МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Тищенко Богдан Викторович

РЕШЕНИЯ С ПЕРЕХОДНЫМИ СЛОЯМИ В СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ С РАЗРЫВНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ РАЗЛИЧНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор Нефёдов Николай Николаевич,
кандидат физико-математических наук,
доцент Левашова Наталия Тимуровна

Москва — 2026

Оглавление

Введение

Диссертация относится к направлению дифференциальные уравнения и математическая физика и является, в первую очередь, исследованием в области асимптотической теории систем нелинейных дифференциальных уравнений, а также затрагивает тематику качественной теории систем дифференциальных уравнений вместе с теорией начальных и краевых задач для систем дифференциальных уравнений.

Основные вопросы диссертационной работы - это существование, локальная единственность и устойчивость резко изменяющихся в малых областях вблизи границы и внутри областей рассмотрения решений систем нелинейных (параболических, эллиптических, обыкновенных) уравнений с малым параметром при старшей производной.

Актуальность работы

В задачах математического моделирования в биофизике (см. [1–7]), экологии (см. [8–12]), астрофизике (см. [13, 14]), химической кинетике (см. [15, 16]), физической кинетике (см. [17–25]) и других научных областях естественным образом возникают сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения и системы, в частности предмет исследования диссертации — системы реакция-диффузия с различными степенями малого параметра при старших производных, где различие степеней малого параметра моделирует более значительный, на порядок, вклад одной из компонент системы, что характерно, например, для биофизических моделей эволюции урбоэкосистем (см. [3–6]).

Сингулярно возмущённые уравнения и системы дают возможность описать физические явления, для которых характерны резко изменяющиеся состояния рассматриваемой физической системы, в том числе обусловленные разрывным поведением параметров среды; среди их решений наибольший интерес в настоящее время представляют решения с внутренним переходным слоем, называемые контрастными структурами типа ступеньки, а также решения с пограничными слоями.

Центральным объектом изучения в диссертационной работе является двумерная задача для системы двух параболических уравнений, рассматриваемая в односвязной области D с достаточно гладкой границей Γ и разрывом правых частей на фиксированной достаточно гладкой простой кривой γ, лежащей в D,

$$(2D)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon^4\Delta u - u_t = f(u,v,\mathbf{x},\varepsilon),\;\; \varepsilon^2\Delta v - v_t = g(u,v,\mathbf{x},\varepsilon),\;\; \mathbf{x}\in D\backslash\gamma,\; t>0,\\ &\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = a,\;\; \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} = b,\;\; u|_{t=0} = u^0(\mathbf{x}),\;\; v|_{t=0} = v^0(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{1}$$

и её одномерный вариант с разрывом правых частей в некоторой точке $x_0\in(-1,1)$

$$(1D)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon^4 u_{xx} - u_t = f(u,v,x,\varepsilon),\;\; \varepsilon^2 v_{xx} - v_t = g(u,v,x,\varepsilon),\;\; x\in(-1,1)\backslash x_0,\; t>0,\\ &u_x(\mp1) = a^{(\mp)},\;\; v_x(\mp1) = b^{(\mp)},\;\; u|_{t=0} = u^0(x),\;\; v|_{t=0} = v^0(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Основу исследования этих задач составляют задачи для стационарных решений:

$$(2D)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon^4\Delta u = f(u,v,\mathbf{x},\varepsilon),\;\; \varepsilon^2\Delta v = g(u,v,\mathbf{x},\varepsilon),\;\; \mathbf{x}\in D\backslash\gamma;\\ &\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = a,\;\; \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} = b,\;\; \mathbf{x}\in\Gamma; \end{aligned} \tag{3}$$

$$(1D)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon^4 u_{xx} = f(u,v,x,\varepsilon),\;\; \varepsilon^2 v_{xx} = g(u,v,x,\varepsilon),\;\; x\in(-1,1)\backslash x_0;\\ &u_x(\mp1) = a^{(\mp)},\;\; v_x(\mp1) = b^{(\mp)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Отдельно рассматривается система ОДУ, в которой $f(u,v,x,\varepsilon)$ имеет разрыв по искомой переменной u при $u=0$, а $g(u,v,x,\varepsilon)$ гладкая по всем переменным:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4 u_{xx} = f(u,v,x,\varepsilon),\;\; \text{для п.в. } x\in(-1,1),\quad \varepsilon^2 v_{xx} = g(u,v,x,\varepsilon),\;\; x\in(-1,1),\\ &u'(\mp1) = a^{(\mp)},\;\; v'(\mp1) = b^{(\mp)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Во всех случаях рассматриваются правые части, удовлетворяющие одному из четырёх условий квазимонотонности — условиям на знаки частных производных f_v и g_u. Например, если $f_v>0$ и $g_u>0$, то в номенклатуре диссертационной работы говорится, что f и g удовлетворяют PP-типу квазимонотонности, если $f_v<0$ и $g_u<0$ — NN-типу, $f_v>0$ и $g_u<0$ — PN, $f_v<0$ и $g_u>0$ — PN (подробнее — главы 2–5).

Ранее с использованием методов асимптотического анализа подобные системы сингулярно возмущённых уравнений типа реакция-диффузия, имеющих решения вида контрастных структур, в случае когда реактивные слагаемые описывались гладкими функциями, исследовались, в частности, Васильевой А.Б., Бутузовым В.Ф. с соавторами (см. [26–28]). Кроме того, более двух десятков работ, касающихся скалярных задач с разрывными коэффициентами, опубликовано авторами, входящими в исследовательскую группу, занимающуюся асимптотической теорией на кафедре математики физического факультета МГУ.

В диссертации проводится обобщение одного из основных методов асимптотической теории — асимптотического метода дифференциальных неравенств (см. [29]), и результатов, касающихся существования, единственности и устойчивости решений с внутренним переходным и пограничными слоями на случай систем с разрывными правыми частями уравнений. Использованием асимптотического анализа подготавливается почву для создания новых эффективных численных методов и их обоснования, поскольку асимптотические приближения решений даже низкого порядка (нулевого или первого) позволяют локализовать область переходного слоя и представляют собой хорошее начальное приближение, например, для счёта на установление, находящееся в области устойчивости стационарного решения.

Цели и задачи работы

Целью диссертационной работы является исследование контрастных структур в нелинейных двухкомпонентных системах реакция-диффузия с различными степенями малого параметра при старших производных в следующих случаях:

- с пограничными слоями и гладкими реактивными членами (частный случай задач (1)–(5);
- с разрывными правыми частями (реактивными членами), имеющими разрыв первого рода в известной внутренней точке интервала (2), (4) и с разрывом на известной внутренней гладкой кривой области (1), (3) в, соответственно, одномерном и двумерном пространствах, а также при различных условиях квазимонотонности;
- с разрывной по первой из искомых переменных правой частью первого уравнения и гладкой по всем переменным правой частью второго уравнения в одномерном случае (задача (5)).

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

- модификация и адаптация известных алгоритмов построения асимптотических приближений, а также верхних и нижних решений под нужды рассматриваемых задач (1)–(5);
- определение условий, обеспечивающих существование решений задач (1)–(5), а также, если возможно, их локальную единственность и асимптотическую устойчивость;
- установление корректности применения метода монотонных итераций;
- разработка иллюстративных примеров.

Научная новизна работы

По сравнению с исследованиями, содержащимися в литературе (см. [26,27,31]) для уравнений с непрерывными правыми частями и задач для одного уравнения с разрывом ([48,66]):

- Доказано существование гладкого решения с внутренним переходным слоем для систем уравнений с разрывными правыми частями (1)–(5); показано, что внутренний переходный слой локализован в окрестности разрыва.

- Доказаны локальная единственность и асимптотическая устойчивость гладкого решения с внутренним переходным и пограничным слоями задачах с источниками, разрывными в фиксированной точке и на фиксированной кривой (1)–(4), при различных условиях квазимонотонности.

- В задаче с разрывом по искомой переменной (5) получены достаточные условия существования гладкого решения с внутренним переходным и пограничными слоями, проведено доказательство его существования методом монотонных итераций.

Положения, выносимые на защиту

- Теоремы существования стационарных решений начально-краевых задач для систем уравнений реакция-адвекция в средах с разрывными характеристиками с большим градиентом на границе раздела сред в задачах
  - с известной пространственной локализацией разрыва (1)–(4);
  - с разрывом по искомой переменной (5).

- Построение верхних и нижних решения, между которыми заключены решения задач (1)–(5).

- Теоремы об асимптотической устойчивости и выделение локальной области притяжения в задачах с известной пространственной локализацией разрыва (1)–(4).

Основные результаты диссертации

В работе исследованы контрастные структуры в нелинейных двухкомпонентных системах реакция-диффузия с различными степенями малого параметра при старших производных с внутренним переходным слоем и пограничными слоями:

- Разработан алгоритм построения верхних и нижних решений для двухкомпонентных систем типа «реакция-диффузия» с различными разрывными источниками — с известной пространственной локализацией разрыва (1)–(4) и с разрывом вдоль нулевого уровня искомой функции (5).

- Доказано существование гладких решений с внутренним переходным и пограничными слоями систем двух параболических уравнений с разрывными источниками с известной локализацией разрыва (1), (2).

- Доказаны в одномерном и двумерном случаях (1)–(4) асимптотическая устойчивость и локальная единственность гладких решений с внутренним переходным и пограничными слоями стационарного решения системы двух уравнений диффузии с фиксированным положением разрыва источника.

- Доказано существование гладкого решения с внутренним переходным и пограничными слоями системы (5) двух ОДУ с источником, разрывным по искомой переменной.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая значимость работы состоит в расширении класса задач, для которых применимы метод пограничных функций, метод функций переходного слоя и асимптотический метод дифференциальных неравенств, сформулированы условия их применимости и предложены на их основе доказательства существования, единственности и асимптотической устойчивости решений. Полученные результаты можно использовать для продолжения исследования задач с переходными слоями.

Практическая значимость работы заключается в следующем:

- результаты работы могут быть применены в математическом моделировании в задачах биофизики, химической кинетики, экологии, нелинейной теории упругости и других областей наук, в которых возникают скачкообразные изменения рассматриваемых величин, обусловленных наличием разрывов;

- доказательство существования устойчивого стационарного решения с большим градиентом вблизи линии разрыва делает численное решение этих задач оправданным независимо от применяемых схем решения.

Личный вклад автора

Реализовано применение метода пограничных функций, метода функций переходного слоя и асимптотического метода дифференциальных неравенств для нелинейных двухкомпонентных систем реакция-диффузия с сингулярным возмущением (1)–(5); получены достаточные условия существования, локальной единственности и устойчивости гладких решений с внутренним переходным и пограничными слоями одномерной и двумерной задач с фиксированным в пространстве разрывом (1)–(4); доказано существование гладких решений с внутренним переходным и пограничными слоями в задаче для системы (5) двух ОДУ с разрывом источника по искомой переменной.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе автором использованы следующие методы:

- асимптотический метод Васильевой — построение асимптотических приближений решений;
- асимптотический метод дифференциальных неравенств — построение верхних и нижних решений на основе асимптотических приближений решений;
- метод монотонных итераций — доказательство существования решений;
- методы теории потенциала — доказательство гладкости решений;
- методы теории пространств Соболева — сходимость монотонных итераций, гладкость решений на промежуточных этапах доказательств.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность изложенных в диссертационной работе результатов обеспечивается строгостью математических доказательств и использованием апробированных научных методов в математике.

Апробация работы

Доклады на конференциях:

1. IX Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» с международным участием, посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова, (пос. Дюрсо, Россия, 3–9 сентября 2018);
2. «2nd International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS'19», (Белгород, Россия, 20–24 августа 2019);
3. «Динамика. 2019. Ярославль», (Ярославль, Россия, 10–12 октября 2019);
4. «Тихоновские чтения 2020», (Москва, Россия, 26–31 октября 2020);
5. «Математические идеи П. Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания», (Обнинск, Россия, 14–16 мая 2021);
6. «Актуальные проблемы математической физики», посвященная памяти Валентина Федоровича Бутузова», (Москва, Россия, 2 июня 2022).

Также результаты докладывались в рамках научно-исследовательского семинара научной группы «Нелинейные уравнения математической физики» кафедры математики физического факультета МГУ (1–3 раза в месяц, 2019–2023).

Публикации (статьи в журналах)

1. *Тищенко Б. В.* Существование, локальная единственность и асимптотическая устойчивость погранслойного решения краевой задачи Неймана для системы двух нелинейных уравнений с разными степенями малого параметра // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2021. — № 5. — С. 44–50; 0,44 п.л.

   (РИНЦ; двухлетний импакт-фактор РИНЦ (2024) — 0,169)

   Tishchenko B. V. The Existence, Local Uniqueness, and Asymptotic Stability of the Boundary Layer Type Solution of the Neumann Problem for a Two-Equation Nonlinear System with Different Powers of a Small Parameter // *Moscow University Physics Bulletin* — 2021. — Vol. 76 — P. 296–304; 0,56 п.л.

   (SCOPUS, WoS; 2-year impact factor (2024) — 0,4, SJR (2024) — 0,159)

2. *Левашова Н. Т., Тищенко Б. В.* Существование и устойчивость решения системы двух нелинейных уравнений диффузии в среде с разрывными характеристиками // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2021. — Т. 61, № 11. — С. 1850–1872; 1,44 п.л.

   (РИНЦ; двухлетний импакт-фактор РИНЦ (2024) — 0,680)

   Levashova N. T., Tishchenko B. V. Existence and Stability of the Solution to a System of Two Nonlinear Diffusion Equations in a Medium with Discontinuous Characteristics // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2021. — Vol. 61, no. 11. — P. 1811–1833; 1,44 п.л.

   (SCOPUS, WoS; 2-year impact factor (2024) — 0,7, SJR (2024) — 0,516), CiteScore (2024) — 1,4

   Вклад соавторов

   Н. Т. Левашова — постановка задачи.

   Б. В. Тищенко — доказательство теорем.

3. *Левашова Н. Т., Тищенко Б. В.* Существование и устойчивость стационарного решения системы уравнений диффузии в среде с разрывными характеристиками при различных условиях квазимонотонности // *ТМФ.* — 2022. — Т. 212, № 1. — С. 62–82; 1,31 п.л.

   (РИНЦ; двухлетний импакт-фактор РИНЦ (2024) — 0,506)

   Levashova N. T., Tishchenko B. V. Existence and stability of a stationary solution of the system of diffusion equations in a medium with discontinuous characteris-tics under various quasimonotonicity conditions // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2021. — Vol. 212, — P. 944–961; 1,13 п.л.

   (SCOPUS, WoS; 2-year impact factor (2024) — 1,1, SJR (2024) — 0,353, CiteScore (2024) — 1,8)

Вклад соавторов

Н. Т. Левашова — постановка задачи.

Б. В. Тищенко — доказательство теорем.

4. *Тищенко Б. В.* Существование решений системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейностью модульно-кубического типа // *ТМФ.* — 2023. — Т. 215, № 2. — С. 318–335; 1,13 п.л.
   (РИНЦ; двухлетний импакт-фактор РИНЦ (2024) — 0,506)

   Tishchenko B. V. Existence of solutions of a system of two ordinary differential equations with a modular–cubic type nonlinearity // *Theoretical and Mathematical Physics.* — 2023. — Vol. 215, — P. 735–750; 1 п.л.
   (SCOPUS, WoS; 2-year impact factor (2024) — 1,1, SJR (2024) — 0,353, CiteScore (2024) — 1,8)

5. *Nefedov N. N., Tishchenko B. V., Levashova N. T.* An Algorithm for Construction of the Asymptotic Approximation of a Stable Stationary Solution to a Diffusion Equation System with a Discontinuous Source Function // *Algorithms.* — 2023. — Vol. 16, no. 9. — P. 359; 1,44 п.л.
   (SCOPUS, WoS; 2-year impact factor (2024) — 2,1, SJR (2024) — 0,515, CiteScore (2024) — 4,5)

   Вклад соавторов

   Н. Н. Нефёдов — постановка задачи.

   Н. Т. Левашова — предложена постановка задачи иллюстративного примера 4.6 (см. Рис. 2).

   Б. В. Тищенко — доказательство теорем, численно-аналитическая реализация иллюстративного пример 4.6 (см. Рис. 2).

Также Н. Т. Левашова и Н. Н. Нефёдов в процессе выполнения всех работ участвовали в обсуждении текущих результатов исследований.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

Тема, объект и предмет диссертации соответствуют паспорту специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки) по следующим пунктам:

2. Начальные, краевые и смешанные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

4. Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

6. Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений.

12. Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем.

Структура и объём

Общие сведения

Работа состоит из введения, обзора литературы, пяти содержательных глав, заключения и списка литературы. Объём работы составляет 120 страниц.

Описание глав

Обзор литературы посвящён краткой истории исследований в области асимптотической теории, а также некоторым современным результатам в области задач с разрывными членами.

Первая глава является вспомогательной — во избежание в дальнейшем излишних повторений в ней приводится общая постановка задачи (одномерная и двумерная вариации), тогда как в последующих главах она конкретизируется; также приводятся универсальные обозначения, термины, определения и неоднократно используемые в работе утверждения — леммы о положительности.

Вторая глава посвящена одномерной параболической задаче с гладкими реактивными членами — её решение имеет только пограничные слои. Методом Васильевой построено асимптотическое приближение решения стационарной задачи, при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств построены верхнее и нижнее решения этой задачи как модификации асимптотического приближения для четырёх случаев квазимонотонности правых частей; доказано существование классического решения стационарной задачи, его локальная единственность и асимптотическая устойчивость как решения начально-краевой задачи.

Третья глава — это исследование одномерной параболической задачи с разрывными реактивными членами, имеющими разрыв первого рода в известной внутренней точке рассматриваемого отрезка. Решение этой задачи имеет как пограничные слои, которые с точностью до обозначений идентичны изученным во второй главе, так и внутренний переходный слой, который и лежит в фокусе внимания. Методом Васильевой построено асимптотическое приближение решения стационарной задачи. При помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств построены негладкие верхнее и нижнее решения этой задачи как модификации асимптотического приближения для четырёх случаев квазимонотонности правых частей. Проверена корректность применения метода монотонных итераций с использованием лемм о положительности для функций из пространств Соболева, и на его основе в совокупности с теорией потенциала доказано существование гладкого решения стационарной задачи, его локальная единственность и асимптотическая устойчивость как решения начально-краевой задачи.

Четвёртая глава — проведено обобщение результатов глав 2 и 3 на случай двумерной области с достаточно гладкой границей и достаточно гладкой известной кривой разрыва реактивных членов. Для построения асимптотического приближения дополнительно использован метод Вишика-Люстерника. В конце главы приведён пример, в котором численно-аналитически получено асимптотическое приближение нулевого порядка решения модельной задачи, а также иллюстрируется стабилизация численного решения начально краевой задачи к решению стационарной задачи. В упомянутом примере рассмотрена постановка задачи, использовавшаяся в автоволновой модели развития мегаполисов, разработанной совместным научным коллективом кафедр биофизики и математики физического факультета МГУ.

Пятая глава посвящена исследованию одномерной системы ОДУ, у которой реактивное слагаемое в одном из уравнений разрывно по искомой переменной вдоль нулевого уровня этой переменной, а все функции, входящие во второе уравнение, являются гладкими. Методом Васильевой построено асимптотическое приближение решения задачи вида контрастной структуры, при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств построены верхнее и нижнее решения этой задачи как модификации асимптотического приближения решения для случая квазимонотонности одного знака функций в правых частях уравнений системы; методом монотонных итераций с использованием теории потенциала доказано существование гладкого решения.

Заключение — приводятся основные результаты диссертации, а также перспективы их применения.

Список литературы содержит 115 наименований.

Нумерация и ссылки

В диссертации используется сквозная нумерация формул. Определения, утверждения, леммы и теоремы в своей нумерации содержат номер главы (первая цифра) и после точки порядковый номер в рамках текущей главы (вторая цифра), исключение составляют именованные леммы из главы 1.

Обзор литературы

Теория сингулярных возмущений начала активно развиваться с работ А.Н. Тихонова. В пособии [31] изложена классическая теория и основной метод построения асимптотических приближений решений для сингулярно возмущенных задач — метод пограничных функций, также одной из первых работ по этой тематике была [32]. В последние годы ведутся активные исследования сингулярно возмущенных задач с решениями типа контрастных структур или, как их еще называют, решения с внутренним переходным слоем. Существуют контрастные структуры типа ступеньки (КСТС) и типа всплеска, контрастные структуры типа ступеньки представляют больший интерес для приложений, поэтому данное направление развивается интенсивнее.

В работе [26] предложен метод построения асимптотического приближения решения однородной задачи Неймана для системы с различными степенями малого параметра при старших производных для гладких правых частей, где первая функция имеет классическое для асимптотической теории поведение типа кубической функции с тремя различными корнями: первый и третий корни устойчивы, а промежуточный неустойчивый.

В [27] с опорой на развитый Н.Н. Нефёдовым в [29] асимптотический метод дифференциальных неравенств доказано существование решения вида КСТС для почти идентичной задачи

$$\begin{gathered}\varepsilon^4\frac{d^2u}{dx^2} = f(u,v,x,\varepsilon), \quad \varepsilon^2\frac{d^2v}{dx^2} = g(u,v,x,\varepsilon), \quad 0<x<1, \\ \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = 0, \quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=1} = 0\end{gathered} \tag{$*$}$$

с дополнительным требованием квазимонотонности правых частей — это требование позволяет построить верхнее и нижнее решения, обеспечивающие существование точного решения, существование которого можно обосновать, например, методом монотонных итераций (см. [33]). Работа [28] стала обобщением [27] на случай двумерной односвязной области с достаточно гладкой границей. Качественное отличие работ [27, 28] от [26] состоит в доказательстве существования решения задачи, заключенного между верхним и нижним решениями, для нахождения которых предложен конструктивный алгоритм согласно [29], что позволяет более точно оценить отклонение решения от его асимптотического приближения.

Статья [34] посвящена задаче с периодическими условиями

$$\varepsilon^4\left(\frac{\partial^2 u}{dx^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=f(u,v,x,\varepsilon),\ \ \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 v}{dx^2}-\frac{\partial v}{\partial t}\right)=g(u,v,x,\varepsilon),\ \ 0<x<L,\ t>0,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\ \ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\ t>0, \tag{$**$}$$
$$u(x,t,\varepsilon)=u(x,t+T,\varepsilon),\ \ v(x,t,\varepsilon)=v(x,t+T,\varepsilon),\ \ 0\le x\le L.$$

Основным результатом стало доказательство существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости решений задачи $(**)$ как решений аналогичной задачи с начальными условиями, заключёнными между верхним и нижним решением. Методология, развитая в [34], с небольшими изменениями переносится на исследование устойчивости решений задачи $(*)$ как решений параболической задачи

$$\varepsilon^4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=f(u,v,x,\varepsilon),\ \ \varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=g(u,v,x,\varepsilon),\ \ 0<x<1,\ t>0,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\ \ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\ t>0,$$
$$u(x,0)=u^0(x),\ \ v(x,0)=v^0(x),\ \ x\in[0,1],$$

причём при определённых условиях допускается разрыв правой части в некоторой фиксированной точке строго внутри отрезка (см. ниже в работе). Подобными $(**)$ являются параболические задачи со слабой диффузией: в левой части уравнений у них присутствуют члены вида $\varepsilon^k b(x)u_x$ и $\varepsilon^k b(x)v_x$, $k\in\mathbb{N}$, — такие задачи с гладкими членами исследованы в [35–37].

Одним из продуктивных ответвлений асимптотической теории стало изучение задач с разрывами. Работа [38] посвящена задаче

$$\varepsilon^2 u''=f(\varepsilon u',u,x),\ \ x\in(0,1),\qquad u(0,\varepsilon)=u^0,\ \ u(1,\varepsilon)=u^1,$$

где функция f претерпевает разрыв первого рода в фиксированной точке $x_0\in(0,1)$. Методом сшивания асимптотических приближений доказано существование решения (такой же подход применён в [39]). Позднее при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств было доказано существование (см [40]), локальная единственность и асимптотическая устойчивость (см. [41]) решения схожей задачи

$$\varepsilon^2\Delta u=f(u,M,\varepsilon),\ \ M\in D,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D}=u^0(S),\ \ S\in\partial D,$$

с правой частью претерпевающей разрыв первого рода на некоторой кривой γ, лежащей внутри односвязной двумерной области D.

Задачи для систем уравнений реакция-диффузия с разрывными источниками возникают, например, при моделировании биофизических процессов, связанных с распространением автоволновых фронтов в средах с барьерами. В работах [5, 6] моделировалось развитие мегаполисов, для которых характерна мозаичная структура: области плотной застройки сменяются биоценозами, например парками, водоёмами, реками. Характерные размеры областей перехода от застройки к почти естественному ландшафту малы по сравнению с характерным размером мегаполиса, другими словами, образуется резкий переходный слой на стыке сред, математически моделируемый скачком параметров в реактивных членах дифференциальных уравнений. Также в работах [5, 6] учитывалось влияние факторов, замедляющих распространение застройки, таких как политика ограничения вырубки леса и стоимость квадратного метра жилья. По физическому смыслу влияние активатора строительства на порядок больше, чем влияние его ингибитора; на основании вышесказанного авторы пришли к модельной системе

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^4 D_u \Delta u = -u\,(u-\alpha(x,y))\,(u-1) - uv \\ &\frac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon^2 D_v \Delta v = -\gamma(x,y)v + \beta(x,y)u, \quad x, y \in [-L, L],\ t > 0, \end{aligned} \tag{$\ast$}$$

с разными степенями малого параметра, отражающими различие во влиянии активатора и ингибитора. В этой модели ко всему прочему учтена особая взаимосвязь активатора и ингибитора: активатор приводит к усилению действия ингибитора, а ингибитор увеличивает влияние активатора, — математически эта связь выражена условиями квазимонотонности, то есть в знаками производных правых частей по неизвестным, входящих в соответствующие уравнения как параметр.

Существенное развитие моделей эволюции урбоэкосистем можно проследить, сравнив [5, 6] с более ранними работами [1–4]. Стоит отметить, даже не вводя разрывные параметры, на примере нескольких городов, в частности Кунцево и Москвы, были проведены численные расчёты, подтверждающие валидность предложенной модели (см. [4]), не отличающейся принципиально от ($\ast$) (см. также [30], где исследование аналитическое).

В работе [17] применена теория контрастных структур для описания распределения температуры вдоль отрезка прямой, перпендикулярной границе раздела сред вода-воздух. Авторы в своём исследовании опирались на работы [38, 43–45], посвященные исследованию сингулярно возмущенных краевых задач, допускающих решения вида контрастных структур. Полученная ими модель содержит не только разрывную правую часть (имеется разрыв первого рода по независимой переменной), но и разрывный коэффициент теплообмена, так как “…существуют четыре области, в которых коэффициент теплообмена принимает разные значения". Проведён численный счёт на установление, получено хорошее согласование с экспериментальными данными. Позднее в [46] методом сшивания асимптотических приближений доказано существование подобного решения, а в [47] было дано его строгое обоснование существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости при помощи метода верхних и нижних решений.

Естественно, кроме систем интерес представляют также и скалярные задачи: яркий пример — задача в полосе с периодическими условиями

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\Delta_{xy}v - v_t = (\mathbf{A}(v,x,y),\nabla)\,v + B(v,x,y), && x\in\mathbb{R},\ \ y\in(0,a),\ \ t\in(0,\infty),\\
&v(x,0,t) = u^0(x),\ \ v(x,a,t) = u^a(x), && x\in\mathbb{R},\ \ t\in[0,\infty),\\
&v(x,y,t) = v(x+L,y,t), && x\in\mathbb{R},\ \ y\in[0,a],\ \ t\in[0,\infty),\\
&v(x,y,0) = v_{init}(x,y), && x\in\mathbb{R},\ \ y\in[0,a].
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{A}(v,x,y) = \{A_1(v,x,y), A_2(v,x,y)\}$; компоненты $A_i(v,x,y)$ претерпевают разрыв первого рода на некоторой заданной L-периодической кривой $h(x)$, причём $h(x)\in(0,a)$. При дополнительны условиях, сформулированных в [48], существует локально единственное и асимптотически устойчивое L-периодическое по x решение.

На острие современных исследований в области асимптотической теории находятся обратные задачи (см. [49–53]), задачи о стабилизации фронтов (см. [54, 55, 57–61]), задачи с разрывом по искомой переменной или её производной (см. [62–68] и прикладные задачи, допускающие асимптотическое исследование [69, 70]) и вопросы неустойчивости (см. [71–73]), к тому же не является редкостью пересечение этих направлений (см, например, [57, 59, 73]).

В контексте диссертационной работы следует выделить статью [66], посвящённую исследованию двумерной задачи

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2(\Delta u - u_t) = f(u,x,y,t,\varepsilon), && (x,y,t)\in D\times\mathbb{R},\\
&\left.\frac{\partial u^0}{\partial n_\Gamma}\right|_\Gamma = 0, && (x,y,t)\in \Gamma\times\mathbb{R},\\
&u(x,y,t,\varepsilon) = u(x,y,t+T,\varepsilon), && (x,y,t)\in \overline{D}\times\mathbb{R},
\end{aligned}$$

где правая часть имеет разрыв первого рода при $u = 0$ — так называемая нелинейность модульно-кубического типа, получившая своё название из-за сходства с модульным и кубическим нелинейностям из [62, 63, 69, 70]. Подобные уравнения характерны для физических систем с фазовыми переходами, а также имеют ряд приложений, например, в разномодульной теории упругости [74]. Использованные в [66] методы и сформулированные условия могут быть сравнительно просто обобщены и на случай постановок, в которых условия периодичности заменены на начальные условия, что и было сделано, например, в [61] (ставшей развитием [56] и [57]), в которой исследовалась задача

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2 u_{xx} - \varepsilon u_t - \varepsilon A(x,\varepsilon)u_x = f(u,x,\varepsilon), && (x,t) \in (-1,1)\times(0,T],\\
&u_x(\mp 1,t,\varepsilon) = 0, && t\in[0,T],\\
&u(x,0,\varepsilon) = u_{init}(x,\varepsilon), && x\in[-1,1],
\end{aligned}
$$

с начальными условиями типа фронта, и было доказано, что само решение будет иметь вид движущегося фронта, заключённого между верхним и нижним решениями, как в случае гладких правых частей кубического типа, так и в случае разрывных по искомой переменной правых частей.

Более подробно текущие успехи асимптотических методов освещены в обширном обзоре [75].

Слабые решения нелинейных задач в средах с разрывами исследуются, например C. De Coster (см. [76]), V. Bögelein (см. [77–79]) и др.

Как известно (см., например, [80, 81]), задачи с разрывными нелинейностями, имеющими разрыв по искомой переменной и/или её производной, а не по независимым переменным, для которых успешно применяется теория пространства Соболева (см., например, [82–84]), при общем рассмотрении требуют иного подхода — языка многозначных отображений и дифференциальных включений. Обширные исследования разрешимости задач с негладкими нелинейностями в терминах слабых решений проведены в книгах [81, 85], а также в целом ряде статей [86–98]. Также существует несколько иная школа: в работах, например, [99–102] Павленко В.Н. и соавторы развивают теорию, в которой упор делается на удовлетворение решений уравнениям или дифференциальным включениям почти всюду, в отличие от работ Зигфрида Карла и других (см. выше), где решение понимается в вариационном смысле. Вопрос неединственности решений, связанной с разрывными нелинейностями, был исследован, например, в работах [103, 104], а в [105] сформулированы условия, при которых существует без малого континуум решений очень простой задачи

$$
-u''(x) = \lambda f(u(x)),\quad 0<x<1,\quad \lambda\ge 0,
$$

$$
u(0)=u(1)=0,
$$

$$
f(p)=\begin{cases} h(p), & p\in[0,1),\\ k(p), & p\in(1,+\infty),\end{cases}\qquad h(0)=0,\quad f(1)>0,\quad h(1)\ne k(1).
$$

1 Универсальные обозначения, замечания, определения и утверждения

1.1 Обозначения

На протяжении работы используются сдедующие обозначения:

- $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$;
- x^* — некоторая фиксированная точка из интервала $(-1, 1)$;
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$;
- ε — малый параметр, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$, где ε_0 — некоторое предельно допустимое значение ε;
- D — односвязная область из $\mathbb{R}^2$, ограниченная простой замкнутой гладкой кривой Γ;
- γ — простая замкнутая гладкая кривая, лежащая в D, то есть $\gamma \subset D$, $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$;
- $D^{(+)}$, $D^{(-)}$ — подобласти D, такие что $\overline{D}^{(-)} \cup D^{(+)} = D^{(-)} \cup \overline{D}^{(+)} = D$, $\overline{D}^{(-)} \cap \overline{D}^{(+)} = \gamma$, $\overline{D} \backslash (D^{(-)} \cup \overline{D}^{(+)}) = \Gamma$;
- I_u, I_v — некоторые допустимые отрезки изменения, соответственно, u и v;
- $\dfrac{\partial}{\partial n_\Gamma}$ — оператор дифференцирования по внутренней нормали $\mathbf{n}_\Gamma$ к кривой Γ.

1.2 Замечания

В работе рассматриваются системы параболических уравнений:

$$(2D) \quad \varepsilon^4 \Delta u - u_t = f(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), \;\; \varepsilon^2 \Delta v - v_t = g(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), \;\; \text{для п. в. } \mathbf{x} \in D, t \in \mathbb{R}^+. \tag{6}$$

$$(1D) \quad \varepsilon^4 u_{xx} - u_t = f(u, v, x, \varepsilon), \;\; \varepsilon^2 v_{xx} - v_t = g(u, v, x, \varepsilon), \;\; \text{для п. в. } x \in (-1, 1), t \in \mathbb{R}^+. \tag{7}$$

Ставятся следующие начальные и краевые условия:

$$(2D) \qquad \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = a, \;\; \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} = b, \;\; \mathbf{x} \in \Gamma, \; t \in \mathbb{R}^+; \quad u|_{t=0} = u^0(\mathbf{x}), \;\; v|_{t=0} = v^0(\mathbf{x}); \tag{8}$$

$$(1D) \qquad u_x(\mp 1) = a^{(\mp)}, \;\; v_x(\mp 1) = b^{(\mp)}, \;\; u|_{t=0} = u^0(x), \;\; v|_{t=0} = v^0(x), \tag{9}$$

где a, b, $a^{(\mp)}$, $b^{(\mp)}$ полагаются константами.

Полагается, что начальные функции u^0, v^0 удовлетворяют следующему условию.

(CD) Функции u^0 и v^0 непрерывны в замыкании области определения ($[-1, 1]$ в 1D, $\overline{D}$ в 2D), непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности границы и удовлетворяют условиям согласования

$$(1D) \quad u_x^0(\mp 1) = a^{(\mp)}, v_x^0(\mp 1) = b^{(\mp)}, \qquad (2D) \quad \left.\frac{\partial u^0}{\partial n_\Gamma}\right|_\Gamma = a, \quad \left.\frac{\partial v^0}{\partial n_\Gamma}\right|_\Gamma = b.$$

Основу исследования поставленных задач составляют задачи для их стационарных решений: для (6), (8) имеем стационарную задачу

$$\varepsilon^4 \Delta u = f(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 \Delta v = g(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \text{для п. в. } \mathbf{x} \in D, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} = b, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \tag{11}$$

а для (7), (9) — стационарную задачу

$$\varepsilon^4 u'' = f(u, v, x, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 v'' = g(u, v, x, \varepsilon), \quad \text{для п. в. } x \in (-1, 1), \tag{12}$$

$$u'(\mp 1) = a^{(\mp)}, \quad v'(\mp 1) = b^{(\mp)}. \tag{13}$$

В диссертационной работе рассматриваются три вида правых частей, то есть функций f и g:

1. функции f, g гладкие по всем переменным (гл. 2);
2. функции f, g претерпевают разрыв первого рода во внутренней точке x_0 в одномерном случае (гл. 3) и на внутренней кривой γ в двумерном случае (гл. 4);
3. функция g гладкая по всем переменным, а функция f претерпевает разрыв первого рода по переменной u при $u = 0$ (гл. 5).

Явный вид функций f и g, их области определения, накладываемые на них ограничения и точные классы гладкости приводятся в соответствующих главах, в них же: детально указано, в каком смысле понимается выполнение уравнений, конкретизированы постановки задач и сформулированы определения решений этих задач.

1.3 Определения

Асимптотическое приближение решения.

(1D) Будем говорить, что пара функций $(U_n(x, \varepsilon), V_n(x, \varepsilon))$ является на отрезке $[-1, 1]$ равномерным с точностью $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$ асимптотическим приближением решения $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ стационарной задачи (12),(13), если

$$|U_n(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)| + |V_n(x,\varepsilon) - v_\varepsilon(x)| \le C_n \cdot \varepsilon^{n+1},\ x \in [-1,1],$$

где C_n — не зависящая от ε и x положительная константа.

(2D) Будем говорить, что пара функций $(U_n(\mathbf{x},\varepsilon), V_n(\mathbf{x},\varepsilon))$ является в $\overline{D}$ равномерным с точностью $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$ асимптотическим приближением решения $(u_\varepsilon(\mathbf{x}), v_\varepsilon(\mathbf{x}))$ стационарной задачи (10),(11), если

$$|U_n(\mathbf{x},\varepsilon) - u_\varepsilon(\mathbf{x})| + |V_n(\mathbf{x},\varepsilon) - v_\varepsilon(\mathbf{x})| \le C_n \cdot \varepsilon^{n+1},\ \mathbf{x} \in \overline{D},$$

где C_n — не зависящая от ε и $\mathbf{x}$ *положительная константа.*

Пусть функции φ и $\varphi^{(\mp)}$, а также ψ и $\psi^{(\mp)}$ определены и непрерывны, в зависимости от размерности, на множествах $[-1,1]$ или $\overline{D}$.

