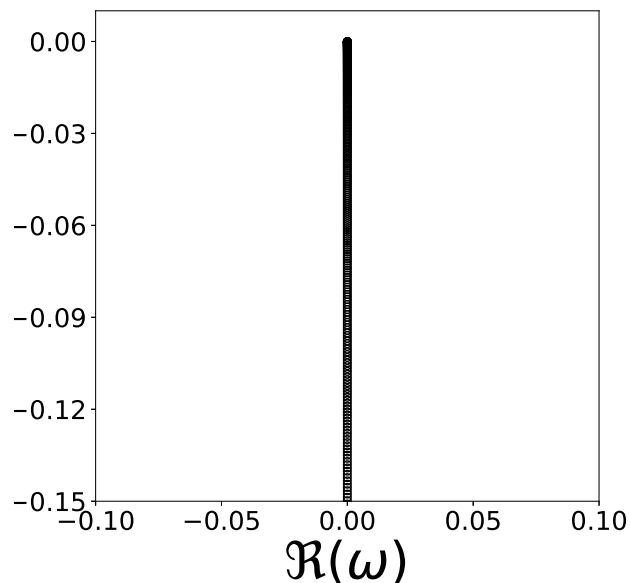


Рис. 3.21: Временной спектр струйного течения для  $\alpha = 0, m = 2, \delta = 0.16, \text{Re} = 500$ .

$$\frac{d\mathbf{f}}{dz} = \begin{pmatrix} -1+i & 0 \\ 10 & -1-i \end{pmatrix} \mathbf{f}. \quad (3.26)$$

Собственные моды этой системы имеют вид:

$$\mathbf{f}_1(z) = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 1 \\ -5i \end{pmatrix} e^{(-1+i)z}, \quad \mathbf{f}_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1-i)z}. \quad (3.27)$$

Вычисляем матрицу Грама базиса собственных мод (3.27):

$$E(z) = e^{-2z} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5i}{\sqrt{26}} e^{-2iz} \\ -\frac{5i}{\sqrt{26}} e^{2iz} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Формулируем вариационную задачу для оптимальных возмущений в такой системе, здесь  $\mathbf{v}$  — вектор спектральной проекции для возмущения, аналогично (3.16):

$$\mathbf{v}^\dagger E(z) \mathbf{v} \rightarrow \max, \quad \text{при условии} \quad \mathbf{v}^\dagger E(0) \mathbf{v} = 1. \quad (3.29)$$

Как и в (3.17), получаем задачу на собственные значения:

$$E(z)\mathbf{v} = \lambda E(0)\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \det(E(z) - \lambda E(0)) = 0. \quad (3.30)$$

Решая квадратное уравнение из (3.30), находи наибольшее собственное значение системы, численно равное энергетическому приросту оптимального возмущения:

$$\lambda_{\max}(z) = e^{-2z} \left( 26 - 25 \cos(2z) + \sqrt{(26 - 25 \cos(2z))^2 - 1} \right) \quad (3.31)$$

На графике заметно похожее на полученное ранее (Рис. 3.18) колебательное поведение (Рис. 3.22).

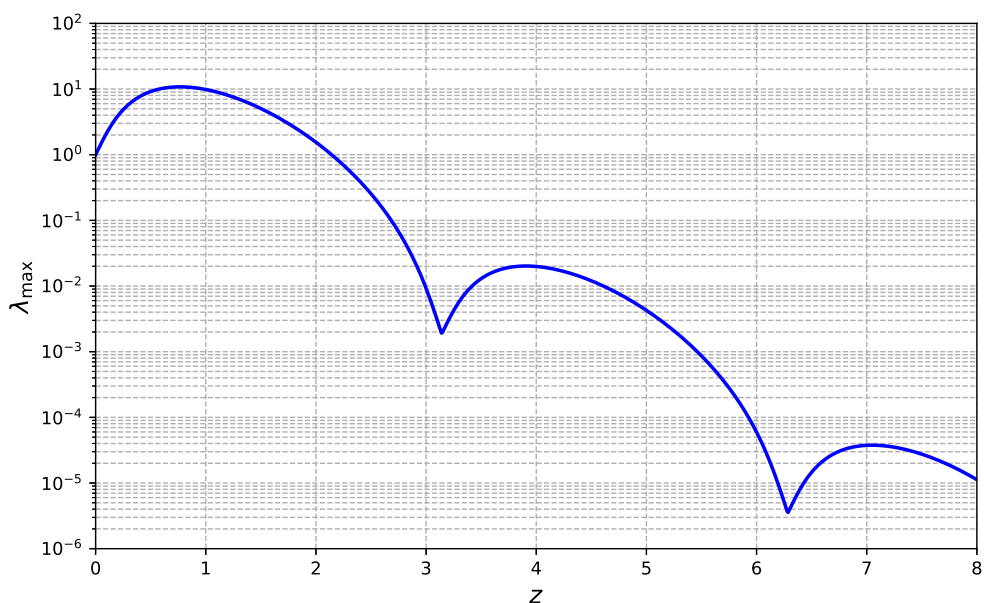


Рис. 3.22: Оптимальный прирост энергии в системе (3.26).

### 3.4 Выводы по третьей главе

Немодальный рост в круглых струях был изучен в задаче пространственной устойчивости. Нестационарные возмущения ( $\omega \neq 0$ ), которые являются растущими, обладали умеренным алгебраическим ростом, т.е. рост возмущения в основном вызывался растущей модой. Отношение оптимального энергетического усиления  $\frac{G}{E_m}$  показало умеренное увеличение с  $\text{Re}$  для лю-

бого набора изученных параметров. Более того, эти результаты подтверждают, что в пространственном случае оптимальное энергетическое усиление для нестационарных возмущений при больших  $z$  ведет себя таким же образом, как во временном случае при больших  $t$  [50]. А именно, алгебраический рост накачивает энергию в неустойчивую моду, и после её насыщения  $\frac{G}{E_m} \rightarrow \text{const}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Возмущения с  $\omega = 0$  обладали типичным поведением чистого алгебраического роста. Подтверждён закон масштабирования  $G \sim \text{Re}^2$  в этом случае для всех изученных значений  $m$  и  $\delta$ . Кроме того, обнаружено, как из графиков энергии, так и из визуализаций возмущений, что существуют два различных механизма немодального роста возмущений, а именно механизм «lift-up» для  $m = 2, 3, \dots$  и механизм «shift-up» для  $m = 1$ . Более того, обнаружено, что с изменением толщины потери импульса  $\delta$  энергия глобального оптимального возмущения изменяется достаточно слабо, в то время как область, занятая возмущением в потоке, увеличивается.

Обсуждена связь между длиной волны осцилляций энергии оптимального возмущения и длинами волн двух наименее затухающих дискретных мод в пространственном случае. Был сделан вывод, что колебательное поведение обеспечивается исключительно этими двумя модами.

В главе представлены результаты исследования немодального роста пространственных возмущений в круглых затопленных струях. Это может в дальнейшем расширить наши знания о том, как пространственные возмущения развиваются в струйном течении. Быстрые изменения, которые происходят на коротком расстоянии вниз по течению, имеют потенциал изменить форму течения. В результате может реализоваться байпасный сценарий перехода к турбулентности, препятствующий развитию неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Чтобы точно оценить истинный потенциал подобного управления течением, необходимо оценить возможность контролируемого использования стационарных оптимальных возмущений. Однако эта оценка может быть выполнена только через решение нелинейной задачи для основного течения, возмущенного оптимальным возмущением. Это означает, что течение, которое испытывает переходный рост возмущений, может стать менее чувствительным к неустойчивости

Кельвина-Гельмгольца (это было проиллюстрировано для временных возмущений [52]). Эти методы являются естественным продолжением исследований, представленных в текущей главе.

Дальнейшее развитие теоретических и экспериментальных исследований немодальных возмущений и их эволюции [53] может способствовать совершенствованию методов управления струйными течениями в различных прикладных задачах. Естественным продолжением данной работы является исследование возможности модификации характеристик течения (спектра турбулентности, интенсивности эжекции, восприимчивости, скорости роста волн Кельвина-Гельмгольца и др.) посредством введения управляемых алгебраических возмущений. Дальнейшее обсуждение представлено в главе 4.

## 4 Анализ механизмов немодального роста в ламинарной струе на основе результатов экспериментального исследования <sup>1</sup>

В предыдущей главе обсуждались пространственные оптимальные возмущения для модельных струй. Для описания профиля их основной скорости использовалось семейство профилей скорости, предложенное в [44]. Несмотря на то, что форма и энергия оптимальных возмущений слабо зависят от толщины потери импульса слоя смешения  $\delta$ , для реальных струй, профиль скорости которых может значительно отличаться от модельного, необходимо проводить отдельное исследование.

### 4.1 Исследуемое струйное затопленное течение с длинным ламинарным участком

#### Формирующее струю устройство

Затопленная струя воздуха формируется устройством, состоящим из трех частей (рис. 4.1(а, б)). Первая часть — перфорированная пластина, выравнивающая поток, поступающий из воздушной магистрали (диаметр входного сечения устройства составляет 0.04 м). Вторая часть — втулка с двумя металлическими сетками, которая снижает уровень турбулентности до 0.1%. Третья часть — диффузор, расширяющий поток до диаметра  $D = 0.12$  м. На выходе из диффузора установлены две тонкие металлические сетки для предотвращения отрыва потока. Экспериментальная установка подробно описана в работе [57]. Сформированное струйное течение остается ламинарным на осевом расстоянии до  $5D$  и более, что позволяет отслеживать эволюцию вносимых возмущений на больших расстояниях от среза.

Для рассматриваемого течения существует оптимальный диапазон чи-

---

<sup>1</sup>При подготовке данной главы диссертации использовались следующие публикации автора, в которых, согласно «Положению о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова», отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [53–56].

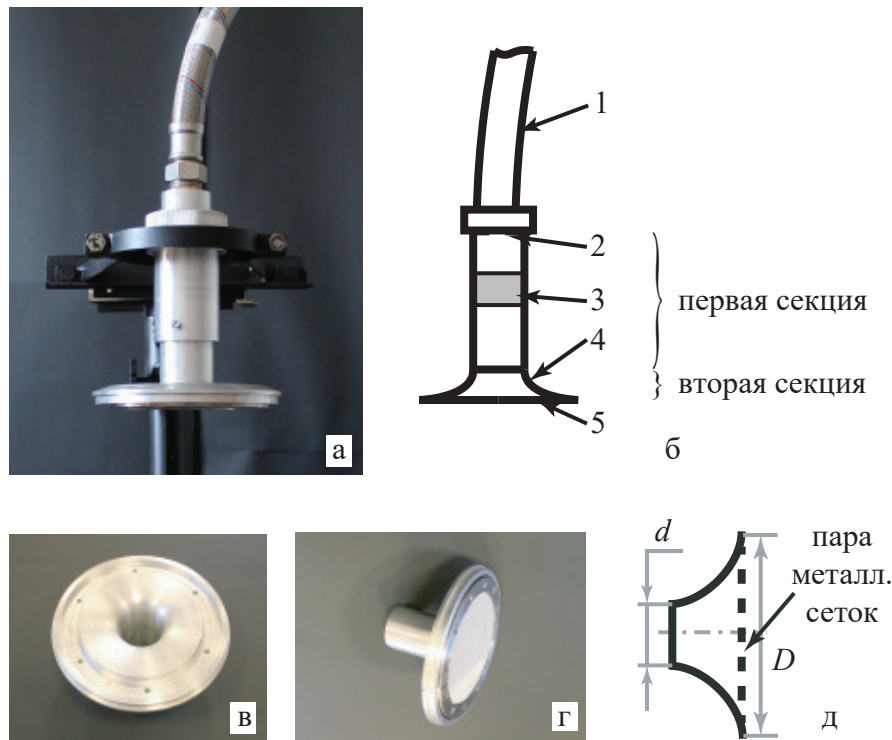


Рис. 4.1: Фотография (а) и схема (б) формирующего устройства: трубопровод (1), перфорированная пластина (2) и втулка с двумя металлическими сетками (3), диффузор (4) с металлическими сетками (5). Фотография диффузора без (в) и с (г) металлическими сетками и его схема (д).

сел Рейнольдса, в котором длина ламинарного участка максимальна ( $\geq 5D$ ), что позволяет отслеживать эволюцию вносимых возмущений на больших расстояниях от среза. В данной работе выбран один режим из этого диапазона, при котором скорость воздушного потока на оси струи составляет  $U_c = 1.5$  м/с, а средняя скорость равна  $U_{avg} = 0.66$  м/с. Это соответствует числу Рейнольдса  $Re_D = 5400$ , рассчитанному по средней скорости и диаметру, и числу Рейнольдса  $Re = 6122$ , рассчитанному по максимальной скорости и радиусу струи.

В теоретическом анализе удобно использовать аналитический профиль скорости, который можно получить аппроксимацией рассчитанного базового профиля скорости, вычисленного на сетке конечных объемов, так как это позволяет легко получить первую и вторую производные, избегая ошибок, связанных с дифференцированием функции, заданной на сетке. Для получения гладких профилей скорости использован расчет ламинарного течения (ANSYS CFX) в осесимметричной области, включающей формирующее устройство и внешнее пространство. Сетки моделировались

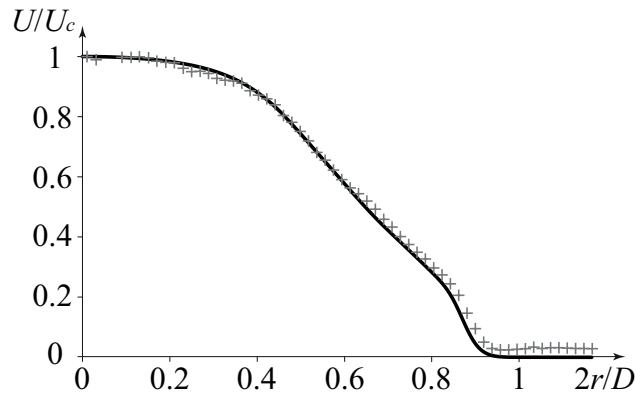


Рис. 4.2: Профиль скорости струи. Крестиками показаны экспериментальные значения, полученные с помощью термоанемометра, сплошной линией показан профиль, используемый в теоретическом анализе.

как пористая среда с параметрами, определенными экспериментально. Расчетные профили хорошо согласуются с экспериментальными данными до  $x/D \leq 1.5$ , небольшие расхождения на  $x/D = 3$  признаны приемлемыми [57]. В дальнейших расчетах использовался аналитический профиль, который был построен для аппроксимации результатов расчета, моделирующих экспериментальную установку (рис. 4.2). Эволюция невозмущенного профиля струи вниз по потоку является слабой [58] и в теоретическом анализе не учитывается.

## 4.2 Методика расчета оптимальных возмущений для профиля рассматриваемой струи

Подробное изложение понятия оптимальных возмущений и методов их расчета приведено ранее в главе 3. В данной главе они будут лишь кратко повторены для полноты изложения. Идея оптимальных возмущений заключается в выборе такой комбинации возмущений из набора собственных мод, которая приведет к наибольшему увеличению кинетической энергии возмущений при росте от начального сечения до заданного сечения  $z$ . Для линеаризованных уравнений Навье-Стокса (3.2) с граничными условиями (3.3) ищется набор собственных мод в виде (3.8). При заданной вещественной частоте  $\omega$  и целом азимутальном волновом числе  $m$  решается задача на собственные значения  $\alpha$  с использованием спектрального метода [40],

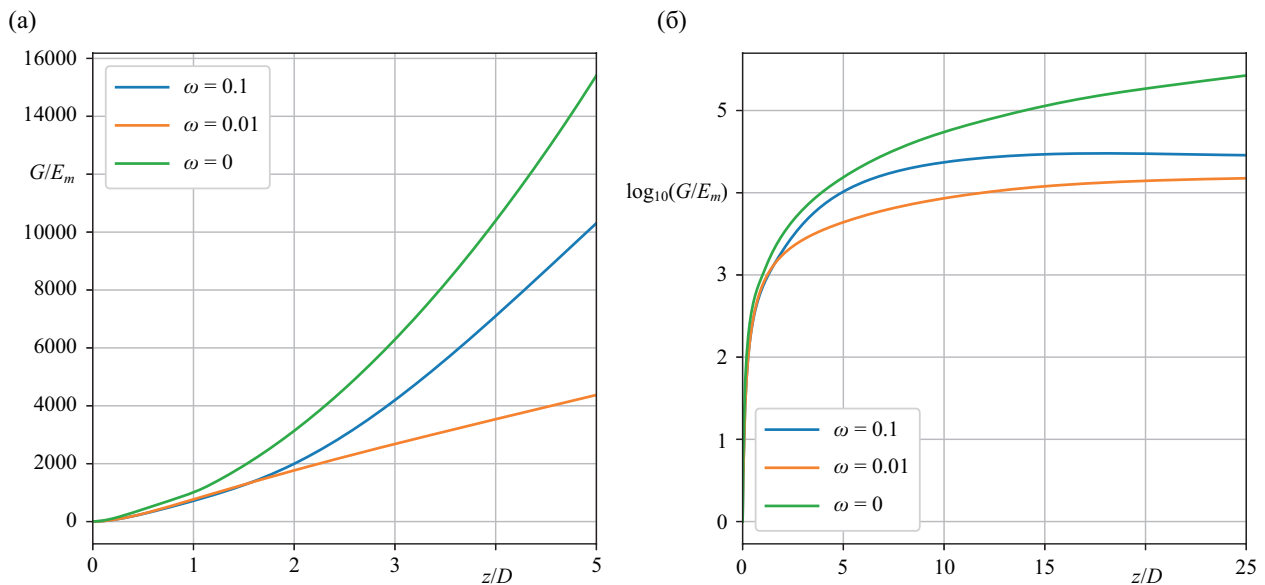


Рис. 4.3: Отношение энергии оптимального возмущения к энергии наиболее быстро растущей собственной моды для различных частот для  $m = 1$ : а)  $z/D \leq 5$ ; б)  $z/D \gg 1$ .

подробно описанного в главе 2. Таким образом, находятся  $N$  собственных значений  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Как и ранее в качестве меры оптимальности возмущений используется их кинетическая энергия (3.13). Произвольное возмущение можно представить в виде:  $\mathbf{q}(r, \theta, z, t) = \sum_{j=1}^N \gamma_j \mathbf{q}_j(r) e^{i(\alpha_j z + m\theta - \omega t)}$ , где  $\mathbf{q} = (F, G, H, P)$  — вектор состояния системы,  $\alpha_j$  и  $\mathbf{q}_j$  —  $j$ -е собственное значение и соответствующий собственный вектор соответственно. Возмущения с  $\text{Im}(\alpha) < 0$  могут быть ложно приняты за неустойчивые, тогда как на самом деле они представляют возмущения выше по течению от генератора возмущений. Метод отбора мод, применяемых в разложении подробно изложен в главе 3.