Внутренний переходный слой.

(1D) Будем говорить, что решение стационарной задачи (12),(13) имеет внутренний переходный слой, если в некоторой, лежащей строго внутри интервала $(-1,1)$, малой окрестности точки x^* решение резко изменяется от значений близких к $\left(\varphi^{(-)}(x), \psi^{(-)}(x)\right)$ до значений близких к $\left(\varphi^{(+)}(x), \psi^{(+)}(x)\right)$, а вне этой окрестности при $\varepsilon \to +0$ решение равномерно по x стремится к $\left(\varphi^{(+)}(x), \psi^{(+)}(x)\right)$ при $x > x^*$ и к $\left(\varphi^{(-)}(x), \psi^{(-)}(x)\right)$ при $x < x^*$.

(2D) Будем говорить, что решение стационарной задачи (10),(11) имеет внутренний переходный слой, если в некоторой, лежащей строго внутри области D, малой окрестности кривой γ решение резко изменяется от значений близких к $\left(\varphi^{(-)}(\mathbf{x}), \psi^{(-)}(\mathbf{x})\right)$ до значений близких к $\left(\mathbf{x}), \psi^{(+)}(\mathbf{x})\right)$, а вне этой окрестности при $\varepsilon \to +0$ решение равномерно по $\mathbf{x}$ стремится к $\left(\varphi^{(+)}(\mathbf{x}), \psi^{(\mp)}(\mathbf{x})\right)$ для точек из $D^{(+)}$, и к $\left(\varphi^{(-)}(\mathbf{x}), \psi^{(-)}(\mathbf{x})\right)$ для точек из $D^{(-)}$.

Пограничный слой

(1D) Будем говорить, что решение стационарной задачи (12),(13) имеет пограничный слой, если в некоторых соответствующих малых односторонних окрестностях точек $x = \mp 1$ решение резко изменяется от некоторых значения в этих точках до значений близких к $(\varphi(x), \psi(x))$, а вне этих окрестностей при $\varepsilon \to +0$ решение равномерно по x стремится к $(\varphi(x), \psi(x))$.

(2D) Будем говорить, что решение стационарной задачи (10),(11) имеет пограничный слой, если в некоторой малой окрестности кривой Γ решение резко изменяется от некоторых значений на Γ до значений близких к $\left(\varphi^{(-)}(\mathbf{x}), \psi^{(-)}(\mathbf{x})\right)$, а вне этой окрестности при $\varepsilon \to +0$ решение равномерно по **x** стремится к $\left(\varphi^{(+)}(\mathbf{x}), \psi^{(\mp)}(\mathbf{x})\right)$ для точек из $D^{(+)}$, и к $\left(\varphi^{(-)}(\mathbf{x}), \psi^{(-)}(\mathbf{x})\right)$ для точек из $D^{(-)}$.

Замечание I. Для большей простоты и иллюстративности определения выше даны в предположении, что оговоренные решения имеют только пограничный слой или внутренний переходный слой. В диссертационной работе рассматриваются решения, имеющие как пограничный, так и внутренний переходный слои, это, в свою очередь, сокращает область равномерной сходимости решений при $\varepsilon \to +0$ до некоторых замкнутых множеств из $(-1, x^*) \cup (x^*, 1)$ в одномерном случае и из $D^{(-)} \cup D^{(+)}$ в двумерном, причем эти множества имеют вид $[x^1, x^2] \cup [x^3, x^4]$, где $x^2 - x^1 > 0$, $x^4 - x^3 > 0$, $[x^1, x^2] \subset (-1, x^*)$, $[x^3, x^4] \subset (x^*, 1)$, или $d^{(-)} \cup d^{(+)}$, где $d^{(-)} \subset D^{(-)}$, $d^{(+)} \subset D^{(+)}$ и

- $d^{(+)}$ — односвязное множество с гладкой границей;
- $d^{(-)}$ — линейно связное множество, внутренность которого линейно связна и содержит в себе некоторую простую гладкую замкнутую кривую ω, ограничивающую в D область, содержащую $D^{(+)}$.

Изолированный корень. Будем говорить, что $w(u, v, x)$, определённая на $I_u \times I_v \times [a, b]$, имеет изолированный корень $u = \phi(v, x)$ на множестве $I_v \times [a, b]$, если $\phi(v, x)$ — это однозначная функция, такая что для некоторого $\delta^\phi > 0$ существует множество

$$\{(u, v, x) : \phi(v, x) - \delta^\phi \leq u \leq \phi(v, x) + \delta^\phi, v \in I_v, x \in [a, b]\},$$

такое что $w(u, v, x) = 0 \Leftrightarrow u = \phi(v, x), \forall (v, x) \in I_v \times [a, b]$.

Замечание II. Понятие изолированного корня в случаях иной зависимоти от аргументов, а именно $w(u, v, \mathbf{x})$, $w(v, x)$, $w(v, \mathbf{x})$, вводятся аналогично.

Асимптотическая устойчивость с областью притяжения.

(1D) Будем говорить, что решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ стационарной задачи (12),(13) асимптотически устойчиво как решение задачи (7),(9) с областью притяжения $[\underline{U}(x), \overline{U}(x)] \times [\underline{V}(x), \overline{V}(x)]$, если для любых начальных функций $u^0(x), v^0(x)$, удовлетворяющих (CD), таких что

$$\underline{U}(x) \leq u^0(x) \leq \overline{U}(x),\ \underline{V}(x) \leq v^0(x) \leq \overline{V}(x),\ \forall x \in [-1, 1],$$

решение $(u_\varepsilon(x,t), v_\varepsilon(x,t))$ задачи (7),(9) удовлетворяет условиям

$$\underline{U}(x) \le u^0(x) \equiv u_\varepsilon(x,0) \le \overline{U}(x),\ \underline{V}(x) \le v^0(x) \equiv v_\varepsilon(x,0) \le \overline{V}(x),\ \forall x \in [-1,1];$$

$$\|u_\varepsilon(x,t) - u_\varepsilon(x)\|_{C([-1,1])} + \|v_\varepsilon(x,t) - v_\varepsilon(x)\|_{C([-1,1])} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(2D) Будем говорить, что решение $(u_\varepsilon(\mathbf{x}), v_\varepsilon(\mathbf{x}))$ стационарной задачи (10),(11) асимптотически устойчиво как решение задачи (6),(8) с областью притяжения $[\underline{U}(\mathbf{x}), \overline{U}(\mathbf{x})] \times [\underline{V}(\mathbf{x}), \overline{V}(\mathbf{x})]$, если для любых начальных функций $u^0(\mathbf{x}), v^0(\mathbf{x})$, удовлетворяющих (CD), таких что

$$\underline{U}(\mathbf{x}) \le u^0(\mathbf{x}) \le \overline{U}(\mathbf{x}),\ \underline{V}(\mathbf{x}) \le v^0(\mathbf{x}) \le \overline{V}(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in \overline{D},$$

решение $(u_\varepsilon(\mathbf{x},t), v_\varepsilon(\mathbf{x},t))$ задачи (6),(8) удовлетворяет условиям

$$\underline{U}(\mathbf{x}) \le u^0(\mathbf{x}) \equiv u_\varepsilon(\mathbf{x},0) \le \overline{U}(\mathbf{x}),\ \underline{V}(\mathbf{x}) \le v^0(\mathbf{x}) \equiv v_\varepsilon(\mathbf{x},0) \le \overline{V}(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in \overline{D};$$

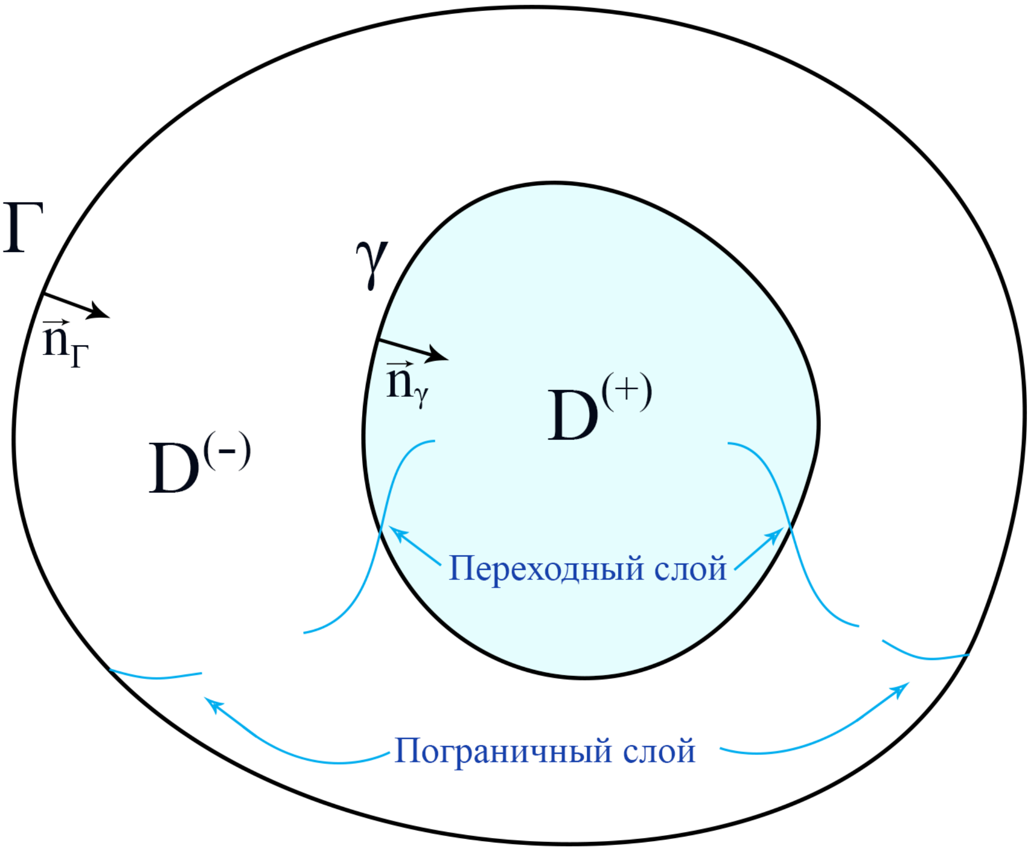
$$\|u_\varepsilon(\mathbf{x},t) - u_\varepsilon(\mathbf{x})\|_{C(\overline{D})} + \|v_\varepsilon(\mathbf{x},t) - v_\varepsilon(\mathbf{x})\|_{C(\overline{D})} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Локальная единственность решения.

(1D) Будем говорить, что решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ стационарной задачи (12),(13) локально единственно на множестве $[\underline{U}(x), \overline{U}(x)] \times [\underline{V}(x), \overline{V}(x)]$, если из того, что $(u^*_\varepsilon(x), v^*_\varepsilon(x))$ — решение (12),(13), и $\underline{U}(x) \le u^*_\varepsilon(x) \le \overline{U}(x),\ \underline{V}(x) \le v^*_\varepsilon(x) \le \overline{V}(x),\ \forall x \in [-1,1]$, вытекает, что $(u^*_\varepsilon(x), v^*_\varepsilon(x)) \equiv (u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$.

(2D) Будем говорить, что решение $(u_\varepsilon(\mathbf{x}), v_\varepsilon(\mathbf{x}))$ стационарной задачи (10),(11) локально единственно на множестве $[\underline{U}(\mathbf{x}), \overline{U}(\mathbf{x})] \times [\underline{V}(\mathbf{x}), \overline{V}(\mathbf{x})]$, если из того, что $(u^*_\varepsilon(\mathbf{x}), v^*_\varepsilon(\mathbf{x}))$ — решение (10),(11), и $\underline{U}(\mathbf{x}) \le u^*_\varepsilon(\mathbf{x}) \le \overline{U}(\mathbf{x}),\quad \underline{V}(\mathbf{x}) \le v^*_\varepsilon(\mathbf{x}) \le \overline{V}(\mathbf{x}),\quad \forall \mathbf{x} \in \overline{D}$, вытекает, что $(u^*_\varepsilon(\mathbf{x}), v^*_\varepsilon(\mathbf{x})) \equiv (u_\varepsilon(\mathbf{x}), v_\varepsilon(\mathbf{x}))$.

$$D = D^{(+)} \sqcup \gamma \sqcup D^{(-)},\ \overline{D} = (D^{(+)} \sqcup \gamma) \sqcup (D^{(-)} \sqcup \Gamma)$$



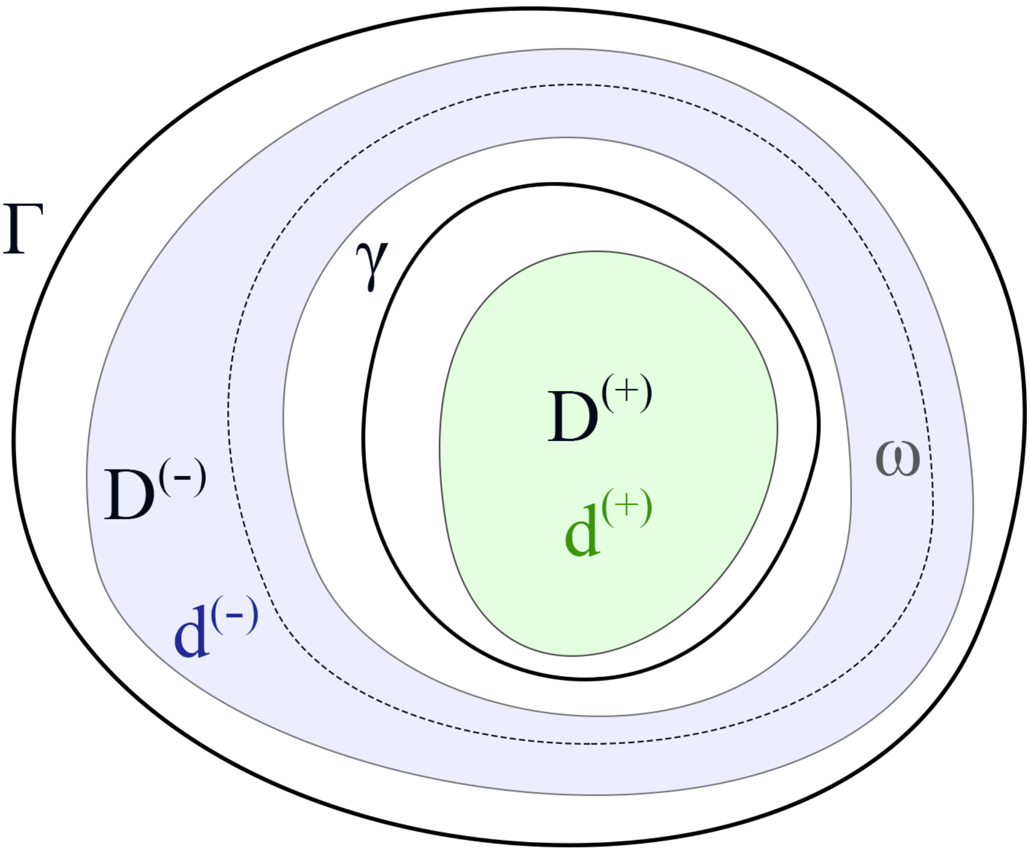


Рисунок 1: Иллюстрация характерной области рассмотрения в двумерном случае

1.4 Утверждения

Будем использовать в этом параграфе обозначения $D_T = (-1,1) \times (0,T)$ или $D_T = D \times (0,T)$ в зависимости от размерности пространства.

Одним из основных утверждений метода монотонных итераций в той или иной формулировке и в зависимости от операторов является лемма о положительности. Приведём здесь эллиптическую и параболическую леммы о положительности в двумерном случае — в одномерном случае они аналогичны.

EPL (**E**lliptic **P**ositivity **L**emma). Пусть $w(\mathbf{x}) \in W_2^1(D)$. Если существует такая $c(\mathbf{x}) \in L_\infty^+(D)$, что при всех $\varphi \in W_2^1(D) \cap L_2^+(D)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_D (\nabla w \cdot \nabla \varphi + c(\mathbf{x}) w \varphi)\, d\mathbf{x} \geq 0,$$

то $w(\mathbf{x}) \in W_2^1(D) \cap L_2^+(D)$ (см. [106, гл. 4]).

PPL (**P**arabolic **P**ositivity **L**emma). Пусть $w \in W_2^{1,1}(D_T)$ и $w|_{t=0} = w^0 \in L_2^+(D)$. Если существует такая $c(\mathbf{x},t) \in L_\infty^+(D_T)$, что при всех $\varphi \in W_2^{1,1}(D_T) \cap L_2^+(D_T)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_D (w_t \cdot \varphi + \nabla w \cdot \nabla \varphi + c(\mathbf{x}) w \varphi) d\mathbf{x} dt \geq 0,$$

то $w(\mathbf{x},t) \in W_2^{1,1}(D_T) \cap L_2^+(D_T)$ (см. [106, гл. 4]).

2 Задача с пограничными слоями

2.1 Постановка задачи и накладываемые условия

В настоящей главе рассматриваются задачи, решения которых имеют только пограничные слои.

Изучаются одномерная параболическая задача (2)

$$\begin{aligned}&\varepsilon^4 u_{xx} - u_t = f(u,v,x,\varepsilon),\ \ \varepsilon^2 v_{xx} - v_t = g(u,v,x,\varepsilon),\ \ x \in (-1,1)\backslash x_0,\ t \in \mathbb{R}^+,\\&u_x(\mp 1) = a^{(\mp)},\ \ v_x(\mp 1) = b^{(\mp)},\ \ u|_{t=0} = u^0(x),\ \ v|_{t=0} = v^0(x),\end{aligned} \tag{2}$$

и соответствующая ей стационарная задача (4)

$$\begin{aligned}&\varepsilon^4 u_{xx} = f(u,v,x,\varepsilon),\ \ \varepsilon^2 v_{xx} = g(u,v,x,\varepsilon),\ \ x \in (-1,1)\backslash x_0;\\&u_x(\mp 1) = a^{(\mp)},\ \ v_x(\mp 1) = b^{(\mp)},\end{aligned} \tag{4}$$

с правыми частями $f(u,v,x,\varepsilon)$, $g(u,v,x,\varepsilon)$, принадлежащими классу $C^{(n+2)}(I_u \times I_v \times [-1,1] \times [0,\varepsilon_0])$, где n — порядок требуемого асимптотического приближения.

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 2.1. На множестве $I_v \times [-1,1]$ уравнение $f(u,v,x,0) = 0$ имеет изолированный корень $u = \varphi(v,x)$ и выполняется неравенство $f_u(\varphi(v,x),v,x,0) > 0$.

Условие 2.2. Обозначим $h(v,x) = g(\varphi(v,x),v,x,0)$. На отрезке $[-1,1]$ уравнение $h(v,x) = 0$ имеет изолированный корень $v = \psi(x)$, и всюду на этом отрезке выполняется неравенство $h_v(\psi(x),x) > 0$.

Пусть при всех $(u,v) \in I_u \times I_v$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ на отрезке $[-1,1]$ правые части уравнений задач (2), (4) удовлетворяют одному из четырёх типов квазимонотонности (КМ), то есть выполняются неравенства:

Условие 2.3(а).

$$\begin{aligned}&f_v(u,v,x,\varepsilon) < 0,\ \ g_u(u,v,x,\varepsilon) < 0\ \ (\text{NN тип});\\&f_v(u,v,x,\varepsilon) > 0,\ \ g_u(u,v,x,\varepsilon) > 0\ \ (\text{PP тип}).\end{aligned}$$

Условие 2.3(б).

$$\begin{aligned}&f_v(u,v,x,\varepsilon) < 0,\ \ g_u(u,v,x,\varepsilon) > 0\ \ (\text{NP тип});\\&f_v(u,v,x,\varepsilon) > 0,\ \ g_u(u,v,x,\varepsilon) < 0\ \ (\text{PN тип}).\end{aligned}$$

Введём на множестве $(v, x) = I_v \times [-1, 1]$ функции

$$\nu(v,x) := g_v(\varphi(v,x), v, x, 0) + \frac{f_v(\varphi(v,x), v, x, 0)}{f_u(\varphi(v,x), v, x, 0)} \cdot g_u(\varphi(v,x), v, x, 0),$$
$$\bar{\nu}(x) := \nu(\psi(x), x) \ \text{ и константы } \ \bar{\nu}^{(\mp)} := \bar{\nu}(\mp 1). \tag{14}$$

Условие 2.4. $\bar{\nu}(x) > 0$ на отрезке $[-1, 1]$.

2.2 Асимптотическое приближение стационарного решения

В настоящем параграфе мы остановимся на построении асимптотического приближения погранслойного решения задачи (4).

Асимптотическое приближение n-ого порядка решения задачи (4) строится в виде сумм

$$U_n = \bar{u}_n(x,\varepsilon) + P_{n+1}^{(\mp)} u(\zeta_\mp, \varepsilon) + R_{n+2}^{(\mp)} u(\eta_\mp, \varepsilon), \tag{15}$$

$$V_n = \bar{v}_n(x,\varepsilon) + P_{n+1}^{(\mp)} v(\zeta_\mp, \varepsilon) + R_{n+2}^{(\mp)} v(\eta_\mp, \varepsilon). \tag{16}$$

Функции, зависящие от переменной x, описывают поведение решения вдали от границ отрезка (регулярная часть). Функции, зависящие от растянутых переменных

$$\zeta_\mp = (x \pm 1)/\varepsilon, \ \ \eta_\mp = (x \pm 1)/\varepsilon^2,$$

описывают поведение решения в окрестности точек $x = \mp 1$ (пограничные функции).

Каждая из функций, входящих в правые части (15), (16), представляется в виде разложения по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \bar{u}_i^{(\mp)}(x) & \bar{v}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \bar{v}_i^{(\mp)}(x);\\
P_{n+1}^{(\mp)} u(\zeta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P_i^{(\mp)} u(\zeta_\mp), & P_{n+1}^{(\mp)} v(\zeta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i P_i^{(\mp)} v(\zeta_\mp);\\
R_{n+2}^{(\mp)} u(\eta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n+2} \varepsilon^i R_i^{(\mp)} u(\eta_\mp), & R_{n+2}^{(\mp)} v(\eta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n+2} \varepsilon^i R_i^{(\mp)} v(\eta_\mp).
\end{aligned} \tag{17}$$

Замечание 2.1. Во избежание разночтений автор обращает внимание читателя на различие в (17) между, например, $P_{n+1}^{(\mp)} u(\zeta_\mp, \varepsilon)$ и $P_{n+1}^{(\mp)} u(\zeta_\mp)$ — суммой и её отдельным членом.

2.2.1 Регулярная часть

Системы уравнений для функций регулярной части стандартным образом (см. [31]) получаются из равенств

$$\varepsilon^4 \frac{\partial^2 \bar{u}_n(x,\varepsilon)}{\partial x^2} - f(\bar{u}_n(x,\varepsilon), \bar{v}_n(x,\varepsilon), x, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right),$$
$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{v}_n(x,\varepsilon)}{\partial x^2} - g(\bar{u}_n(x,\varepsilon), \bar{v}_n(x,\varepsilon), x, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$$

путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в разложении Тейлора по малому параметру функций, входящих в эти равенства.

В частности, в нулевом порядке, принимая во внимание Условия 2.1 и 2.2, следует положить

$$\bar{u}_0(x) = \varphi(\psi(x), x), \quad \bar{v}_0(x) = \psi(x). \tag{18}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &\bar{f}_u(x) := f_u(\varphi(\psi(x),x), \psi(x), x, 0), && \bar{f}_u^{(\mp)} := \bar{f}_u(\mp 1), \\ &\bar{g}_u(x) := g_u(\varphi(\psi(x),x), \psi(x), x, 0), && \bar{g}_u^{(\mp)} := \bar{g}_u(\mp 1), \\ &\bar{h}_v(x) := h_v(\psi(x), x), && \bar{h}_v^{(\mp)} := \bar{h}_v(\mp 1). \end{aligned} \tag{19}$$

В аналогичном смысле понимаются и обозначения для других частных производных функций f и g.

Функции k-ого порядка $\bar{u}_k(x)$ и $\bar{v}_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, находятся из систем

$$\bar{f}_u(x)\,\bar{u}_k(x) + \bar{f}_v(x)\,\bar{v}_k(x) = \bar{F}_k(x), \quad \bar{g}_u(x)\,\bar{u}_k(x) + \bar{g}_v(x)\,\bar{v}_k(x) = \bar{G}_k(x), \tag{20}$$

где $\bar{F}_k(x)$, $\bar{G}_k(x)$ — известные на каждом шаге функции. Системы (20) также разрешимы в силу Условий 2.1 и 2.2, так как их определители равны $\bar{f}_u(x) \cdot \bar{h}_v(x) > 0$.

2.2.2 Функции пограничного слоя

Системы уравнений для функций пограничного слоя получаются путем приравнивания слагаемых с одинаковыми степенями ε в разложении Тейлора равенств

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 P_{n+1}^{(\mp)} u(\zeta_\mp, \varepsilon)}{\partial \zeta_\mp^2} = P^{(\mp)} f(\zeta_\mp, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \frac{\partial^2 P_{n+1}^{(\mp)} v(\zeta_\mp, \varepsilon)}{\partial \zeta_\mp^2} = P^{(\mp)} g(\zeta_\mp, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 R_{n+2}^{(\mp)} u(\eta_\mp, \varepsilon)}{\partial \eta_\mp^2} = R^{(\mp)} f(\eta_\mp, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 R_{n+2}^{(\mp)} v(\eta_\mp, \varepsilon)}{\partial \eta_\mp^2} = R^{(\mp)} g(\eta_\mp, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{22}$$

где

$$P^{(\mp)}f(\zeta_\mp,\varepsilon) :=$$
$$f\left(\bar{u}_n(\varepsilon\zeta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}u(\zeta_\mp,\varepsilon), \bar{v}_n(\varepsilon\zeta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}v(\zeta_\mp,\varepsilon), \varepsilon\zeta_\mp \mp 1, \varepsilon\right) -$$
$$- f\left(\bar{u}_n(\varepsilon\zeta_\mp \mp 1,\varepsilon), \bar{v}_n(\varepsilon\zeta_\mp \mp 1,\varepsilon), \varepsilon\zeta_\mp \mp 1, \varepsilon\right),$$

а функции $P^{(\mp)}g(\zeta_\mp,\varepsilon)$ определяются аналогичным образом;

$$R^{(\mp)}f(\eta_\mp,\varepsilon) := f\left(\bar{u}_n(\varepsilon^2\eta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}u(\varepsilon\eta_\mp,\varepsilon) + R^{(\mp)}_{n+2}u(\eta_\mp,\varepsilon),\right.$$
$$\left.\bar{v}_n(\varepsilon^2\eta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}v(\varepsilon\eta_\mp,\varepsilon) + R^{(\mp)}_{n+2}v(\eta_\mp,\varepsilon), \varepsilon^2\eta_\mp \mp 1, \varepsilon\right) -$$
$$- f\left(\bar{u}_n(\varepsilon^2\eta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}u(\varepsilon\eta_\mp,\varepsilon), \bar{v}_n(\varepsilon^2\eta_\mp \mp 1,\varepsilon) + P^{(\mp)}_{n+1}v(\varepsilon\eta_\mp,\varepsilon), \varepsilon^2\eta_\mp \mp 1, \varepsilon\right),$$

функции $R^{(\mp)}g$ определяются по аналогии с $R^{(\mp)}f$.

Будем требовать, чтобы для асимптотического приближения точно выполнялись краевые условия (13):

$$\left.\frac{\partial U^{(\mp)}_n(x,\varepsilon)}{\partial x}\right|_{x=\mp 1} = a^{(\mp)}, \quad \left.\frac{\partial V^{(\mp)}_n(x,\varepsilon)}{\partial x}\right|_{x=\mp 1} = b^{(\mp)}. \tag{23}$$

Также учтём требование убывания на бесконечности для входящих в асимптотическое приближение погранслойных функций (см. (17)):

$$P^{(\mp)}_k u(\zeta_\mp) \to 0,\ P^{(\mp)}_k v(\zeta_\mp) \to 0 \text{ при } \zeta_\mp \to \pm\infty;$$
$$R^{(\mp)}_k u(\eta_\mp) \to 0,\ R^{(\mp)}_k v(\eta_\mp) \to 0 \text{ при } \eta_\mp \to \pm\infty, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{24}$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях ε в (23), получаем следующие условия на концах отрезка для пограничных функций различного порядка:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-2}: \quad \left.\frac{dR_0^{(\mp)}u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = \left.\frac{dR_0^{(\mp)}v}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = 0;\\
&\varepsilon^{-1}: \quad \left.\frac{dP_0^{(\mp)}u}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR_1^{(\mp)}u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = \left.\frac{dP_0^{(\mp)}v}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR_1^{(\mp)}v}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = 0;\\
&\varepsilon^{0}: \quad \left.\frac{d\bar u_0}{dx}\right|_{x=\mp1} + \left.\frac{dP_1^{(\mp)}u}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR_2^{(\mp)}u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = a^{(\mp)},\\
&\qquad\;\; \left.\frac{d\bar v_0}{dx}\right|_{x=\mp1} + \left.\frac{dP_1^{(\mp)}v}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR_2^{(\mp)}v}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = b^{(\mp)};\\
&\varepsilon^{k}: \quad \left.\frac{d\bar u_k}{dx}\right|_{x=\mp1} + \left.\frac{dP_{k+1}^{(\mp)}u}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR_{k+2}^{(\mp)}u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = 0,\\
&\qquad\;\; \left.\frac{d\bar v_k}{dx}\right|_{x=\mp1} + \left.\frac{dP_{k+1}^{(\mp)}v}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} + \left.\frac{dR_{k+2}^{(\mp)}v}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = 0, \quad k=\overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Выпишем явно получающиеся из (21), (22) уравнения для пограничных функций.

Начнём с функций нулевого порядка — они должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}
&f(\varphi(\psi(\mp1),\mp1) + P_0^{(\mp)}u(\zeta_\mp), \psi(\mp1) + P_0^{(\mp)}v(\zeta_\mp), \mp1, 0) = 0,\\
&\frac{d^2P_0^{(\mp)}v(\zeta_\mp)}{d\zeta_\mp^2} - g(\varphi(\psi(\mp1),\mp1) + P_0^{(\mp)}u(\zeta_\mp), \psi(\mp1) + P_0^{(\mp)}v(\zeta_\mp), \mp1, 0) = 0,\\
&\frac{d^2R_0^{(\mp)}u(\eta_\mp)}{d\eta_\mp^2} +\\
&+ f(\varphi(\psi(\mp1),\mp1) + P_0^{(\mp)}u(0) + R_0^{(\mp)}u(\eta_\mp), \psi(\mp1) + P_0^{(\mp)}v(0) + R_0^{(\mp)}v(\eta_\mp), \mp1, 0) -\\
&\qquad - f(\varphi(\psi(\mp1),\mp1) + P_0^{(\mp)}u(0), \psi(\mp1) + P_0^{(\mp)}v(0), \mp1, 0) = 0,\\
&\frac{d^2R_0^{(\mp)}v(\eta_\mp)}{d\eta_\mp^2} = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Принимая во внимание (18), нетрудно видеть, что тривиальные функции пограничного слоя нулевого порядка, то есть

$$P_0^{(\mp)}u(\zeta_\mp) \equiv P_0^{(\mp)}v(\zeta_\mp) \equiv 0, \quad R_0^{(\mp)}u(\eta_\mp) \equiv R_0^{(\mp)}v(\eta_\mp) \equiv 0, \tag{27}$$

удовлетворяют уравнениям (26), а также граничным условиям (24), (25).

Для функций $R_1^{(\mp)}v(\eta_\mp)$ из разложений Тейлора равенств (22) получаются уравнения

$$\frac{d^2R_1^{(\mp)}v}{d\eta_\mp^2} = 0;$$

при получении уравнений для функций $R_1^{(\mp)}u(\eta_\mp)$ и $R_2^{(\mp)}v(\eta_\mp)$ также учитывается (27), откуда

$$\frac{d^2R_1^{(\mp)}u}{d\eta_\mp^2} - \bar{f}_u^{(\mp)}R_1^{(\mp)}u - \bar{f}_v^{(\mp)}R_1^{(\mp)}v = 0, \quad \frac{d^2R_2^{(\mp)}v}{d\eta_\mp^2} = 0,$$

а учёт (24), (25), в свою очередь, влечёт тривиальность $R_1^{(\mp)}v(\eta_\mp)$, $R_1^{(\mp)}u(\eta_\mp)$, и $R_2^{(\mp)}v(\eta_\mp)$.

Уравнения для функций $P_1^{(\mp)}v(\zeta_\mp)$, $P_1^{(\mp)}u(\zeta_\mp)$ имеют вид

$$0 = \bar{f}_u^{(\mp)}P_1^{(\mp)}u + \bar{f}_v^{(\mp)}P_1^{(\mp)}v, \quad \frac{d^2P_1^{(\mp)}v}{d\zeta_\mp^2} = \bar{g}_u^{(\mp)}P_1^{(\mp)}u + \bar{g}_v^{(\mp)}P_1^{(\mp)}v.$$

Выразим $P_1^{(\mp)}u$ из первых уравнений и подставим во вторые, учтём граничные условия (24), (25) и получим задачи для $P_1^{(\mp)}v(\eta_\mp)$:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2P_1^{(\mp)}v}{d\zeta_\mp^2} = \bar{h}_v^{(\mp)}\cdot P_1^{(\mp)}v, \quad \zeta_\mp \in \mathbb{R}^\pm, \\ &\left.\frac{dP_1^{(\mp)}v}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} = b^{(\mp)} - \left.\frac{d\bar{v}_0}{dx}\right|_{x=\mp1} =: p_1^{(\mp)}, \quad P_1^{(\mp)}v(\pm\infty) = 0. \end{aligned}$$

Функции $P_1^{(\mp)}v(\zeta_\mp)$ и $P_1^{(\mp)}u(\zeta_\mp)$ можно выписать в явном виде:

$$P_1^{(\mp)}v(\zeta_\mp) = \mp\frac{p_1^{(\mp)}}{\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}}}\cdot e^{-\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}}\cdot|\zeta_\mp|}, \quad P_1^{(\mp)}u(\zeta_\mp) = \pm\frac{\bar{f}_v^{(\mp)}p_1^{(\mp)}}{\bar{f}_u^{(\mp)}\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}}}\cdot e^{-\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}}\cdot|\zeta_\mp|}.$$

Для $R_2^{(\mp)}u(\eta_\mp)$ имеем задачи:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2R_2^{(\mp)}u}{d\eta_\mp^2} = \bar{f}_u^{(\mp)}\cdot R_2^{(\mp)}u, \quad \eta_\mp \in \mathbb{R}^\pm, \\ &\left.\frac{dR_2^{(\mp)}u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = a^{(\mp)} - \left.\frac{d\bar{u}_0}{dx}\right|_{x=\mp1} - \left.\frac{dP_1^{(\mp)}u}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} =: r_2^{(\mp)}, \quad R_2^{(\mp)}u(\pm\infty) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$R_2^{(\mp)}u(\eta_\mp) = \mp\frac{r_2^{(\mp)}}{\sqrt{\bar{f}_u^{(\mp)}}}\cdot e^{-\sqrt{\bar{f}_u^{(\mp)}}\cdot|\eta_\mp|}.$$

На данном этапе завершено построение асимптотического приближения нулевого порядка.

Построение асимптотического приближения k-ого порядка, $k \geq 1$, производится по следующему алгоритму.

Предварительно находим $\bar{u}_k(x)$ и $\bar{v}_k(x)$ (см. (20)).

На первом шаге решаются задачи

$$\frac{d^2 R_{k+2}^{(\mp)} v}{d\eta_\mp^2} = R_k^{(\mp)} g(\eta_\mp), \quad \eta_\mp \in \mathbb{R}^\pm, \qquad R_2^{(\mp)} v(\pm\infty) = 0,$$

в которых $R_k^{(\mp)} g(\eta_\mp)$ — известные функции. Следовательно, их решения:

$$R_{k+2}^{(\mp)} v(\eta_\mp) = \int\limits_{\pm\infty}^{\eta_\mp} d\eta_1 \int\limits_{\pm\infty}^{\eta_1} R_k^{(\mp)} g(\eta_2)\, d\eta_2, \quad \eta_\mp \in \mathbb{R}_0^\pm.$$

Замечание 2.2. В силу тривиальности погранслойных функций нулевого порядка, а также функций $R_1^{(\mp)} v(\eta_\mp)$, $R_1^{(\mp)} u(\eta_\mp)$ и $R_2^{(\mp)} v(\eta_\mp)$ функции $R_3^{(\mp)} g(\eta_\mp) \equiv 0$, откуда $R_3^{(\mp)} v(\eta_\mp) \equiv 0$ — об этом упоминалось в [27], однако не было расписано явно.

На втором шаге определяются функции $P_{k+1}^{(\mp)} u(\zeta_\mp)$ и $P_{k+1}^{(\mp)} v(\zeta_\mp)$ из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&P_{k+1}^{(\mp)} u = -\frac{\bar{f}_v^{(\mp)}}{\bar{f}_u^{(\mp)}} \cdot P_{k+1}^{(\mp)} v - P_{k+1}^{(\mp)} f, \quad \zeta_\mp \in \mathbb{R}_0^\pm, \\
&\frac{d^2 P_{k+1}^{(\mp)} v}{d\zeta_\mp^2} = \bar{h}_v^{(\mp)} \cdot P_{k+1}^{(\mp)} v + P_{k+1}^{(\mp)} g, \quad \zeta_\mp \in \mathbb{R}^\pm, \\
&\left.\frac{dP_{k+1}^{(\mp)} v}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} = -\left.\frac{d\bar{v}_k}{dx}\right|_{x=\mp1} - \left.\frac{dR_{k+2}^{(\mp)} v}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} =: p_{k+1}^{(\mp)}, \qquad P_{k+1}^{(\mp)} v(\pm\infty) = 0,
\end{aligned}$$

где $P_{k+1}^{(\mp)} f(\zeta_\mp)$, $P_{k+1}^{(\mp)} g(\zeta_\mp)$ известны.