### 4.3 Результаты расчетов

В [35] и в предыдущей главе 3 было показано, что для нескольких типов струйных течений стационарные возмущения (т.е. возмущения с  $\omega = 0$ ) демонстрируют наибольший немодальный рост. Для рассматриваемого профиля также показано, что стационарные возмущения являются наиболее оптимальными. Примеры показаны на рис. 4.3 и 4.4, где отношение макси-

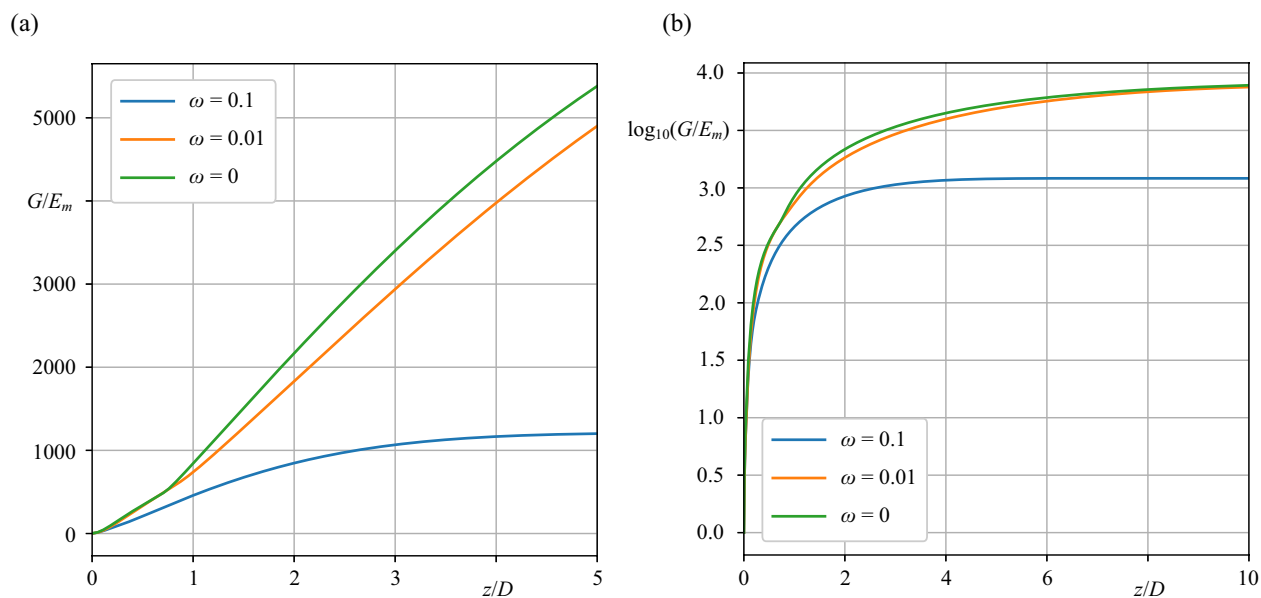


Рис. 4.4: Отношение энергии оптимального возмущения к энергии наиболее быстро растущей собственной моды для различных частот для  $m = 5$ : а)  $z/D \leq 5$ ; б)  $z/D \gg 1$ .

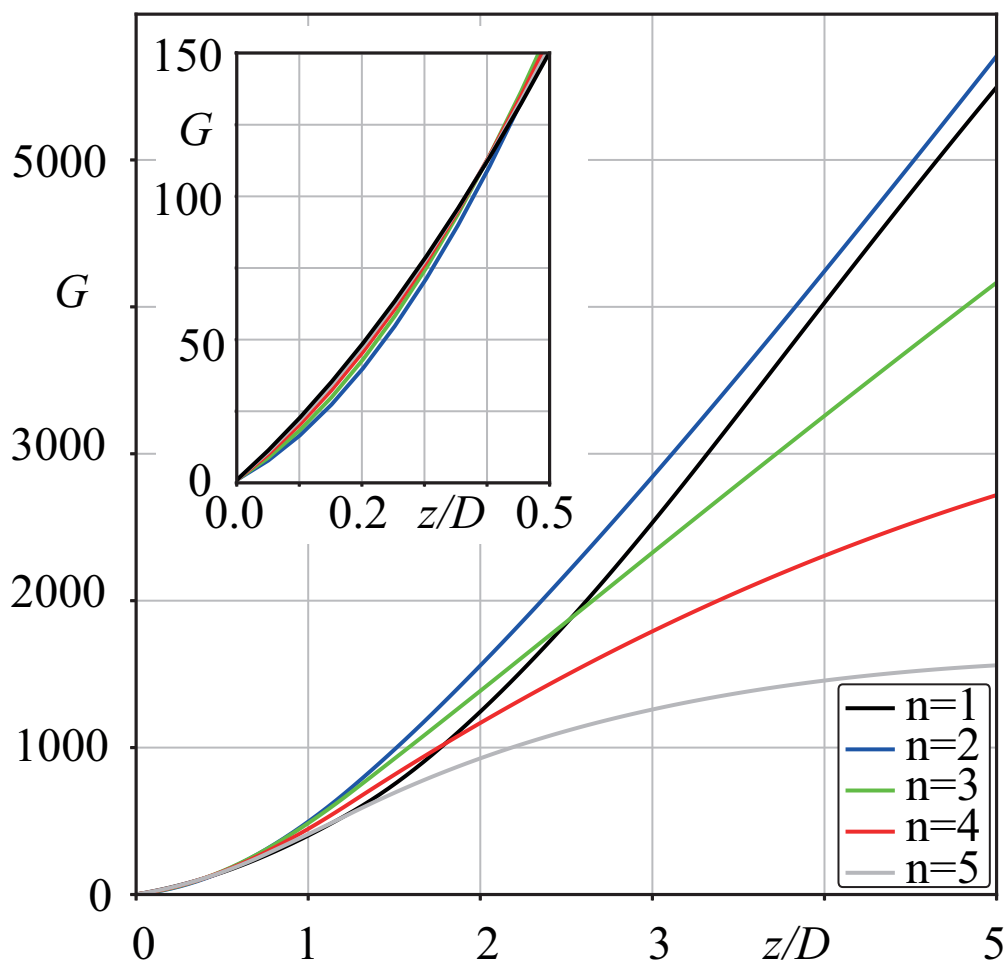


Рис. 4.5: Рост энергии стационарных оптимальных возмущений для различных азимутальных чисел  $m$ : а)  $z/D \leq 5$ ; б)  $z/D \gg 1$ .

мальной относительной кинетической энергии  $G$  всех возмущений

$$G(z) = \max \frac{E(z)}{E(0)}$$

от расстояния вниз по течению (Рис. 4.5) для различных азимутальных чисел  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ . Каждая кривая на Рис. 4.5 изображает огибающую семейства кривых для относительной кинетической энергии всех возможных стационарных возмущений для данного  $m$ . Видно, что при малых значениях  $z$  возмущения с разными  $m$  растут с близкими скоростями (быстрее всего для  $m = 1, 5$ ), но с увеличением  $z$  видно, что возмущение с  $m = 3$ , затем с  $m = 2$  и затем с  $m = 1$ .

Отметим, что в нашем исследовании рассматриваются стационарные возмущения, т.е.  $\omega = 0$ . Известно, что при  $\omega = 0$  все собственные моды линеаризованных уравнений Навье-Стокса либо затухают, либо нейтральны (это также было проверено для профиля скорости струи). Следовательно, рост возмущения априори не может быть порожден одной модой, и в этом смысле он по определению является «немодальным». Таким образом, рост стационарного возмущения вниз по потоку может быть объяснен только ограниченным ростом комбинации затухающих мод. Комбинация затухающих мод действительно может расти вследствие несамосопряженности линеаризованного оператора Навье-Стокса и неортогональности его собственных векторов, как было ранее указано в главе 3.

Видно, что для малых значений  $z$  возмущения с разными  $m$  растут с одинаковой скоростью, но по мере увеличения  $z$  меньшему  $m$  соответствует больший рост возмущений. Для классических профилей скорости немодальный рост осесимметричных возмущений,  $m = 0$ , обусловленный механизмом Орра, значительно слабее, чем для  $m \neq 0$ , где активен механизм «lift-up» [37]. Тот же результат получен для нашего профиля скорости: для осесимметричных возмущений  $m = 0$  оптимальный энергетический прирост  $G$  был мал для всех  $z$ .

Поскольку невозмущенный профиль осесимметричен, для каждого  $m \neq 0$  существует решение, закрученное против часовой стрелки, и аналогичное решение, закрученное в противоположном направлении для  $-m$ . Таким

образом, чтобы получить оптимальное решение без закрутки, выполняются следующие шаги:

$$\tilde{q}^m(r, \theta, z) = \frac{q^m(r, \theta, z) e^{im\theta} + q^{-m}(r, \theta, z) e^{-im\theta}}{2},$$

где  $q^m$  — оптимальное возмущение для данного  $m$  и  $\omega = 0$ . Три оптимальных возмущения — два с закруткой в противоположных направлениях и одно без закрутки — эквивалентны и имеют одинаковую скорость роста.

Визуализации оптимальных возмущений для  $z$ , где  $G(z)$  достигает своего максимума, показаны ниже на Рис. 4.6, где продольная компонента возмущения скорости показана цветом, линии тока нарисованы для поперечных скоростей, а белый круг представляет собой границу невозмущенной струи.

Как видно, случаи  $m = 1$  и  $m > 1$  различаются своей пространственной структурой. В случае  $m = 1$  оптимальное возмущение effectively представляет собой сдвиг струи, называемый эффектом «shift-up» [37]. Этот сдвиг, due to переносу более быстрых слоев из ядра струи в сдвиговый слой, приводит к увеличению продольной скорости в направлении сдвига и, наоборот, к уменьшению продольной скорости в противоположном направлении. В случае  $m > 1$  оптимальное возмущение состоит из нескольких вихревых структур (количество которых равно  $2m$ ), которые формируют «лепестки» ускорения и замедления струи из-за перемещения более быстрых слоев жидкости в медленные и наоборот. Эта структура напоминает эффект «lift-up» в пограничном слое.

Графики продольной и поперечной скоростей возмущения для  $m = 2$ , которые являются оптимальными в некотором сечении, показаны на Рис. 4.7 как функция продольной координаты  $z/D$  при  $2r/D = 0.75$ . Видно, что продольная скорость увеличивается приблизительно линейно, в то время как поперечные скорости практически не меняются. Эти свойства — развитие возмущений продольной скорости при сохранении продольных вихрей — характерны для немодального механизма роста возмущений. Так же, как и для струйных течений, рассмотренных [35], для рассматриваемого профиля оптимальные возмущения имеют сложную трехмерную структуру и, соответственно, трудны в своей экспериментальной реализации. Тем

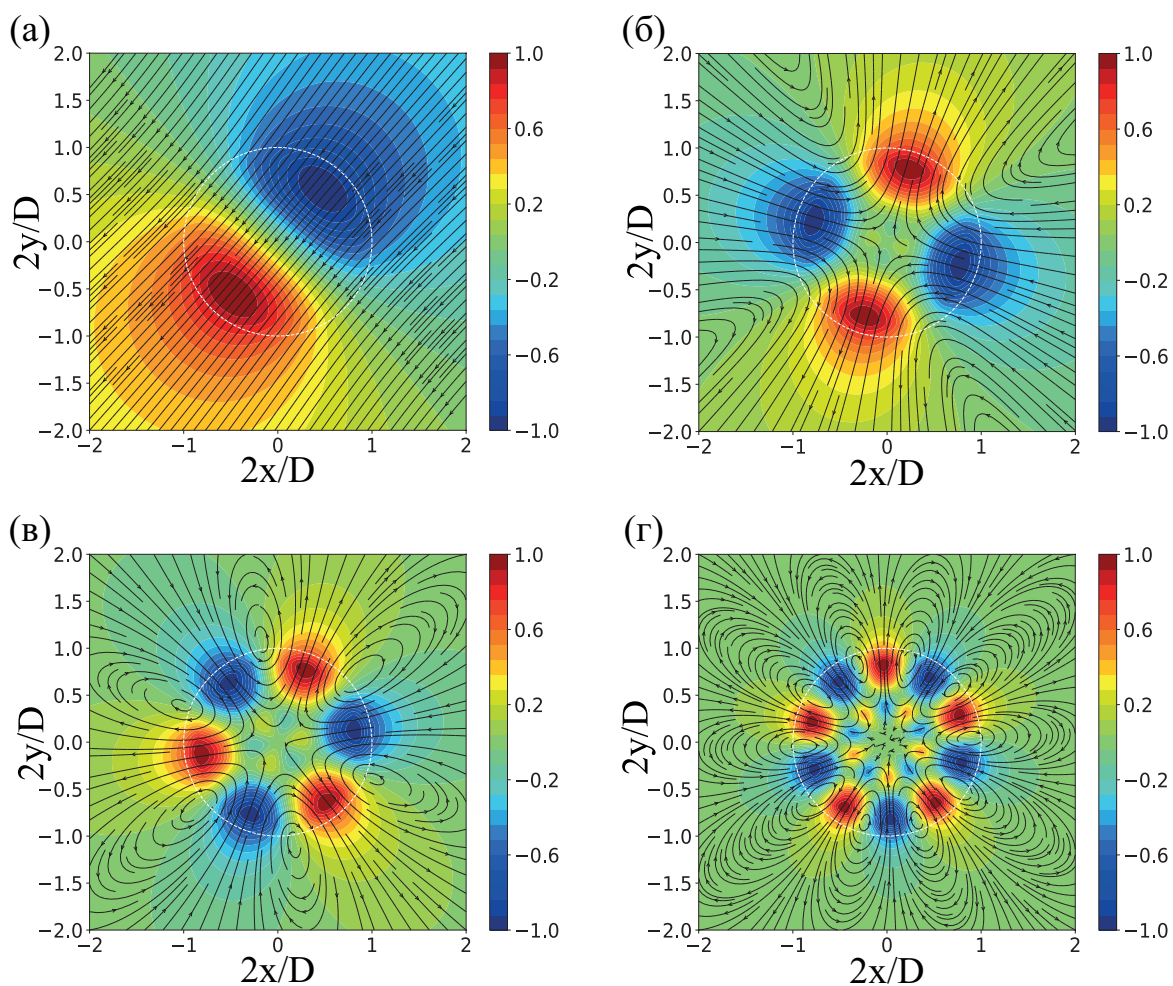


Рис. 4.6: Распределение продольной компоненты скорости оптимального возмущения и линии тока в поперечном сечении струи для (а)  $n = 1$ , (б)  $n = 2$ , (в)  $n = 3$ , (г)  $n = 5$ . Координата  $z$  поперечного сечения выбрана такой, в которой достигается глобальный максимум энергии.

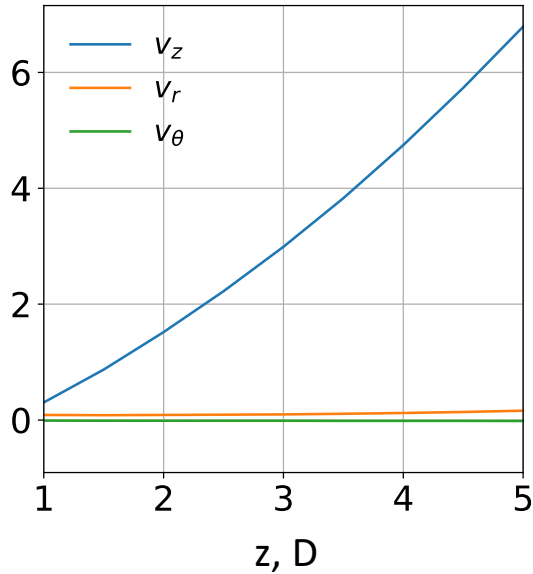


Рис. 4.7: Компоненты скорости оптимального возмущения для  $n = 2$  при  $2r/D = 0.75$ .

не менее, в работе [53] с помощью специальных «дефлекторов» предпринята попытка создать возмущения, качественно близкие к теоретически оптимальным.

#### 4.4 Сравнение эксперимента с теорией

Для полноты изложения приведем сравнение результатов расчетов проведенных ранее с экспериментами из работы [53].

Как было показано выше, эволюция вносимого возмущения довольно хорошо соответствует качественным особенностям теоретических оптимальных возмущений. А именно, были подтверждены следующие характерные черты механизма роста «lift-up». Во-первых, поперечная скорость остается приблизительно постоянной вниз по потоку. Во-вторых, осевая скорость возрастает вниз по потоку приблизительно линейно. И наконец, поперечное движение имеет структуру, напоминающую вихри, переносящую внешние слои жидкости внутрь, а внутренние слои наружу. Например, на рис. 4.8 показано сравнение поперечного движения теоретического оптимального возмущения (соответствующего рис. 4.6с) и наблюдаемого в

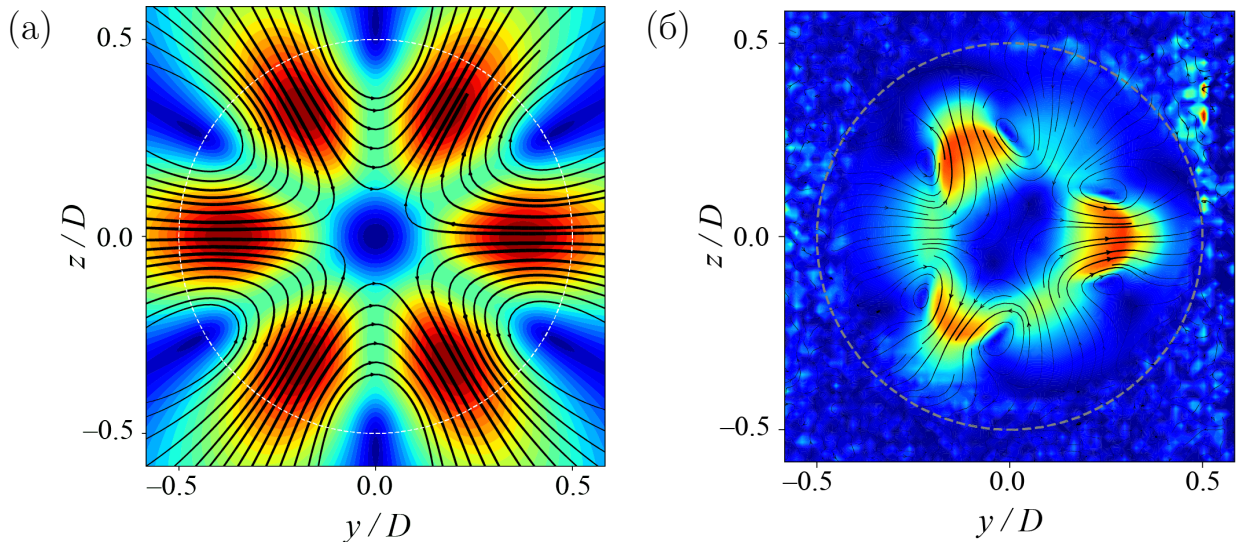


Рис. 4.8: Сравнение полей течения в поперечном сечении для теоретически оптимального возмущения (а) и эксперимента при  $\varepsilon = 0.05$  (б). Цветная заливка соответствует поперечным скоростям возмущения для  $m = 3$ , нормализованным по его максимальному значению.