На последнем шаге находим функции $R_{k+2}^{(\mp)} u(\eta_\mp)$ как решения задач

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 R_{k+2}^{(\mp)} u}{d\eta_\mp^2} = \bar{f}_u^{(\mp)} \cdot R_{k+2}^{(\mp)} u + R_{k+2}^{(\mp)} f, \quad \eta_\mp \in \mathbb{R}^\pm, \\
&\left.\frac{dR_{k+2}^{(\mp)} u}{d\eta_\mp}\right|_{\eta_\mp=0} = -\left.\frac{d\bar{u}_k}{dx}\right|_{x=\mp1} - \left.\frac{dP_{k+1}^{(\mp)} u}{d\zeta_\mp}\right|_{\zeta_\mp=0} =: r_{k+2}^{(\mp)}, \qquad R_{k+2}^{(\mp)} u(\pm\infty) = 0,
\end{aligned}$$

где $R_{k+2}^{(\mp)} f(\eta_\mp)$ известны.

В завершение отметим справедливость для искомых функций экспоненциальных оценок (см. [32])

$$\begin{aligned}
&\left|P_j^{(\mp)} u(\zeta_\mp)\right| \le C_P\, e^{-\kappa|\zeta_\mp|}, \quad \left|P_j^{(\mp)} v(\zeta_\mp)\right| \le C_P\, e^{-\kappa|\zeta_\mp|}, \\
&\left|R_j^{(\mp)} u(\eta_\mp)\right| \le C_R\, e^{-\gamma|\eta_\mp|}, \quad \left|R_j^{(\mp)} v(\eta_\mp)\right| \le C_R\, e^{-\gamma|\eta_\mp|}, \quad j = 0, 1, \ldots,
\end{aligned} \tag{28}$$

где C_P, C_R, κ, γ — некоторые положительные константы.

2.3 Основной результат для стационарной задачи

Теорема 2.1. *Пусть выполняются Условия 2.1–2.3(а) или 2.1–2.3(б),2.4. Тогда для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует классическое решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (4)*, для которого пара функций* $(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon))$ *является равномерным на отрезке* $[-1,1]$ *асимптотическим приближением с точностью* $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$.

Эту теорему будем доказывать при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств (см. [27, 29, 33, 34]).

2.3.1 Существование решения в общем случае

Обозначим

$$L_{u,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^4 \frac{d^2u}{dx^2} - f(u,v,x,\varepsilon), \quad L_{v,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^2 \frac{d^2v}{dx^2} - g(u,v,x,\varepsilon).$$

Верхнее и нижнее решения задачи (4) определяются следующим образом.

Определение 2.1. Пары функций $\left(\overline{U}(x), \overline{V}(x)\right)$ и $(\underline{U}(x), \underline{V}(x))$ называются, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (4), если для них в классическом смысле выполняются следующие неравенства:

(A_1). $\underline{U}(x) \le \overline{U}(x),\ \underline{V}(x) \le \overline{V}(x),\ x \in [-1,1];$

(A_2). $L_{u,\varepsilon}(\overline{U}, v) \le 0 \le L_{u,\varepsilon}(\underline{U}, v)\ \ \underline{V} \le v \le \overline{V},\ x \in (-1,1),$
$L_{v,\varepsilon}(u, \overline{V}) \le 0 \le L_{v,\varepsilon}(u, \underline{V})\ \ \underline{U} \le u \le \overline{U},\ x \in (-1,1);$

(A_3). $\overline{U}_x(-1) \le a^{(-)} \le \underline{U}_x(-1),\ \overline{U}_x(1) \ge a^{(+)} \ge \underline{U}_x(1),$
$\overline{V}_x(-1) \le b^{(-)} \le \underline{V}_x(-1),\ \overline{V}_x(1) \ge b^{(+)} \ge \underline{V}_x(1).$

Утверждение 2.1. *Пусть существуют пары функций* $\left(\overline{U}, \overline{V}\right)$ *и* $(\underline{U}, \underline{V})$*, являющиеся, соответственно, верхним и нижним решениями в смысле Определения 2.1. Тогда существует хотя бы одно классическое решение* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ *задачи* (4)*, причём*

$$\underline{U}(x) \le u_\varepsilon(x) \le \overline{U}(x), \quad \underline{V}(x) \le v_\varepsilon(x) \le \overline{V}(x), \quad x \in [-1,1]. \tag{29}$$

Это утверждение доказано, например, в [33].

2.3.2 Обоснование асимптотического приближения

Согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств [27,29] будем строить верхнее и нижнее решения задачи (4) как модификацию асимптотического приближения решения, то есть получим функции $\overline{U}$, $\underline{U}$, $\overline{V}$, $\underline{V}$ как модификации $U_n(x,\varepsilon)$, $V_n(x,\varepsilon)$:

$$\overline{U} = U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \alpha(x) + \varepsilon^{n+2} r_{n+2}^{(\mp)} u(\eta_\mp), \qquad \overline{V} = V_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \beta(x) + \varepsilon^{n+1} p_{n+1}^{(\mp)} v(\zeta_\mp),$$
$$\underline{U} = U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^n \alpha(x) - \varepsilon^{n+2} r_{n+2}^{(\mp)} u(\eta_\mp), \qquad \underline{V} = V_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^n \beta(x) - \varepsilon^{n+1} p_{n+1}^{(\mp)} v(\zeta_\mp). \tag{30}$$

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ будем определять как решение системы уравнений:

$$\bar{f}_u(x)\cdot\alpha(x) - |\bar{f}_v(x)|\cdot\beta(x) = A, \quad -|\bar{g}_u(x)|\cdot\alpha(x) + \bar{g}_v(x)\cdot\beta(x) = B$$

при $x \in [-1,1]$ с положительными константами A и B. Здесь использованы обозначения (19). В силу Условий 2.1, 2.2, а также 2.3(а) (NN, PP типы) или 2.3(б) и 2.4 (NP и PN типы) эта система однозначно разрешима:

$$\text{(NN, PP)} \qquad \alpha(x) = \frac{\bar{g}_v(x)A + |\bar{f}_v(x)|B}{\bar{f}_u(x)\cdot\bar{h}_v(x)}, \qquad \beta(x) = \frac{|\bar{g}_u(x)|A + \bar{f}_u(x)B}{\bar{f}_u(x)\cdot\bar{h}_v(x)},$$
$$\text{(NP, PN)} \qquad \alpha(x) = \frac{\bar{g}_v(x)A + |\bar{f}_v(x)|B}{\bar{f}_u(x)\cdot\bar{\nu}(x)}, \qquad \beta(x) = \frac{|\bar{g}_u(x)|A + \bar{f}_u(x)B}{\bar{f}_u(x)\cdot\bar{\nu}(x)}.$$

Здесь использованы обозначения (14), (19).

Покажем, что функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ принимают строго положительные значения. Сначала заметим: для NN и PP типов КМ из Условий 2.1-2.3(а) следуют неравенства

$$\bar{h}_v(x) = \bar{g}_v(x) - \frac{\bar{f}_v(x)}{\bar{f}_u(x)}\cdot\bar{g}_u(x) > 0 \ \text{ и } \ \frac{\bar{f}_v(x)}{\bar{f}_u(x)}\cdot\bar{g}_u(x) > 0;$$

для NP и PN типов КМ из Условий 2.1, 2.2, 2.3(б), 2.4 вытекают неравенства

$$\bar{\nu}(x) = \bar{g}_v(x) + \frac{\bar{f}_v(x)}{\bar{f}_u(x)}\cdot\bar{g}_u(x) > 0 \ \text{ и } \ \frac{\bar{f}_v(x)}{\bar{f}_u(x)}\cdot\bar{g}_u(x) < 0.$$

Следовательно, во всех случаях $\bar{g}_v(x) > 0$ — зная это, остаётся лишь заметить положительность числителей и знаменателей в силу тех же Условий 2.1–2.4.

Будем строить верхнее и нижнее решения удовлетворяющими равенствам в условии (A_3). Этого можно добиться, если потребовать

$$\left.\frac{d\alpha}{dx}\right|_{x=\mp 1}+\left.\frac{dr_{n+2}^{(\mp)}u}{d\eta_{\mp}}\right|_{\eta_{\mp}=0}=0,\quad \left.\frac{d\beta}{dx}\right|_{x=\mp 1}+\left.\frac{dp_{n+1}^{(\mp)}v}{d\zeta_{\mp}}\right|_{\zeta_{\mp}=0}=0, \tag{31}$$

Эти условия будут выполнены, если положить, например,

$$r_{n+2}^{(\mp)}u(\eta_{\mp})=\pm\frac{\alpha_x(\mp 1)}{k_u}\cdot e^{-k_u|\eta_{\mp}|},\quad p_{n+1}^{(\mp)}v(\zeta_{\mp})=\pm\frac{\beta_x(\mp 1)}{k_v}\cdot e^{-k_v|\zeta_{\mp}|}, \tag{32}$$

где k_u, k_v — некоторые произвольные положительные константы.

Докажем теперь, что функции, определённые выражениями (30), удовлетворяют неравенствам (A_1)-(A_3) и тем самым действительно являются верхним и нижним решениями задачи (12).

Лемма 2.1. *Пары функций* $(\overline{U}(x,\varepsilon),\overline{V}(x,\varepsilon))$ *и* $(\underline{U}(x,\varepsilon),\underline{V}(x,\varepsilon))$, *определенные выражениями* (30)*, при достаточно малых значениях* ε *являются соответственно верхним и нижним решениями задачи* (4) .

Для доказательства Леммы 2.1 нужно проверить выполнение неравенств (A_1) – (A_3).

Условие (A_1) выполняется, поскольку функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ принимают строго положительные значения и являются поправками порядка ε^n, а $r_{n+2}^{(\mp)}u(\eta_{\mp})$ и $p_{n+1}^{(\mp)}v(\zeta_{\mp})$ ограничены и являются поправками порядков ε^{n+2} и ε^{n+1} соответственно — следовательно, при достаточно малых ε

$$\overline{U}-\underline{U}=2\varepsilon^n\alpha(x)+O(\varepsilon^{n+2})>0,\quad \overline{V}-\underline{V}=2\varepsilon^n\beta(x)+O(\varepsilon^{n+1})>0,\quad x\in[-1,1].$$

Для доказательства условия (A_2) будем требовать при $x\in(-1,1)$ выполнения более жёстких условий:

$$(NN)\quad \begin{cases} L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V})<0<L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}),\\ L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V})<0<L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V});\end{cases}$$

$$(PP)\quad \begin{cases} L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V})<0<L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}),\\ L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V})<0<L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V});\end{cases}$$

$$(NP)\quad \begin{cases} L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V})<0<L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}),\\ L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V})<0<L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V});\end{cases}$$

$$(PN)\quad \begin{cases} L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V})<0<L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}),\\ L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V})<0<L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}).\end{cases}$$

Из выполнения последних в любом случае следует

$$L_{u,\varepsilon}(\overline{U},v) \le -\varepsilon^n A + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) < 0, \quad L_{u,\varepsilon}(\underline{U},v) \ge \varepsilon^n A + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) > 0;$$
$$L_{v,\varepsilon}(u,\overline{V}) \le -\varepsilon^n B + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) < 0, \quad L_{v,\varepsilon}(u,\underline{V}) \ge \varepsilon^n B + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) > 0. \tag{33}$$

Неравенства (33) выполняются при достаточно малых ε и указанном выше выборе $\alpha(x)$, $\beta(x)$.

Выполнение условия (A_3) следует из способа построения верхнего и нижнего решения, а именно (31), (32).

Лемма 2.1 доказана. □

Замечание 2.3. Вместо поправки $\varepsilon^{n+2}r_{n+2}^{(\mp)}u(\eta_{\mp})$ в (30) можно использовать $\varepsilon^{n+1}p_{n+1}^{(\mp)}u(\zeta_{\mp})$, тогда для $p_{n+1}^{(\mp)}u(\zeta_{\mp})$ достаточно потребовать $\alpha_x(\mp 1) + \dfrac{dp_{n+1}^{(\mp)}u}{d\zeta_{\mp}}(0) = 0$ вместо первого равенства в (31).

Применяя к задаче (4) Лемму 2.1, в которой в качестве верхнего и нижнего решений выступают функции $(\underline{U},\underline{V})$ и $(\overline{U},\overline{V})$, определенные выражениями (30), получим, что у задачи (4) существует решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$, для которого справедливы неравенства (29) — из них при $x \in [-1,1]$ следуют

$$\underline{U}(x) - U_{n-1}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n) \le u_\varepsilon(x) - U_{n-1}(x,\varepsilon) \le \overline{U}(x) - U_{n-1}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n),$$
$$\underline{V}(x) - V_{n-1}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n) \le v_\varepsilon(x) - V_{n-1}(x,\varepsilon) \le \overline{V}(x) - V_{n-1}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n),$$

откуда после замены индекса n на $n+1$ (в этом месте неявно используется асимптотическое приближение порядка $n+1$ — именно по этой причине требуется $C^{(n+2)}$ гладкость функций f и g) с учётом (30) следует искомая оценка.

Теорема 2.1 доказана. ■

2.4 Локальная единственность и асимптотическая устойчивость стационарного решения

Обозначим

$$L_{u,\varepsilon}^t(u,v) := \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - f(u,v,x,\varepsilon), \quad L_{v,\varepsilon}^t(u,v) := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - g(u,v,x,\varepsilon).$$

Определение 2.2. Пары функций $\left(\overline{U}^T(x,t), \overline{V}^T(x,t)\right)$ и $\left(\underline{U}^T(x,t), \underline{V}^T(x,t)\right)$ называются, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (2), если для них выполняются в классическом смысле следующие неравенства:

(B$_1$). $\underline{U}^T(x,t) \le \overline{U}^T(x,t),\ \underline{V}^T(x,t) \le \overline{V}^T(x,t),\ (x,t) \in [-1,1] \times \mathbb{R}_0^+$;

(B$_2$). $L^t_{u,\varepsilon}(\overline{U}^T, v) \le 0 \le L^t_{u,\varepsilon}(\underline{U}^T, v)\ \ \underline{V}^T \le v \le \overline{V}^T,\ (x,t) \in (-1,1) \times \mathbb{R}^+$,
$L^t_{v,\varepsilon}(u, \overline{V}^T) \le 0 \le L^t_{u,\varepsilon}(u, \underline{V}^T)\ \ \underline{U}^T \le u \le \overline{U}^T,\ (x,t) \in (-1,1) \times \mathbb{R}^+$;

(B$_3$). $\overline{U}^T_x(-1,t) \le a^{(-)} \le \underline{U}^T_x(-1,t),\ \overline{U}^T_x(1,t) \ge a^{(+)} \ge \underline{U}^T_x(1,t),\ t \in \mathbb{R}_0^+$,
$\overline{V}^T_x(-1,t) \le b^{(-)} \le \underline{V}^T_x(-1,t),\ \overline{V}^T_x(1,t) \ge b^{(+)} \ge \underline{V}^T_x(1,t),\ t \in \mathbb{R}_0^+$.

Утверждение 2.2. *Пусть существуют пары функций* $(\overline{U}^T, \overline{V}^T)$ *и* $(\underline{U}^T, \underline{V}^T)$*, являющиеся, соответственно, верхним и нижним решениями задачи* (2) *в смысле Определения 2.2. Тогда существует единственное классическое решение* $(y_\varepsilon(x,t), z_\varepsilon(x,t))$ *задачи* (2)*, причём на множестве* $[-1,1] \times \mathbb{R}_0^+$ *выполняются неравенства:*

$$\underline{U}^T(x,t) \le y_\varepsilon(x,t) \le \overline{U}^T(x,t),\ \ \underline{V}^T(x,t) \le z_\varepsilon(x,t) \le \overline{V}^T(x,t).$$

Это утверждение доказывается в [33].

Рассмотрим теперь функции

$$\begin{aligned} &\overline{U}^T(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + \big(\overline{U}_1(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\big)\, e^{-\lambda t},\ \ \overline{V}^T(x,t,\varepsilon) = v_\varepsilon(x) + \big(\overline{V}_1(x,\varepsilon) - v_\varepsilon(x)\big)\, e^{-\lambda t},\\ &\underline{U}^T(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + \big(\underline{U_1}(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\big)\, e^{-\lambda t},\ \ \underline{V}^T(x,t,\varepsilon) = v_\varepsilon(x) + \big(\underline{V_1}(x,\varepsilon) - v_\varepsilon(x)\big)\, e^{-\lambda t}, \end{aligned} \tag{34}$$

где λ — положительная константа, $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ — существующее согласно Теореме 2.1 точное решение задачи (4), а $(\underline{U_1}(x,\varepsilon), \underline{V_1}(x,\varepsilon))$, $(\overline{U}_1(x,\varepsilon)\overline{V}_1(x,\varepsilon))$ — верхнее и нижнее решения задачи (4), построенные на основе асимптотического приближения первого порядка $(U_1(x,\varepsilon), V_1(x,\varepsilon))$ (см. (15), (16), (30)).

В полной аналогии с [34] можно доказать, что при достаточно малом λ функции (34) являются нижним и верхним решениями задачи (2). Отсюда с учётом Утверждения 2.2 немедленно следует основной результат этого параграфа — Теорема 2.2.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются Условия 2.1–2.3(а) или 2.1–2.3(б),2.4. Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (4) *локально единственно на множестве* $[\underline{U_1}(x,\varepsilon), \overline{U}_1(x,\varepsilon)] \times [\underline{V_1}(x,\varepsilon), \overline{V}_1(x,\varepsilon)]$ *и, как решение задачи* (2)*, асимптотически устойчиво с областью притяжения не меньше* $[\underline{U_1}(x,\varepsilon), \overline{U}_1(x,\varepsilon)] \times [\underline{V_1}(x,\varepsilon), \overline{V}_1(x,\varepsilon)]$.

3 Задача с фиксированной точкой разрыва

3.1 Постановка задачи и накладываемые условия

Рассматриваются одномерные параболическая задача (2)

$$\begin{aligned}&\varepsilon^4 u_{xx} - u_t = f(u,v,x,\varepsilon), \;\; \varepsilon^2 v_{xx} - v_t = g(u,v,x,\varepsilon), \;\; x \in (-1,1)\backslash x_0, \; t \in \mathbb{R}^+,\\ &u_x(\mp 1) = a^{(\mp)}, \;\; v_x(\mp 1) = b^{(\mp)}, \;\; u|_{t=0} = u^0(x), \;\; v|_{t=0} = v^0(x),\end{aligned} \tag{2}$$

и соответствующая ей стационарная задача (4)

$$\begin{aligned}&\varepsilon^4 u_{xx} = f(u,v,x,\varepsilon), \;\; \varepsilon^2 v_{xx} = g(u,v,x,\varepsilon), \;\; x \in (-1,1)\backslash x_0;\\ &u_x(\mp 1) = a^{(\mp)}, \;\; v_x(\mp 1) = b^{(\mp)}.\end{aligned} \tag{4}$$

Правые части систем (2) и (4) имеют вид:

$$\begin{aligned}f(u,v,x,\varepsilon) &= \begin{cases} f^{(-)}(u,v,x,\varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \, -1 \le x < x_0\,, \\ f^{(+)}(u,v,x,\varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \, x_0 \le x \le 1\,; \end{cases}\\ g(u,v,x,\varepsilon) &= \begin{cases} g^{(-)}(u,v,x,\varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \, -1 \le x < x_0\,, \\ g^{(+)}(u,v,x,\varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \, x_0 \le x \le 1\,, \end{cases}\end{aligned} \tag{35}$$

причём

$$f^{(-)}(u,v,x_0,\varepsilon) \neq f^{(+)}(u,v,x_0,\varepsilon), \;\; g^{(-)}(u,v,x_0,\varepsilon) \neq g^{(+)}(u,v,x_0,\varepsilon)$$

для всех допустимых (u,v) и ε.

Уравнения (2) выполняются при всех $(x,t) \in ((-1,1)\backslash x_0) \times \mathbb{R}^+$, и (4) — при всех $x \in (-1,1)\backslash x_0$.

Гладкость функций $f^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon)$ и $g^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon)$ связана с порядком асимптотического приближения, которое требуется построить. Для построения приближения n-го порядка необходимо, чтобы функции $f^{(\mp)}$ и $g^{(\mp)}$ принадлежали классу $C^{(n+2)}$ по совокупности переменных в замыканиях своих областей определения [27].

Решение задачи (2) будем понимать в смысле следующего определения.

Определение 3.1. Пара функций $(u(x,t), v(x,t))$ из класса

$$C([-1,1] \times \mathbb{R}_0^+) \cap C^{1,0}\left([-1,1] \times \mathbb{R}^+\right) \cap C^{2,1}\left(((-1,1)\backslash x_0) \times \mathbb{R}^+\right)$$

называется решением задачи (2), если она удовлетворяет уравнениям (2) при $(x,t) \in ((-1,1)\backslash x_0)\times\mathbb{R}^+$, а также граничным и начальным условиям (2).

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 3.1. Каждое из уравнений $f^{(\mp)}(u,v,x,0) = 0$ имеет изолированный корень $u = \varphi^{(\mp)}(v,x)$ соответственно в областях $I_v \times [-1,x_0]$ и $I_v\times[x_0,1]$, и для всех $v\in I_v$ выполняются неравенства

$$\varphi^{(-)}(v,x_0) < \varphi^{(+)}(v,x_0),$$
$$f_u^{(-)}(\varphi^{(-)}(v,x),v,x,0) > 0,\ x\in[-1,x_0],\quad f_u^{(+)}(\varphi^{(+)}(v,x),v,x,0) > 0,\ x\in[x_0,1].$$

Обозначим $h^{(\mp)}(v,x) = g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)$.

Условие 3.2. Каждое из уравнений $h^{(\mp)}(v,x) = 0$ имеет изолированный корень $v = \psi^{(\mp)}(x)$ соответственно на отрезках $[-1,x_0]$ и $[x_0,1]$, и выполняются неравенства

$$\psi^{(-)}(x_0) < \psi^{(+)}(x_0),$$
$$h_v^{(-)}(\psi^{(-)}(x),x) > 0,\ x\in[-1,x_0],\quad h_v^{(+)}(\psi^{(+)}(x),x) > 0,\ x\in[x_0,1].$$

Условие 3.3. Пусть при всех $(u,v)\in I_u\times I_v$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ на соответствующих отрезках $[-1,x_0]$ и $[x_0,1]$ правые части уравнений (2), (4) удовлетворяют одной из четырех систем неравенств, называемых «условиями квазимонотонности»:

$$f_v^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon) < 0,\quad g_u^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon) < 0\ \text{(NN тип)};$$
$$f_v^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon) > 0,\quad g_u^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon) > 0\ \text{(PP тип)};$$
$$f_v^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon) < 0,\quad g_u^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon) > 0\ \text{(NP тип)};$$
$$f_v^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon) > 0,\quad g_u^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon) < 0\ \text{(PN тип)}.$$

Условие 3.4. Пусть выполняются неравенства

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{v} h^{(-)}(s,x_0)ds > 0,\quad v\in(\psi^{(-)}(x_0),\psi^{(+)}(x_0)],$$
$$\int\limits_{\psi^{(+)}(x_0)}^{v} h^{(+)}(s,x_0)ds > 0,\quad v\in[\psi^{(-)}(x_0),\psi^{(+)}(x_0)),$$

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(v,x_0)}^{u} f^{(-)}(s,v,x_0,0)ds > 0, \quad u \in (\varphi^{(-)}(v,x_0), \varphi^{(+)}(v,x_0)], \quad v \in [\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0)],$$
$$\int\limits_{\varphi^{(+)}(v,x_0)}^{u} f^{(+)}(s,v,x_0,0)ds > 0, \quad u \in [\varphi^{(-)}(v,x_0), \varphi^{(+)}(v,x_0)), \quad v \in [\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0)].$$

Поясним смысл Условия 3.4, используя понятие присоединённых уравнений для стационарной системы, отвечающей (2). В данном случае эти уравнения выписываются через растянутые переменные двух масштабов: $\tau := \dfrac{x - x_0}{\varepsilon}$ и $\sigma := \dfrac{x - x_0}{\varepsilon^2}$ следующим образом [31]:

$$\frac{d^2\tilde{v}}{d\tau^2} = h^{(-)}(\tilde{v}, x_0), \quad \tau < 0, \qquad \frac{d^2\tilde{v}}{d\tau^2} = h^{(+)}(\tilde{v}, x_0), \quad \tau > 0, \tag{36}$$
$$\frac{d^2\hat{u}}{d\sigma^2} = f^{(-)}\left(\hat{u}, v, x_0, 0\right), \quad \sigma < 0, \qquad \frac{d^2\hat{u}}{d\sigma^2} = f^{(+)}\left(\hat{u}, v, x_0, 0\right), \quad \sigma > 0. \tag{37}$$

Здесь v является параметром, изменяющимся в пределах $[\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0)]$.

Каждое из присоединённых уравнений эквивалентно соответствующей присоединённой системе
$$\frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \Phi^{(\mp)}, \quad \frac{d\Phi^{(\mp)}}{d\tau} = h^{(\mp)}(\tilde{v}, x_0); \qquad \frac{d\hat{u}}{d\sigma} = \Psi^{(\mp)}, \quad \frac{d\Psi^{(\mp)}}{d\sigma} = f^{(\mp)}\left(\hat{u}, v, x_0, 0\right). \tag{38}$$

При выполнении Условия 3.4 функции

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}) = \sqrt{2\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{v}} h^{(\mp)}(s, x_0)ds} \tag{39}$$

задают выражения для сепаратрис седловых точек $(\psi^{(\mp)}(x_0), 0)$ первой пары систем (38) на фазовой плоскости $(\tilde{v}, \Phi)$, а функции

$$\Psi^{(\mp)}(\hat{u}, v) = \sqrt{2\int\limits_{\varphi^{(\mp)}(v,x_0)}^{\hat{u}} f^{(\mp)}(s, v, x_0, 0)ds} \tag{40}$$

при каждом v – выражения для сепаратрис седловых точек $(\varphi^{(\mp)}(v, x_0), 0)$ второй пары систем (38) на фазовой плоскости $(\hat{u}, \Psi)$.

Условие 3.5. Пусть существует величина $v = q_0 \in \left(\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0)\right)$ — единственное решение уравнения
$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{v} h^{(-)}(s, x_0)ds = \int\limits_{\psi^{(+)}(x_0)}^{v} h^{(+)}(s, x_0)ds$$

и величина $u = p_0 \in \left(\varphi^{(-)}(q_0, x_0), \varphi^{(+)}(q_0, x_0)\right)$ — единственное решение уравнения

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(q_0,x_0)}^{u} f^{(-)}(s, q_0, x_0, 0)ds = \int\limits_{\varphi^{(+)}(q_0,x_0)}^{u} f^{(+)}(s, q_0, x_0, 0)ds.$$

Пусть кроме того выполняются неравенства

- $f^{(-)}(p_0, q_0, x_0, 0) > f^{(+)}(p_0, q_0, x_0, 0)$,
- $h^{(-)}(q_0, x_0) > h^{(+)}(q_0, x_0)$ – в случае квазимонотонности типов NN и PP,
- $h^{(-)}(q_0, x_0) \neq h^{(+)}(q_0, x_0)$ – в случае квазимонотонности типов NP и PN.

Положим

$$H^v(\tilde{v}) := \Phi^{(-)}(\tilde{v}) - \Phi^{(+)}(\tilde{v}), \quad H^u(\hat{u}, v) := \Psi^{(-)}(\hat{u}, v) - \Psi^{(+)}(\hat{u}, v). \tag{41}$$

Непосредственно из Условия 3.5 следуют равенства

$$(\Phi(q_0) :=)\ \Phi^{(-)}(q_0) = \Phi^{(+)}(q_0), \quad (\Psi(p_0, q_0) :=)\ \Psi^{(-)}(p_0, q_0) = \Psi^{(+)}(p_0, q_0), \tag{42}$$

что эквивалентно

$$H^v(q_0) = 0, \quad H^u(p_0, q_0) = 0. \tag{43}$$

Неравенство, связывающее величины $h^{(-)}(q_0, x_0)$ и $h^{(+)}(q_0, x_0)$, более слабое для NP и PN типов квазимонотонности, но для этих случаев потребуются дополнительные ограничения на входные данные.

Введём функции

$$\nu^{(\mp)}(v, x) := g_v^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v, x), v, x, 0) + \frac{f_v^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v, x), v, x, 0)}{f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v, x), v, x, 0)} \cdot g_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v, x), v, x, 0)$$

соответственно на множествах $(v, x) = I_v \times [-1, x_0]$ для функций с верхним индексом «$(-)$» и $(v, x) = I_v \times [x_0, 1]$ для функций с индексом «$(+)$», а также введём обозначения

$$\bar{\nu}^{(\mp)}(x) := \nu^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x). \tag{44}$$

Условие 3.6 (только для КМ типов PN и NP). Пусть $\bar{\nu}^{(\mp)}(x) > 0$ соответственно на отрезках

$[-1, x_0]$ и $[x_0, 1]$, а для функций $\nu^{(\mp)}(v, x)$ справедливы соотношения

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{v} \nu^{(-)}(s, x_0)ds \geq 0, \quad v \in [\psi^{(-)}(x_0), q_0), \qquad \int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{q_0} \nu^{(-)}(s, x_0)ds > 0,$$

$$\int\limits_{v}^{\psi^{(+)}(x_0)} \nu^{(+)}(s, x_0)ds \geq 0, \quad v \in (q_0, \psi^{(+)}(x_0)], \qquad \int\limits_{q_0}^{\psi^{(+)}(x_0)} \nu^{(+)}(s, x_0)ds > 0.$$

Далее нас будет интересовать устойчивое стационарное решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ задачи (4), имеющее внутренний переходный слой в окрестности точки x_0, то есть резко изменяющееся в окрестности этой точки от значений $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ близких к $(\varphi^{(-)}(\psi^{(-)}(x_0), x_0), \psi^{(-)}(x_0))$ до значений близких к $(\varphi^{(+)}(\psi^{(+)}(x_0), x_0), \psi^{(+)}(x_0))$.

Определение 3.2. Пара функций $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ из класса $C^1([-1, 1]) \cap C^2((-1, 1)\backslash x_0)$ называется решением задачи (4), если она удовлетворяет уравнениям (4) при $x \in (-1, 1)\backslash x_0$ и граничным условиям (4).

Как было отмечено во введении, одним из основных этапов доказательства существования и устойчивости стационарного решения является построение верхнего и нижнего решений задачи (4) как модификации асимптотического приближения её решения, поэтому далее остановимся на последнем.

3.2 Асимптотическое приближение решения стационарной задачи

Асимптотическое приближение, $(U_n(x, \varepsilon), V_n(x, \varepsilon))$, n-ого порядка решения с внутренним переходным слом в окрестности точки разрыва задачи (4) одно и то же для всех типов квазимонотонности.

Асимптотическое приближение строится отдельно слева и справа от точки x_0.

$$U_n(x, \varepsilon) = \begin{cases} U_n^{(-)}(x, \varepsilon), & -1 \leq x < x_0\,, \\ U_n^{(+)}(x, \varepsilon), & x_0 \leq x \leq 1\,, \end{cases} \qquad V_n(x, \varepsilon) = \begin{cases} V_n^{(-)}(x, \varepsilon), & -1 \leq x < x_0\,, \\ V_n^{(+)}(x, \varepsilon), & x_0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{45}$$

Каждая из функций $U_n^{(\mp)}$, $V_n^{(\mp)}$ представляется в виде суммы функций, описывающих решение вдали от переходного слоя и границ отрезка (регулярная часть), функций переходного слоя, зависящих от растянутых переменных различных масштабов $\tau = (x - x_0)/\varepsilon$ и $\sigma = (x - x_0)/\varepsilon^2$, и пограничных функций, которые также зависят от различных растянутых переменных $\zeta_\mp = (x \pm 1)/\varepsilon$ и $\eta_\mp = (x \pm 1)/\varepsilon^2$ в окрестностях точек $x = \mp 1$:

$$
\begin{aligned}
U_n^{(\mp)} &= \bar{u}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q_n^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon) + M_n^{(\mp)}u(\sigma,\varepsilon) + P_{n+1}^{(\mp)}u(\zeta_\mp,\varepsilon) + R_{n+2}^{(\mp)}u(\eta_\mp,\varepsilon),\\
V_n^{(\mp)} &= \bar{v}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q_n^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon) + M_{n+2}^{(\mp)}v(\sigma,\varepsilon) + P_{n+1}^{(\mp)}v(\zeta_\mp,\varepsilon) + R_{n+2}^{(\mp)}v(\eta_\mp,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{46}
$$

Каждая из функций в этих суммах представляется в виде разложений по степеням малого параметра (отсутствие некоторых их первых членов объяснено в предыдущей главе и ниже в работе):

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\bar{u}_i^{(\mp)}(x) & \bar{v}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\bar{v}_i^{(\mp)}(x);\\
Q_n^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i Q_i^{(\mp)}u(\tau), & Q_n^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i Q_i^{(\mp)}v(\tau);\\
M_n^{(\mp)}u(\sigma,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i M_i^{(\mp)}u(\sigma), & M_{n+2}^{(\mp)}v(\sigma,\varepsilon) &= \sum_{i=2}^{n+2}\varepsilon^i M_i^{(\mp)}v(\sigma);\\
P_{n+1}^{(\mp)}u(\zeta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{n+1}\varepsilon^i P_i^{(\mp)}u(\zeta_\mp), & P_{n+1}^{(\mp)}v(\zeta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=2}^{n+1}\varepsilon^i P_i^{(\mp)}v(\zeta_\mp);\\
R_{n+2}^{(\mp)}u(\eta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=2}^{n+2}\varepsilon^i R_i^{(\mp)}u(\eta_\mp), & R_{n+2}^{(\mp)}v(\eta_\mp,\varepsilon) &= \sum_{i=4}^{n+2}\varepsilon^i R_i^{(\mp)}v(\eta_\mp).
\end{aligned} \tag{47}
$$

Функции $U_n^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U_n^{(+)}(x,\varepsilon)$, а также $V_n^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $V_n^{(+)}(x,\varepsilon)$ сшиваются непрерывно в точке x_0, согласно равенствам

$$
\begin{aligned}
U_n^{(-)}(x_0,\varepsilon) &= U_n^{(+)}(x_0,\varepsilon) = p_0 + \ldots + \varepsilon^n p_n + O(\varepsilon^{n+1});\\
V_n^{(-)}(x_0,\varepsilon) &= V_n^{(+)}(x_0,\varepsilon) = q_0 + \ldots + \varepsilon^n q_n + O(\varepsilon^{n+1}),
\end{aligned} \tag{48}
$$

где величины p_0 и q_0 – те же, что в Условии 3.5, а коэффициенты p_k и q_k, $k = \overline{1,n}$, определяются последовательно при построении функций переходного слоя таким образом, чтобы выполнялись следующие условия на производные функций $U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, $V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)$:

$$
\frac{dU_n^{(-)}}{dx}(x_0,\varepsilon) = \frac{dU_n^{(+)}}{dx}(x_0,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n-1}), \quad \frac{dV_n^{(-)}}{dx}(x_0,\varepsilon) = \frac{dV_n^{(+)}}{dx}(x_0,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n}). \tag{49}
$$

3.2.1 Регулярная часть асимптотического приближения

Системы уравнений для функций регулярной части в каждом порядке $k = 0, 1,$ ... получаются, если приравнять коэффициенты при ε^k в разложении Тейлора по малому параметру равенств

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^4\frac{\partial^2\bar{u}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)}{\partial x^2} - f^{(\mp)}(\bar{u}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon),\bar{v}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon),x,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right),\\
&\varepsilon^2\frac{\partial^2\bar{v}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)}{\partial x^2} - g^{(\mp)}(\bar{u}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon),\bar{v}_n^{(\mp)}(x,\varepsilon),x,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

В частности, в нулевом порядке из Условий 3.1 и 3.2, следует $\bar{v}_0^{(\mp)}(x) = \psi^{(\mp)}(x)$, $\bar{u}_0^{(\mp)}(x) = \varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x)$.

Функции k-ого порядка $\bar{u}_k^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_k^{(\mp)}(x)$, $k = \overline{1, n}$, находятся из систем

$$\begin{cases} \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_k^{(\mp)}(x) + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_k^{(\mp)}(x) = \bar{F}_k^{(\mp)}(x), \\ \bar{g}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_k^{(\mp)}(x) + \bar{g}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_k^{(\mp)}(x) = \bar{G}_k^{(\mp)}(x), \end{cases}$$

где обозначено

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(x) := f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x), \psi^{(\mp)}(x), x, 0) \tag{50}$$

и аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}_v^{(\mp)}(x), \bar{g}_u^{(\mp)}(x), \bar{g}_v^{(\mp)}(x)$, а $\bar{F}_k^{(\mp)}(x), \bar{G}_k^{(\mp)}(x)$ — известные на каждом шаге функции. Эти системы разрешимы в силу Условий 3.1–3.3.