эксперименте. Видно, что вихревые структуры качественно схожи: 6 вихрей, которые переносят быстрые слои наружу, а медленные — внутрь струи. Это движение вызывает локальное увеличение возмущения осевой скорости, что является аналогом полосчатых структур в пристенных течениях.

## 4.5 Выводы по четвёртой главе

Численно были исследованы оптимальные возмущения для профиля скорости ламинарной затопленной струи, наблюдаемой в экспериментальной установке. Обнаружено качественное совпадения характера возмущений в реальной струе с теми, что были вычислены для модельных струй. Сравнение теоретического расчета с экспериментом, проведенное в [53] показало хорошее качественное совпадение расчетных структур и зависимостей и теоретических. В [53] впервые экспериментально идентифицирован немодальный механизм роста возмущений в струйном течении, являющийся аналогом механизма «lift-up» в пристенных течениях. Были подтверждены следующие характерные особенности механизма, совпадающие с теоретическими:

1. поперечная скорость остается приблизительно постоянной вниз по по-

току;

2. осевая скорость возрастает вниз по потоку приблизительно линейно;
3. поперечное движение имеет форму вихрей, переносящих внешние слои жидкости внутрь, а внутренние слои наружу. Это движение вызывает локальное увеличение возмущения осевой скорости, что является аналогом полосчатых структур в пристенных течениях.

## 5 Оптимальный отклик струи на внешнее гармоническое воздействие

Настоящая глава посвящена анализу отклика круглой затопленной струи на внешнее гармоническое воздействие (распределенную силу). Ключевым математическим инструментом анализа является резольвента оператора эволюции — линейный оператор, связывающий внешнее воздействие с установившимся откликом системы при фиксированной частоте. Норма резольвенты определяет максимальный возможный отклик системы на внешнее воздействие и служит мерой чувствительности течения к возмущениям.

### 5.1 Постановка задачи о вынужденных возмущениях и резольвента

В настоящем разделе рассматривается задача о вынужденных колебаниях круглой затопленной струи под действием гармонической распределённой массовой силы. Эволюция возмущений описывается линеаризованными уравнениями Навье–Стокса (Рис. 5.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}' + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

с граничными условиями:

$$\mathbf{u}' \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad \|\mathbf{u}'\| < +\infty \quad \text{при} \quad r = 0. \quad (5.2)$$

Здесь  $\mathbf{U} = (U(r), 0, 0)$  — осесимметричное основное течение,  $\mathbf{u}'$  и  $p'$  — возмущения скорости и давления,  $\text{Re}$  — число Рейнольдса, определяемое, как и ранее, по максимальной скорости струи и радиусу сопла формирующего устройства,  $\mathbf{f}$  — внешняя распределённая сила.

Перепишем систему уравнений (5.1) в операторной форме [48]:

$$\frac{\partial \mathcal{B} \mathbf{q}'}{\partial t} = \mathcal{A} \mathbf{q}' + \mathbf{q}_f(\mathbf{x}, t), \quad (5.3)$$

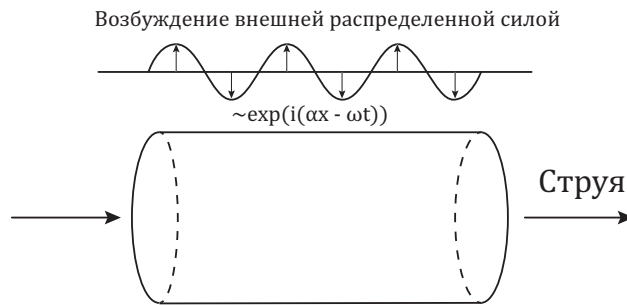


Рис. 5.1: К постановке задачи об оптимальном отклике струи.

где  $\mathbf{q}' = \langle u', v', w', p' \rangle$  — вектор состояния системы,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  — операторы получаемые из линеаризованных уравнений Навье–Стокса. Выражения для операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -U \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 - \frac{1}{r^2} & -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{dU}{dr} & -\frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -U \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 - \frac{1}{r^2} & 0 & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & -U \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа в цилиндрических координатах,  $\text{Re}$  — число Рейнольдса.

Предположим, что внешнее возмущение гармонически зависит от времени  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . Решение такой задачи состоит из двух частей — однородной  $\mathbf{u}'_h$  и неоднородной  $\mathbf{u}'_p$ . В этом случае неоднородное решение ищется в виде  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}'(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ . Уравнение для неоднородного решения  $\mathbf{u}'_p$  можно записать в следующем виде:

$$(-i\omega\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{u}'_p = \mathbf{f}, \quad (5.6)$$

или, обращая оператор в выражении слева:

$$\mathbf{u}'_p = (-i\omega\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1}\mathbf{f}. \quad (5.7)$$

Ключевой объект в этом соотношении  $\mathcal{R}(\omega) = (-i\omega\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1}$  называется резольвентой. В случае отсутствия растущих собственных мод резольвенту можно интерпретировать как оператор, который отображает входное воздействие на систему в установившийся отклик на заданной частоте. Естественным образом возникает вопрос: насколько большим может быть отклик системы на внешнее воздействие при заданной частоте? Допустим, что для измерения величины (нормы) внешнего воздействия и отклика на него используется кинетическая энергия в некотором объеме  $V$ :

$$\|\mathbf{u}'_p\| = \frac{1}{2} \int_V (u_p^2 + v_p^2 + w_p^2) dV. \quad (5.8)$$

В этом случае, для измерения величины отклика системы вводится величина  $R(\omega)$ , определяемая как максимально возможное отношение нормы отклика к норме вынуждающей силы:

$$R(\omega) = \max_{\mathbf{f}} \frac{\|(-i\omega\mathcal{B} - \mathcal{A})^{-1}\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}. \quad (5.9)$$

Величина  $R(\omega)$  называется операторной нормой оператора резольвенты  $\mathcal{R}(\omega)$  и имеет прямой физический и математический смысл. С точки зрения функционального анализа,  $R(\omega)$  представляет собой операторную норму резольвенты  $\mathcal{R}(\omega)$ , определяемую как

$$R(\omega) = \|\mathcal{R}(\omega)\| = \sup_{\mathbf{f} \neq 0} \frac{\|\mathcal{R}(\omega)\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}.$$

Операторная норма — это естественное обобщение понятия длины вектора на случай линейных операторов. Она измеряет, насколько сильно оператор может «растянуть» входной вектор. Например, в конечномерном случае операторная норма, индуцированная евклидовой нормой (например такой, как (5.8)) векторов, равна наибольшему сингулярному числу матрицы. Физический смысл  $R(\omega)$  заключается в следующем: эта величина показывает,

во сколько раз система может максимально усилить внешние колебания заданной частоты  $\omega$ . Значение  $\mathbf{f}_{opt}$ , доставляющее супремум в определении  $R(\omega)$ , называется оптимальным воздействием. Это внешнее возмущение, пространственная структура которого наиболее эффективно возбуждает отклик системы на частоте  $\omega$ . Соответствующий отклик

$$\mathbf{u}_{opt} = \mathcal{R}(\omega)\mathbf{f}_{opt}$$

называется оптимальным откликом и представляет собой структуру возмущения в потоке, которая достигает максимальной амплитуды при заданной частоте.

Рассмотрим выражение резольвенты в базисе собственных мод. Пусть  $\mathcal{F}$  — оператор перехода, диагонализующий пару операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{F} = \Lambda, \quad \mathcal{F}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{F} = \mathcal{I}, \quad (5.10)$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица собственных значений  $\lambda_i$ , а  $\mathcal{I}$  — тождественный оператор. Тогда отклик системы в терминах коэффициентов разложения по собственному базису  $\boldsymbol{\gamma} = \mathcal{F}^{-1}\mathbf{u}'$  принимает вид:

$$\boldsymbol{\gamma} = \text{diag} \left( \frac{1}{\lambda_1 - \omega}, \dots, \frac{1}{\lambda_N - \omega} \right) \boldsymbol{\gamma}_f \quad (5.11)$$

где  $\boldsymbol{\gamma}_f = \mathcal{F}^{-1}\mathbf{f}$  — коэффициенты разложения внешнего воздействия. Для нормы резольвенты справедливо следующее фундаментальное неравенство [59]:

$$\frac{1}{\text{dist}(\omega, \{\lambda_n\}_{n=1}^N)} \leq R(\omega) \leq \frac{\text{cond}(\mathcal{F})}{\text{dist}(\omega, \{\lambda_n\}_{n=1}^N)}, \quad (5.12)$$

где  $\text{dist}(\omega, \{\lambda_n\}_{n=1}^N)$  — расстояние от частоты вынужденных колебаний до спектра, а  $\text{cond}(\mathcal{F})$  — число обусловленности матрицы собственных векторов. В случае самосопряженных систем, когда все собственные вектора попарно ортогональны,  $\mathcal{F} = \mathcal{I}$  и  $\text{cond}(\mathcal{F}) = 1$ . Получается, что число обусловленности матрицы собственных векторов отражает степень их попарной неортогональности. Из анализа этого выражения следуют два принципиально разных механизма усиления отклика:

1. Если частота вынужденных колебаний  $\omega$  близка к какому-либо собственному значению, то знаменатель (5.12) становится очень маленьким, что приводит к огромному отклику. Это случай классического резонанса.
2. Если система сильно несамосопряженная, то число обусловленности  $\text{cond}(\mathcal{F})$  велико. В этом случае большой отклик может наблюдаться даже тогда, когда частота вынужденных колебаний далека от спектра. Это является прямым следствием неортогональности собственных векторов. Это случай вне резонансного усиления или псевдорезонанса.

Для вычисления нормы оператора  $\mathcal{R}(\omega)$  используется сингулярное разложение [60]:

$$\mathcal{R}(\omega)\mathbf{v}_1 = \sigma_1\mathbf{u}_1 \quad (5.13)$$

здесь  $\sigma_1$  — наибольшее сингулярное число оператора  $\mathcal{R}(\omega)$  (численно равное  $R(\omega)$ ),  $\mathbf{v}_1$  — правый сингулярный вектор (искомый вектор оптимального воздействия), а  $\mathbf{u}_1$  — левый сингулярный вектор (форма отклика, соответствующая этому максимальному усилению). Таким образом, задача сводится к нахождению наибольшего сингулярного числа и соответствующих векторов для резольвенты.

## 5.2 Численный алгоритм

В качестве основного течения используется описанный в главе 4 профиль скорости струи, аппроксимирующий экспериментальный профиль.

Поскольку система однородна по всем направлениям, кроме  $r$ , исследуем отклик для отдельных гармоник:

$$\mathbf{u}'(r, \theta, x) = \hat{\mathbf{u}}(r)e^{i(\alpha x + m\theta)}, \quad (5.14)$$

где  $\alpha$  — продольное волновое число,  $m$  — азимутальное волновое число. Тогда исходная система преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, частное решение которой выражается через ре-

зольвенту:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\alpha,m} = \mathcal{R}_{\alpha,m} \hat{\mathbf{f}}_{\alpha,m}. \quad (5.15)$$

Численный метод, используемый для дискретизации уравнений, подробно описан в главах 2, 3. После дискретизации для каждого  $\alpha$  и  $m$  получаем задачу на поиск наибольшего сингулярного числа матрицы:

$$\mathbf{R}(\omega, \alpha, m) = \sigma_{\max} [(-i\omega \mathbf{B}_{\alpha,m} - \mathbf{A}_{\alpha,m})^{-1}]. \quad (5.16)$$

где матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  являются дискретизациями соответствующих операторов. Для вычисления наибольшего сингулярного значения и сингулярных векторов матрицы  $\mathbf{R}$  без обращения матриц, воспользуемся тем, что наибольшее сингулярное значение для исходной матрицы является наименьшим сингулярным значением для обратной. Кроме того из сингулярного разложения следует, что правый сингулярный вектор, соответствующий наибольшему сингулярному значению исходной матрицы, является левым сингулярным вектором, соответствующим наименьшему сингулярному значению обратной матрицы [60].

### 5.3 Результаты расчётов

Получены зависимости максимального отклика  $R(\omega)$  от частоты  $\omega$  для различных значений  $\alpha \in [0, 11]$  и  $m = 0, \dots, 6$ .

В большинстве случаев частота наиболее энергичного отклика совпадает с частотой наименее устойчивой собственной моды системы — наблюдается резонанс с дискретным спектром (Рис. 5.2). При уменьшении продольного волнового числа  $\alpha$  область частот с существенным усилением ( $R \geq 10$ ) сужается (спектр становится узкополосным, среднее значение отклика внутри этой области возрастает, а также наблюдается низкочастотный резонанс, обусловленный взаимодействием со сплошным спектром оператора. Во всём исследованном диапазоне параметров ( $0 \leq \alpha \leq 11$ ,  $m = 0, \dots, 6$ ) псевдорезонансы (области внерезонансного усиления) не превышали по амплитуде истинные резонансы с собственными модами. Изучение структуры оптимального отклика показало, что оптимальный отклик для малых значений  $\omega$  качественно близок к волнам сплошного спектра,

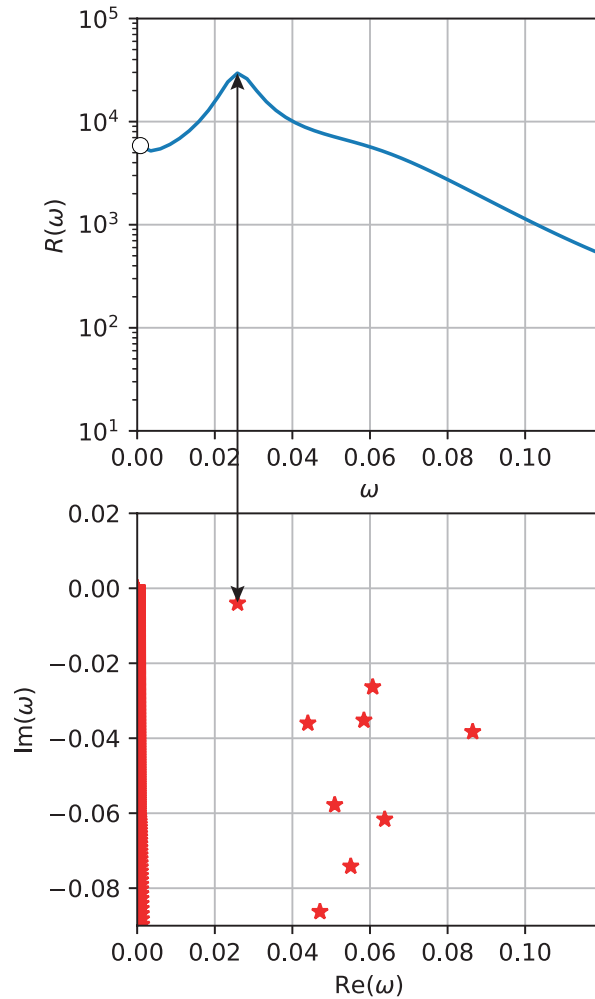


Рис. 5.2: Примеры графика наибольшего отклика и спектра струи при  $m = 3$ ,  $\alpha = 0.1$ . Наибольший отклик среди ненулевых значения частоты соответствует резонансу с собственной модой (резонансный пик на графике и соответствующая собственная мода сопоставлены стрелками). Окрестность  $\omega \approx 0$  проколота, чтобы не показывать резонанс со сплошным спектром, присутствующий во всех расчетах.

в то же время оптимальный отклик для значений, соответствующих собственной моде, близок по форме к ней (Рис. 5.3, 5.4).

## 5.4 Выводы по пятой главе

Проведённое параметрическое исследование показало, что доминирующим механизмом усиления возмущений в затопленной струе является резонанс с наименее устойчивыми собственными модами. Низкочастотный отклик, связанный со сплошным спектром, присутствует во всех режимах. При ма-

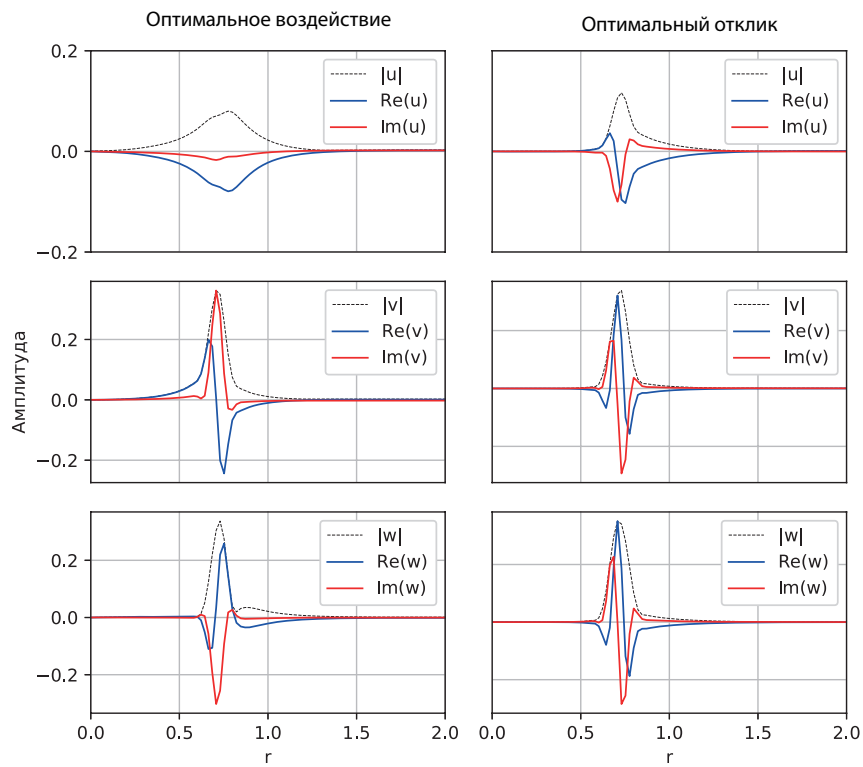


Рис. 5.3: Оптимальная вынуждающая сила и отклик для  $m = 3, \alpha = 5.0, \omega = 1.1$ .