3.2.2 Системы для функций переходного слоя

Системы уравнений для функций переходного слоя получаются тем же способом, что и для регулярной части, из равенств

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 Q_n^{(\mp)} u(\tau, \varepsilon)}{\partial \tau^2} = Q^{(\mp)} f(\tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \frac{\partial^2 Q_n^{(\mp)} v(\tau, \varepsilon)}{\partial \tau^2} = Q^{(\mp)} g(\tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{51}$$

$$\frac{\partial^2 M_n^{(\mp)} u(\sigma, \varepsilon)}{\partial \sigma^2} = M^{(\mp)} f(\sigma, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 M_{n+2}^{(\mp)} v(\sigma, \varepsilon)}{\partial \sigma^2} = M^{(\mp)} g(\sigma, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned} &Q^{(\mp)} f(\tau, \varepsilon) := f^{(\mp)}(\bar{u}_n^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon) + Q_n^{(\mp)} u(\tau, \varepsilon), \bar{v}_n^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon) + Q_n^{(\mp)} v(\tau, \varepsilon), x_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon) - \\ &- f^{(\mp)}(\bar{u}_n^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon), \bar{v}_n^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon), x_0 + \varepsilon\tau, \varepsilon), \end{aligned}$$

а функции $Q^{(\mp)} g(\tau, \varepsilon)$ определяются аналогичным образом;

$$\begin{aligned} &M^{(\mp)} f(\sigma, \varepsilon) := f^{(\mp)}(\bar{u}_n^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon^2\sigma, \varepsilon) + Q_n^{(\mp)} u(\varepsilon\sigma, \varepsilon) + M_n^{(\mp)} u(\sigma, \varepsilon), \\ &\bar{v}_n^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon^2\sigma, \varepsilon) + Q_n^{(\mp)} v(\varepsilon\sigma, \varepsilon) + M_{n+2}^{(\mp)} v(\sigma, \varepsilon), x_0 + \varepsilon^2\sigma, \varepsilon) - \\ &- f^{(\mp)}(\bar{u}_n^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon^2\sigma, \varepsilon) + Q_n^{(\mp)} u(\varepsilon\sigma, \varepsilon), \bar{v}_n^{(\mp)}(x_0 + \varepsilon^2\sigma, \varepsilon) + Q_n^{(\mp)} v(\varepsilon\sigma, \varepsilon), x_0 + \varepsilon^2\sigma, \varepsilon), \end{aligned}$$

а функции $M^{(\mp)} g$ определяются по аналогии с $M^{(\mp)} f$.

Краевые условия при $\tau = 0$ и $\sigma = 0$ для функций переходного слоя получаются из условий непрерывного сшивания (48); также учитывается требование убывания этих функций на бесконечности

$$Q_i^{(\mp)}u(\tau) \to 0, Q_i^{(\mp)}v(\tau) \to 0 \text{ при } \tau \to \mp\infty;$$
$$M_i^{(\mp)}u(\sigma) \to 0, M_i^{(\mp)}v(\sigma) \to 0 \text{ при } \sigma \to \mp\infty, \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{53}$$

Задачи для функций с верхним индексом «$(-)$» решаются на полупрямых $\tau \leq 0$ и $\sigma \leq 0$, а для функций с верхним индексом «$(+)$» — на полупрямых $\tau \geq 0$ и $\sigma \geq 0$.

3.2.3 Функции переходного слоя нулевого порядка

Описанным выше способом для функций $M_0^{(\mp)}v(\sigma)$ и $M_1^{(\mp)}v(\sigma)$ получаются однородные уравнения с однородными краевыми условиями и условиями стремления к нулю на бесконечности. Отсюда следует, что эти функции тривиальные:

$$M_i^{(\mp)}v \equiv 0, \quad i = 0, 1. \tag{54}$$

Введём обозначения

$$\tilde{u}^{(\mp)}(\tau) := \varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x_0), x_0) + Q_0^{(\mp)}u(\tau), \quad \tilde{v}^{(\mp)}(\tau) := \psi^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}v(\tau). \tag{55}$$

Из первой пары равенств (51) в нулевом порядке с учетом введенных обозначений получаем уравнение $f^{(\mp)}\left(\tilde{u}^{(\mp)}(\tau), \tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0, 0\right) = 0$, из которого с учетом Условия 3.1 следует выражение

$$\tilde{u}^{(\mp)}(\tau) = \varphi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0). \tag{56}$$

Выделяя слагаемые нулевого порядка во второй паре равенств (51), условии непрерывности (48) и условии убывания на бесконечности (53), с учетом обозначений (55) и выражений (56), получаем задачи для функций $\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)$:

$$\frac{d^2\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)}{d\tau^2} = h^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0), \ \tilde{v}^{(\mp)}(0) = q_0, \ \tilde{v}^{(\mp)}(\mp\infty) = \psi^{(\mp)}(x_0). \tag{57}$$

Уравнения (57) совпадают с присоединёнными уравнениями (36).

При выполнении Условия 3.4 решения задач (36) существуют (см. [32, 111]) и для них справедливы следующие оценки:

$$\left|\tilde{v}^{(\mp)}(\tau) - \psi^{(\mp)}(x_0)\right| \leq C \exp\left(-\varkappa|\tau|\right),$$

где C, $\varkappa$ – положительные константы.

Введем обозначения

$$\hat{u}^{(\mp)}(\sigma) := \varphi^{(\mp)}(q_0, x_0) + M_0^{(\mp)} u(\sigma). \tag{58}$$

Используя эти обозначения, из первой пары равенств (52) с учётом (54), а также условий (48) и (53) в нулевом порядке получаем задачи для функций $\hat{u}^{(\mp)}(\sigma)$:

$$\frac{d^2 \hat{u}^{(\mp)}(\sigma)}{d\sigma^2} = f^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0, x_0, 0\right), \ \hat{u}^{(\mp)}(0) = p_0, \ \hat{u}^{(\mp)}(\mp\infty) = \varphi^{(\mp)}(q_0, x_0).$$

Эти задачи разрешимы, как и задачи (57), и их решения имеют экспоненциальные оценки [111]:

$$\left|\hat{u}^{(\mp)}(\sigma) - \varphi^{(\mp)}(q_0, x_0)\right| \le C e^{-\varkappa|\sigma|},$$

где C, $\varkappa$ – положительные константы.

Далее для краткости будем использовать обозначения

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}^{(\mp)}(\tau) := f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), \tau), \tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0, 0), \\
&\tilde{g}^{(\mp)}(\tau) := g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), \tau), \tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0, 0), \\
&\hat{f}^{(\mp)}(\sigma) := f^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0, x_0, 0\right), \ \ \hat{g}^{(\mp)}(\sigma) := g^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0, x_0, 0\right).
\end{aligned} \tag{59}$$

В аналогичном смысле понимаются и обозначения для производных этих функций.

3.2.4 Функции переходного слоя высших порядков

Алгоритм построения членов асимптотического приближения порядка выше нулевого следующий.

Сначала находятся функции $M_{k+2}^{(\mp)} v(\sigma)$ как решения задач

$$\frac{d^2 M_{k+2}^{(\mp)} v(\sigma)}{d\sigma^2} = M_k^{(\mp)} g(\sigma), \ \ \sigma \in \mathbb{R}^{\mp}, \qquad M_{k+2}^{(\mp)} v(\mp\infty) = 0,$$

где $M_k^{(\mp)} g(\sigma)$ — известные экспоненциально убывающие функции (см. [32]). Уравнения для функций $M_{k+2}^{(\mp)} v(\sigma)$ получаются стандартным способом [31] из второй пары равенств (52).

Затем из первой пары равенств (51) получаются алгебраические уравнения, из которых выражаются функции $Q_k^{(-)}u(\tau)$, определенные при $\tau \le 0$ и $Q_k^{(+)}u(\tau)$, определенные при $\tau \ge 0$:

$$Q_k^{(\mp)}u(\tau) = -\frac{\tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau)}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)} \cdot Q_k^{(\mp)}v(\tau) + \frac{Q_k^{(\mp)}f(\tau)}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)}.$$

Из второй пары равенств (51) с использованием этих выражений получаются уравнения для функций $Q_k^{(\mp)}v(\tau)$. Эти функции определяются как решения задач

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 Q_k^{(\mp)}v(\tau)}{d\tau^2} = h_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0) \cdot Q_k^{(\mp)}v(\tau) + Q_k^{(\mp)}g(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^{\mp}, \\
&Q_k^{(\mp)}v(0) = q_k - \bar{v}_k^{(\mp)}(x_0) - M_k^{(\mp)}v(0), \quad Q_k^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0,
\end{aligned}$$

и находятся в явном виде

$$\begin{aligned}
Q_k^{(\mp)}v(\tau) = &\left(q_k - \bar{v}_k^{(\mp)}(x_0) - M_k^{(\mp)}v(0)\right) \frac{\Phi^{(\mp)}\big(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)\big)}{\Phi^{(\mp)}(q_0)} + \\
&+ \Phi^{(\mp)}\big(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)\big) \int\limits_0^{\tau} \frac{d\tau_1}{\big[\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1))\big]^2} \int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1} \Phi^{(\mp)}\big(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2)\big) Q_k^{(\mp)}\tilde{g}(\tau_2) d\tau_2. \quad (60)
\end{aligned}$$

Функции $Q_k^{(\mp)}f(\tau)$, $Q_k^{(\mp)}g(\tau)$ известны на каждом шаге; они экспоненциально убывают до нуля соответственно при $\tau \to \mp\infty$.

Далее определяются функции $M_k^{(\mp)}u(\sigma)$ как решения задач

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 M_k^{(\mp)}u(\sigma)}{d\sigma^2} = \hat{f}_u^{(\mp)}(\sigma) M_k^{(\mp)}u(\sigma) + M_k^{(\mp)}f(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^{\mp}, \\
&M_k^{(\mp)}u(0) = p_k - \bar{u}_k^{(\mp)}(x_0) - Q_k^{(\mp)}u(0), \quad M_k^{(\mp)}u(\mp\infty) = 0. \quad (61)
\end{aligned}$$

Они находятся явно:

$$\begin{aligned}
M_k^{(\mp)}u(\sigma) = &\left(p_k - \bar{u}_k^{(\mp)}(x_0) - Q_k^{(\mp)}u(0)\right) \frac{\Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0\right)}{\Psi^{(\mp)}(p_0, q_0)} + \\
&+ \Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0\right) \int\limits_0^{\sigma} \frac{d\sigma_1}{\left[\Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_1), q_0\right)\right]^2} \int\limits_{\mp\infty}^{\sigma_1} \Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_2), q_0\right) M_k^{(\mp)}\hat{f}(\sigma_2) d\sigma_2, \quad (62)
\end{aligned}$$

где $M_k^{(\mp)}\hat{f}(\sigma)$, — известные экспоненциально убывающие функции. Уравнения (61) определяются из первой пары равенств (52).

Каждая из функций переходного слоя экспоненциально убывает до нуля на бесконечности.

3.2.5 Сшивание производных асимптотического представления

Подставляя в условия сшивания (49) представления (46),(47), придем к равенствам

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{dM_0^{(-)}u}{d\sigma}-\frac{dM_0^{(+)}u}{d\sigma}\right)\Bigg|_{\sigma=0}+\frac{1}{\varepsilon}\left[\left(\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\tau}-\frac{dQ_0^{(+)}u}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau=0}+\left(\frac{dM_1^{(-)}u}{d\sigma}-\frac{dM_1^{(+)}u}{d\sigma}\right)\Bigg|_{\sigma=0}\right]+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-2}\varepsilon^k\left[\left(\bar{u}_k^{(-)}-\bar{u}_k^{(+)}\right)\Big|_{x=x_0}+\left(\frac{dQ_{k+1}^{(-)}u}{d\tau}-\frac{dQ_{k+1}^{(+)}u}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau=0}+\left(\frac{dM_{k+2}^{(-)}u}{d\sigma}-\frac{dM_{k+2}^{(+)}u}{d\sigma}\right)\Bigg|_{\sigma=0}\right]=O(\varepsilon^{n-1}),$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}-\frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau=0}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k\left[\left(\bar{v}_k^{(-)}-\bar{v}_k^{(+)}\right)\Big|_{x=x_0}+\left(\frac{dQ_{k+1}^{(-)}v}{d\tau}-\frac{dQ_{k+1}^{(+)}v}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau=0}+\left(\frac{dM_{k+2}^{(-)}v}{d\sigma}-\frac{dM_{k+2}^{(+)}v}{d\sigma}\right)\Bigg|_{\sigma=0}\right]=O(\varepsilon^{n}),$$
$$(63)$$

Приравнивая в этих равенствах нулю слагаемые при каждой степени ε с учетом обозначений (55), (58) и (38), а также явных выражений (60) для $Q_k^{(\mp)}v$ и (62) для $M_k^{(\mp)}u$, получаются системы уравнений

$$H^v(q_0)=0,\quad H^u(p_0,q_0)=0,$$
$$\frac{dH^v}{dv}(q_0)\cdot q_k=H_k^v\quad \frac{\partial H^u}{\partial u}(p_0,q_0)\cdot p_k=H_k^u,\quad k=\overline{1,n},$$

где функции H^v и H^u задаются выражениями (41), величины H_k^u, H_k^v известны на каждом шаге. Согласно Условию 3.5 эти системы разрешимы.

3.2.6 Функции пограничного слоя

Алгоритм построения погранслойных функций с точностью до обозначений переносится из предыдущей главы.

3.3 Существование решения стационарной задачи

Теорема 3.1. *Пусть выполняются Условия 3.1–3.5 и 3.6 (последнее для квазимонотонностей NP и PN типов). Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ задачи* (4) *в смысле Определения 3.2, для которого пара функций $(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon))$ является равномерным на отрезке $x\in[-1,1]$ асимптотическим приближением с точностью $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$*

Эта теорема доказывается при помощи метода верхних и нижних решений.

Как и в предыдущей главе, обозначим

$$L_{u,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^4 \frac{d^2u}{dx^2} - f(u,v,x,\varepsilon), \quad L_{v,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^2 \frac{d^2v}{dx^2} - g(u,v,x,\varepsilon).$$

Определение 3.3. Пары функций $\big(\overline{U}(x), \overline{V}(x)\big)$ и $(\underline{U}(x), \underline{V}(x))$ из класса

$$C([-1,1]) \cap C^1([-1,1]\backslash x_0) \cap C^2((-1,1)\backslash x_0)$$

называются, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (4), если для них выполняются следующие неравенства:

(A$_1$). $\underline{U}(x) \le \overline{U}(x),\ \underline{V}(x) \le \overline{V}(x),\ x \in [-1,1]$;

(A$_2$). $L_{u,\varepsilon}(\overline{U}, v) \le 0 \le L_{u,\varepsilon}(\underline{U}, v),\ \ \underline{V} \le v \le \overline{V},\ x \in (-1,1)\backslash x_0,$
$L_{v,\varepsilon}(u, \overline{V}) \le 0 \le L_{v,\varepsilon}(u, \underline{V}),\ \ \underline{U} \le u \le \overline{U},\ x \in (-1,1)\backslash x_0;$

(A$_3$). $\overline{U}_x(-1) \le a^{(-)} \le \underline{U}_x(-1),\ \overline{U}_x(1) \ge a^{(+)} \ge \underline{U}_x(1),$
$\overline{V}_x(-1) \le b^{(-)} \le \underline{V}_x(-1),\ \overline{V}_x(1) \ge b^{(+)} \ge \underline{V}_x(1);$

(A$_4$). $\overline{U}_x(x_0-0) - \overline{U}_x(x_0+0) \ge 0,\ \underline{U}_x(x_0-0) - \underline{U}_x(x_0+0) \le 0,$
$\overline{V}_x(x_0-0) - \overline{V}_x(x_0+0) \ge 0,\ \underline{V}_x(x_0-0) - \underline{V}_x(x_0+0) \le 0.$

Лемма 3.1. *Пусть существуют пары функций* $\big(\overline{U}(x), \overline{V}(x)\big)$ *и* $(\underline{U}(x), \underline{V}(x))$, *являющиеся соответственно верхним и нижним решениями в смысле Определения 3.3. Тогда существует хотя бы одно решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (4) *в смысле Определения 3.2, заключенное между этими верхним и нижним решениями:*

$$\underline{U}(x) \le u_\varepsilon(x) \le \overline{U}(x), \ \ \underline{V}(x) \le v_\varepsilon(x) \le \overline{V}(x), \ \ x \in [-1,1]. \tag{64}$$

Для доказательства Леммы 3.1 используется метод, изложенный в [33] для систем уравнений с такими же вариантами квазимонотонности, что и в диссертационной работе. Отметим, что в [33] доказательство приводится для систем уравнений с гладкими правыми частями, однако этот результат можно обобщить на случай функций вида (35) — проиллюстрируем это на примере задачи с правыми частями PN типа квазимонотонности (см. Условие 3.3).

Следуя [33], зададим итерационные процессы как

$$\varepsilon^4 \frac{d^2\bar{u}^{(k)}}{dx^2} - c\bar{u}^{(k)} = \mathcal{F}(\bar{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x), \ \ x \in (-1,1)\backslash x_0, \ \ \frac{d\bar{u}^{(k)}}{dx}(\mp 1) = a^{(\mp)},$$

$$\varepsilon^2\frac{d^2\bar{v}^{(k)}}{dx^2} - c\bar{v}^{(k)} = \mathcal{G}(\bar{u}^{(k-1)}, \bar{v}^{(k-1)}, x), \quad x \in (-1,1)\backslash x_0, \quad \frac{d\bar{v}^{(k)}}{dx}(\mp 1) = b^{(\mp)},$$

$$\varepsilon^4\frac{d^2\underline{u}^{(k)}}{dx^2} - c\underline{u}^{(k)} = \mathcal{F}(\underline{u}^{(k-1)}, \bar{v}^{(k-1)}, x), \quad x \in (-1,1)\backslash x_0, \quad \frac{d\underline{u}^{(k)}}{dx}(\mp 1) = a^{(\mp)},$$
$$\varepsilon^2\frac{d^2\underline{v}^{(k)}}{dx^2} - c\underline{v}^{(k)} = \mathcal{G}(\underline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x), \quad x \in (-1,1)\backslash x_0, \quad \frac{d\underline{v}^{(k)}}{dx}(\mp 1) = b^{(\mp)}, \tag{65}$$

где $k = 1, 2, \ldots, c$ — достаточно большая положительная константа,

$$\mathcal{F}(u, v, x) := f(u, v, x, \varepsilon) - cu, \;\; \mathcal{G}_2(u, v, x) := g(u, v, x, \varepsilon) - cv,$$

и полагаем $(\overline{u}^{(0)}, \overline{v}^{(0)}) = (\overline{U}, \overline{V})$, а $(\underline{u}^{(0)}, \underline{v}^{(0)}) = (\underline{U}, \underline{V})$.

Каждая из задач (65) имеет единственное решение из класса $C^1([-1,1]) \cap C^2((-1,1)\backslash x_0)$ согласно [107].

Рассмотрим первую итерацию. Вычтем неравенства (A_2) из соответствующих уравнений (65), полученные неравенства домножим на некоторую неотрицательную $\varphi \in C^\infty([-1,1])$, проинтегрируем по частям с учётом (A_3), (A_4) и получим

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\varepsilon^4(\overline{U} - \bar{u}^{(1)})' \cdot \varphi' + c(\overline{U} - \bar{u}^{(1)}) \cdot \varphi\right) dx \ge 0, \;\; \int\limits_{-1}^{1}\left(\varepsilon^4(\underline{u}^{(1)} - \underline{U})' \cdot \varphi' + c(\underline{u}^{(1)} - \underline{U}) \cdot \varphi\right) dx \ge 0,$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\varepsilon^2(\overline{V} - \bar{v}^{(1)})' \cdot \varphi' + c(\overline{V} - \bar{v}^{(1)}) \cdot \varphi\right) dx \ge 0, \;\; \int\limits_{-1}^{1}\left(\varepsilon^2(\underline{v}^{(1)} - \underline{V})' \cdot \varphi' + c(\underline{v}^{(1)} - \underline{V}) \cdot \varphi\right) dx \ge 0.$$

Поскольку $C^\infty([-1,1])$ плотно в $W_2^1(-1,1)$, то можно применить Лемму EPL (эллиптическую лемму о положительности, см. гл. 1), откуда приходим к выводу, что $\underline{U} \le \underline{u}^{(1)}$, $\bar{u}^{(1)} \le \overline{U}$, $\underline{V} \le \underline{v}^{(1)}$, $\bar{v}^{(1)} \le \overline{V}$ для всех $x \in [-1,1]$.

Теперь вычтем из второй пары уравнений (65) соответствующие уравнения первой пары, домножим полученные равенства на некоторую неотрицательную $\varphi \in C^\infty([-1,1])$, проинтегрируем по частям с учётом граничных условий и теперь уже гладкости в x_0 функций первой итерации и получим

$$\int\limits_{-1}^{1} \big(\varepsilon^4(\bar{u}^{(1)} - \underline{u}^{(1)})' \cdot \varphi' + c(\bar{u}^{(1)} - \underline{u}^{(1)}) \cdot \varphi\big)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \big(f(\underline{U}, \overline{V}, x, \varepsilon) - f(\overline{U}, \underline{V}, x, \varepsilon) + c(\overline{U} - \underline{U})\big) \cdot \varphi\, dx >$$

$$> \int\limits_{-1}^{1} \big(f(\underline{U}, \underline{V}, x, \varepsilon) - f(\overline{U}, \underline{V}, x, \varepsilon) + c(\overline{U} - \underline{U})\big) \cdot \varphi\, dx \geq 0,$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \big(\varepsilon^2(\bar{v}^{(1)} - \underline{v}^{(1)})' \cdot \varphi' + c(\bar{u}^{(1)} - \underline{u}^{(1)}) \cdot \varphi\big)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \big(g(\underline{U}, \underline{V}, x, \varepsilon) - g(\overline{U}, \overline{V}, x, \varepsilon) + c(\overline{V} - \underline{V})\big) \cdot \varphi\, dx >$$

$$> \int\limits_{-1}^{1} \big(g(\underline{U}, \underline{V}, x, \varepsilon) - g(\underline{U}, \overline{V}, x, \varepsilon) + c(\overline{V} - \underline{V})\big) \cdot \varphi\, dx \geq 0,$$

где первые неравенства следуют из условий квазимонотонности (Условие 3.3), а вторые из кусочной гладкости f, g и достаточной величины положительной константы c. Снова учитываем плотность $C^\infty([-1,1])$ в $W_2^1(-1,1)$ и применяем EPL, откуда $\underline{u}^{(1)} \leq \bar{u}^{(1)}$, $\underline{v}^{(1)} \leq \bar{v}^{(1)}$ на $[-1,1]$. В завершении первой итерации нетрудно видеть (см. [33]), что $(\underline{u}^{(1)}, \underline{v}^{(1)})$, $(\bar{u}^{(1)}, \bar{v}^{(1)})$ суть нижнее и верхнее решения в смысле Определения 3.3. Далее повторяется соответствующее доказательство из [33], но с использованием EPL — получим, что функции $\bar{u}^{(k)}$, $\bar{v}^{(k)}$, $\underline{u}^{(k)}$, $\underline{v}^{(k)}$, где $k = 0, 1, ...$, образуют монотонные ограниченные последовательности верхних и нижних решений, для которых справедливы цепочки неравенств

$$\begin{aligned} &\underline{U} = \underline{u}^{(0)} \leq \underline{u}^{(1)} \leq \ \ldots \ \leq \underline{u}^{(k)} \leq \ \ldots \ \leq \overline{u}^{(k)} \leq \overline{u}^{(k-1)} \leq \ \ldots \ \leq \overline{u}^{(0)} = \overline{U}, \\ &\underline{V} = \underline{v}^{(0)} \leq \underline{v}^{(1)} \leq \ \ldots \ \leq \underline{v}^{(k)} \leq \ \ldots \ \leq \overline{v}^{(k)} \leq \overline{v}^{(k-1)} \leq \ \ldots \ \leq \overline{v}^{(0)} = \overline{V}. \end{aligned} \tag{66}$$

Пусть $G^u(x,s)$, $G^v(x,s)$ — функции Грина задач (65), соответственно, для u- и v- компонент, $(\varepsilon^4\partial_{xx} - c)G^u(x,s) = \delta(x-s)$, $(\varepsilon^2\partial_{xx} - c)G^v(x,s) = \delta(x-s)$, тогда их решения можно записать в виде [107].

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}^{(k)}(x) = \varepsilon^4 \left(a^{(+)} G^u(x,1) - a^{(-)} G^u(x,-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} G^u(x,s)\mathcal{F}(\bar{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, s)ds,\\
&\bar{v}^{(k)}(x) = \varepsilon^2 \left(b^{(+)} G^v(x,1) - b^{(-)} G^v(x,-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} G^v(x,s)\mathcal{G}(\bar{u}^{(k-1)}, \bar{v}^{(k-1)}, s)ds,\\
&\underline{u}^{(k)}(x) = \varepsilon^4 \left(a^{(+)} G^u(x,1) - a^{(-)} G^u(x,-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} G^u(x,s)\mathcal{F}(\underline{u}^{(k-1)}, \bar{v}^{(k-1)}, s)ds,\\
&\underline{v}^{(k)}(x) = \varepsilon^2 \left(b^{(+)} G^v(x,1) - b^{(-)} G^v(x,-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} G^v(x,s)\mathcal{G}(\underline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, s)ds.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Из неравенств (66) следует существование поточечных пределов $\bar{u}(x)$, $\bar{v}(x)$, $\underline{u}(x)$, $\underline{v}(x)$ каждой из последовательностей, а следовательно пределов правых частей равенств (67). Из последнего вытекает ограниченность интегралов в правых частях (67).

Из Условия 3.3 и кусочной непрерывности функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ по первым двум аргументам можно установить, также как и в [33], что последовательности $\mathcal{F}(\bar{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x)$, $\mathcal{G}(\bar{u}^{(k-1)}, \bar{v}^{(k-1)}, x)$ не убывают, а $\mathcal{F}(\underline{u}^{(k-1)}, \bar{v}^{(k-1)}, x)$, $\mathcal{G}(\underline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x)$ не возрастают.

Тем самым для равенств (67) выполнены все условия теоремы Леви, что влечет за собой непрерывность функций $\bar{u}(x)$, $\bar{v}(x)$, $\underline{u}(x)$, $\underline{v}(x)$ и справедливость при $k \to +\infty$ предельных равенств

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}(x) = \varepsilon^4 \left(a^{(+)} G^u(x,1) - a^{(-)} G^u(x,-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} G^u(x,s)\mathcal{F}(\bar{u}, \underline{v}, s)ds,\\
&\bar{v}(x) = \varepsilon^2 \left(b^{(+)} G^v(x,1) - b^{(-)} G^v(x,-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} G^v(x,s)\mathcal{G}(\bar{u}, \bar{v}, s)ds,\\
&\underline{u}(x) = \varepsilon^4 \left(a^{(+)} G^u(x,1) - a^{(-)} G^u(x,-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} G^u(x,s)\mathcal{F}(\underline{u}, \bar{v}, s)ds,\\
&\underline{v}(x) = \varepsilon^2 \left(b^{(+)} G^v(x,1) - b^{(-)} G^v(x,-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} G^v(x,s)\mathcal{G}(\underline{u}, \underline{v}, s)ds.
\end{aligned}
\tag{68}
$$

Правые части равенств (68) обращают уравнения (4) в тождества при $x \in (-1,1)\backslash x_0$, поскольку гладкость функций $\mathcal{F}(\bar{u}(x), \underline{v}(x), x)$, $\mathcal{F}(\underline{u}(x), \bar{v}(x), x)$, $\mathcal{G}(\bar{u}(x), \bar{v}(x), x)$ и $\mathcal{G}(\underline{u}(x), \underline{v}(x), x)$ нарушается в единственной точке x_0. Равенство $\bar{u}_x(x_0 - 0) = \bar{u}_x(x_0 + 0)$ и аналогичные равенства для функций $\underline{u}(x)$, $\bar{v}(x)$, $\underline{v}(x)$ следуют из равенств (68) непосредственно.

Исходя из этого, а также свойств функций Грина $G^u(x,s)$, $G^v(x,s)$, можно заключить, что $(\bar{u}(x), \bar{v}(x))$ и $(\underline{u}(x), \underline{v}(x))$ являются решениями задачи (4) в смысле Определения 3.2, тем самым у задачи (4) существует по крайней мере одно решение $(u_\varepsilon(x),\ v_\varepsilon(x))$, такое что

$$\underline{U}(x) \le u_\varepsilon(x) \le \overline{U}(x),\ \ \underline{V}(x) \le v_\varepsilon(x) \le \overline{V}(x),\ \ x \in [-1,1].$$

Лемма 3.1 доказана. □

3.4 Построение верхнего и нижнего решений

Следуя [33], далее заменим условие (A_2) для каждого конкретного типа квазимонотонности на соответствующее более жесткое условие

$$\begin{aligned}
&(NN) \quad L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) < 0 < L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}),\ \ L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) < 0 < L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V});\\
&(PP) \quad L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) < 0 < L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}),\ \ L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}) < 0 < L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V});\\
&(NP) \quad L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) < 0 < L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}),\ \ L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}) < 0 < L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V});\\
&(PN) \quad L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) < 0 < L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V})),\ \ L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) < 0 < L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}).
\end{aligned} \tag{69}$$

Согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств [27, 75] верхнее и нижнее решения задачи (4) являются модификациями асимптотического приближения решения этой задачи. Далее мы будем обозначать нижним индексом «n» верхнее и нижнее решения, построенные с использованием асимптотического приближения n-го порядка. Как и асимптотическое приближение (45), будем строить их отдельно слева и справа от точки x_0:

$$\overline{U}_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{U}_n^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \le x < x_0\,, \\ \overline{U}_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 \le x \le 1\,, \end{cases} \qquad \overline{V}_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{V}_n^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \le x < x_0\,, \\ \overline{V}_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 \le x \le 1. \end{cases} \tag{70}$$

$$\underline{U_n}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{U_n}^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \le x < x_0\,, \\ \underline{U_n}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 \le x \le 1\,, \end{cases} \qquad \underline{V_n}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{V_n}^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \le x < x_0\,, \\ \underline{V_n}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 \le x \le 1, \end{cases} \tag{71}$$

где

$$\begin{aligned}
&\overline{U}_n^{(\mp)} = U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^n \left(\alpha^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}u(\tau) + m^{(\mp)}u(\sigma)\right) + \varepsilon^{n+2} C_u e^{-k_u|\eta_\mp|},\\
&\underline{U_n}^{(\mp)} = U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) - \varepsilon^n \left(\alpha^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}u(\tau) + m^{(\mp)}u(\sigma)\right) - \varepsilon^{n+2} C_u e^{-k_u|\eta_\mp|},
\end{aligned} \tag{72}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{V}_n^{(\mp)} &= V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^n\left(\beta^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}v(\tau)\right) + \varepsilon^{n+1}C_v e^{-k_v|\zeta_\mp|} + \varepsilon^{n+2}m^{(\mp)}v(\sigma) - \\
&\qquad - \varepsilon^{n+1}M_{n+1}^{(\mp)}v(0) - \varepsilon^{n+2}\left(M_{n+2}^{(\mp)}v(0) + m^{(\mp)}v(0)\right), \\
\underline{V_n}^{(\mp)} &= V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon) - \varepsilon^n\left(\beta^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}v(\tau)\right) - \varepsilon^{n+1}C_v e^{-k_v|\zeta_\mp|} - \varepsilon^{n+2}m^{(\mp)}v(\sigma) - \\
&\qquad - \varepsilon^{n+1}M_{n+1}^{(\mp)}v(0) - \varepsilon^{n+2}\left(M_{n+2}^{(\mp)}v(0) - m^{(\mp)}v(0)\right).
\end{aligned}
\tag{73}
$$

Слагаемые, экспоненциально зависящие от переменных $\eta_\mp$ и $\zeta_\mp$, обеспечивают выполнение условия (A$_3$), если выбрать константы C_u, C_v, k_u и k_v достаточно большими положительными; слагаемые $-\varepsilon^{n+1}M_{n+1}^{(\mp)}v(0)$, $-\varepsilon^{n+2}M_{n+2}^{(\mp)}v(0)$, а также слагаемые, содержащие $m^{(\mp)}v(0)$, обеспечивают непрерывность функций $\overline{V}_n(x,\varepsilon)$, $\underline{V_n}(x,\varepsilon)$.

Функции $\alpha^{(\mp)}(x)$ и $\beta^{(\mp)}(x)$ обеспечивают выполнение условия (A$_2$) вдали от переходного слоя. Они определяются как решения систем уравнений

$$
\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\cdot\alpha^{(\mp)}(x) - |\bar{f}_v^{(\mp)}(x)|\cdot\beta^{(\mp)}(x) = A, \quad -|\bar{g}_u^{(\mp)}(x)|\cdot\alpha^{(\mp)}(x) + \bar{g}_v^{(\mp)}(x)\cdot\beta^{(\mp)}(x) = B \tag{74}
$$

при $x\in[-1,x_0]$ для функций с верхним индексом «$(-)$» и при $x\in[x_0,1]$ для функций с верхним индексом «$(+)$» с положительными константами A и B. Здесь использованы обозначения типа (50). В силу Условий 3.1–3.3 и 3.6 (последнее для квазимонотонностей NP и PN типов), эти системы однозначно разрешимы и их решения строго положительны:

$$
\text{(NN, PP)} \qquad \alpha^{(\mp)}(x) = \frac{\bar{g}_v^{(\mp)}(x)A + |\bar{f}_v^{(\mp)}(x)|B}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\cdot\bar{h}_v^{(\mp)}(x)}, \qquad \beta^{(\mp)}(x) = \frac{|\bar{g}_u^{(\mp)}(x)|A + \bar{f}_u^{(\mp)}(x)B}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\cdot\bar{h}_v^{(\mp)}(x)},
$$

$$
\text{(NP, PN)} \qquad \alpha^{(\mp)}(x) = \frac{\bar{g}_v^{(\mp)}(x)A + |\bar{f}_v^{(\mp)}(x)|B}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\cdot\bar{\nu}^{(\mp)}(x)}, \qquad \beta^{(\mp)}(x) = \frac{|\bar{g}_u^{(\mp)}(x)|A + \bar{f}_u^{(\mp)}(x)B}{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\cdot\bar{\nu}^{(\mp)}(x)}.
$$

Здесь использованы обозначения (44) и $\bar{h}^{(\mp)}(x) := h^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x),x)$.

Функции $q^{(-)}u(\tau)$, $q^{(-)}v(\tau)$, определенные при $\tau\le 0$ и $q^{(+)}u(\tau)$, $q^{(+)}v(\tau)$, определенные при $\tau\ge 0$, устраняют невязки в неравенствах из условия (A$_2$), которые вносят функции $\alpha^{(\mp)}(x)$, $\beta^{(\mp)}(x)$ в области переходного слоя. Принимая во внимание более жесткие, чем (A$_2$) условия (69), зададим их как решение системы уравнений, одно из которых алгебраическое, а другое дифференциальное с дополнительными условиями убывания на бесконечности и условием при $\tau=0$, обеспечивающим непрерывность функций $\overline{V}_n$ и $\underline{V_n}$:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)\cdot q^{(\mp)}u(\tau) - |\tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau)|\cdot q^{(\mp)}v(\tau) + \left(q^{(\mp)}f(\tau) - d^u e^{-\varkappa^u|\tau|}\right) = 0 \\
&\frac{d^2q^{(\mp)}v(\tau)}{d\tau^2} = -|\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)|\cdot q^{(\mp)}u(\tau) + \tilde{g}_v^{(\mp)}(\tau)\cdot q^{(\mp)}v(\tau) + q^{(\mp)}g(\tau), \quad \tau\in\mathbb{R}^{\mp}, \\
&q^{(\mp)}v(0) = \delta^v - \beta^{(\mp)}(x_0), \quad q^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0.
\end{aligned}
\tag{75}
$$

Здесь $q^{(\mp)}f(\tau)$, $q^{(\mp)}g(\tau)$ – известные функции, включающие слагаемые, возникающие в результате разложения Тейлора функций из выражений $L_{u,\varepsilon}$, $L_{v,\varepsilon}$, (см. (69)) и экспоненциально убывающие по построению (см. [27]), а d^u, $\varkappa^u$, δ^v – положительные константы, которые уточним ниже.

Выражая $q^{(\mp)}u(\tau)$, получим следующие задачи для определения функций $q^{(\mp)}v(\tau)$ в зависимости от типа квазимонотонности:

$$\text{(NN, PP)} \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 q^{(\mp)}v(\tau)}{d\tau^2} = h_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0)\cdot q^{(\mp)}v(\tau) + \tilde{G}^{(\mp)}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^{\mp}, \\ q^{(\mp)}v(0) = \delta^v - \beta^{(\mp)}(x_0), \quad q^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0; \end{cases} \tag{76}$$

$$\text{(NP, PN)} \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 q^{(\mp)}v(\tau)}{d\tau^2} = \nu^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0)\cdot q^{(\mp)}v(\tau) + \tilde{G}^{(\mp)}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^{\mp}, \\ q^{(\mp)}v(0) = \delta^v - \beta^{(\mp)}(x_0), \quad q^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0. \end{cases} \tag{77}$$

Здесь

$$\tilde{G}^{(\mp)}(\tau) := q^{(\mp)}g(\tau) + \frac{|\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)|}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)}\left(q^{(\mp)}f(\tau) - d^u e^{-\varkappa^u|\tau|}\right). \tag{78}$$

Заметим, что решениями однородных уравнений (76) являются функции $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))$. Это нетрудно получить, продифференцировав по τ соответствующее уравнение (36). Эти функции строго положительны (см. выражения (39)), и с их помощью можно получить решения задач (76) в явном виде:

$$q^{(\mp)}v(\tau) = \left(\delta^v - \beta^{(\mp)}(x_0)\right)\frac{\Phi^{(\mp)}\left(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)\right)}{\Phi^{(\mp)}(q_0)} + \\ + \Phi^{(\mp)}\left(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)\right)\int\limits_0^{\tau}\frac{d\tau_1}{\left(\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1))\right)^2}\int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1}\Phi^{(\mp)}\left(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2)\right)\tilde{G}^{(\mp)}(\tau_2)\,d\tau_2. \tag{79}$$

Если выбрать константу δ^v положительной и достаточно большой, то первое слагаемое этого выражения будет положительным. В свою очередь, если выбрать величину d^u в выражении (78) достаточно большой, а $\varkappa^u$ – достаточно малой, то можно добиться того, что функции $\tilde{G}^{(\mp)}(\tau)$ окажутся отрицательными в своих областях определения. При таком выборе констант функции $q^{(\mp)}v(\tau)$ будут строго положительными.