ных  $\alpha$  система демонстрирует более узкополосный отклик с повышенной резонансной амплитудой.

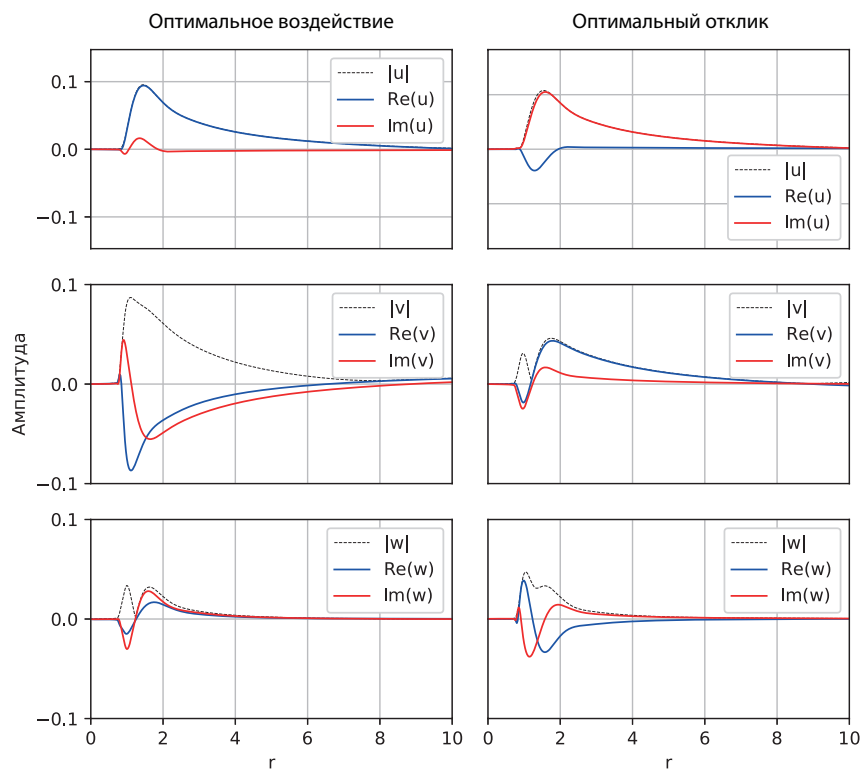


Рис. 5.4: Оптимальная вынуждающая сила и отклик для  $m = 3, \alpha = 5.0, \omega = 0.01$ .

## Заключение

Диссертация посвящена исследованию гидродинамической устойчивости пограничных слоёв над податливыми покрытиями и немодального роста возмущений в струйных течениях. Во введении обоснована актуальность работы, связанная с необходимостью разработки методов управления ламинарно-турбулентным переходом. Главная цель исследования заключается в комплексном анализе механизмов роста возмущений как в пограничных слоях с градиентом давления над податливыми покрытиями, так и в струйных течениях, включая как модальный, так и немодальный подходы.

Во второй главе проведено исследование линейной устойчивости автоточечных пограничных слоёв Фолкнера-Скэна над монолитным вязкоупругим покрытием. Использовалась полная модель вязкоупругого слоя, описываемая уравнениями Ламе с комплексными упругими константами, что позволило учесть продольные перемещения в покрытии и поведение возмущений внутри него. Для прогнозирования положения точки перехода применялся  $e^N$ -метод. Свойства материала покрытия задавались экспериментальными зависимостями модуля Юнга и коэффициента потерь от частоты. Результаты исследования показали, что даже достаточно жёсткое покрытие способно существенно затянуть ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое с благоприятным градиентом давления. Эффект затягивания перехода усиливается с ростом толщины покрытия и скорости набегающего потока. Для течения с параметром Хартри  $\beta = 0.2$  использование податливого покрытия позволило увеличить продольную координату конца перехода на 41%, для  $\beta = 0.1$  — на 37%, в то время как в пограничном слое Блазиуса ( $\beta = 0$ ) эффект составил 32%. Для течений с неблагоприятным градиентом давления влияние покрытия оказалось незначительным вблизи нейтральной кривой, однако смещение изолиний инкремента нарастания возмущений в область больших чисел Рейнольдса приводило к существенному изменению зоны перехода. Эти результаты демонстрируют высокую эффективность монолитных податливых покрытий для управления ламинарно-турбулентным переходом, особенно в течениях с благоприятным градиентом давления.

В третьей главе выполнен детальный анализ пространственных оптимальных возмущений в круглых затопленных струях. Исследование проведено для различных профилей скорости основного течения из семейства профилей Михалке и широкого диапазона параметров, включая различные числа Рейнольдса, частоты возмущений и азимутальные волновые числа. Для стационарных возмущений ( $\omega = 0$ ) подтверждён классический закон квадратичного роста их энергии с числом Рейнольдса ( $G_{\max} \sim \text{Re}^2$ ). Координата максимума энергии  $z_{\max}$  демонстрировала линейную зависимость от числа Рейнольдса. Для нестационарных возмущений обнаружен эффект «накачки энергии» в экспоненциально растущую моду неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Отношение энергии оптимального возмущения к энергии наиболее растущей моды  $\frac{G}{E_m}$  с ростом продольной координаты стремилось к постоянному значению, которое слабо возрастало с увеличением числа Рейнольдса. Выявлены два различных механизма нестационарного роста возмущений: для азимутального числа  $m = 1$  преобладал механизм «shift-up», проявляющийся в виде квазиоднородного смещения струи; для высших азимутальных чисел ( $m \geq 2$ ) наблюдался механизм, аналогичный «lift-up» в пограничном слое, связанный с образованием системы вихревых структур. Обнаружены пространственные осцилляции энергии оптимальных возмущений, частота которых соответствует частотам двух наименее затухающих дискретных собственных мод. Установлено, что увеличение толщины слоя сдвига приводит к незначительному уменьшению максимального прироста энергии и «размыванию» области локализации возмущения. Полученные результаты указывают на потенциальную возможность реализации байпасного сценария перехода к турбулентности в струях.

В четвёртой главе описано теоретическое исследование развития стационарных возмущений в затопленной ламинарной струе воздуха, направленное на идентификацию и изучение немодального механизма роста возмущений и сравнение с экспериментом. Для теоретического анализа использован метод построения оптимальных возмущений в пространственной постановке. Расчёт оптимальных возмущений проведён для профиля скорости, измеренного на срезе сопла экспериментальной установки. Показано,

что наибольший немодальный рост демонстрируют стационарные возмущения ( $\omega = 0$ ), для которых характерны квадратичный рост энергии  $G(z)$  с расстоянием, линейный рост осевой компоненты скорости возмущения при примерно постоянной поперечной компоненте и формирование вихревых структур в поперечном сечении. Количественное сравнение скорости роста возмущений показало удовлетворительное согласие экспериментальных и теоретических значений по порядку величины.

В пятой главе описано исследование отклика ламинарной затопленной струи на внешнее гармоническое воздействие. К линеаризованным уравнениям Навье–Стокса применялось преобразование Фурье по осевой координате  $z$  и углу  $\theta$ . Максимальный отклик системы определялся как норма резольвенты оператора эволюции. В результате параметрического исследования в диапазонах  $0 \leq \alpha \leq 11$  и  $m = 0, \dots, 6$  установлено, что максимальный отклик системы на внешнее воздействие достигается на частотах наименее устойчивых собственных мод. Показано, что с уменьшением продольного волнового числа  $\alpha$  резонансные пики усиливаются, а спектр отклика становится более узкополосным. Во всех случаях доминирующими оказались истинные резонансы. Отсутствие в струе псевдорезонансов, характерных для пристенных течений, по-видимому, вызвано значительно более сильной неустойчивостью, имеющей невязкую природу. Кроме того, для всех исследованных гармоник был обнаружен низкочастотный резонанс, обусловленный возбуждением мод сплошного спектра.

Полученные результаты расширяют понимание физических механизмов неустойчивости в струях и пограничных слоях над податливыми покрытиями.

# Литература

1. *Ашуров Д.А.* Устойчивость и переход к турбулентности в пограничных слоях с градиентом давления над монолитным податливым покрытием // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 3. – С. 139–151. – DOI: 10.15372/PMTF20220314.
2. *Ashurov D.A.* Optimal disturbances in round submerged jets // Physics of Fluids. – 2024. – Vol. 36, No. 10. – DOI: 10.1063/5.0221966.
3. *Kramer M. O.* Boundary-layer stabilization by distributed damping // Journal of the Aerospace Sciences. – 1960. – Vol. 27, No. 1. – P. 69.
4. *Benjamin T. B.* The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows // Journal of Fluid Mechanics. – 1963. – Vol. 16, No. 3. – P. 436–450.
5. *Carpenter P. W., Garrad A. D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien-Schlichting instabilities // Journal of Fluid Mechanics. – 1985. – Vol. 155. – P. 465–510.
6. *Riley J. J., Gad-el-Hak M., Metcalfe R. W.* Compliant coatings // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1988. – Vol. 20, No. 1. – P. 393–420.
7. *Carpenter P. W., Garrad A. D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 2. Flow-induced surface instabilities // Journal of Fluid Mechanics. – 1986. – Vol. 170. – P. 199–232.
8. *Landahl M. T.* On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface // Journal of Fluid Mechanics. – 1962. – Vol. 13, No. 4. – P. 609–632.

9. *Yeo K. S.* The stability of boundary-layer flow over single- and multi-layer viscoelastic walls // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1988. – Vol. 196. – P. 359–408.
10. *Бойко А. В., Кулик В. М., Филлимонов В. А.* Устойчивость пограничного слоя плоской пластины над податливыми покрытиями повышенной прочности // *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Физика*. – 2011. – Т. 6, № 4. – С. 25–41.
11. *Даржаин А. Э. и др.* Анализ устойчивости пограничного слоя плоской пластины над двухслойным податливым покрытием конечной толщины // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2019. – Т. 60, № 4. – С. 35–46.
12. *Кулик В. М., Бойко А. В., Лу И.* Двухслойные податливые покрытия для управления турбулентным пограничным слоем // *Теплофизика и аэромеханика*. – 2019. – Т. 26, № 1. – С. 51–62.
13. *Bland D. R.* The theory of linear viscoelasticity. – Courier Dover Publications, 2016.
14. *Boiko A. V. et al.* Measurement method of complex viscoelastic material properties // *International Journal of Solids and Structures*. – 2010. – Vol. 47, No. 3–4. – P. 374–382.
15. *Gad-el-Hak M.* Compliant coatings: a decade of progress. – 1996.
16. *Kulik V. M., Poguda I. S., Semenov B. N.* Experimental investigation of one-layer viscoelastic coatings action on turbulent friction and wall pressure pulsations // *Recent Developments in Turbulence Management* / ed. by D. M. Bushnell. – Dordrecht : Springer Netherlands, 1991. – P. 263–289.
17. *Choi K. S. et al.* Turbulent drag reduction using compliant surfaces // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 1997. – Vol. 453, No. 1965. – P. 2229–2240.

18. *Kulik V. M. et al.* Measurement of dynamic properties of viscoelastic materials // *Experimental Mechanics*. – 2009. – Vol. 49, No. 3. – P. 417–425.
19. *Ivanov O. O. et al.* The influence of compliant coatings on skin friction in the turbulent boundary layer // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2017. – Vol. 894, No. 1. – Art. 012036. – IOP Publishing.
20. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя [Текст] / пер. с нем. Г. А. Вольперта; под ред. Л. Г. Лойцянского. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 712 с.
21. *Schrader L. U.* Passive drag reduction via bionic hull coatings // *Journal of Ship Research*. – 2019. – Vol. 63, No. 3. – P. 206–218.
22. *Rayleigh L.* On the stability, or instability, of certain fluid motions // *Proceedings of the London Mathematical Society*. – 1879. – Vol. 1, No. 1. – P. 57–72.
23. *Ellingsen, T., Palm, E.* Stability of linear flow // *Physics of Fluids*. – 1975. – Vol. 18. – P. 487–488.
24. *Landahl, M.T.* A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1980. – Vol. 98. – P. 243–251.
25. *Hultgren L. S., Gustavsson L. H.* Algebraic growth of disturbances in a laminar boundary layer // *The Physics of Fluids*. – 1981. – Vol. 24, No. 6. – P. 1000–1004.
26. *Butler, K.M., Farrell, B.F.* Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. – 1992. – Vol. 4. – P. 1637–1650.
27. *Trefethen, L.N., Trefethen, A.E., Reddy, S.C., Driscoll, T.A.* Hydrodynamic stability without eigenvalues // *Science*. – 1993. – Vol. 261. – P. 578–584.

28. *Farrell, B.F., Ioannou, P.J.* Optimal excitation of three-dimensional perturbations in viscous constant shear flow // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. – 1993. – Vol. 5, No. 6. – P. 1390–1400.
29. *Schmid, P.J., Henningson, D.S.* Optimal energy density growth in Hagen–Poiseuille flow // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1994. – Vol. 277. – P. 197–225.
30. *Reshotko, E., Tumin, A.* Spatial theory of optimal disturbances in a circular pipe flow // *Physics of Fluids*. – 2001. – Vol. 13. – P. 991–996.
31. *Andersson, P., Berggren, M., Henningson, D.S.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // *Physics of Fluids*. – 1999. – Vol. 11. – P. 134–150.
32. *Luchini, P.* Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2000. – Vol. 404. – P. 289–309.
33. *Tumin, A., Reshotko, E.* Spatial theory of optimal disturbances in boundary layers // *Physics of Fluids*. – 2001. – Vol. 13. – P. 2097–2104.
34. *Batchelor, G. K., Gill, A. E.* Analysis of the stability of axisymmetric jets // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1962. – Vol. 14, No. 4. – P. 529–551.
35. *Boronin, S. A., Healey, J. J., Sazhin, S. S.* Non-modal stability of round viscous jets // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2013. – Vol. 716. – P. 96–119.
36. *Jimenez-Gonzalez, J.I., Brancher, P., Martinez-Bazan, C.* Modal and non-modal evolution of perturbations for parallel round jets // *Physics of Fluids*. – 2015. – Vol. 27, No. 4. – Art. 044105.
37. *Jiménez-González, J.I., Brancher, P.* Transient energy growth of optimal streaks in parallel round jets // *Physics of Fluids*. – 2017. – Vol. 29. – Art. 114101.
38. *Boiko, A. V., Dougal, A. V., Grek, G. R., Kozlov, V. V.* *Physics of Transitional Shear Flows*. – Springer Dordrecht, 2012. – 272 p.

39. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. – М. : Наука, 1965. – 204 с.
40. *Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., Zang, T.A.* Spectral Methods // Springer. – 2007.
41. *Van Ingen J.* The eN method for transition prediction. Historical review of work at TU Delft // 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit. – 2008. – Art. 3830.
42. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М. : Наука, 1988.
43. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. – М. : Наука, 1986.
44. *Michalke A.* Survey on jet instability theory // Progress in Aerospace Sciences. – 1984. – Vol. 21. – P. 159–199.
45. *Khorrami M. R., Malik M. R., Ash R. L.* Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows // Journal of Computational Physics. – 1989. – Vol. 81, No. 1. – P. 206–229.
46. *Drazin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic stability. – Cambridge University Press, 2004.
47. *Веденеев В. В.* Веденеев В. В. О направлении движения бегущих волн // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2025. – Т. 65, № 5. – С. 608–624.
48. *Schmid, P.J., Henningson, D.S.* Stability and Transition in Shear Flows. – Springer New York, 2001. – 558 p.
49. *Gommers R. et al.* scipy/scipy: SciPy 1.16. 0 // Zenodo. – 2025.
50. *Ortiz, S., Chomaz, J.M.* Transient growth of secondary instabilities in parallel wakes: Anti lift-up mechanism and hyperbolic instability // Physics of Fluids. – 2011. – Vol. 23. – Art. 114106.

51. *Mao X., Sherwin S. J.* Transient growth associated with continuous spectra of the Batchelor vortex // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2012. – Vol. 697. – P. 35–59.
52. *Wang, C., Lesshafft, L., Cavalieri, A.V., Jordan, P.* The effect of streaks on the instability of jets // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2021. – Vol. 910. – Art. A14.
53. *Ivanov, O.O., Ashurov, D.A., Gareev, L.R., Vedeneev, V.V.* Non-modal perturbation growth in a laminar jet: an experimental study // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2023. – Vol. 963. – Art. A8.
54. *Ашуров Д.А., Никитин Н.В.* Ашуров Д. А., Никитин Н. В. Развитие стационарных возмущений в пространственно развивающейся струе // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. – 2024. – № 4. – С. 94–102. – DOI: 10.31857/S1024708424040071.
55. *Linar Gareev, Vasily Vedeneev, Oleg Ivanov, Julia Zayko, Denis Ashurov, Alexander Reshmin, Vladimir Trifonov* Experimental study of perturbation growth in a round laminar jet // *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. – 2023. – Vol. 23. – e202300283.
56. *Ашуров Д.А., Веденеев В.В., Гареев Л.Р., Иванов О.О.* Экспериментальное изучение немодального механизма роста возмущений в ламинарной затопленной струе // *Доклады РАН. Физика, технические науки*. – 2023. – Т. 509. – С. 28–38.
57. *Zayko, J., Teplovodskii, S., Chicherina, A., Vedeneev, V., Reshmin, A.* Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers // *Physics of Fluids*. – 2018. – Vol. 30. – Art. 043603.
58. *Gareev, L.R., Zayko, J.S., Chicherina, A.D., Trifonov, V.V., Reshmin, A.I., Vedeneev, V.V.* Experimental validation of inviscid linear stability theory applied to an axisymmetric jet // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2022. – Vol. 934. – Art. A3.

59. *Trefethen L. N., Embree M.* Spectra and pseudospectra: the behavior of nonnormal matrices and operators. – 2020.
60. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М. : Мир, 1989. – 656 с.