Положительность функций $q^{(\mp)}v(\tau)$ играет существенную роль в выполнении условия (A_1) упорядоченности верхнего и нижнего решений.

В случае NP и PN типов квазимонотонности для того, чтобы решения задач (77) были строго положительными, помимо надлежащего выбора констант δ^v, d^u, и $\varkappa^u$, следует потребовать выполнения Условия 3.6, которое обеспечит положительность решений соответствующих однородных уравнений, а именно, справедливость следующего утверждения.

Лемма 3.2. *Пусть функции $\nu^{(\mp)}(v,x)$ удовлетворяют Условию 3.6. Тогда решения $W^{(\mp)}(\tau)$ задач*

$$W^{(\mp)}_{\tau\tau} - \nu^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0) \cdot W^{(\mp)}(\tau) = 0, \ \ \tau \in \mathbb{R}^{\mp}, \ \ W^{(\mp)}(0) = 1, \ \ W^{(\mp)}(\mp\infty) = 0, \tag{80}$$

строго положительны и для них справедливы оценки

$$W^{(-)}(\tau) < Ce^{-\varkappa|\tau|}, \ \tau \in (-\infty, 0]; \quad W^{(+)}(\tau) < Ce^{-\varkappa|\tau|}, \ \tau \in [0, +\infty),$$

где C и $\varkappa$ – некоторые положительные константы и кроме того, выполняются неравенства

$$\frac{dW^{(-)}}{d\tau}(0) > 0, \quad \frac{dW^{(+)}}{d\tau}(0) < 0. \tag{81}$$

Доказательство леммы проведём при помощи метода верхних и нижних решений [33].

Будем использовать соотношения

$$\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau) = \tilde{h}^{(\mp)}_v(\tau) - 2\tilde{g}^{(\mp)}_u(\tau)\varphi^{(\mp)}_v(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), \tau), \ \ \tau \in \mathbb{R}^{\mp}_0, \tag{82}$$

где учтено равенство $\varphi^{(\mp)}_v(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), \tau) = -\tilde{f}^{(\mp)}_v(\tau)(\tilde{f}^{(\mp)}_u(\tau))^{-1}$, вытекающее из Условия 3.1, и использованы обозначения (59).

Из Условий 3.1, 3.3, 3.6 и соотношения (82) следует

$$\begin{aligned} &\tilde{g}^{(\mp)}_u(\tau)\varphi^{(\mp)}_v(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), \tau) > 0, \ \ 0 < \bar{\nu}^{(\mp)}(x_0) < \bar{h}^{(\mp)}_v(x_0), \\ &\nu^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0) \to \bar{\nu}^{(\mp)}(x_0), \ \ |\tau| \to \infty. \end{aligned} \tag{83}$$

Введем функции

$$\underline{W}^{(\mp)}(\tau) := \frac{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))}{\Phi(q_0)}, \quad \overline{W}^{(\mp)}(\tau) := \exp\left(Z^{(\mp)}(\tau)\right), \tag{84}$$

где

$$Z^{(\mp)}(\tau) = \int\limits_0^{\tau} \frac{d\tau_1}{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1))} \int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1} \Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2))\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau_2) d\tau_2.$$

В первом равенстве (84) использовано обозначение (42).

Функции $Z^{(\mp)}(\tau)$ можно переписать в ином виде:

$$Z^{(-)}(\tau) = \int\limits_{q_0}^{\tilde{v}^{(-)}(\tau)} \frac{ds_1}{\left(\Phi^{(-)}(s_1)\right)^2} \int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{s_1} \nu^{(-)}(s_2, x_0) ds_2, \quad \tau \le 0,$$

$$Z^{(+)}(\tau) = \int\limits_{q_0}^{\tilde{v}^{(+)}(\tau)} \frac{ds_1}{\left(\Phi^{(+)}(s_1)\right)^2} \int\limits_{\psi^{(+)}(x_0)}^{s_1} \nu^{(+)}(s_2, x_0) ds_2, \quad \tau \ge 0. \tag{85}$$

Оценим поведение функций $Z^{(\mp)}$ при больших $|\tau|$. Рассмотрим выражения для производных $Z^{(\mp)}(\tau)$:

$$Z^{(\mp)}_\tau(\tau) = \frac{1}{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))} \int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)} \nu^{(\mp)}(s, x_0) ds. \tag{86}$$

Поскольку по формуле Тейлора

$$\left(\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)})\right)^2 =$$
$$= \underbrace{\left(\Phi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x_0))\right)^2}_{=0} + \underbrace{2h(\psi^{(\mp)}(x_0), x_0)}_{=0}(\tilde{v}^{(\mp)} - \psi^{(\mp)}(x_0)) + h_v(\tilde{v}^{(\mp)}_*, x_0)(\tilde{v}^{(\mp)} - \psi^{(\mp)}(x_0))^2,$$

$$\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{v}^{(\mp)}} \nu^{(\mp)}(s, x_0) ds = \left(\tilde{v}^{(\mp)} - \psi^{(\mp)}(x_0)\right) \nu^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}_{**}, x_0),$$

где $\tilde{v}^{(-)}_*,\ \tilde{v}^{(-)}_{**} \in (\psi^{(-)}(x_0), \tilde{v}^{(-)}(\tau)),\ \tilde{v}^{(+)}_*, \tilde{v}^{(+)}_{**} \in (\tilde{v}^{(+)}(\tau), \psi^{(\mp)}(x_0))$, то для (86)

$$Z^{(\mp)}_\tau(\tau) = -\frac{\nu^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}_{**}, x_0)}{\sqrt{h_v(\tilde{v}^{(\mp)}_*, x_0)}} \underset{|\tau|\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}{\sqrt{\bar{h}^{(\mp)}_v(x_0)}} < 0$$

в силу (83). Отсюда следует, что

$$Z^{(\mp)}(\tau) \sim -\frac{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}{\sqrt{\bar{h}^{(\mp)}_v(x_0)}}|\tau|, \quad \overline{W}^{(\mp)}(\tau) \sim \exp\left(-\frac{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}{\sqrt{\bar{h}^{(\mp)}_v(x_0)}}|\tau|\right), \quad |\tau| \to \infty. \tag{87}$$

Докажем, что функции $\underline{W}^{(\mp)}(\tau)$ и $\overline{W}^{(\mp)}(\tau)$ суть верхнее и нижнее решения (см. [33, с. 340]) задач (80).

Из Условий 3.4 и 3.6 следует, что функции $Z^{(\mp)}(\tau)$ принимают неположительные значения соответственно при $\tau \le 0$ и $\tau \ge 0$.

Очевидно, что

$$\underline{W}^{(\mp)}(0) = W^{(\mp)}(0) = \overline{W}^{(\mp)}(0) = 1. \tag{88}$$

Согласно определению верхних и нижних решений задач (80) требуется ещё доказать, что выполняются неравенства (см. [33, с. 340])

$$\underline{W}^{(\mp)}(\tau) \le \overline{W}^{(\mp)}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_0^{\mp}, \tag{89}$$

$$\overline{W}^{(\mp)}_{\tau\tau} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\overline{W}^{(\mp)}(\tau) \le 0 \le \underline{W}^{(\mp)}_{\tau\tau} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\underline{W}^{(\mp)}(\tau),\ \tau \in \mathbb{R}^{\mp}. \tag{90}$$

Подставив соотношение (82) в выражения (85) и учитывая второе равенство (38), придём к представлению

$$\overline{W}^{(\mp)}(\tau) =$$
$$= \frac{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))}{\Phi(q_0)} \exp\left(-2\int\limits_{q_0}^{\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)} \frac{ds_1}{\left(\Phi^{(\mp)}(s_1)\right)^2} \int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{s_1} \tilde{g}_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(s_2,x_0),s_2,x_0,0)\varphi_v^{(\mp)}(s_2,x_0)ds_2\right).$$

В силу положительности $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))$ и первого неравенства (83) в показателе экспоненты стоит положительная величина, откуда следует справедливость неравенства (89) при $\tau < 0$ для функций с верхним индексом «$(-)$» и при $\tau > 0$ для функций с верхним индексом «$(+)$».

Подставляя функции $\overline{W}^{(\mp)}$ и $\underline{W}^{(\mp)}$ в левые части уравнений (80), получим

$$\overline{W}^{(\mp)}_{\tau\tau} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\overline{W}^{(\mp)}(\tau) = -2\frac{\exp\left(Z^{(\mp)}(\tau)\right)}{\left(\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))\right)^2} \int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)} \tilde{\nu}^{(\mp)}(s)ds \times$$
$$\times \int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{v}(\tau)} g_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(s_2,x_0),s_2,x_0,0)\varphi_v^{(\mp)}(s_2,x_0)ds_2, \tag{91}$$

$$\underline{W}^{(\mp)}_{\tau\tau} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\underline{W}^{(\mp)}(\tau) = 2\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))g_u^{(\mp)}(\tau)\varphi_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau). \tag{92}$$

В силу Условия 3.6, первого неравенства (83) и положительности функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))$ правые части равенств (91) неположительные, а равенств (92) – неотрицательны, следовательно неравенства (90) выполняются.

Поскольку $0 < \underline{W}^{(\mp)}(\tau) < \overline{W}^{(\mp)}(\tau)$ на любом ограниченном множестве $\mathbb{R}_0^{\mp}$, а на бесконечности они обращаются в нуль, то применима Теорема 9.3 из [33, с. 354], которая обеспечивает существование решений $W^{(\mp)}(\tau)$ задач (80), таких что

$$\begin{aligned} &0 < \underline{W}^{(\mp)}(\tau) \le W^{(\mp)}(\tau) \le \overline{W}^{(\mp)}(\tau) < 0, \quad \forall T > 0,\ \tau \in [0,T], \\ &0 = \underline{W}^{(\mp)}(\mp\infty) = W^{(\mp)}(\mp\infty) = \overline{W}^{(\mp)}(\mp\infty). \end{aligned} \tag{93}$$

В свою очередь единственность решений следует из линейности задач.

Из (93) и (87) следуют экспоненциальные оценки

$$W^{(-)}(\tau) < Ce^{-\varkappa|\tau|},\ \tau \in (-\infty, 0]; \quad W^{(+)}(\tau) < Ce^{-\varkappa|\tau|},\ \tau \in [0, +\infty),$$

В завершение доказательства выпишем выражения для производных $\overline{W}_{\tau}^{(\mp)}(0)$:

$$\overline{W}_{\tau}^{(\mp)}(0) = \frac{1}{\Phi(q_0)} \int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{q_0} \tilde{\nu}^{(\mp)}(s)ds.$$

С учётом (88) и Условия 3.6 из этих равенств следуют неравенства (81).

Лемма 3.2 доказана. □

Решения задач (77) можно выписать в виде (79), с заменой функций $\Phi^{(\mp)}\big(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)\big)$ на $W^{(\mp)}(\tau)$:

$$q^{(\mp)}v(\tau) = \big(\delta^v - \beta^{(\mp)}(x_0)\big)\, W^{(\mp)}(\tau) + W^{(\mp)}(\tau) \int\limits_0^{\tau} \frac{d\tau_1}{\big(W^{(\mp)}(\tau_1)\big)^2} \int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1} W^{(\mp)}(\tau_2)\tilde{G}^{(\mp)}(\tau_2)\, d\tau_2. \tag{94}$$

Как и решения задач (76), эти функции положительны.

Выражения для $q^{(\mp)}u(\tau)$ можно получить из первого уравнения (75), причём $q^{(\mp)}u(\tau)$ положительны для каждого типа квазимонотонности в силу Условия 3.1 и положительности $q^{(\mp)}v(\tau)$. Функции $q^{(\mp)}v(\tau)$ и $q^{(\mp)}u(\tau)$ экспоненциально убывают до нуля на бесконечности.

Функции $m^{(\mp)}u(\sigma)$ зададим как решения задач

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 m^{(\mp)}u}{d\sigma^2} = \hat{f}_u^{(\mp)}(\sigma) \cdot m^{(\mp)}u(\sigma) + \hat{F}^{(\mp)}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^{\mp}, \\ &m^{(\mp)}u(0) = \delta^u - \alpha^{(\mp)}(x_0) - q^{(\mp)}u(0), \quad m^{(\mp)}u(\mp\infty) = 0, \end{aligned} \tag{95}$$

где δ^u — положительные величины, $\hat{f}_u^{(\mp)}(\sigma)$ понимается в смысле обозначения (59),

$$\hat{F}^{(\mp)}(\sigma) := m^{(\mp)}f(\sigma) - D^u e^{-K^u|\sigma|},$$

$m^{(\mp)}f(\sigma)$ — известные функции, включающие слагаемые возникающие в результате разложения Тейлора функций из выражений $L_{u,\varepsilon}$ (см. (69)) и экспоненциально убывающие по построению (см. [27]). Положительная константа D^u выбирается достаточно большой, а положительная константы K^u достаточно малой, чтобы функции $\hat{F}^{(\mp)}(\sigma)$ принимали строго отрицательные значения соответственно на полупрямых $\sigma \leq 0$ и $\sigma \geq 0$.

Решения задач (95) могут быть выписаны явно, если принять во внимание, что $\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0)$

являются решениями соответствующих однородных уравнений (последнее можно получить, дифференцируя по σ уравнения (37)).

$$m^{(\mp)}u(\sigma) = \left(\delta^u - \alpha^{(\mp)}(x_0) - q^{(\mp)}u(0)\right) \frac{\Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0\right)}{\Psi^{(\mp)}(p_0, q_0)} +$$
$$+ \Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0\right) \int\limits_0^{\sigma} \frac{d\sigma_1}{\left(\Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_1), q_0\right)\right)^2} \int\limits_{\mp\infty}^{\sigma_1} \Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_2), q_0\right) \hat{F}^{(\mp)}(\sigma_2)\, d\sigma_2. \quad (96)$$

Функции $\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0)$ строго положительные (см. выражения (40)). Выбрав теперь положительные величины δ^u достаточно большими, добьемся того, что первые слагаемые в выражениях для $m^{(\mp)}u(\sigma)$ будет положительными, вторые слагаемые также положительны при отрицательных значениях $\hat{F}^{(\mp)}(\sigma)$. Функции $m^{(\mp)}u(\sigma)$ экспоненциально убывают до нуля на бесконечности.

Функции $m^{(\mp)}v(\sigma)$ определяются как убывающие до нуля соответственно при $\sigma \to \mp\infty$ вместе с первыми производными решения уравнений

$$\frac{d^2 m^{(\mp)}v}{d\sigma^2} = \hat{g}_u^{(\mp)}(\sigma) \cdot m^{(\mp)}u(\sigma) + \hat{G}^{(\mp)}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^{\mp},$$

где $\hat{G}^{(\mp)}(\sigma)$ – известные экспоненциально убывающие функции.

Докажем теперь, что функции, определенные выражениями (70)-(73), удовлетворяют неравенствам (A_1)-(A_4) и тем самым действительно являются верхним и нижним решениями задачи (4).

Лемма 3.3. *Пары функций* $(\overline{U}_n(x,\varepsilon), \overline{V}_n(x,\varepsilon))$ *и* $(\underline{U_n}(x,\varepsilon), \underline{V_n}(x,\varepsilon))$, *определенные выражениями* (70)-(73)*, при достаточно малых значениях* ε *являются соответственно верхним и нижним решениями задачи* (4).

Для доказательства Леммы 3.3 нужно проверить выполнение неравенств (A_1) – (A_4)

Условие (A_1) выполняется, поскольку функции $\alpha^{(\mp)}(x)$, $\beta^{(\mp)}(x)$, $q^{(\mp)}u(\tau)$, $q^{(\mp)}v(\tau)$ и $m^{(\mp)}u(\sigma)$ принимают строго положительные значения в своих областях определения, а другие функции, добавленные к асимптотическому приближению в (72), (73) ограничены и являются поправками более высоких порядков.

Учтя алгоритм построения асимптотического приближения (см. равенства (51), (52)), а также уравнения (74), (75), (95), получим, что для любого типа квазимонотонности справедливы неравенства

$$L_{u,\varepsilon}(\overline{U}_n, v) \le -\varepsilon^n \left(A + d^u e^{-\varkappa^u|\tau|} + D^u e^{-K^u|\sigma|}\right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right),$$
$$L_{u,\varepsilon}(\underline{U_n}, v) \ge \quad \varepsilon^n \left(A + d^u e^{-\varkappa^u|\tau|} + D^u e^{-K^u|\sigma|}\right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right);$$
$$L_{v,\varepsilon}(u, \overline{V}_n) \le -\varepsilon^n B + O\left(\varepsilon^{n+1}\right), \quad L_{v,\varepsilon}(u, \underline{V_n}) \ge \varepsilon^n B + O\left(\varepsilon^{n+1}\right).$$

Отсюда следует, что неравенства (69) выполняются при достаточно малых ε, если константы A, B, d^u и D^u положительные.

Выполнение условий (A_3) доказано в предыдущей главе.

Выражения для скачков производных верхнего решения в точке x_0 можно выписать как

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\overline{U}_n^{(-)}}{dx}-\frac{d\overline{U}_n^{(+)}}{dx}\right)\Bigg|_{x=x_0} &= \varepsilon^{n-2}\left(\frac{dm^{(-)}u}{d\sigma}-\frac{dm^{(+)}u}{d\sigma}\right)\Bigg|_{\sigma=0}+O\left(\varepsilon^{n-1}\right),\\ \left(\frac{d\overline{V}_n^{(-)}}{dx}-\frac{d\overline{V}_n^{(+)}}{dx}\right)\Bigg|_{x=x_0} &= \varepsilon^{n-1}\left(\frac{dq^{(-)}v}{d\tau}-\frac{dq^{(+)}v}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau=0}+O\left(\varepsilon^{n}\right).\end{aligned}$$

Для любого типа квазимонотонности с использованием явного вида (96) функций $m^{(\mp)}u(\sigma)$ для скачка производной U-компоненты верхнего решения получаем выражение

$$\left(\frac{d\overline{U}_n^{(-)}}{dx}-\frac{d\overline{U}_n^{(+)}}{dx}\right)\Bigg|_{x=x_0}=\varepsilon^{n-2}\left(\delta^u\frac{f^{(-)}(p_0,q_0,x_0,0)-f^{(+)}(p_0,q_0,x_0,0)}{\Psi(p_0,q_0)}+Ju\right)+O\left(\varepsilon^{n-1}\right).$$

Здесь использованы последняя пара уравнений (38) и обозначение (42). Величина Ju ограничена и не зависит от δ^u. С учетом Условия 3.5 и положительности функций $\Psi^{(\mp)}$, выбрав величину δ^u достаточно большой, можно добиться того, что выражение в правой части будет положительным и тем самым будет выполнено условие (A_4) для U-компоненты верхнего решения.

В случае NN или PP типа квазимонотонности скачок производной V-компоненты верхнего решения выражается как

$$\left(\frac{d\overline{V}_n^{(-)}}{dx}-\frac{d\overline{V}_n^{(+)}}{dx}\right)\Bigg|_{x=x_0}=\varepsilon^{n-1}\left(\delta^v\frac{h^{(-)}(q_0,x_0)-h^{(+)}(q_0,x_0)}{\Phi(q_0)}+Jv\right)+O\left(\varepsilon^{n}\right).$$

Здесь использованы выражения (79), вторая пара уравнений (38) и обозначение (42).

В случае NP или PN типа квазимонотонности скачок производной V-компоненты верхнего решения выражается как (см. (94))

$$\left(\frac{d\overline{V}_n^{(-)}}{dx}-\frac{d\overline{V}_n^{(+)}}{dx}\right)\Bigg|_{x=x_0}=\varepsilon^{n-1}\left(\delta^v\left(\frac{dW^{(-)}}{d\tau}(0)-\frac{dW^{(+)}}{d\tau}(0)\right)+Jv\right)+O\left(\varepsilon^{n}\right).$$

В каждом случае величина Jv ограничена и не зависит от δ^v. С учетом Условия 3.5 и положительности $\Phi^{(\mp)}$ для квазимонотонности NN или PP типа и с учетом неравенств (81) из Леммы 3.2 для квазимонотонности NP или PN типа можно добиться того, что выражение в правой части будет положительным, выбрав величину δ^v достаточно большой. Тем самым будет выполнено (A_4) для V-компоненты верхнего решения.

Лемма 3.3 доказана. □

Применяя к задаче (4) Лемму 3.1, в которой в качестве верхних и нижних решений выступают функции $(\underline{U_n}, \underline{V_n})$ и $(\overline{U}_n, \overline{V}_n)$, определенные выражениями (70)–(73), получим, что у задачи (4) существует решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$, для которого справедливы неравенства (64), из которых при $x \in [-1, 1]$ следуют неравенства

$$\underline{U_n}(x,\varepsilon) - U_{n-1}(x,\varepsilon) \le u_\varepsilon(x) - U_{n-1}(x,\varepsilon) \le \overline{U}_n(x,\varepsilon) - U_{n-1}(x,\varepsilon),$$
$$\underline{V_n}(x,\varepsilon) - V_{n-1}(x,\varepsilon) \le v_\varepsilon(x) - V_{n-1}(x,\varepsilon) \le \overline{V}_n(x,\varepsilon) - V_{n-1}(x,\varepsilon);$$

с учетом того, что выражения в левых и правых частях каждого двойного неравенства имеют порядок $O(\varepsilon^n)$, и такой же порядок имеет разность $\overline{U}_n(x,\varepsilon) - \underline{U_n}(x,\varepsilon)$, после замены индекса n на $n+1$ получается искомая оценка.

Теорема 3.1 доказана. ■

3.5 Локальная единственность и асимптотическая устойчивость стационарного решения

Теорема 3.2. *Пусть выполняются Условия 3.1–3.5 и 3.6 (последнее для квазимонотонностей NP и PN типов). Тогда для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (4) *локально единственно на множестве* $[\,\underline{U_1}(x,\varepsilon), \overline{U}_1(x,\varepsilon)\,] \times [\,\underline{V_1}(x,\varepsilon), \overline{V}_1(x,\varepsilon)\,]$ *и, как решение задачи* (2)*, асимптотически устойчиво с областью притяжения не меньше* $[\,\underline{U_1}(x,\varepsilon), \overline{U}_1(x,\varepsilon)\,] \times [\,\underline{V_1}(x,\varepsilon), \overline{V}_1(x,\varepsilon)\,]$.

Прежде чем переходить к доказательству, введём некоторые обозначения и определения.

Для любого $T > 0$ положим:

$$D_T := (-1,1) \times (0,T], \quad D_T^{(-)} := (-1,x_0) \times (0,T], \quad D_T^{(+)} := (x_0,1) \times (0,T].$$

Обозначим

$$L^t_{u,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - f(u,v,x,\varepsilon), \quad L^t_{v,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - g(u,v,x,\varepsilon).$$

Определение 3.4. Будем называть задачу

$$\varepsilon^4 y_{xx} - y_t = f(y,z,x,\varepsilon), \quad \varepsilon^2 z_{xx} - z_t = g(y,z,x,\varepsilon), \quad x \in (-1,1)\backslash x_0, \; t \in (0,T),$$
$$y_x(\mp 1, t) = a^{(\mp)}, \; z_x(\mp 1, t) = a^{(\mp)}, \quad t \in (0,T], \tag{97}$$

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \le y(x,0) = u^0(x) \le \overline{U}(x,\varepsilon), \;\; \underline{V}(x,\varepsilon) \le z(x,0) = v^0(x) \le \overline{V}(x,\varepsilon), \;\; x \in [-1,1],$$

где T – любое положительное число, вспомогательной к задаче (2).

Для доказательства Теоремы 3.2 сначала докажем существование и единственность решения вспомогательной задачи в смысле Определения 3.1, в котором временной промежуток $\mathbb{R}_0^+$ сужен до $[0,T]$, а затем расширим временной интервал до $\mathbb{R}_0^+$, пользуясь произвольностью T.

Доказательство для вспомогательной задачи проведем при помощи метода верхних и нижних решений.

Определение 3.5. Пары функций $\left(\overline{U}^T(x,t), \overline{V}^T(x,t)\right)$ и $\left(\underline{U}^T(x,t), \underline{V}^T(x,t)\right)$ с компонентами из $C\left(\overline{D}_T\right) \cap C^{1,0}\left(([-1,1]\backslash x_0) \times (0,T]\right) \cap C^{2,1}\left(D^{(-)} \cup D^{(+)}\right)$ называются, соответственно, верхним и нижним решениями задачи (97) если для них выполняются следующие неравенства:

(B$_1$). $\underline{U}^T(x,t) \le \overline{U}^T(x,t),\; \underline{V}^T(x,t) \le \overline{V}^T(x,t),\; (x,t) \in \overline{D}_T$;

(B$_2$). $L^t_{u,\varepsilon}(\overline{U}^T, v) \le 0 \le L^t_{u,\varepsilon}(\underline{U}^T, v)\;\; \underline{V}^T \le v \le \overline{V}^T,\; (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}$,
$L^t_{v,\varepsilon}(u, \overline{V}^T) \le 0 \le L^t_{u,\varepsilon}(u, \underline{V}^T)\;\; \underline{U}^T \le u \le \overline{U}^T,\; (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}$;

(B$_3$). $\overline{U}_x^T(0,t) \le 0 \le \underline{U}_x^T(0,t),\; \overline{U}_x^T(1,t) \ge 0 \ge \underline{U}_x^T(1,t),\; t \in [0,T]$,
$\overline{V}_x^T(0,t) \le 0 \le \underline{V}_x^T(0,t),\; \overline{V}_x^T(1,t) \ge 0 \ge \underline{V}_x^T(1,t),\; t \in [0,T]$;

(B$_4$). $\overline{U}_x^T(x_0-0,t) - \overline{U}_x^T(x_0+0,t) \ge 0,\; \underline{U}_x^T(x_0-0,t) - \underline{U}_x^T(x_0+0,t) \le 0,\; t \in [0,T]$,
$\overline{V}_x^T(x_0-0,t) - \overline{V}_x^T(x_0+0,t) \ge 0,\; \underline{V}_x^T(x_0-0,t) - \underline{V}_x^T(x_0+0,t) \le 0,\; t \in [0,T]$.

Лемма 3.4. *Пусть некоторые* $(\overline{U}^T, \overline{V}^T)$ *и* $(\underline{U}^T, \underline{V}^T)$ *являются, соответственно, верхним и нижним решениями в смысле Определения 3.5. Тогда для любого* $T > 0$ *существует единственное решение* $(y_\varepsilon(x,t), z_\varepsilon(x,t))$ *вспомогательной задачи* (97)*, причём в* $\overline{D}_T$ *выполняются неравенства:*

$$\underline{U}^T(x,t) \le y_\varepsilon(x,t) \le \overline{U}^T(x,t), \;\; \underline{V}^T(x,t) \le z_\varepsilon(x,t) \le \overline{V}^T(x,t). \qquad (98)$$

Проиллюстрируем алгоритм на примере PN квазимонотонности. Определим итерационные процессы для построения последовательностей верхних и нижних решений начально-краевой задачи (97).

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \bar{y}^{(k)}}{\partial t} - \varepsilon^4 \frac{\partial^2 \bar{y}^{(k)}}{\partial x^2} + c\bar{y}^{(k)} = \mathcal{F}(\bar{y}^{(k-1)}, \underline{z}^{(k-1)}, x), \;\; (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}, \\
\bar{y}_x^{(k)}(-1,t) = a^{(-)},\; \bar{y}_x^{(k)}(1,t) = a^{(+)},\; 0 \le t \le T, \;\; \bar{y}^{(k)}(x,0) = u^0(x),\; -1 \le x \le 1, \\
\frac{\partial \bar{z}^{(k)}}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{z}^{(k)}}{\partial x^2} + c\bar{z}^{(k)} = \mathcal{G}(\bar{y}^{(k-1)}, \bar{z}^{(k-1)}, x), \;\; (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}, \\
\bar{z}_x^{(k)}(-1,t) = b^{(-)},\; \bar{z}_x^{(k)}(1,t) = b^{(+)},\; 0 \le t \le T, \;\; \bar{z}^{(k)}(x,0) = v^0(x),\; -1 \le x \le 1. \\
\frac{\partial \underline{y}^{(k)}}{\partial t} - \varepsilon^4 \frac{\partial^2 \underline{y}^{(k)}}{\partial x^2} + c\underline{y}^{(k)} = \mathcal{F}(\underline{y}^{(k-1)}, \bar{z}^{(k-1)}, x), \;\; (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}, \\
\underline{y}_x^{(k)}(-1,t) = a^{(-)},\; \underline{y}_x^{(k)}(1,t) = a^{(+)},\; 0 \le t \le T, \;\; \underline{y}^{(k)}(x,0) = u^0(x),\; -1 \le x \le 1, \\
\frac{\partial \underline{z}^{(k)}}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \underline{z}^{(k)}}{\partial x^2} + c\underline{z}^{(k)} = \mathcal{G}(\underline{y}^{(k-1)}, \underline{z}^{(k-1)}, x), \;\; (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}, \\
\underline{z}_x^{(k)}(-1,t) = b^{(-)},\; \underline{z}_x^{(k)}(1,t) = b^{(+)},\; 0 \le t \le T, \;\; \underline{z}^{(k)}(x,0) = v^0(x),\; -1 \le x \le 1,
\end{gathered} \tag{99}$$

где $k = 1, 2, \ldots, c$ – достаточно большая положительная константа,

$$\mathcal{F}(y,z,x) := -f(y,z,x,\varepsilon) + cy, \;\; \mathcal{G}(y,z,x) := -g(y,z,x,\varepsilon) + cz. \tag{100}$$

Также полагаем $\left(\bar{y}^{(0)}, \bar{z}^{(0)}\right) = (\overline{U}^T, \overline{V}^T)$ и $\left(\underline{y}^{(0)}, \underline{z}^{(0)}\right) = (\underline{U}^T, \underline{V}^T)$

Установим классы гладкости решений этих задач на каждой из итераций.

Обозначим через $G^u(x,s,t-\tau)$, $G^v(x,s,t-\tau)$ функции Грина первой (третьей) и второй (четвёртой) задач (99), $(\partial_t - \varepsilon^4\partial_{xx} + c)G^u(x,s,t-\tau) = \delta(x-s)\delta(t-\tau)$, $(\partial_t - \varepsilon^2\partial_{xx} + c)G^v(x,s,t-\tau) = \delta(x-s)\delta(t-\tau)$.

Введём объёмные потенциалы

$$\mathrm{Y}[y,z] := \int_0^t d\tau \int_{-1}^1 G^u(x,s,t-\tau)\mathcal{F}(y,z,s)ds, \quad \mathrm{Z}[y,z] := \int_0^t d\tau \int_{-1}^1 G^v(x,s,t-\tau)\mathcal{G}(y,z,s)ds, \tag{101}$$

потенциалы «по нижней крышке»

$$\mathrm{Y}^b[\omega] := \int_{-1}^1 G^u(x,s,t)\omega ds, \quad \mathrm{Z}^b[\omega] := \int_{-1}^1 G^v(x,s,t)\omega ds. \tag{102}$$

и потенциалы простого слоя

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}^{sl}[a,b] &= \varepsilon^4 \int\limits_0^t (bG^u(x,1,t-\tau) - aG^u(x,-1,t-\tau))d\tau, \\ \mathrm{Z}^{sl}[a,b] &= \varepsilon^2 \int\limits_0^t (bG^v(x,1,t-\tau) - aG^v(x,-1,t-\tau))d\tau. \end{aligned} \tag{103}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \varkappa_f(y,z,s) &:= f^{(-)}(y,z,x_0,\varepsilon) - f^{(+)}(y,z,x_0,\varepsilon), \\ \varkappa_g(y,z,s) &:= g^{(-)}(y,z,x_0,\varepsilon) - g^{(+)}(y,z,x_0,\varepsilon), \\ f_0(y,z,s) &:= f(y,z,x,\varepsilon) + \Theta(x-x_0)\varkappa_f(y,z,s), \\ g_0(y,z,s) &:= g(y,z,x,\varepsilon) + \Theta(x-x_0)\varkappa_g(y,z,s), \end{aligned}$$

где $\Theta(x-x_0)$ — функция Хевисайда, определённая как

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Разобьём каждую из функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ на две части:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}_0(y,z,s) + \theta(x-x_0)\varkappa_f(y,z,s), &\quad \mathcal{F}_0(y,z,s) &= -f_0(y,z,s) + cy, \\ \mathcal{G} &= \mathcal{G}_0(y,z,s) + \theta(x-x_0)\varkappa_g(y,z,s), &\quad \mathcal{G}_0(y,z,s) &= -g_0(y,z,s) + cz. \end{aligned}$$

Тогда потенциалы (101) тоже распадаются на две части:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Y}[y,z] = \mathrm{Y}^1[y,z] + \mathrm{Y}^2[y,z], && \mathrm{Z}[y,z] = \mathrm{Z}^1[y,z] + \mathrm{Z}^2[y,z], \\ &\mathrm{Y}^1[y,z] := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-1}^1 G^u(x,s,t-\tau)\mathcal{F}_0(y,z,s)ds, && \mathrm{Y}^2[y,z] := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x_0}^1 G^u(x,s,t-\tau)\varkappa_f(y,z,s)ds, \\ &\mathrm{Z}^1[y,z] := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-1}^1 G^v(x,s,t-\tau)\mathcal{G}_0(y,z,s)ds, && \mathrm{Z}^2[y,z] := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x_0}^1 G^v(x,s,t-\tau)\varkappa_g(y,z,s)ds, \end{aligned} \tag{104}$$

Сделаем вывод о гладкости функций на каждой из итераций, рассмотрев, например, потенциалы $\mathrm{Y}^1[\bar{y}^{(k-1)}, \underline{z}^{(k-1)}]$, $\mathrm{Y}^2[\bar{y}^{(k-1)}, \underline{z}^{(k-1)}]$, $k = 1, 2, \ldots$ для первой задачи из (99).

На первой итерации $\left(\bar{y}^{(0)}, \bar{z}^{(0)}\right) = (\overline{U}^T, \overline{V}^T)$ и $\left(\underline{y}^{(0)}, \underline{z}^{(0)}\right) = (\underline{U}^T, \underline{V}^T)$ с непрерывными в $\overline{D}_T$ компонентами. Заметим, что $\mathcal{F}_0(y, z, x)$ равномерно относительно y, z липшицева по x на $[-1, 1]$, так как является кусочно-гладкой, а $\varkappa_f(y, z, x)$ гладкая на $[x_0, 1]$ по и по y, z на допустимых отрезках.

Сказанное позволяет сделать следующие выводы.

Непосредственно из доказанных в [108,109] утверждений $\Upsilon^1[\overline{U}^T, \underline{V}^T] \in C^{2,1}(D_T)$, $\Upsilon^2[\overline{U}^T, \underline{V}^T] \in C^{2,1}((x_0, 1) \times (0, T])$, более того $\Upsilon^{sl}[a^{(-)}, a^{(+)}] + \Upsilon^b[u^{(0)}] + \Upsilon^1[\overline{U}^T, \underline{V}^T])$ является классическим решением первой из задач (99) с правой частью $\mathcal{F}_0(\overline{U}^T, \underline{V}^T, x)$.

В силу свойств фундаментальных решений рассматриваемых параболических операторов и их элементарных оценок [109] потенциал $\Upsilon^2[\overline{U}^T, \underline{V}^T]$ и $\Upsilon^2_x[\overline{U}^T, \underline{V}^T]$ определены в $\mathbb{R} \times [0, T]$, $\Upsilon^2[\overline{U}^T, \underline{V}^T] \in C(\overline{D}_T)$, к тому же вне $[x_0, 1]$ при $t - \tau > 0$ допускается дифференцирование неограниченно количество раз под знаком интеграла. Согласно [109, с. 187] $\Upsilon^2_x[\overline{U}^T, \underline{V}^T] \in C(\overline{D}_T^{(+)})$ и справедливо выражение

$$\Upsilon^2_x[\overline{U}^T, \underline{V}^T] \equiv \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x_0}^1 G^u_x(x, s, t - \tau)\varkappa_f(\overline{U}^T, \underline{V}^T, s)ds, \quad (x, t) \in (\mathbb{R}\backslash\{x_0, 1\}) \times (0, T],$$

поэтому $\Upsilon^2[\overline{U}^T, \underline{V}^T] \in C(\overline{D}_T) \cap C^{1,0}([-1, 1] \times (0, T]) \cap C^{2,1}(D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)})$ и при $(x, t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}$

$$\Upsilon^2_{xx}[\overline{U}^T, \underline{V}^T] \equiv \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x_0}^1 G^u_{xx}(x, s, t - \tau)\varkappa_f(\overline{U}^T, \underline{V}^T, s)ds,$$

$$\Upsilon^2_t[\overline{U}^T, \underline{V}^T] \equiv \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x_0}^1 G^u_t(x, s, t - \tau)\varkappa_f(\overline{U}^T, \underline{V}^T, s)ds.$$

Теперь можно утверждать, что

$$\bar{y}^{(1)}(x, t) = \Upsilon^{sl}[a^{(-)}, a^{(+)}] + \Upsilon^b[u^{(0)}] + \Upsilon[\overline{U}^T, \underline{V}^T]$$

является решением первой из задач (99) в классе гладкости

$$C(\overline{D}_T) \cap C^{1,0}([-1, 1] \times (0, T]) \cap C^{2,1}(D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}).$$

Рассуждения и классы гладкости идентичны для $\underline{y}^{(1)}(x, t)$, $\underline{z}^{(1)}(x, t)$, $\bar{z}^{(1)}(x, t)$, что позволяет перенести результат на функции произвольной k-ой итерации, $k = 1, 2, \ldots$:

$$\bar{y}^{(k)}(x, t) = \Upsilon^{sl}[a^{(-)}, a^{(+)}] + \Upsilon^b[u^{(0)}] + \Upsilon[\bar{y}^{(k-1)}, \underline{z}^{(k-1)}],$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{z}^{(k)}(x,t) = \mathrm{Z}^{sl}[b^{(-)}, b^{(+)}] + \mathrm{Z}^{b}[v^{(0)}] + \mathrm{Z}[\bar{y}^{(k-1)}, \bar{z}^{(k-1)}],\\
&\underline{y}^{(k)}(x,t) = \mathrm{Y}^{sl}[a^{(-)}, a^{(+)}] + \mathrm{Y}^{b}[u^{(0)}] + \mathrm{Y}[\underline{y}^{(k-1)}, \bar{z}^{(k-1)}],\\
&\underline{z}^{(k)}(x,t) = \mathrm{Z}^{sl}[b^{(-)}, b^{(+)}] + \mathrm{Z}^{b}[v^{(0)}] + \mathrm{Z}[\underline{y}^{(k-1)}, \underline{z}^{(k-1)}].
\end{aligned} \tag{105}
$$

Далее повторяются рассуждения из предыдущего параграфа и [33] с использованием Леммы PPL (см. гл. 1), откуда следует, что последовательности верхних и нижних решений в $\overline{D}_T$ обладают свойством монотонности и ограниченности типа (66), и следовательно существуют их предельные функции $\bar{y}(x,t)$, $\underline{y}(x,t)$, $\bar{z}(x,t)$ $\underline{z}(x,t)$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве Леммы 3.1, с использованием теоремы Леви можно доказать непрерывность предельных функций $\bar{y}(x,t)$, $\bar{z}(x,t)$, $\underline{y}(x,t)$, $\underline{z}(x,t)$ в $\overline{D}^T$, а затем и справедливость предельных равенств, получающихся из (105) при $k \to +\infty$, в частности

$$
\bar{y}(x,t) = \mathrm{Y}^{sl}[a^{(-)}, a^{(+)}] + \mathrm{Y}^{b}[u^{(0)}] + \mathrm{Y}[\bar{y}, \underline{z}] \tag{106}
$$

Аналогичные равенства справедливы для функций $\bar{z}(x,t)$, $\underline{y}(x,t)$ и $\underline{z}(x,t)$; из этих равенств и единственности решения параболической задачи, согласно [33], следует, что пара функций $y_\varepsilon(x,t) = \bar{y}(x,t) = \underline{y}(x,t)$, $z_\varepsilon(x,t) = \bar{z}(x,t) = \underline{z}(x,t)$ является единственным решением задачи (97), удовлетворяющим неравенствам (98).

Лемма 3.4 доказана. □

Рассмотрим теперь функции

$$
\begin{aligned}
&\overline{U}^T(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + \left(\overline{U}(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\right) e^{-\lambda t}, \quad \overline{V}^T(x,t,\varepsilon) = v_\varepsilon(x) + \left(\overline{V}(x,\varepsilon) - v_\varepsilon(x)\right) e^{-\lambda t},\\
&\underline{U}^T(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + \left(\underline{U}(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)\right) e^{-\lambda t}, \quad \underline{V}^T(x,t,\varepsilon) = v_\varepsilon(x) + \left(\underline{V}(x,\varepsilon) - v_\varepsilon(x)\right) e^{-\lambda t},
\end{aligned} \tag{107}
$$

в которые входят верхние и нижние решения $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$, $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ задачи (4) и точное решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ задачи (4), которое существует согласно Теореме 3.1. Здесь λ положительная константа.

В полной аналогии с [34] можно доказать, что при достаточно малом λ функции (107) являются нижним и верхним решениями задачи (97) для любого $T > 0$.

Далее, применяя Лемму 3.4 к решению задачи (97) и учитывая произвольность $T > 0$, заключаем существование единственного решения $(y_\varepsilon(x,t), z_\varepsilon(x,t))$ в смысле Определения 3.1 задачи

(2) для начальных функций $u^0(x)$, $v^0(x)$, заданных на промежутках

$$\begin{aligned} &\underline{U}^T(x,0,\varepsilon) = \underline{U}(x,\varepsilon) \le u^0(x) \le \overline{U}(x,\varepsilon) = \overline{U}^T(x,0,\varepsilon), \quad x \in [-1,1] \\ &\underline{V}^T(x,0,\varepsilon) = \underline{V}(x,\varepsilon) \le v^0(x) \le \overline{V}(x,\varepsilon) = \overline{V}^T(x,0,\varepsilon), \quad x \in [-1,1]. \end{aligned} \tag{108}$$

Кроме того, верны равенства

$$\underline{U}^T(x,t,\varepsilon) \le y_\varepsilon(x,t) \le \overline{U}^T(x,t,\varepsilon), \quad \underline{V}^T(x,t,\varepsilon) \le z_\varepsilon(x,t) \le \overline{V}^T(x,t,\varepsilon), \quad (x,t) \in [-1,1] \times \mathbb{R}^+. \tag{109}$$

Из этих неравенств с учетом выражений (107) следуют предельные равенства

$$\lim_{t\to+\infty} \|y_\varepsilon(x,t) - u_\varepsilon(x)\|_{C[-1,1]} = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} \|z_\varepsilon(x,t) - v_\varepsilon(x)\|_{C[-1,1]} = 0.$$

Эти равенства означают асимптотическую устойчивость стационарного решения задачи (2), а в силу единственности функций $(y_\varepsilon(x,t), z_\varepsilon(x,t))$ из этих предельных равенств и оценок (64), установленных в ходе доказательства Теоремы 3.1, вытекает единственность решения $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ задачи (4) в интервале (64).

Наконец, положив $t = 0$ в выражениях (107), с учетом соотношений (108), получаем, что область притяжения стационарного решения не меньше $[\underline{U}(x,\varepsilon), \overline{U}(x,\varepsilon)] \times [\underline{V}(x,\varepsilon), \overline{V}(x,\varepsilon)]$. Остаётся положить $(\underline{U_1}(x,\varepsilon), \underline{V_1}(x,\varepsilon))$ нижним, а $(\overline{U}_1(x,\varepsilon), \overline{V}_1(x,\varepsilon))$ верхним решениями.

Теорема 3.2 доказана. ■

4 Обобщение на двумерный случай

4.1 Постановка задачи и накладываемые условия

Обобщение на двумерный случай задач из глав 2 и 3 проводится в тандеме, поскольку достаточно рассмотреть задачу (1)

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4 \Delta u - u_t = f(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 \Delta v - v_t = g(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \in D \backslash \gamma, \ t > 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} = b, \quad u|_{t=0} = u^0(\mathbf{x}), \quad v|_{t=0} = v^0(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{1}$$

и соответствующую ей эллиптическую задачу (3).

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4 \Delta u = f(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \varepsilon^2 \Delta v = g(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \in D \backslash \gamma; \\ &\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} = b, \quad \mathbf{x} \in \Gamma; \end{aligned} \tag{3}$$

Помимо требований из главы 1, положим кривые γ и Γ принадлежащими классу C^∞.

Аналогично главе 3 правые части (1), (3) претерпевают разрыв первого рода, но уже на кривой — при $\mathbf{x} \in \gamma$:

$$\begin{aligned} f(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) &= \begin{cases} f^{(-)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \ \mathbf{x} \in D^{(-)}, \\ f^{(+)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \ \mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}; \end{cases} \\ g(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) &= \begin{cases} g^{(-)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \ \mathbf{x} \in D^{(-)}, \\ g^{(+)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon), & u \in I_u, v \in I_v, \ \mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}. \end{cases} \end{aligned} \tag{110}$$

Уравнения (1) выполняются при всех $(\mathbf{x}, t) \in (D \backslash \gamma) \times \mathbb{R}^+$, и (3) — при всех $\mathbf{x} \in D \backslash \gamma$.

Гладкость функций $f^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon)$ и $g^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon)$ связана с порядком асимптотического приближения, которое требуется построить. Для построения приближения n-го порядка необходимо, чтобы $f^{(\mp)} \in C^{(n+2)}(I_u \times I_v \times \overline{D}^{(\mp)} \times [0, \varepsilon_0])$ и $g^{(\mp)} \in C^{(n+2)}(I_u \times I_v \times \overline{D}^{(\mp)} \times [0, \varepsilon_0])$.

Решение задачи (1) понимается в смысле следующего определения.

Определение 4.1. Пара функций $(u_\varepsilon(\mathbf{x}, t), v_\varepsilon(\mathbf{x}, t))$ из класса

$$C\left(\overline{D} \times \mathbb{R}_0^+\right) \cap C^{1,0}\left(\overline{D} \times \mathbb{R}^+\right) \cap C^{2,1}\left((D \backslash \gamma) \times \mathbb{R}^+\right)$$

называется решением задачи (1), если она удовлетворяет уравнениям (1) при $(\mathbf{x}, t) \in (D \backslash \gamma) \times \mathbb{R}^+$, а также граничным и начальным условиям этой задачи.

Решение стационарной задачи (3) понимается следующим образом.

Определение 4.2. Пара функций $(u_\varepsilon(\mathbf{x}), v_\varepsilon(\mathbf{x}))$ из класса $C^1(\overline{D}) \cap C^2(D\backslash\gamma)$ называется решением задачи (3), если она удовлетворяет уравнениям (3) при $\mathbf{x} \in D\backslash\gamma$ и граничным условиям (3).

Для того чтобы у задач (1) и (3) существовало решение с большим градиентом в окрестности кривой γ, потребуем выполнения ещё некоторых условий.

Условие 4.1. Каждое из уравнений $f^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, 0) = 0$ имеет изолированный корень $u = \varphi^{(\mp)}(v, \mathbf{x})$ соответственно на множествах $I_v \times \overline{D}^{(\mp)}$, и выполняются неравенства

$$\varphi^{(-)}(v, \mathbf{x}) < \varphi^{(+)}(v, \mathbf{x}),\ \ v \in I_v,\ \ \mathbf{x} \in \gamma;$$
$$f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v, \mathbf{x}), v, \mathbf{x}, 0) > 0,\ \ (v, \mathbf{x}) \in I_v \times \overline{D}^{(\mp)}.$$

Обозначим $h^{(\mp)}(v, \mathbf{x}) = g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v, \mathbf{x}), v, \mathbf{x}, 0)$.

Условие 4.2. Каждое из уравнений $h^{(\mp)}(v, \mathbf{x}) = 0$ имеет изолированный корень $v = \psi^{(\mp)}(\mathbf{x})$ соответственно на множествах $\overline{D}^{(\mp)}$, и выполняются неравенства

$$\psi^{(-)}(\mathbf{x}) < \psi^{(+)}(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} \in \gamma\,;\quad h_v^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) > 0,\ \ \mathbf{x} \in \overline{D}^{(\mp)}.$$

В диссертационной работе исследуется такое стационарное решение задачи (3), которое близко к функциям $(\varphi^{(-)}, \psi^{(-)})$ в области $D^{(-)}$, к функциям $(\varphi^{(+)}, \psi^{(+)})$ в области $D^{(+)}$ и резко изменяется от значений $(\varphi^{(-)}, \psi^{(-)})$ до значений $(\varphi^{(+)}, \psi^{(+)})$ в малой окрестности кривой γ.

Потребуем также выполнения одного из условий КМ.

Условие 4.3. Пусть при всех $(u, v) \in I_u \times I_v$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, правые части уравнений (1), (3) удовлетворяют одной из четырех систем неравенств

$$f_v^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) < 0,\ \ g_u^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) < 0\ \ \text{(NN тип)};$$
$$f_v^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) > 0,\ \ g_u^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) > 0\ \ \text{(PP тип)};$$
$$f_v^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) < 0,\ \ g_u^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) > 0\ \ \text{(NP тип)};$$
$$f_v^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) > 0,\ \ g_u^{(\mp)}(u, v, \mathbf{x}, \varepsilon) < 0\ \ \text{(PN тип)}$$

соответственно при $\mathbf{x} \in \overline{D}^{(\mp)}$.

При построении асимптотических приближений решений краевых задач с внутренними переходными и пограничными слоями важным этапом является исследование так называемых присоединённых уравнений [29, 31, 66]. В диссертационной работе свойствами присоединённых задач определяется существование функций, описывающих внутренний переходный слой. Для построения этих функций целесообразно в окрестности $\Omega(\gamma)$ кривой γ перейти к локальным координатам таким же образом, как это сделано в работе [113]. Введём в окрестности $\Omega(\gamma)$ локальные координаты $(\mathbf{y}, r)$ следующим образом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + r\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y}), \quad (\mathbf{x} \in \Omega(\gamma), \mathbf{y} \in \gamma). \tag{111}$$

Координата r считается положительной при $\mathbf{x} \in D^{(+)}$ и отрицательной, если $\mathbf{x} \in D^{(-)}$.

Точно так же вводятся локальные координаты $(\mathbf{y}_\Gamma, r_\Gamma)$ в окрестности $\Omega(\Gamma)$.

Введём растянутые переменные:

$$\tau = \frac{r}{\varepsilon}, \quad \sigma = \frac{r}{\varepsilon^2}, \quad \tau_\Gamma = \frac{r_\Gamma}{\varepsilon}, \quad \sigma_\Gamma = \frac{r_\Gamma}{\varepsilon^2}, \tag{112}$$

Существование и свойства функций переходного слоя связаны с существованием и свойствами решений $\tilde{v}^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y})$ и $\hat{u}^{(\mp)}(\sigma, \mathbf{y})$ следующих (присоединённых) задач:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \tilde{v}^{(\mp)}}{\partial \tau^2} = h^{(\mp)}(\varphi(\tilde{v}^{(\mp)}, \mathbf{y}), \mathbf{y}), \quad \tau \in \mathbb{R}^{\mp}, \ \mathbf{y} \in \gamma; \\ &\tilde{v}^{(\mp)}(0, \mathbf{y}) = q^{(\mp)}(\mathbf{y}), \quad \tilde{v}^{(\mp)}(\mp\infty, \mathbf{y}) = \psi^{(\mp)}(\mathbf{y}), \ \mathbf{y} \in \gamma, \end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \hat{u}^{(\mp)}}{\partial \sigma^2} = f^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}, q^{(\mp)}(\mathbf{y}), \mathbf{y}, 0), \quad \sigma \in \mathbb{R}^{\mp}, \ \mathbf{y} \in \gamma; \\ &\hat{u}^{(\mp)}(0, \mathbf{y}) = p^{(\mp)}(\mathbf{y}), \quad \hat{u}^{(\mp)}(\mp\infty, \mathbf{y}) = \varphi^{(\mp)}(q^{(\mp)}(\mathbf{y}), \mathbf{y}), \ \mathbf{y} \in \gamma. \end{aligned} \tag{114}$$

Известно [111, 112, 114], что при выполнении Условий 4.1 и 4.2 существуют такие непустые множества $K^{(\mp)} \subset [\psi^{(-)}(\mathbf{y}); \psi^{(+)}(\mathbf{y})]$, $P^{(\mp)} \subset [\varphi^{(-)}(q^{(\mp)}(\mathbf{y}), \mathbf{y}); \varphi^{(+)}(q^{(\mp)}(\mathbf{y}), \mathbf{y})]$, $\mathbf{y} \in \gamma$, что каждая из задач (114), (113) имеет решение при $q^{(\mp)}(\mathbf{y}) \in K^{(\mp)}$ и $p^{(\mp)}(\mathbf{y}) \in P^{(\mp)}$.

Обозначим

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}, \mathbf{y}) := \frac{\partial \tilde{v}^{(\mp)}}{\partial \tau}, \quad \Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}, q^{(\mp)}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) := \frac{\partial \hat{u}^{(\mp)}}{\partial \sigma}. \tag{115}$$

При допустимых значениях $q^{(\mp)}(\mathbf{y})$ и $\tilde{v}^{(\mp)} \in [\psi^{(\mp)}(\mathbf{y}); q^{(\mp)}(\mathbf{y})]$ в фазовых пространствах $(\tilde{v}^{(\mp)}, \Phi^{(\mp)})$, для каждого $\mathbf{y} \in \gamma$ существуют фазовые траектории $\Phi^{(-)}(\tilde{v}^{(-)}, \mathbf{y})$, входящих в точки $(\psi^{(-)}(\mathbf{y}); 0)$ при $\tau \to -\infty$, и фазовые траектории $\Phi^{(+)}(\tilde{v}^{(+)}, \mathbf{y})$, входящие в точки $(\psi^{(+)}(\mathbf{y}); 0)$

при $\tau \to +\infty$. Уравнения этих фазовых траекторий имеют вид:

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}, \mathbf{y}) = \sqrt{2\int\limits_{\psi^{(\mp)}(\mathbf{y})}^{\tilde{v}^{(\mp)}} h^{(\mp)}(s, \mathbf{y})ds}. \tag{116}$$

При допустимых значениях $p^{(\mp)}(\mathbf{y})$ и $\hat{u}^{(\mp)} \in [\varphi^{(\mp)}(q^{(\mp)}(\mathbf{y}), \mathbf{y}); p^{(\mp)}(\mathbf{y})]$ в фазовых пространствах $(\hat{u}^{(\mp)}, \Psi^{(\mp)})$, существуют фазовые траектории, входящие соответственно в точки $(\varphi^{(\mp)}(q^{(\mp)}(\mathbf{y}), \mathbf{y}); 0)$, имеющие вид

$$\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}, q^{(\mp)}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \sqrt{2\int\limits_{\varphi^{(\mp)}(q^{(\mp)}(\mathbf{y}), \mathbf{y})}^{\hat{u}^{(\mp)}} f^{(\mp)}(s, q^{(\mp)}(\mathbf{y}), \mathbf{y}, 0)ds}. \tag{117}$$

Для построения асимптотического приближения решения задачи (3) с внутренним переходным слоем необходимо потребовать, чтобы существовали непустые пересечения множеств допустимых значений $p^{(\mp)}$ и $q^{(\mp)}$. В таком случае можно ввести функции

$$H_0^v(q, \mathbf{y}) := \Phi^{(-)}(q, \mathbf{y}) - \Phi^{(+)}(q, \mathbf{y}), \;\; q \in K^{(-)} \cap K^{(+)}, \; \mathbf{y} \in \gamma; \tag{118}$$
$$H_0^u(p, q, \mathbf{y}) := \Psi^{(-)}(p, q, \mathbf{y}) - \Psi^{(+)}(p, q, \mathbf{y}), \;\; p \in P^{(-)} \cap P^{(+)}, \; q \in K^{(-)} \cap K^{(+)}, \; \mathbf{y} \in \gamma.$$

Потребуем выполнения ещё одного условия.

Условие 4.4. Пусть на множестве $\mathbf{y} \in \gamma$ существует функция $q_0(\mathbf{y}) \in (\psi^{(-)}(\mathbf{y}), \psi^{(+)}(\mathbf{y}))$ — единственное решение уравнения $H_0^v(q, \mathbf{y}) = 0$, и функция $p_0(\mathbf{y}) \in (\varphi^{(-)}(q_0(\mathbf{y}), \mathbf{y}), \varphi^{(+)}(q_0(\mathbf{y}), \mathbf{y}))$ — единственное решение уравнения $H_0^u(p, q_0(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$.

Пусть существует окрестность функции $q_0(\mathbf{y})$, целиком принадлежащая множеству $K^{(-)} \cap K^{(+)}$, а также окрестность функции $p_0(\mathbf{y})$, целиком принадлежащая множеству $P^{(-)} \cap P^{(+)}$ и при $\mathbf{y} \in \gamma$ выполняются неравенства

$$\frac{dH_0^v}{dq}(q_0(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \neq 0, \;\; \text{(NP, PN)}; \quad \frac{dH_0^v}{dq}(q_0(\mathbf{y}), \mathbf{y}) > 0, \;\; \text{(NN, PP)}; \quad \frac{\partial H_0^u}{\partial p}(p_0(\mathbf{y}), q_0(\mathbf{y}), \mathbf{y}) > 0.$$

Замечание 4.1. Функции $p_0(\mathbf{y}), q_0(\mathbf{y})$, определённые Условием 4.4 являются гладкими при $\mathbf{y} \in \gamma$ в силу свойств функций $\Phi^{(\mp)}$, $\Psi^{(\mp)}$, определённых выражениями (116), (117).

Замечание 4.2. Выполнение неравенств из Условия 4.4 эквивалентно выполнению неравенств

$$h^{(-)}(q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}) - h^{(+)}(q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}) \neq 0\,(>0), \quad f^{(-)}(p_0(\mathbf{y}),q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}) - f^{(+)}(p_0(\mathbf{y}),q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}) > 0.$$

Введём функции

$$\nu^{(\mp)}(v,\mathbf{x}) := g_v^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,\mathbf{x}),v,\mathbf{x},0) + \frac{f_v^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,\mathbf{x}),v,\mathbf{x},0)}{f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,\mathbf{x}),v,\mathbf{x},0)} \cdot g_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,\mathbf{x}),v,\mathbf{x},0) \tag{119}$$

на множествах $(v,\mathbf{x}) = I_v \times \overline{D}^{(-)}$ для функций с верхним индексом «$(-)$» и $(v,\mathbf{x}) = I_v \times \overline{D}^{(+)}$ для функций с индексом «$(+)$», а также введём обозначения

$$\bar{\nu}^{(\mp)}(\mathbf{x}) := \nu^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(\mathbf{x}),\mathbf{x}). \tag{120}$$

Условие 4.5. Пусть $\bar{\nu}^{(\mp)}(\mathbf{x}) > 0$, соответственно на $\overline{D}^{(\mp)}$, а для функций $\nu^{(\mp)}(v,\mathbf{x})$ справедливы соотношения

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(\mathbf{y})}^{v} \nu^{(-)}(s,\mathbf{y})ds \geq 0, \quad v \in [\psi^{(-)}(\mathbf{y}), q_0(\mathbf{y})), \qquad \int\limits_{\psi^{(-)}(\mathbf{y})}^{q_0(\mathbf{y})} \nu^{(-)}(s,\mathbf{y})ds > 0,$$

$$\int\limits_{v}^{\psi^{(+)}(\mathbf{y})} \nu^{(+)}(s,\mathbf{y})ds \geq 0, \quad v \in (q_0(\mathbf{y}), \psi^{(+)}(\mathbf{y})], \qquad \int\limits_{q_0(\mathbf{y})}^{\psi^{(+)}(\mathbf{y})} \nu^{(+)}(s,\mathbf{y})ds > 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma.$$

Далее доказывается, что при сформулированных условиях у задачи (3) существует решение с двухмасштабным внутренним переходным слоем, локально единственное и асимптотически устойчивое как стационарное решение задачи (1). Для доказательства мы будем использовать метод верхних и нижних решений [33] и асимптотический метод дифференциальных неравенств [29].

4.2 Асимптотическое приближение решения стационарной задачи

Асимптотическое приближение, $(U_n(\mathbf{x},\varepsilon), V_n(\mathbf{x},\varepsilon))$, n-ого порядка решения с внутренним переходным слом в окрестности кривой γ задачи (3) строится отдельно в каждой из областей $\overline{D}^{(\mp)}$:

$$U_n(\mathbf{x},\varepsilon) = \begin{cases} U_n^{(-)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in D^{(-)}, \\ U_n^{(+)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}, \end{cases} \qquad V_n(\mathbf{x},\varepsilon) = \begin{cases} V_n^{(-)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in D^{(-)}, \\ V_n^{(+)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}. \end{cases} \tag{121}$$

Асимптотические представления $U_n^{(+)}$ и $V_n^{(+)}$ состоят из функций регулярной части, зависящих от $\mathbf{x}$, которые мы будем отмечать чертой сверху, и функций переходного слоя двух масштабов: Q-функций и M-функций, зависящих соответственно от растянутых переменных τ и σ, определённых равенствами (112). Асимптотические представления $U_n^{(-)}$ и $V_n^{(-)}$ кроме регулярной части и функций переходного слоя включают также пограничные функции двух масштабов, описывающие поведение решения в окрестности границы Γ.

В свою очередь, каждая составляющая асимптотического приближения представляется в виде суммы по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned}
&U_n^{(-)} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \bar{u}_i^{(-)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i Q_i^{(-)} u(\tau, \mathbf{y}) + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i M_i^{(-)} u(\sigma, \mathbf{y}) + \\
&+ \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i P_i u(\tau_\Gamma, \mathbf{y}_\Gamma) + \sum_{i=2}^{n+2} \varepsilon^i R_i u(\sigma_\Gamma, \mathbf{y}_\Gamma), \\
&V_n^{(-)} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \bar{v}_i^{(-)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i Q_i^{(-)} v(\tau, \mathbf{y}) + \sum_{i=2}^{n+2} \varepsilon^i M_i^{(-)} v(\sigma, \mathbf{y}) + \\
&+ \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i P_i v(\tau_\Gamma, \mathbf{y}_\Gamma) + \sum_{i=4}^{n+2} \varepsilon^i R_i v(\sigma_\Gamma, \mathbf{y}_\Gamma);
\end{aligned} \tag{122}$$

$$\mathbf{x} \in \overline{D}^{(-)}, \ \tau \leq 0, \ \sigma \leq 0; \mathbf{y} \in \gamma, \ \tau_\Gamma \geq 0, \ \sigma_\Gamma \geq 0, \ \mathbf{y}_\Gamma \in \Gamma; \tag{123}$$

$$\begin{aligned}
&U_n^{(+)} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \bar{u}_i^{(+)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i Q_i^{(+)} u(\tau, \mathbf{y}) + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i M_i^{(+)} u(\sigma, \mathbf{y}), \\
&V_n^{(+)} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \bar{v}_i^{(+)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i Q_i^{(+)} v(\tau, \mathbf{y}) + \sum_{i=2}^{n+2} \varepsilon^i M_i^{(+)} v(\sigma, \mathbf{y}),
\end{aligned} \tag{124}$$

$$\mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}, \ \tau \geq 0, \ \sigma \geq 0, \ \mathbf{y} \in \gamma. \tag{125}$$

Функции $U_n^{(-)}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и $U_n^{(+)}(\mathbf{x}, \varepsilon)$, а также $V_n^{(-)}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и $V_n^{(+)}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ сшиваются непрерывно на кривой γ согласно равенствам

$$\begin{aligned}
U_n^{(-)}(\mathbf{y}, \varepsilon) = U_n^{(+)}(\mathbf{y}, \varepsilon) = p_0(\mathbf{y}) + \ldots + \varepsilon^n p_n(\mathbf{y}) + O(\varepsilon^{n+1}) =: p(\mathbf{y}), \ \ \mathbf{y} \in \gamma, \\
V_n^{(-)}(\mathbf{y}, \varepsilon) = V_n^{(+)}(\mathbf{y}, \varepsilon) = q_0(\mathbf{y}) + \ldots + \varepsilon^n q_n(\mathbf{y}) + O(\varepsilon^{n+1}) =: q(\mathbf{y}), \ \ \mathbf{y} \in \gamma,
\end{aligned} \tag{126}$$

где функции $p_0(\mathbf{y})$ и $q_0(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \gamma$, те же, что в Условии 4.4, а $p_k(\mathbf{y})$ и $q_k(\mathbf{y})$, $k = \overline{1, n}$, определяются последовательно при построении функций переходного слоя таким образом, чтобы выполнялись следующие условия на производные функций $U_n^{(\mp)}$, $V_n^{(\mp)}$:

$$\frac{\partial U_n^{(-)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y}) = \frac{\partial U_n^{(+)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y}) + O(\varepsilon^{n-1}), \quad \frac{\partial V_n^{(-)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y}) = \frac{\partial V_n^{(+)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y}) + O(\varepsilon^{n}). \tag{127}$$

4.2.1 Регулярная часть асимптотического приближения

Системы уравнений для функций регулярной части в каждом порядке $k = 0, 1, \ldots$ получаются, если приравнять коэффициенты при ε^k в разложении Тейлора по малому параметру равенств

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i+4}\bar{u}_i^{(\mp)}(\mathbf{x})\right) - f^{(\mp)}\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}\bar{u}_i^{(\mp)}(\mathbf{x}), \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}\bar{v}_i^{(\mp)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, \varepsilon\right) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right),\\
&\Delta\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i+2}\bar{v}_i^{(\mp)}(\mathbf{x})\right) - g^{(\mp)}\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}\bar{u}_i^{(\mp)}(\mathbf{x}), \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}\bar{v}_i^{(\mp)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, \varepsilon\right) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

В частности, в нулевом порядке из Условий 4.1 и 4.2 следует

$$\bar{v}_0^{(\mp)}(\mathbf{x}) = \psi^{(\mp)}(\mathbf{x}), \quad \bar{u}_0^{(\mp)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}).$$

Функции k-ого порядка $\bar{u}_k^{(\mp)}(\mathbf{x})$ и $\bar{v}_k^{(\mp)}(\mathbf{x})$, $k = \overline{1, n}$, находятся из систем

$$\begin{cases}
\bar{f}_u^{(\mp)}(\mathbf{x})\bar{u}_k^{(\mp)}(\mathbf{x}) + \bar{f}_v^{(\mp)}(\mathbf{x})\bar{v}_k^{(\mp)}(\mathbf{x}) = \bar{F}_k^{(\mp)}(\mathbf{x}),\\
\bar{g}_u^{(\mp)}(\mathbf{x})\bar{u}_k^{(\mp)}(\mathbf{x}) + \bar{g}_v^{(\mp)}(\mathbf{x})\bar{v}_k^{(\mp)}(\mathbf{x}) = \bar{G}_k^{(\mp)}(\mathbf{x}),
\end{cases} \tag{128}$$

где обозначено

$$\bar{f}_u^{(\mp)}(\mathbf{x}) := f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}), \psi^{(\mp)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, 0) \tag{129}$$

и аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}_v^{(\mp)}(\mathbf{x}), \bar{g}_u^{(\mp)}(\mathbf{x}), \bar{g}_v^{(\mp)}(\mathbf{x}), \bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\mathbf{x}), \bar{g}_\varepsilon^{(\mp)}(\mathbf{x})$, а $\bar{F}_k^{(\mp)}(\mathbf{x}), \bar{G}_k^{(\mp)}(\mathbf{x})$ — известные на каждом шаге функции, в частности,

$$\bar{F}_1^{(\mp)}(\mathbf{x}) := \bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\mathbf{x}), \quad \bar{G}_k^{(\mp)}(\mathbf{x}) := \bar{g}_\varepsilon^{(\mp)}(\mathbf{x}).$$

Системы (128) разрешимы в силу Условий 4.1–4.3.

4.2.2 Функции переходного слоя

Функции переходного слоя описывают резкое изменение решения в окрестности кривой γ. Для их определения перейдём к локальным координатам (111), а затем к растянутым переменным τ и σ, определёнными равенствами (112). При этом оператор Δ преобразуется следующим образом [113]:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{1}{\varepsilon}k(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{i\geq 0}\varepsilon^i L_i(\tau,\mathbf{y}), \\ \Delta &= \frac{1}{\varepsilon^4}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}k(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial\sigma} + \sum_{i\geq 0}\varepsilon^{2i} L_i(\sigma,\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{130}$$

Здесь $\mathbf{y}\in\gamma$, $L_i(\tau,\mathbf{y})$, $L_i(\sigma,\mathbf{y})$ — известные дифференциальные операторы первого или второго порядка [113], а через $k(\mathbf{y})$ обозначена кривизна γ. Мы считаем, что кривизна $k(\mathbf{y})$ имеет положительный знак в точке $\mathbf{y}\in\gamma$, если центр круга кривизны в этой точке находится в области $D^{(+)}$.

Системы уравнений для функций переходного слоя получаются стандартным способом [31] путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в разложении Тейлора равенств

$$\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \varepsilon^3 k(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{i\geq 0}\varepsilon^i L_i(\tau,\mathbf{y})\right)[\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i+4}Q_i^{(\mp)}u(\tau,\mathbf{y})] = Q^{(\mp)}f(\tau,\mathbf{y},\varepsilon), \tag{131}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \varepsilon k(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial\tau} + \sum_{i\geq 0}\varepsilon^{i+2} L_i(\tau,\mathbf{y})\right)[\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}Q_i^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y})] = Q^{(\mp)}g(\tau,\mathbf{y},\varepsilon), \tag{132}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \varepsilon^2 k(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial\sigma} + \sum_{i\geq 0}\varepsilon^{2i+4} L_i(\sigma,\mathbf{y})\right)[\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}M_i^{(\mp)}u(\sigma,\mathbf{y})] = M^{(\mp)}f(\sigma,\mathbf{y},\varepsilon), \tag{133}$$

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - k(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial\sigma} + \sum_{i\geq 0}\varepsilon^{2i+2} L_i(\sigma,\mathbf{y})\right)[\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}M_i^{(\mp)}v(\sigma,\mathbf{y})] = M^{(\mp)}g(\sigma,\mathbf{y},\varepsilon). \tag{134}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} &Q^{(\mp)}f(\tau,\mathbf{y},\varepsilon) := f^{(\mp)}\Big(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar{u}_i^{(\mp)}(\mathbf{y}+\varepsilon\tau\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y})) + Q_i^{(\mp)}u(\tau,\mathbf{y})\right), \\ &\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar{v}_i^{(\mp)}(\mathbf{y}+\varepsilon\tau\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y})) + Q_i^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y})\right), \mathbf{y}+\varepsilon\tau\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y}),\varepsilon\Big) - \\ &- f^{(\mp)}\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\bar{u}_i^{(\mp)}(\mathbf{y}+\varepsilon\tau\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y})), \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\bar{v}_i^{(\mp)}(\mathbf{y}+\varepsilon\tau\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y})), \mathbf{y}+\varepsilon\tau\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y}),\varepsilon\right), \end{aligned}$$

а функции $Q^{(\mp)}g(\tau,\mathbf{y},\varepsilon)$ определяются аналогичным образом;

$$\begin{aligned} &M^{(\mp)}f(\sigma,\mathbf{y},\varepsilon) := f^{(\mp)}\Big(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar{u}_i^{(\mp)}(\mathbf{y}+\varepsilon^2\sigma\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y})) + Q_i^{(\mp)}u(\varepsilon\tau,\mathbf{y}) + M_i^{(\mp)}u(\sigma,\mathbf{y})\right), \\ &\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar{v}_i^{(\mp)}(\mathbf{y}+\varepsilon^2\sigma\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y})) + Q_i^{(\mp)}v(\varepsilon\tau,\mathbf{y})\right) + \sum_{i=2}^{n+2}\varepsilon^i M_i^{(-)}v(\sigma,\mathbf{y}), \mathbf{y}+\varepsilon^2\sigma\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y}),\varepsilon\Big) - \\ &- f^{(\mp)}\Big(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar{u}_i^{(\mp)}(\mathbf{y}+\varepsilon^2\sigma\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y})) + Q_i^{(\mp)}u(\varepsilon\tau,\mathbf{y})\right), \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\bar{v}_i^{(\mp)}(\mathbf{y}+\varepsilon^2\sigma\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y}))+Q_i^{(\mp)}v(\varepsilon\tau,\mathbf{y})\right),\mathbf{y}+\varepsilon^2\sigma\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y}),\varepsilon\Big),$$

а функции $M^{(\mp)}g(\sigma,\mathbf{y},\varepsilon)$ определяются по аналогии с $M^{(\mp)}f(\sigma,\mathbf{y},\varepsilon)$.

Краевые условия при $\tau=0$ и $\sigma=0$ для функций переходного слоя получаются из условий непрерывного сшивания (126); также учитывается требование убывания этих функций до нуля на бесконечности.

Функции $M_0^{(\mp)}v(\sigma,\mathbf{y})$ и $M_1^{(\mp)}v(\sigma,\mathbf{y})$ оказываются тривиальными.

Далее введем обозначения

$$\tilde{u}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}):=\varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(\mathbf{y}),\mathbf{y})+Q_0^{(\mp)}u(\tau,\mathbf{y}),\;\;\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}):=\psi^{(\mp)}(\mathbf{y})+Q_0^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y}),\;\;\mathbf{y}\in\gamma.$$

Из равенств (131) в нулевом порядке для функций $\tilde{u}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})$ получим выражения

$$\tilde{u}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})=\varphi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}),\mathbf{y}),\;\;\mathbf{y}\in\gamma,$$

а затем из равенств (132) получим уравнения для функций $\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})$, которые совпадают с присоединёнными уравнениями (113). Добавим к ним условия непрерывности из второго равенства (126) и условия на бесконечности:

$$\tilde{v}^{(\mp)}(0,\mathbf{y})=q(\mathbf{y}),\;\tilde{v}^{(\mp)}(\mp\infty,\mathbf{y})=\psi^{(\mp)}(\mathbf{y}),\;\;\mathbf{y}\in\gamma. \tag{135}$$

Как показано ранее, функции $\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})$ существуют, если ε достаточно мало, чтобы значения функции $q(\mathbf{y})$ удовлетворяли Условию 4.4, и для них справедливы следующие оценки [111, 114]:

$$\left|\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})-\psi^{(\mp)}(\mathbf{y})\right|\le C\exp\left(-\varkappa|\tau|\right),\;\;\mathbf{y}\in\gamma,$$

где C, $\varkappa$ – положительные константы.

Введем обозначения

$$\hat{u}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}):=\varphi^{(\mp)}(q(\mathbf{y}),\mathbf{y})+M_0^{(\mp)}u(\sigma,\mathbf{y}).$$

Для функций $\hat{u}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y})$ из равенств (133) получим уравнения, совпадающие с присоединёнными уравнениями (114). Добавим к ним условия из первого равенства (126) и условия на бесконечности:

$$\hat{u}^{(\mp)}(0,\mathbf{y})=p(\mathbf{y}),\;\;\hat{u}^{(\mp)}(\mp\infty,\mathbf{y})=\varphi^{(\mp)}(q(\mathbf{y}),\mathbf{y}). \tag{136}$$

Функции $\hat{u}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y})$ существуют при достаточно малых ε и имеют экспоненциальные оценки [111, 114]

$$\left|\hat{u}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y})-\varphi^{(\mp)}(q(\mathbf{y}),\mathbf{y})\right|\leq Ce^{-\varkappa|\sigma|},\ \ \mathbf{y}\in\gamma,$$

где C, $\varkappa$ – положительные константы.

Далее для краткости будем использовать обозначения

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}):=f^{(\mp)}(\tilde{u}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}),\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}),\mathbf{y},0),\\
&\tilde{g}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}):=g^{(\mp)}(\tilde{u}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}),\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}),\mathbf{y},0),\\
&\hat{f}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}):=f^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}),q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y},0),\\
&\hat{g}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}):=g^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}),q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y},0).
\end{aligned}\tag{137}$$

В аналогичном смысле понимаются и обозначения для производных этих функций.

Алгоритм построения членов асимптотического приближения порядка k выше нулевого следующий.

Сначала находятся функции $M_{k+2}^{(\mp)}v(\sigma,\mathbf{y})$, уравнения для которых получаются стандартным способом [31] из второй пары равенств (134). Эти функции определяются как решения задач

$$\frac{\partial^2 M_{k+2}^{(\mp)}v(\sigma,\mathbf{y})}{\partial\sigma^2}=M_k^{(\mp)}g(\sigma,\mathbf{y}),\ \ \sigma\in\mathbb{R}^{\mp},\ \ \mathbf{y}\in\gamma,\quad M_{k+2}^{(\mp)}v(\mp\infty,\mathbf{y})=0,$$

где $M_k^{(\mp)}g(\sigma,\mathbf{y})$ — известные экспоненциально убывающие функции (см. [32]).

Затем из равенств (131) получаются алгебраические уравнения, из которых выражаются функции $Q_k^{(\mp)}u(\tau,\mathbf{y})$, определенные при $\tau\leq 0$, $\mathbf{y}\in\gamma$, и $Q_k^{(+)}u(\tau,\mathbf{y})$, определенные при $\tau\geq 0$, $\mathbf{y}\in\gamma$.

$$Q_k^{(\mp)}u(\tau,\mathbf{y})=-\frac{\tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})}\cdot Q_k^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y})+\frac{Q_k^{(\mp)}f(\tau,\mathbf{y})}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})},$$

где $Q_k^{(\mp)}f(\tau,\mathbf{y})$ — известные функции, экспоненциально убывающие до нуля соответственно при $\tau\to\mp\infty$, в частности,

$$\begin{aligned}
Q_1^{(\mp)}f(\tau,\mathbf{y}):=-\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})\left(\bar{u}_1^{(\mp)}(\mathbf{y})+\frac{\partial\varphi^{(\mp)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y})\tau+\frac{\partial\varphi^{(\mp)}}{\partial v}\frac{\partial\psi^{(\mp)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y})\tau\right)-\\
-\tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})\left(\bar{v}_1^{(\mp)}(\mathbf{y})+\frac{\partial\psi^{(\mp)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y})\tau\right)-\frac{\partial\tilde{f}^{(\mp)}}{\partial n_\gamma}(\tau,\mathbf{y})\tau-\tilde{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Здесь мы учли тождества $f^{(\mp)}(\varphi(v(\mathbf{x}),\mathbf{x}),v(\mathbf{x}),\mathbf{x},0)\equiv 0$ и первое уравнение (128) при $k=1$.

Далее из равенств (132) с использованием выражений для $Q_k^{(\mp)}u$ получаются уравнения для функций $Q_k^{(\mp)} v(\tau, \mathbf{y})$. Эти функции определяются как решения задач

$$\frac{\partial^2 Q_k^{(\mp)} v}{\partial \tau^2} = h_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y}), \mathbf{y}) \cdot Q_k^{(\mp)} v + Q_k^{(\mp)} g(\tau, \mathbf{y}), \quad \tau \in \mathbb{R}^{\mp}, \quad \mathbf{y} \in \gamma,$$
$$Q_k^{(\mp)} v(0, \mathbf{y}) = -\bar{v}_k^{(\mp)}(\mathbf{y}) - M_k^{(\mp)} v(0, \mathbf{y}), \quad Q_k^{(\mp)} v(\mp\infty, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma.$$

Функции $Q_k^{(\mp)} g(\tau, \mathbf{y})$ известны на каждом шаге, в частности,

$$Q_1^{(\mp)} g(\tau, \mathbf{y}) := \tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y}) \left(\bar{u}_1^{(\mp)}(\mathbf{y}) + \frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y})\tau + \frac{\partial \varphi^{(\mp)}}{\partial v} \frac{\partial \psi^{(\mp)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y})\tau + \frac{Q_1^{(\mp)} f(\tau, \mathbf{y})}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y})} \right) +$$
$$+\tilde{g}_v^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y}) \left(\bar{v}_1^{(\mp)}(\mathbf{y}) + \frac{\partial \psi^{(\mp)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y})\tau \right) + \frac{\partial \tilde{g}^{(\mp)}}{\partial n_\gamma}(\tau, \mathbf{y})\tau + \tilde{g}_\varepsilon^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y}) + k(\mathbf{y}) \frac{\partial \tilde{v}^{(\mp)}}{\partial \tau}(\tau, \mathbf{y}).$$

Здесь учтены тождества $g^{(\mp)}(\varphi(\psi^{(\mp)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}), \psi^{(\mp)}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, 0) \equiv 0$ и второе уравнение (128) при $k = 1$. Все функции $Q_k^{(\mp)} g(\tau, \mathbf{y})$, $k = 0, 1, \ldots$, экспоненциально убывают до нуля соответственно при $\tau \to \mp\infty$.

Далее находятся функции $M_k^{(\mp)} u(\sigma, \mathbf{y})$. Уравнения (138) определяются из равенств (133). Эти функции определяются как решения задач

$$\frac{\partial^2 M_k^{(\mp)} u}{\partial \sigma^2} = \hat{f}_u^{(\mp)}(\sigma, \mathbf{y}) M_k^{(\mp)} u + M_k^{(\mp)} f(\sigma, \mathbf{y}), \quad \sigma \in \mathbb{R}^{\mp}, \quad \mathbf{y} \in \gamma,$$
$$M_k^{(\mp)} u(0, \mathbf{y}) = -\bar{u}_k^{(\mp)}(\mathbf{y}) - Q_k^{(\mp)} u(0, \mathbf{y}), \quad M_k^{(\mp)} u(\mp\infty, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma. \tag{138}$$

где $M_k^{(\mp)} f(\sigma, \mathbf{y})$ — известные экспоненциально убывающие соответственно при $\sigma \to \mp\infty$ функции. В частности,

$$M_1^{(\mp)} f(\sigma, \mathbf{y}) := (\hat{f}_u^{(\mp)}(\sigma, \mathbf{y}) - \tilde{f}_u^{(\mp)}(0, \mathbf{y}))(\bar{u}_1^{(\mp)}(\mathbf{y}) + Q_1^{(\mp)} u(0, \mathbf{y})) + \hat{f}_\varepsilon^{(\mp)}(\sigma, \mathbf{y}) - \tilde{f}_\varepsilon^{(\mp)}(0, \mathbf{y}).$$

Для функций переходного слоя имеют место оценки [32]:

$$\left| Q_k^{(\mp)} v(\tau, \mathbf{y}) \right| \le C e^{-\varkappa|\tau|}, \quad \left| Q_k^{(\mp)} v(\tau, \mathbf{y}) \right| \le C e^{-\varkappa|\tau|},$$
$$\left| M_k^{(\mp)} u(\sigma, \mathbf{y}) \right| \le C e^{-\varkappa|\sigma|}, \quad \left| M_k^{(\mp)} v(\sigma, \mathbf{y}) \right| \le C e^{-\varkappa|\sigma|}, \quad \mathbf{y} \in \gamma, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{139}$$

где C, $\varkappa$ – положительные константы.

4.2.3 Сшивание производных асимптотического представления

С учетом представлений (123), (125) условия сшивания производных (127) можно записать как

$$\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i-2} H_i^u(p,q,\mathbf{y}) = O(\varepsilon^{n-1}), \quad \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i-1} H_i^v(q,\mathbf{y}) = O(\varepsilon^{n}), \quad \mathbf{y} \in \gamma, \tag{140}$$

где функции $H_0^u(p,q,\mathbf{y})$, $H_0^v(p,\mathbf{y})$ определены равенствами (118);

$$H_1^u := \frac{\partial M_1^{(-)} u}{\partial \sigma}(0,\mathbf{y}) + \frac{\partial Q_0^{(-)} u}{\partial \tau}(0,\mathbf{y}) - \frac{\partial M_1^{(+)} u}{\partial \sigma}(0,\mathbf{y}) - \frac{\partial Q_0^{(+)} u}{\partial \tau}(0,\mathbf{y});$$
$$H_1^v := \frac{\partial M_2^{(-)} v}{\partial \sigma}(0,\mathbf{y}) + \frac{\partial Q_1^{(-)} v}{\partial \tau}(0,\mathbf{y}) + \frac{\partial \psi^{(-)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y}) -$$
$$- \frac{\partial M_2^{(-)} v}{\partial \sigma}(0,\mathbf{y}) - \frac{\partial Q_1^{(+)} v}{\partial \tau}(0,\mathbf{y}) - \frac{\partial \psi^{(+)}}{\partial n_\gamma}(\mathbf{y}),$$

и аналогично для остальных H_i^u, H_i^v, $i = \overline{2,n}$.

Условия сшивания производных (127) в нулевом порядке выполняются в силу Условия 4.4. Коэффициенты $p_k(\mathbf{y})$, $q_k(\mathbf{y})$ разложений (126) получаются из равенств (140). Они определяются из уравнений

$$\frac{\partial H_0^v}{\partial q}(q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}) q_k = G_k^v(\mathbf{y}), \quad \frac{\partial H_0^u}{\partial p}(p_0(\mathbf{y}), q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}) p_k = G_k^u(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \gamma, \tag{141}$$

разрешимых в силу Условия 4.4. Здесь $G_k^v(\mathbf{y})$, $G_k^u(\mathbf{y})$ — известные функции, в частности,

$$G_1^v(\mathbf{y}) = -H_1^v(p_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}), \quad G_1^u(\mathbf{y}) = -H_1^u(p_0(\mathbf{y}), q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}) - \frac{\partial H_0^u}{\partial q}(p_0(\mathbf{y}), q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}) q_1.$$

4.2.4 Функции пограничного слоя

Алгоритм построения погранслойных функций с точностью до обозначений переносится из работы [115].

4.3 Существование решения стационарной задачи.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются Условия 4.1–4.4 и 4.5 (последнее для квазимонотонностей NP и PN типов). Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует решение* $(u_\varepsilon(\mathbf{x}), v_\varepsilon(\mathbf{x}))$ *задачи* (3) *в смысле Определения 4.2, для которого пара функций* $(U_n(\mathbf{x},\varepsilon), V_n(\mathbf{x},\varepsilon))$ *является равномерным в* $\overline{D}$ *асимптотическим приближением с точностью* $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$.

Для доказательства теоремы мы будем использовать метод верхних и нижних решений [33].

Обозначим

$$L_{u,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^4\Delta u - f(u,v,\mathbf{x},\varepsilon), \quad L_{v,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^2\Delta v - g(u,v,\mathbf{x},\varepsilon);$$

$$\frac{\partial}{\partial n_\gamma^-} := \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}}(\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y})\cdot\nabla), \quad \mathbf{x}\in D^{(-)}, \quad \mathbf{y}\in\gamma,$$
$$\frac{\partial}{\partial n_\gamma^+} := \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}}(\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y})\cdot\nabla), \quad \mathbf{x}\in D^{(+)}, \quad \mathbf{y}\in\gamma.$$

Здесь, как и раньше, $\mathbf{n}_\gamma(\mathbf{y})$ — нормаль к кривой γ в точке $\mathbf{y}\in\gamma$, направленная внутрь области $D^{(+)}$.

Верхнее и нижнее решения задачи (3) определяются следующим образом [33].

Определение 4.3. Пары функций $\big(\overline{U}(\mathbf{x}),\overline{V}(\mathbf{x})\big)$ и $(\underline{U}(\mathbf{x}),\underline{V}(\mathbf{x}))$ из класса $C(\overline{D})\cap C^1(\overline{D}\backslash\gamma)\cap C^2(D\backslash\gamma)$ называются соответственно верхним и нижним решениями задачи (3), если для них выполняются следующие неравенства:

(A$_1$). $\underline{U}(\mathbf{x})\le\overline{U}(\mathbf{x}),\ \underline{V}(\mathbf{x})\le\overline{V}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\overline{D};$

(A$_2$). $L_{u,\varepsilon}(\overline{U},v)\le 0\le L_{u,\varepsilon}(\underline{U},v),\ \ \underline{V}\le v\le\overline{V},\ \ \mathbf{x}\in D\backslash\gamma,$
$L_{v,\varepsilon}(u,\overline{V})\le 0\le L_{v,\varepsilon}(u,\underline{V}),\ \ \underline{U}\le u\le\overline{U},\ \ \mathbf{x}\in D\backslash\gamma;$

(A$_3$). $\dfrac{\partial\overline{U}}{\partial n_\Gamma}(\mathbf{y}_\Gamma)\le 0\le\dfrac{\partial\underline{U}}{\partial n_\Gamma}(\mathbf{y}_\Gamma),\ \dfrac{\partial\overline{V}}{\partial n_\Gamma}(\mathbf{y}_\Gamma)\le 0\le\dfrac{\partial\underline{V}}{\partial n_\Gamma}(\mathbf{y}_\Gamma)\ ,\ \mathbf{y}_\Gamma\in\Gamma;$

(A$_4$). $\dfrac{\partial\overline{U}}{\partial n_\gamma^-}(\mathbf{y})-\dfrac{\partial\overline{U}}{\partial n_\gamma^+}(\mathbf{y})\ge 0, \dfrac{\partial\underline{U}}{\partial n_\gamma^-}(\mathbf{y})-\dfrac{\partial\underline{U}}{\partial n_\gamma^+}(\mathbf{y})\le 0,\ \ \mathbf{y}\in\gamma,$
$\dfrac{\partial\overline{V}}{\partial n_\gamma^-}(\mathbf{y})-\dfrac{\partial\overline{V}}{\partial n_\gamma^+}(\mathbf{y})\ge 0, \dfrac{\partial\underline{V}}{\partial n_\gamma^-}(\mathbf{y})-\dfrac{\partial\underline{V}}{\partial n_\gamma^+}(\mathbf{y})\le 0,\ \ \mathbf{y}\in\gamma.$

Следуя [33], далее заменим условие (A$_2$) для каждого конкретного типа квазимонотонности на соответствующее более жесткое условие

$$\begin{aligned}
&(NN)\quad L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V})<0<L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}),\ \ L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V})<0<L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V});\\
&(PP)\quad L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V})<0<L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}),\ \ L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V})<0<L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V});\\
&(NP)\quad L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V})<0<L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}),\ \ L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V})<0<L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V});\\
&(PN)\quad L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V})<0<L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V})),\ \ L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V})<0<L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}).
\end{aligned}\tag{142}$$

Лемма 4.1. *Пусть существуют пары функций* $\big(\overline{U}(\mathbf{x}),\overline{V}(\mathbf{x})\big)$ *и* $(\underline{U}(\mathbf{x}),\underline{V}(\mathbf{x}))$, *являющиеся соответственно верхним и нижним решениями в смысле Определения 4.3. Тогда существует хотя бы одно решение* $(u_\varepsilon(\mathbf{x}),v_\varepsilon(\mathbf{x}))$ *задачи* (3) *в смысле Определения 4.2, заключенное между этими* *верхним и нижним решениями:*

$$\underline{U}(\mathbf{x}) \le u_\varepsilon(\mathbf{x}) \le \overline{U}(\mathbf{x}), \quad \underline{V}(\mathbf{x}) \le v_\varepsilon(\mathbf{x}) \le \overline{V}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{D}. \tag{143}$$

Доказательство этой леммы почти дословно повторяет доказательство аналогичной леммы из главы 3. Отличий всего несколько: функции Грина теперь двумерные; при интегрировании по частям используется 1-ая формула Грина; гладкость функций на каждой итерации следует из [109] вместо [107]. □

4.4 Построение верхнего и нижнего решений

Согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств [27, 75] верхнее и нижнее решения задачи (3) являются модификациями асимптотического приближения решения этой задачи. Далее мы будем обозначать нижним индексом «n» верхнее и нижнее решения, построенные с использованием асимптотического приближения n-го порядка, под которым мы будем понимать функции (121)–(125), в которых параметры $p(\mathbf{y})$ и $q(\mathbf{y})$ (см. (126)) заменены на $p_n := \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i p_i(\mathbf{y})$, $q_n := \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i q_i(\mathbf{y})$.

Верхнее и нижнее решение задачи (3), как и асимптотическое приближение (121), будем строить отдельно в областях $\overline{D}^{(-)}$ и $\overline{D}^{(+)}$:

$$\overline{U}_n(\mathbf{x},\varepsilon) = \begin{cases} \overline{U}_n^{(-)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in \overline{D}^{(-)}, \\ \overline{U}_n^{(+)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}, \end{cases} \quad \overline{V}_n(\mathbf{x},\varepsilon) = \begin{cases} \overline{V}_n^{(-)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in \overline{D}^{(-)}, \\ \overline{V}_n^{(+)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}. \end{cases} \tag{144}$$

$$\underline{U_n}(\mathbf{x},\varepsilon) = \begin{cases} \underline{U_n}^{(-)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in \overline{D}^{(-)}, \\ \underline{U_n}^{(+)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}, \end{cases} \quad \underline{V_n}(\mathbf{x},\varepsilon) = \begin{cases} \underline{V_n}^{(-)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in \overline{D}^{(-)}, \\ \underline{V_n}^{(+)}(\mathbf{x},\varepsilon), & \mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}, \end{cases} \tag{145}$$

где

$$\overline{U}_n^{(-)} = U_n^{(-)}(\mathbf{x},\varepsilon) + \varepsilon^n \left(\alpha^{(-)}(\mathbf{x}) + q^{(-)}u(\tau,\mathbf{y}) + m^{(-)}u(\sigma,\mathbf{y})\right) + \varepsilon^{n+2} C_u \mathrm{e}^{-k_u \sigma_\Gamma},$$
$$\mathbf{x} \in \overline{D}^{(-)}, \quad \mathbf{y} \in \gamma, \quad \tau \le 0, \quad \sigma \le 0, \quad \sigma_\Gamma \ge 0,$$
$$\overline{U}_n^{(+)} = U_n^{(+)}(\mathbf{x},\varepsilon) + \varepsilon^n \left(\alpha^{(+)}(\mathbf{x}) + q^{(+)}u(\tau,\mathbf{y}) + m^{(+)}u(\sigma,\mathbf{y})\right) + \varepsilon^{n+2} \overline{\Omega}_u(\mathbf{y}),$$
$$\mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}, \quad \mathbf{y} \in \gamma, \quad \tau \ge 0, \quad \sigma \ge 0;$$
$$\underline{U_n}^{(-)} = U_n^{(-)}(\mathbf{x},\varepsilon) - \varepsilon^n \left(\alpha^{(-)}(\mathbf{x}) + q^{(-)}u(\tau,\mathbf{y}) + m^{(-)}u(\sigma,\mathbf{y})\right) - \varepsilon^{n+2} C_u \mathrm{e}^{-k_u \sigma_\Gamma},$$
$$\mathbf{x} \in \overline{D}^{(-)}, \quad \mathbf{y} \in \gamma, \quad \tau \le 0, \quad \sigma \le 0, \quad \sigma_\Gamma \ge 0,$$

$$\underline{U_n}^{(+)} = U_n^{(+)}(\mathbf{x},\varepsilon) - \varepsilon^n \left(\alpha^{(+)}(\mathbf{x}) + q^{(+)}u(\tau,\mathbf{y}) + m^{(+)}u(\sigma,\mathbf{y})\right) + \varepsilon^{n+2}\underline{\Omega_u}(\mathbf{y}),$$
$$\mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}, \;\; \mathbf{y} \in \gamma, \;\; \tau \geq 0, \;\; \sigma \geq 0; \tag{146}$$

$$\overline{V}_n^{(-)} = V_n^{(-)}(\mathbf{x},\varepsilon) + \varepsilon^n \left(\beta^{(-)}(\mathbf{x}) + q^{(-)}v(\tau,\mathbf{y})\right) + \varepsilon^{n+2}m^{(+)}v(\sigma,\mathbf{y}) + \varepsilon^{n+1}C_v \mathrm{e}^{-k_v\tau_\Gamma},$$
$$\mathbf{x} \in \overline{D}^{(-)}, \;\; \mathbf{y} \in \gamma, \;\; \tau \leq 0, \;\; \sigma \leq 0, \;\; \tau_\Gamma \geq 0,$$
$$\overline{V}_n^{(+)} = V_n^{(+)}(\mathbf{x},\varepsilon) + \varepsilon^n \left(\beta^{(+)}(\mathbf{x}) + q^{(+)}v(\tau,\mathbf{y})\right) + \varepsilon^{n+2}m^{(+)}v(\sigma,\mathbf{y}) + \varepsilon^{n+1}\overline{\Omega}_v(\gamma),$$
$$\mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}, \;\; \mathbf{y} \in \gamma, \;\; \tau \geq 0, \;\; \sigma \geq 0;$$
$$\underline{V_n}^{(-)} = V_n^{(-)}(\mathbf{x},\varepsilon) - \varepsilon^n \left(\beta^{(-)}(\mathbf{x}) + q^{(-)}v(\tau,\mathbf{y})\right) - \varepsilon^{n+2}m^{(-)}v(\sigma,\mathbf{y}) - \varepsilon^{n+1}C_v \mathrm{e}^{-k_v\tau_\Gamma},$$
$$\mathbf{x} \in \overline{D}^{(-)}, \;\; \mathbf{y} \in \gamma, \;\; \tau \leq 0, \;\; \sigma \leq 0, \;\; \tau_\Gamma \geq 0,$$
$$\underline{V_n}^{(+)} = V_n^{(+)}(\mathbf{x}) - \varepsilon^n \left(\beta^{(+)}(\mathbf{x}) + q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y})\right) - \varepsilon^{n+2}m^{(+)}v(\sigma,\mathbf{y}) + \varepsilon^{n+1}\underline{\Omega_v}(\gamma),$$
$$\mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}, \;\; \mathbf{y} \in \gamma, \;\; \tau \geq 0, \;\; \sigma \geq 0. \tag{147}$$

Функции $\alpha^{(\mp)}(\mathbf{x})$ и $\beta^{(\mp)}(\mathbf{x})$ обеспечивают выполнение условия (A_2) вдали от переходного слоя. Они определяются как решения систем уравнений

$$\begin{aligned} \bar{f}_u^{(\mp)}(\mathbf{x}) \cdot \alpha^{(\mp)}(\mathbf{x}) - |\bar{f}_v^{(\mp)}(\mathbf{x})| \cdot \beta^{(\mp)}(\mathbf{x}) = A, \\ -|\bar{g}_u^{(\mp)}(\mathbf{x})| \cdot \alpha^{(\mp)}(\mathbf{x}) + \bar{g}_v^{(\mp)}(\mathbf{x}) \cdot \beta^{(\mp)}(\mathbf{x}) = B \end{aligned} \tag{148}$$

при $\mathbf{x} \in \overline{D}^{(-)}$ для функций с верхним индексом «$(-)$» и при $\mathbf{x} \in \overline{D}^{(+)}$ для функций с верхним индексом «$(+)$» с положительными константами A и B. Здесь использованы обозначения типа (129). В силу Условий 4.1–4.3 и 4.5 (последнее для квазимонотонностей NP и PN типов), эти системы однозначно разрешимы и их решения строго положительны:

$$\text{(NN, PP)} \qquad \alpha^{(\mp)}(\mathbf{x}) = \frac{\bar{g}_v^{(\mp)}(\mathbf{x})A + |\bar{f}_v^{(\mp)}(\mathbf{x})|B}{\bar{f}_u^{(\mp)}(\mathbf{x}) \cdot \bar{h}_v^{(\mp)}(\mathbf{x})}, \qquad \beta^{(\mp)}(\mathbf{x}) = \frac{|\bar{g}_u^{(\mp)}(\mathbf{x})|A + \bar{f}_u^{(\mp)}(\mathbf{x})B}{\bar{f}_u^{(\mp)}(\mathbf{x}) \cdot \bar{h}_v^{(\mp)}(\mathbf{x})},$$
$$\text{(NP, PN)} \qquad \alpha^{(\mp)}(\mathbf{x}) = \frac{\bar{g}_v^{(\mp)}(\mathbf{x})A + |\bar{f}_v^{(\mp)}(\mathbf{x})|B}{\bar{f}_u^{(\mp)}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\nu}^{(\mp)}(\mathbf{x})}, \qquad \beta^{(\mp)}(\mathbf{x}) = \frac{|\bar{g}_u^{(\mp)}(\mathbf{x})|A + \bar{f}_u^{(\mp)}(\mathbf{x})B}{\bar{f}_u^{(\mp)}(\mathbf{x}) \cdot \bar{\nu}^{(\mp)}(\mathbf{x})}.$$

Здесь использованы обозначения (120) и $\bar{h}^{(\mp)}(\mathbf{x}) := h^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(\mathbf{x}),\mathbf{x})$.

Функции $q^{(-)}u(\tau,\mathbf{y})$, $q^{(-)}v(\tau,\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \gamma$, определенные при $\tau \leq 0$ и $q^{(+)}u(\tau,\mathbf{y})$, $q^{(+)}v(\tau,\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \gamma$, определенные при $\tau \geq 0$, устраняют невязки в неравенствах из условия (A_2), которые вносят функции $\alpha^{(\mp)}(\mathbf{x})$, $\beta^{(\mp)}(\mathbf{x})$ в области переходного слоя. Принимая во внимание более жесткие, чем (A_2) условия (142), зададим их как решение системы уравнений, одно из которых алгебраическое, а другое дифференциальное с дополнительными условиями убывания на бесконечности и условием при $\tau = 0$, обеспечивающим непрерывность функций $\overline{V}_n$ и $\underline{V_n}$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})\cdot q^{(\mp)}u(\tau,\mathbf{y}) - |\tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})|\cdot q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y}) + \left(q^{(\mp)}f(\tau,\mathbf{y}) - d^u e^{-\varkappa^u|\tau|}\right) = 0, \ \ \mathbf{y}\in\gamma,\\
&\frac{\partial^2 q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y})}{\partial\tau^2} = -|\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})|\cdot q^{(\mp)}u(\tau,\mathbf{y}) + \tilde{g}_v^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})\cdot q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y}) + q^{(\mp)}g(\tau,\mathbf{y}), \ \ \tau\in\mathbb{R}^{\mp}, \ \ \mathbf{y}\in\gamma,\\
&q^{(\mp)}v(0,\mathbf{y}) = \delta^v - \beta^{(\mp)}(\mathbf{y}), \ \ q^{(\mp)}v(\mp\infty,\mathbf{y}) = 0, \ \ \mathbf{y}\in\gamma.
\end{aligned} \tag{149}$$

Здесь $q^{(\mp)}f(\tau,\mathbf{y})$, $q^{(\mp)}g(\tau,\mathbf{y})$ — известные функции, включающие слагаемые, возникающие в результате разложения Тейлора функций и коэффициентов операторов из выражений $L_{u,\varepsilon}$, $L_{v,\varepsilon}$ (см. (142)) и экспоненциально убывающие по построению (см. [27]), а d^u, $\varkappa^u$, δ^v – положительные константы, которые уточним ниже.

Выражая $q^{(\mp)}u(\tau,\mathbf{y})$, получим следующие задачи для определения функций $q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y})$ в зависимости от типа квазимонотонности:

$$\text{(NN, PP)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y})}{\partial\tau^2} = h_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}),0,\mathbf{y})\cdot q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y}) + \tilde{G}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}), \ \ \tau\in\mathbb{R}^{\mp}, \ \ \mathbf{y}\in\gamma,\\ q^{(\mp)}v(0,\mathbf{y}) = \delta^v - \beta^{(\mp)}(\mathbf{y}), \ \ q^{(\mp)}v(\mp\infty,\mathbf{y}) = 0, \ \ \mathbf{y}\in\gamma; \end{cases} \tag{150}$$

$$\text{(NP, PN)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y})}{\partial\tau^2} = \nu^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}),0,\mathbf{y})\cdot q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y}) + \tilde{G}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}), \ \ \tau\in\mathbb{R}^{\mp}, \ \ \mathbf{y}\in\gamma,\\ q^{(\mp)}v(0,\mathbf{y}) = \delta^v - \beta^{(\mp)}(\mathbf{y}), \ \ q^{(\mp)}v(\mp\infty,\mathbf{y}) = 0, \ \ \mathbf{y}\in\gamma. \end{cases} \tag{151}$$

Здесь

$$\tilde{G}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}) := q^{(\mp)}g(\tau,\mathbf{y}) + \frac{|\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})|}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y})}\left(q^{(\mp)}f(\tau,\mathbf{y}) - d^u e^{-\varkappa^u|\tau|}\right). \tag{152}$$

Заметим, что решениями однородных уравнений (150) являются функции $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}),\mathbf{y})$. Это нетрудно получить, продифференцировав по τ соответствующее уравнение (36). Эти функции строго положительны (см. выражения (116)) и с их помощью можно получить решения задач (150) в явном виде:

$$\begin{aligned}
q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y}) = \left(\delta^v - \beta^{(\mp)}(\mathbf{y})\right)\frac{\Phi^{(\mp)}\left(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)}{\Phi^{(\mp)}(q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y})} + \\
+ \Phi^{(\mp)}\left(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau,\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)\int\limits_0^{\tau}\frac{d\tau_1}{\left(\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1,\mathbf{y}),\mathbf{y})\right)^2}\int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1}\Phi^{(\mp)}\left(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2,\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)\tilde{G}^{(\mp)}(\tau_2,\mathbf{y})\,d\tau_2.
\end{aligned} \tag{153}$$

Если выбрать константу δ^v положительной и достаточно большой, то первое слагаемое этого выражение будет положительным. В свою очередь, если выбрать величину d^u в выражении (152) достаточно большой, а $\varkappa^u$ – достаточно малой, то можно добиться того, что функции $\tilde{G}^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y})$ окажутся отрицательными в своих областях определения. При таком выборе констант функции $q^{(\mp)}v(\tau, \mathbf{y})$ будут строго положительными.

Положительность функций $q^{(\mp)}v(\tau, \mathbf{y})$ играет существенную роль в выполнении условия (A$_1$) упорядоченности верхнего и нижнего решений.

В случае NP и PN типов квазимонотонности для того, чтобы решения задач (151) были строго положительными, помимо надлежащего выбора констант δ^v, d^u, и $\varkappa^u$, следует потребовать выполнения Условия 4.5, которое обеспечит положительность решений соответствующих однородных уравнений, а именно справедливость следующего утверждения, доказанного в одномерном случае, но имеющего точно такое же доказательство и в двумерном случае.

Утверждение 4.1. *Пусть функции $\nu^{(\mp)}(v, \mathbf{x})$ удовлетворяют Условию 4.5. Тогда решения $W^{(\mp)}(\tau, \boldsymbol{y})$ задач*

$$W^{(\mp)}_{\tau\tau} - \nu^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y}), 0, \mathbf{y}) \cdot W^{(\mp)} = 0, \;\; \tau \in \mathbb{R}^{\mp}, \;\; W^{(\mp)}(0, \mathbf{y}) = 1, \;\; W^{(\mp)}(\mp\infty, \mathbf{y}) = 0, \;\; \mathbf{y} \in \gamma,$$

строго положительны и для них справедливы оценки

$$W^{(-)}(\tau, \mathbf{y}) < C\mathrm{e}^{-\varkappa|\tau|}, \; \tau \in (-\infty, 0]; \quad W^{(+)}(\tau, \mathbf{y}) < C\mathrm{e}^{-\varkappa|\tau|}, \; \tau \in [0, +\infty),$$

где C и $\varkappa$ – некоторые положительные константы и, кроме того, выполняются неравенства

$$\frac{\partial W^{(-)}}{\partial \tau}(0, \mathbf{y}) > 0, \quad \frac{\partial W^{(+)}}{\partial \tau}(0, \mathbf{y}) < 0. \tag{154}$$

Решения задач (151) можно выписать в виде (153), с заменой функций $\Phi^{(\mp)}\big(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y}), \mathbf{y}\big)$ на $W^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y})$:

$$q^{(\mp)}v(\tau, \mathbf{y}) = \big(\delta^v - \beta^{(\mp)}(\mathbf{y})\big)\, W^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y}) + \\ + W^{(\mp)}(\tau, \mathbf{y}) \int\limits_0^\tau \frac{d\tau_1}{\big(W^{(\mp)}(\tau_1)\big)^2} \int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1} W^{(\mp)}(\tau_2, \mathbf{y}) \tilde{G}^{(\mp)}(\tau_2, \mathbf{y})\, d\tau_2. \tag{155}$$

Как и решения задач (150), эти функции положительны.

Функции $q^{(\mp)}u(\tau, \mathbf{y})$, выражения для которых можно получить из первого уравнения (149), также положительны для каждого типа квазимонотонности в силу Условия 4.1 и положительности

$q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y})$; $q^{(\mp)}v(\tau,\mathbf{y})$ и $q^{(\mp)}u(\tau,\mathbf{y})$ экспоненциально убывают до нуля на бесконечности.

Функции $m^{(\mp)}u(\sigma,\mathbf{y})$ зададим как решения задач

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 m^{(\mp)}u}{\partial\sigma^2} = \hat{f}_u^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y})\cdot m^{(\mp)}u(\sigma,\mathbf{y}) + \hat{F}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}), \quad \sigma\in\mathbb{R}^{\mp}, \quad \mathbf{y}\in\gamma, \\ &m^{(\mp)}u(0,\mathbf{y}) = \delta^u - \alpha^{(\mp)}(\mathbf{y}) - q^{(\mp)}u(0,\mathbf{y}), \quad m^{(\mp)}u(\mp\infty,\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y}\in\gamma, \end{aligned} \tag{156}$$

где δ^u — положительные величины, $\hat{f}_u^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y})$ понимается в смысле обозначения (137),

$$\hat{F}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}) := m^{(\mp)}f(\sigma,\mathbf{y}) - D^u e^{-K^u|\sigma|},$$

$m^{(\mp)}f(\sigma,\mathbf{y})$ — известные функции, включающие слагаемые возникающие в результате разложения Тейлора функций из выражений $L_{u,\varepsilon}$ (см. (142)) и экспоненциально убывающие по построению (см. [27]). Положительная константа D^u выбирается достаточно большой, а положительная константы K^u достаточно малой, чтобы функции $\hat{F}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y})$ принимали строго отрицательные значения соответственно на полупрямых $\sigma\le 0$ и $\sigma\ge 0$.

Решения задач (156) могут быть выписаны явно, если принять во внимание, что функции $\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}),q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y})$ являются решениями соответствующих однородных уравнений (последнее можно получить, дифференцируя по σ уравнения (37)):

$$\begin{aligned} &m^{(\mp)}u(\sigma,\mathbf{y}) = \\ &\quad = \left(\delta^u - \alpha^{(\mp)}(\mathbf{y}) - q^{(\mp)}u(0,\mathbf{y})\right)\frac{\Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}),q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)}{\Psi^{(\mp)}(p_0(\mathbf{y}),q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y})} + \Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}),q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)\times \\ &\qquad \times\int\limits_0^{\sigma}\frac{d\sigma_1}{\left(\Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_1,\mathbf{y}),q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)\right)^2}\int\limits_{\mp\infty}^{\sigma_1}\Psi^{(\mp)}\left(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_2,\mathbf{y}),q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y}\right)\hat{F}^{(\mp)}(\sigma_2,\mathbf{y})\,d\sigma_2. \end{aligned} \tag{157}$$

Функции $\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}),q_0(\mathbf{y}),\mathbf{y})$ строго положительные (см. выражения (117)). Выбрав теперь положительные величины δ^u достаточно большими, добьёмся того, что первые слагаемые в выражениях для $m^{(\mp)}u(\sigma,\mathbf{y})$ будет положительными, вторые слагаемые также положительны при отрицательных значениях $\hat{F}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y})$. Функции $m^{(\mp)}u(\sigma,\mathbf{y})$ экспоненциально убывают до нуля на бесконечности.

Функции $m^{(\mp)}v(\sigma,\mathbf{y})$ определяются как убывающие до нуля соответственно при $\sigma\to\mp\infty$ вместе с первыми производными решения уравнений

$$\frac{\partial^2 m^{(\mp)}v}{\partial\sigma^2} = \hat{g}_u^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y})\cdot m^{(\mp)}u(\sigma,\mathbf{y}) + \hat{G}^{(\mp)}(\sigma,\mathbf{y}), \quad \sigma\in\mathbb{R}^{\mp},$$

где $\hat{G}^{(\mp)}(\sigma, \mathbf{y})$ – известные экспоненциально убывающие функции.

Слагаемые в (146), (147), экспоненциально зависящие от переменных τ_Γ и σ_Γ, обеспечивают выполнение условия (A_3), если выбрать константы C_u, C_v, k_u и k_v достаточно большими положительными. Эти слагаемые находятся почти идентично тому, как это было сделано во второй главе, что обеспечено Условиями 4.1–4.3 и 4.5 (последнее для NP и PN типов КМ), а также гладкостью Г. Как и в случае функций переходного слоя и поправок к асимптотическому приближению в области внутреннего переходного слоя, во всех уравнениях, задачах и искомых функциях, описывающих поведение решения вблизи границы, появляется параметр $\mathbf{y}_\Gamma$, задающий положение на Г, однако их вид сохраняется практически неизменным (опять же, это видно по функциям переходного слоя) благодаря методу Вишика-Люстерника (см. (130)).

Добавки $\varepsilon^{n+2}\overline{\Omega}_u(\mathbf{y})$, $\varepsilon^{n+2}\underline{\Omega_u}(\mathbf{y})$ включены, чтобы добиться непрерывности функций $\overline{U}_n(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $\underline{U_n}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ на кривой γ. Они устраняют малые невязки в условии непрерывного сшивания, вносимые погранслойными функциями. Добавки $\varepsilon^{n+1}\overline{\Omega}_v(\mathbf{y})$, $\varepsilon^{n+1}\underline{\Omega_v}(\mathbf{y})$ устраняют скачки порядка не ниже $O(\varepsilon^{n+1})$ функций $\overline{V}_n(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $\underline{V_n}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ на кривой γ.

Докажем теперь, что функции, определенные выражениями (144)-(147), удовлетворяют неравенствам (A_1)-(A_4) и тем самым действительно являются верхним и нижним решениями задачи (3).

Лемма 4.2. *Пары функций* $(\overline{U}_n(\mathbf{x}, \varepsilon), \overline{V}_n(\mathbf{x}, \varepsilon))$ *и* $(\underline{U_n}(\mathbf{x}, \varepsilon), \underline{V_n}(\mathbf{x}, \varepsilon))$, *определенные выражениями* (144)-(147)*, при достаточно малых значениях* ε *являются соответственно верхним и нижним решениями задачи* (3)*.*

Для доказательства Леммы 4.2 нужно проверить выполнение неравенств (A_1) – (A_4). Выполнение (A_3) доказывается аналогично тому, как это сделано в главе 2. В остальном доказательство почти дословно повторяет доказательство Леммы 3.3 из предыдущей главы. □

Применяя к задаче (3) Лемму 4.1, в которой в качестве верхних и нижних решений выступают функции $(\underline{U_n}, \underline{V_n})$ и $(\overline{U}_n, \overline{V}_n)$, определенные выражениями (144)–(147), получим, что у задачи (3) существует решение $(u_\varepsilon(\mathbf{x}), v_\varepsilon(\mathbf{x}))$, для которого справедливы неравенства (143), из которых при $\mathbf{x} \in \overline{D}$ следуют неравенства

$$\underline{U_n}(\mathbf{x}, \varepsilon) - U_{n-1}(\mathbf{x}, \varepsilon) \le u_\varepsilon(\mathbf{x}) - U_{n-1}(\mathbf{x}, \varepsilon) \le \overline{U}_n(\mathbf{x}, \varepsilon) - U_{n-1}(\mathbf{x}, \varepsilon),$$
$$\underline{V_n}(\mathbf{x}, \varepsilon) - V_{n-1}(\mathbf{x}, \varepsilon) \le v_\varepsilon(\mathbf{x}) - V_{n-1}(\mathbf{x}, \varepsilon) \le \overline{V}_n(\mathbf{x}, \varepsilon) - V_{n-1}(\mathbf{x}, \varepsilon);$$

с учетом того, что выражения в левых и правых частях каждого двойного неравенства имеют порядок $O(\varepsilon^n)$ и такой же порядок имеет разность $\overline{U}_n(\mathbf{x}, \varepsilon) - \underline{U_n}(\mathbf{x}, \varepsilon)$, после замены индекса n на $n + 1$ получается искомая оценка.

Теорема 4.1 доказана. ■

4.5 Локальная единственность и асимптотическая устойчивость стационарного решения

Теорема 4.2. *Пусть выполняются Условия 4.1–4.4 и 4.5 (последнее для квазимонотонностей NP и PN типов). Тогда для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *решение* $(u_\varepsilon(\mathbf{x}), v_\varepsilon(\mathbf{x}))$ *задачи* (3) *локально единственно на множестве* $[\,\underline{U_1}(\mathbf{x},\varepsilon), \overline{U}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\,] \times [\,\underline{V_1}(\mathbf{x},\varepsilon), \overline{V}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\,]$ *и, как решение задачи* (1)*, асимптотически устойчиво с областью притяжения не меньше* $[\,\underline{U_1}(\mathbf{x},\varepsilon), \overline{U}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\,] \times [\,\underline{V_1}(\mathbf{x},\varepsilon), \overline{V}_1(\mathbf{x},\varepsilon)\,]$.

Доказательство этой теоремы проводится почти полностью идентично аналогичной теореме из главы 3. функции Грина теперь двумерные, но все рассуждения и выводы, касающиеся потенциалов и метода монотонных итераций сохраняются без изменений в 2D. В качестве леммы о положительности используется двумерная PPL из главы 1. ■

4.6 Пример

В качестве примера рассмотрим задачу в единичном открытом диске D с центром в $(0,0)$, ограниченном окружностью Γ:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^4\Delta u - u_t = u(u-a(\mathbf{x}))(u-1) + uv, \;\; \varepsilon^2\Delta v - v_t = v - b(\mathbf{x})u, \;\; \mathbf{x}\in D, \; t\in\mathbb{R}^+;\\
&\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(\mathbf{x}_\Gamma, t) = \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma}(\mathbf{x}_\Gamma, t) = 0, \;\; \mathbf{x}_\Gamma\in\Gamma, \; t\in\mathbb{R}^+;\\
&u(\mathbf{x},0) = u^0(\mathbf{x}), \;\; v(\mathbf{x}) = v^0(\mathbf{x}), \; \mathbf{x}\in\overline{D}.
\end{aligned} \tag{158}$$

При положительных $a(\mathbf{x})$ и $b(\mathbf{x})$ правые части этих уравнений отвечают PN типу квазимонотонности — в таком случае задача (158) представляет собой модель развития Мегаполисов из работ [5,6].

Пусть γ — эллипс, заданный уравнением $4x_1^2+9x_2^2=1$, тогда $D^{(+)} = \{(x_1,x_2) : 4x_1^2+9x_2^2<1\}$ и $D^{(-)} = D\backslash\overline{D}^{(+)}$; положим

$$a(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \mathbf{x}\in D^{(-)}, \\ 0.2, & \mathbf{x}\in\overline{D}^{(+)}; \end{cases} \qquad b(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0.5, & \mathbf{x}\in D^{(-)}, \\ 0.2, & \mathbf{x}\in\overline{D}^{(+)}. \end{cases}$$

На компакте $\overline{D}^{(-)}$ имеем $f^{(-)}(u,v) = u(u-1)^2 + uv$. Полагая $v \geq 0$, получим, что уравнение

$f^{(-)} = 0$ имеет единственный корень $\varphi^{(-)} \equiv 0$, следовательно,

$$h^{(-)}(v) = v, \quad \psi^{(-)} \equiv 0, \quad \Phi^{(-)}(\tilde{v}^{(-)}) := \sqrt{2\int\limits_{0}^{\tilde{v}^{(-)}} v dv} = \tilde{v}^{(-)}, \quad \nu^{(-)}(v) \equiv 1,$$

$$\Psi^{(-)}(\hat{u}^{(-)}, q) = \sqrt{2\int\limits_{0}^{\hat{u}^{(-)}} (u(u-1)^2 + uq)du} = \hat{u}^{(-)}\sqrt{\frac{1}{2}\,(\hat{u}^{(-)})^2 - \frac{4}{3}\,(\hat{u}^{(-)}) + (1+q)\,(\hat{u}^{(-)})}. \quad (159)$$

На компакте $\overline{D}^{(+)}$, имеем $f^{(+)}(u,v) := u(u-0.2)(u-1)^2 + uv$, а значит уравнение $f^{(+)} = 0$ имеет три корня: $\varphi^{(1)} \equiv 0$, $\varphi^{(2)}(v) = 0.6 - \sqrt{0.16 - v}$, $\varphi^{(+)}(v) = 0.6 + \sqrt{0.16 - v}$. Из них только $\varphi^{(+)}(v)$ удовлетворяет Условию 4.1, поэтому

$$h^{(+)}(v) = v - 0.2(0.6 + \sqrt{0.16 - v}), \quad \psi^{(+)} \cong 0.145,$$

$$\Phi^{(+)}(\tilde{v}^{(+)}) = \sqrt{2\int\limits_{\psi^{(+)}}^{\tilde{v}^{(+)}} (v - 0.2(0.6 + \sqrt{0.16 - v}))dv} = \sqrt{\left(v^2 - 0.24v + \frac{0.8}{3}(0.16 - v)^{3/2}\right)\Bigg|_{\psi^{(+)}}^{\tilde{v}^{(+)}}},$$

$$\nu^{(+)}(v) = 1 - \frac{0.1}{\sqrt{0.16 - v}}; \quad \nu^{(+)}(v) > 0, \text{ при } 0 \leq v < 0.15;$$

$$\Psi^{(+)}(\hat{u}^{(+)}, q) = \sqrt{2\int\limits_{\varphi^{(+)}(q)}^{\hat{u}^{(+)}} (u(u-0.2)(u-1)^2 + uq)du} =$$

$$= \sqrt{(0.5u^4 - 0.8u^3 + (0.2+q)u^2)|_{\varphi^{(+)}(q)}^{\hat{u}^{(+)}}} =$$

$$= |\hat{u}^{(+)} - \varphi^{(+)}(q)|\sqrt{0.25(\hat{u}^{(+)})^2 + (0.5\sqrt{0.16 - q} - 0.1)\hat{u}^{(+)} + 0.01 - 0.25q}. \quad (160)$$

Функции $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)})$ существуют для каждого $q \in [\psi^{(-)}, \psi^{(+)}]$, а $\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}, q)$ существуют при $q \in [0, 0.12]$. Уравнение $H_0^v(q) = 0$ имеет единственное решение $q_0 \cong 0.08$; уравнение $H_0^u(p, q_0) = 0$, в свою очередь, имеет единственное решение $p_0 \cong 0.181$; кроме того, для выражений из Замечания 4.2 получаем

$$h^{(-)}(q_0) - h^{(+)}(q_0) = 0.2 + \sqrt{0.16 - q_0} > 0,$$

$$f^{(-)}(p_0, v_0) - f^{(+)}(p_0, v_0) = -0.8p_0(p_0 - 1) > 0.$$

Из сказанного выше делается вывод о выполнении Условий 4.1–4.5 для задачи (158).

Асимптотическое приближение нулевого порядка решения стационарной задачи, соответствующей (158), имеет вид:

$$U_0(\mathbf{x},\varepsilon)=\begin{cases}\hat{u}^{(-)}(\sigma), & \sigma<0, \qquad 4x_1^2+9x_2^2\geq 1;\\ \varphi^{(+)}(\tilde{v}^{(+)}(\tau))+\hat{u}^{(+)}(\sigma), & \sigma\geq 0,\ \tau\geq 0,\ 4x_1^2+9x_2^2\leq 1;\end{cases}$$

$$V_0(\mathbf{x},\varepsilon)=\begin{cases}\tilde{v}^{(-)}(\tau), & \tau<0,\ 4x_1^2+9x_2^2>1;\\ \tilde{v}^{(+)}(\tau), & \tau\geq 0,\ 4x_1^2+9x_2^2\leq 1.\end{cases}$$

Здесь $\tilde{v}^{(-)}(\tau)=q_0\mathrm{e}^{\tau}$, функция $\tilde{v}^{(+)}(\tau)$ — это решение задачи

$$\frac{d\tilde{v}^{(+)}}{d\tau}=\sqrt{\left(v^2-0.24v+\frac{0.8}{3}(0.16-v)^{3/2}\right)\Big|_{\psi^{(+)}}^{\tilde{v}^{(+)}}},\ \tau>0,\ \ \tilde{v}^{(+)}(0)=q_0, \tag{161}$$

$\varphi^{(+)}(\tilde{v}^{(+)})=0.6+\sqrt{0.16-\tilde{v}^{(+)}(\tau)}$. Функции $\hat{u}^{(\mp)}(\sigma)$ — это решения задач

$$\frac{d\hat{u}^{(\mp)}}{d\sigma}=\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)},q_0),\ \ \sigma\in\mathbb{R}^{\mp},\ \ \hat{u}^{(\mp)}(0)=p_0, \tag{162}$$

где $\Psi^{(\mp)}(\sigma)$ даны в (159), (160). Решения задач (161), (162) можно получить численно.

На рисунке 2-(a),(b) покомпонентно изображено асимптотическое приближение нулевого порядка.

Далее можно численно решить задачу (158), выбрав в качестве начальных функций $u^0(\mathbf{x})=U_0(\mathbf{x},\varepsilon)$, $v^0(\mathbf{x})=V_0(\mathbf{x},\varepsilon)$. Отметим, что они удовлетворяют условиям Теоремы 4.2. За достаточно большое время происходит стабилизация решения к стационарному решению задачи (158).

На рисунке 2-(c),(d) изображено стабилизированное численное решение задачи (158).

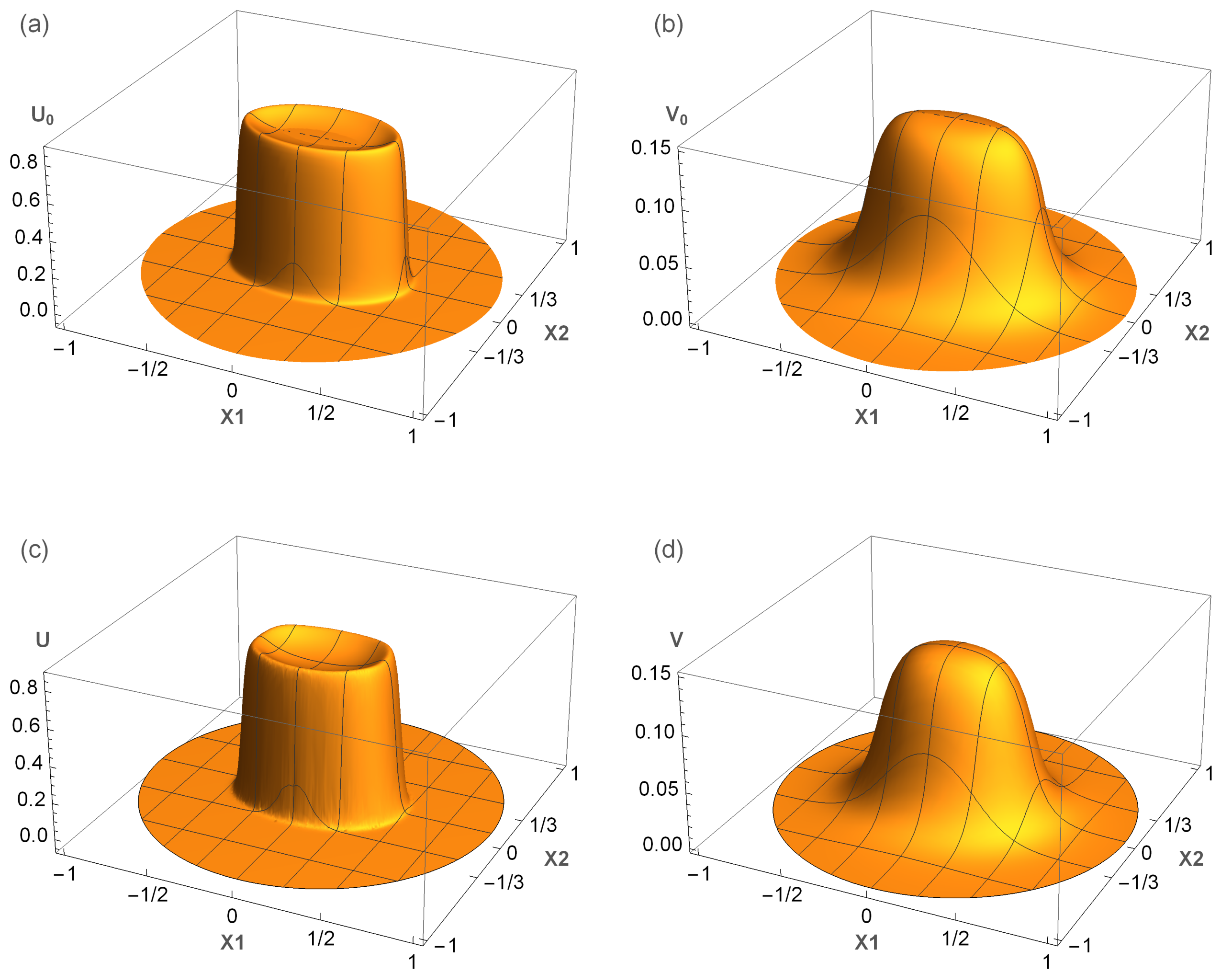


Рисунок 2: Асимптотическое приближение нулевого порядка решения (158)(начальные данные): (a) – U-компонента, (b) – V-компонента. Стабилизированное при большом времени численное решение: (c) – U-компонента, (d) – V-компонента.

На рисунке 3 представлены графики функций $\hat{u}^{(\mp)}$, зависящих от аргументов $r = \varepsilon^2\sigma = \varepsilon\tau$ и сумма $\hat{u}^{(+)} + \varphi^{(+)}(\tilde{v}^{(+)})$, зависящая от тех же аргументов; в области $r > 0$ отчётливо виден вклад зависящей от «медленной» переменной функции переходного слоя $\varphi^{(+)}(\tilde{v}^{(+)})$.

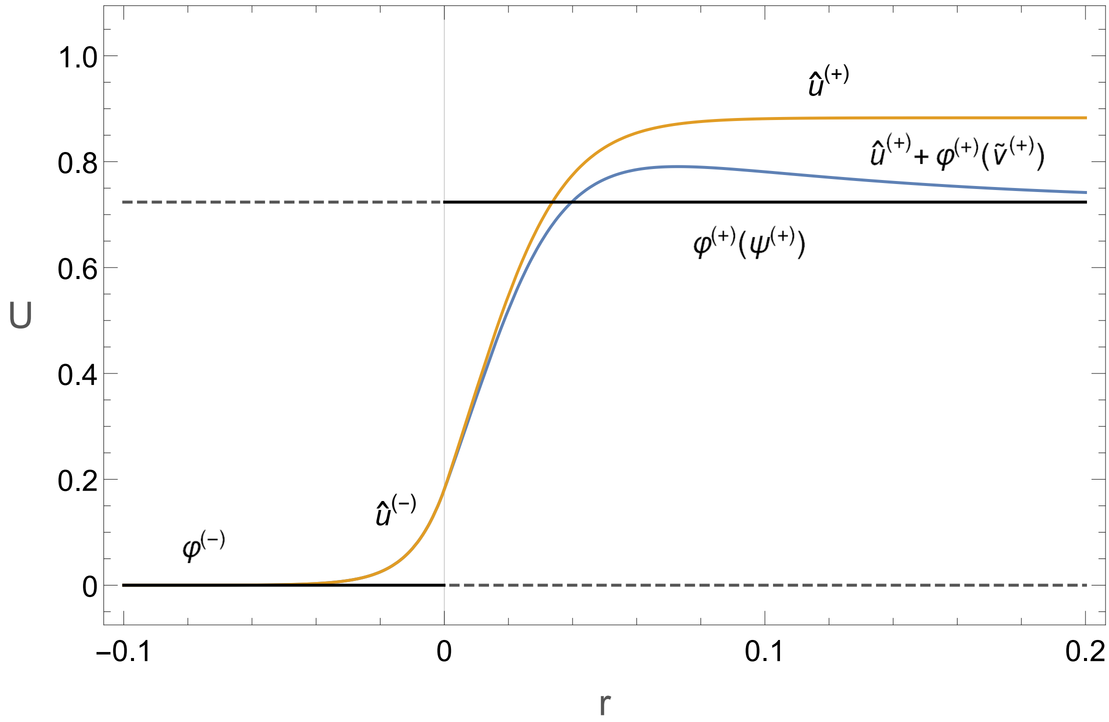


Рисунок 3: Графики функций $\hat{u}^{(\mp)}$ в зависимости от аргумента $r = \varepsilon^2\sigma = \varepsilon\tau$ (жёлтая кривая) и суммы $\hat{u}^{(+)} + \varphi^{(+)}(\tilde{v}^{(+)})$ (синяя кривая) от того же аргумента

Численные решения были получены при помощи пакета Wolfram Mathematica 12.1 с использованием нативного расширения FEM (метод конечных элементов); расчёты были проведены при помощи стандартной функции NDSolve с дополнительными параметрами

Method -> {“FiniteElement”, “MeshOptions” -> {MaxCellMeasure -> 0.00025}},

из которых *MaxCellMeasure -> 0.00025* отвечает за генерацию очень подробного и качественного разбиения расчётной области (в нашем случае единичного диска с центром в $(0, 0)$). Важно отметить, что WM 12.1 автоматически учитывает разрывы в $a(\mathbf{x})$ и $b(\mathbf{x})$ в процессе генерации разбиения (располагая вершины конечных элементов на эллиптической кривой разрыва) и в процессе расчётов.

5 Задача с разрывом по искомой переменной

5.1 Постановка задачи и накладываемые условия

Рассматривается одномерная задача (5)

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4 u_{xx} = f(u, v, x, \varepsilon), \text{ для п.в. } x \in (-1, 1), \quad \varepsilon^2 v_{xx} = g(u, v, x, \varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \\ &u'(\mp 1) = a^{(\mp)}, \ \ v'(\mp 1) = b^{(\mp)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть $0 \in Int(I_u)$. Обозначим $S_u^+ := I_u \cap \{u > 0\}, \ \ S_u^- := I_u \cap \{u < 0\}$.

Будем считать функцию $f(u, v, x, \varepsilon)$ в (5) таковой, что

$$f(u, v, x, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in S_u^-, v \in I_v, \, x \in (-1, 1)\,, \\ f^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in \overline{S_u^+}, v \in I_v, \, x \in (-1, 1)\,. \end{cases} \tag{163}$$

Гладкость функций $f^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon)$ и $g(u, v, x, \varepsilon)$ связана с порядком асимптотического приближения, которое требуется построить. Для построения приближения n-го порядка необходимо, чтобы $f^{(\mp)} \in C^{(n+3)}(\overline{S_u^{\mp}} \times I_v \times [-1, 1] \times [0, \varepsilon_0])$ [1] и $g \in C^{(n+3)}(I_u \times I_v \times [-1, 1] \times [0, \varepsilon_0])$.

В настоящей главе исследуется существование решений (5), имеющих единственное пересечение нуля u-компонентой. Основополагающей и наиболее близкой к диссертационному исследованию является работа [27] — именно на неё автор опирается (как и в гл. 3, но в большей степени) при построении асимптотического приближения, а также верхних и нижних решений.

Назовём точку x^*, в которой $u(x^*) = 0$, точкой перехода.

Определение 5.1. Пусть x^* — некоторая точка из интервала $(-1, 1)$. Назовём пару функций $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ таких, что

$$u_\varepsilon(x) \in C^1[-1, 1] \cap C^2((-1, 1)\backslash x^*), \quad v_\varepsilon(x) \in C^1[-1, 1] \cap C^2(-1, 1),$$

решением задачи (5), если $v_\varepsilon(x)$ поточечно удовлетворяет второму уравнению (5) и граничным условиям, а $u_\varepsilon(x)$ удовлетворяет граничным условиям и дифференциальному уравнению $\varepsilon^4 u''_\varepsilon(x) = f(u_\varepsilon, v_\varepsilon, x, \varepsilon)$ при всех $x \in (-1, 1)\backslash x^*$.

С целью обеспечить существование решения потребуем выполнения следующих условий.

Условие 5.1. Каждое из уравнений $f^{(\mp)}(u, v, x, 0) = 0$ среди всех решений относительно u

[1] Автор обращает внимание на расширение до $\overline{S_u^-}$ области определения функции $f^{(-)}$.

имеет единственный изолированный корень $u = \varphi^{(\mp)}(v, x)$ такой, что для всех $(v, x) \in I_v \times [-1, 1]$ выполняются неравенства

$$\varphi^{(-)}(v, x) < 0 < \varphi^{(+)}(v, x), \quad f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v, x), v, x, 0) > 0.$$

Обозначим $h^{(\mp)}(v, x) = g(\varphi^{(\mp)}(v, x), v, x, 0)$.

Условие 5.2. Каждое из уравнений $h^{(\mp)}(v, x) = 0$ среди всех решений относительно v имеет единственный изолированный корень $v = \psi^{(\mp)}(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ такой, что выполняются неравенства

$$\psi^{(-)}(x) < \psi^{(+)}(x), \quad h_v^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x) > 0.$$

Условие 5.3. Пусть при всех допустимых u и $(v, x, \varepsilon) \in I_v \times [-1, 1] \times [0, \varepsilon_0]$ правые части уравнений (5) NN-квазимонотонны:

$$f_v^{(\mp)}(u, v, x, \varepsilon) < 0, \quad g_u(u, v, x, \varepsilon) < 0. \quad \text{(NN)}$$

Условие 5.4. Пусть для каждого параметра $x^* \in (-1, 1)$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x^*)}^{v} h^{(-)}(s, x^*)ds > 0, \quad v \in (\psi^{(-)}(x^*), \psi^{(+)}(x^*)],$$

$$\int\limits_{\psi^{(+)}(x^*)}^{v} h^{(+)}(s, x^*)ds > 0, \quad v \in [\psi^{(-)}(x^*), \psi^{(+)}(x^*)),$$

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(v,x^*)}^{u} f^{(-)}(s, v, x^*, 0)ds > 0, \quad u \in (\varphi^{(-)}(v, x^*), 0], \quad v \in [\psi^{(-)}(x^*), \psi^{(+)}(x^*)],$$

$$\int\limits_{\varphi^{(+)}(v,x^*)}^{u} f^{(+)}(s, v, x^*, 0)ds > 0, \quad u \in [0, \varphi^{(+)}(v, x^*)), \quad v \in [\psi^{(-)}(x^*), \psi^{(+)}(x^*)].$$

При выполнении Условия 5.4 функции

$$\Phi^{(\mp)}(v) = \sqrt{2\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x^*)}^{v} h^{(\mp)}(s, x^*)ds}, \quad \Psi^{(\mp)}(u, v) = \sqrt{2\int\limits_{\varphi^{(\mp)}(v,x^*)}^{u} f^{(\mp)}(s, v, x^*, 0)ds} \tag{164}$$

определены и задают выражения для сепаратрис седловых точек.

Замечание 5.1. Несмотря на свою громоздкость, комбинация Условий 5.1, 5.2 и 5.4 является более слабым требованием, нежели аналогичные условия в контексте работ [27] и [66], в которых неявно подразумевалось непересечение функциями f ([27], [66]) и g ([27]) нуля вне корней хотя бы при достаточно малых ε, что само собой снимало вопрос о существовании сепаратрис.

Условие 5.5. Существует $(x_0, v_0) \in \{(x,v) : x \in (-1,1), v \in \big(\psi^{(-)}(x), \psi^{(+)}(x)\big)\}$ — единственное решение системы

$$\begin{aligned} J_0 v(v,x) &:= \int\limits_{\psi^{(-)}(x)}^{v} h^{(-)}(s,x)ds + \int\limits_{v}^{\psi^{(+)}(x)} h^{(+)}(s,x)ds = 0 \\ J_0 u(v,x) &:= \int\limits_{\varphi^{(-)}(v,x)}^{0} f^{(-)}(u,v,x,0)du + \int\limits_{0}^{\varphi^{(+)}(v,x)} f^{(+)}(u,v,x,0)du = 0. \end{aligned} \tag{165}$$

Условие 5.6. Якобиан системы (165) таков, что

$$D_0 := \left.\frac{D(J_0 v, J_0 u)}{D(v,x)}\right|_{\substack{v=v_0\\x=x_0}} < 0. \tag{166}$$

Далее нас будут интересовать решения $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ задачи (5), имеющие внутренний переходный слой, то есть резко изменяющееся в некоторой окрестности от значений $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ близких к $(\varphi^{(-)}(\psi^{(-)}(x), x), \psi^{(-)}(x))$ до значений близких к $(\varphi^{(+)}(\psi^{(+)}(x), x), \psi^{(+)}(x))$.

Условие 5.7. Для всех $(v,x) \in I_v \times [-1,1]$ справедливы неравенства

$$f^{(-)}(0,v,x,0) > 0 > f^{(+)}(0,v,x,0).$$

Одним из основных этапов доказательства существования решения является построение верхнего и нижнего решений задачи (5) как модификации асимптотического приближения её решения, поэтому далее вкратце остановимся на последнем.

5.2 Асимптотическое приближение решения

Построение асимптотического приближения решения стационарной задачи в настоящей главе почти дословно повторяет таковое из статьи [27], поэтому здесь укажем лишь основные моменты и имеющиеся минимальные отличия, вызванные спецификой функции $f(u,v,x,\varepsilon)$.

Обозначим $v^* := v_\varepsilon(x^*)$ и будем искать n-ые приближения x^* и v^* как

$$\begin{aligned} x^* &= x_n^*(\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \text{где } x_n^*(\varepsilon) := x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon^n x_n, \\ v^* &= v_n^*(\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \text{где } v_n^*(\varepsilon) := v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^n v_n. \end{aligned} \tag{167}$$

Асимптотическое приближение строится отдельно слева и справа от точки x_n^*:

$$U_n(x,\varepsilon)=\begin{cases}U_n^{(-)}(x,\varepsilon), & -1\le x<x_n^*\,,\\ U_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x_n^*\le x\le 1\,,\end{cases}\qquad V_n(x,\varepsilon)=\begin{cases}V_n^{(-)}(x,\varepsilon), & -1\le x<x_n^*\,,\\ V_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x_n^*\le x\le 1.\end{cases}\tag{168}$$

Каждая из функций $U_n^{(\mp)}$, $V_n^{(\mp)}$, как и ранее, представляется в виде суммы функций, описывающих решение вдали от переходного слоя и границ отрезка (регулярная часть), функций переходного слоя, зависящих от растянутых переменных различных масштабов $\tau=(x-x_n^*)/\varepsilon$ и $\sigma=(x-x_n^*)/\varepsilon^2$, и пограничных функций, которые также зависят от различных растянутых переменных $\zeta_\mp=(x\pm1)/\varepsilon$ и $\eta_\mp=(x\pm1)/\varepsilon^2$ в окрестностях точек $x=\mp1$.

$$U_n^{(\mp)}=\bar u_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)+Q_n^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon)+M_n^{(\mp)}u(\sigma,\varepsilon)+P_{n+1}^{(\mp)}u(\zeta_\mp,\varepsilon)+R_{n+2}^{(\mp)}u(\eta_\mp,\varepsilon),$$
$$V_n^{(\mp)}=\bar v_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)+Q_n^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon)+M_{n+2}^{(\mp)}v(\sigma,\varepsilon)+P_{n+1}^{(\mp)}v(\zeta_\mp,\varepsilon)+R_{n+2}^{(\mp)}v(\eta_\mp,\varepsilon).$$

Каждая из функций в этих суммах представляется в виде разложения по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned}
\bar u_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)&=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\bar u_i^{(\mp)}(x) & \bar v_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)&=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\bar v_i^{(\mp)}(x);\\
Q_n^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon)&=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^iQ_i^{(\mp)}u(\tau), & Q_n^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon)&=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^iQ_i^{(\mp)}v(\tau);\\
M_n^{(\mp)}u(\sigma,\varepsilon)&=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^iM_i^{(\mp)}u(\sigma), & M_{n+2}^{(\mp)}v(\sigma,\varepsilon)&=\sum_{i=0}^{n+2}\varepsilon^iM_i^{(\mp)}v(\sigma);\\
P_{n+1}^{(\mp)}u(\zeta_\mp,\varepsilon)&=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^iP_i^{(\mp)}u(\zeta_\mp), & P_{n+1}^{(\mp)}v(\zeta_\mp,\varepsilon)&=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^iP_i^{(\mp)}v(\zeta_\mp);\\
R_{n+2}^{(\mp)}u(\eta_\mp,\varepsilon)&=\sum_{i=0}^{n+2}\varepsilon^iR_i^{(\mp)}u(\eta_\mp), & R_{n+2}^{(\mp)}v(\eta_\mp,\varepsilon)&=\sum_{i=0}^{n+2}\varepsilon^iR_i^{(\mp)}v(\eta_\mp).
\end{aligned}$$

Функции $U_n^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U_n^{(+)}(x,\varepsilon)$, а также $V_n^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $V_n^{(+)}(x,\varepsilon)$ сшиваются непрерывно в точке x_n^*, согласно равенствам

$$U_n^{(-)}(x_n^*,\varepsilon)=U_n^{(+)}(x_n^*,\varepsilon)=0;\quad V_n^{(-)}(x_n^*,\varepsilon)=v_n^*+O(\varepsilon^{n+1})=V_n^{(+)}(x_n^*,\varepsilon),\tag{169}$$

где входящие, соответственно, в x_n^* и v_n^* величины x_0 и v_0 те же, что в Условии 5.4, а x_k и v_k, $k=\overline{1,n}$ определяются последовательно при построении функций переходного слоя таким образом, чтобы выполнялись следующие условия на производные функций $U_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, $V_n^{(\mp)}(x,\varepsilon)$:

$$\frac{\partial U_n^{(-)}}{\partial x}(x_n^*,\varepsilon) = \frac{\partial U_n^{(+)}}{\partial x}(x_n^*,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n-2}), \quad \frac{\partial V_n^{(-)}}{\partial x}(x_n^*,\varepsilon) = \frac{\partial V_n^{(+)}}{\partial x}(x_n^*,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n-1}). \tag{170}$$

В левой цепочке равенств (169) кроется первое отличие (не являющееся принципиальным для алгоритма) диссертационной работы от [27]: уровнем сшивки естественным образом выбран $u = 0$ (а не $u = \varphi^2(v_n^*, x_n^*)$ — неустойчивый корень из [27], подобного которому здесь может и не быть).

Подставим найденные $U_n^{(\mp)}$ и $V_n^{(\mp)}$, которые существуют в силу Условий 5.1, 5.2, 5.4, в условия гладкого сшивания (170) и дополнительно разложим полученные выражения с учётом (167) — явной зависимости x_n^* от ε, тогда в нулевом порядке, идентично [27], получаем разрешимую относительно (x_0, v_0) в силу Условия 5.4 систему

$$J_0 v(v_0, x_0) = 0, \quad J_0 u(v_0, x_0) = 0. \tag{171}$$

Коэффициенты v_k, x_k определяются из условий (170) в k-м порядке, $k = 1, 2, \ldots$, приводящих к системе

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial J_0 v}{\partial v}\right|_{\substack{x=x_0\\ v=v_0}} v_k + \left.\frac{\partial J_0 v}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ v=v_0}} x_k + S_k = 0,\\ &\left.\frac{\partial J_0 u}{\partial v}\right|_{\substack{x=x_0\\ v=v_0}} v_k + \left.\frac{\partial J_0 u}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ v=v_0}} x_k + T_k = 0, \end{aligned} \tag{172}$$

где S_k, T_k — известные на каждом шаге величины. Условием 5.6 обеспечивается разрешимость (172).

Необходимо отметить, из условий сшивания (170) первое равенство в (172) получается в точности, как и в [27], однако второе равенство приобретает настоящий вид несколько иным образом, нежели в [27], из-за того, что в диссертационной работе, вообще говоря, $f^{(\mp)}(0, v_0, x_0, 0) \neq 0$, поэтому в процессе преобразований выражений для $dM^{(\mp)}u/d\sigma(0)$ происходит частичное сокращения слагаемых, а не их обнуление (см. [27, с. 1992–1993]).

Погранслойные функции с точностью до обозначений находятся согласно второй главе.

5.3 Существование решения

Теорема 5.1. *Пусть выполняются Условия 5.1–5.7. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ задачи* (5)*, для которого пара функций $(U_n(x,\varepsilon), V_n(x,\varepsilon))$ является равномерным на отрезке $[-1, 1]$ асимптотическим приближением с точностью $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$.*

Эта теорема доказывается методом монотонных итераций, включающим в себя необходимость нахождения верхнего и нижнего решений исследуемой задачи, которые определим как пары функций $\big(\overline{U}(x), \overline{V}(x)\big)$ и $(\underline{U}(x), \underline{V}(x))$, удовлетворяющие следующему определению.

Определение 5.2. Пары функций $\big(\overline{U}(x), \overline{V}(x)\big)$ и $(\underline{U}(x), \underline{V}(x))$ из класса $C[-1,1] \cap W_2^1(-1,1)$ называются соответственно верхним и нижним решениями задачи (5), если для них выполняются следующие неравенства:

(A$_1$). $\underline{U}(x) \le \overline{U}(x),\ \underline{V}(x) \le \overline{V}(x),\ x \in [-1,1];$

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{A}_2).\ -\varepsilon^4 \left(a^{(+)}\varphi(1) - a^{(-)}\varphi(-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} \left(\varepsilon^4 \frac{d\overline{U}}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + f(\overline{U}, v, x, \varepsilon) \cdot \varphi\right) dx \ge 0,\\
&- \varepsilon^4 \left(a^{(+)}\varphi(1) - a^{(-)}\varphi(-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} \left(\varepsilon^4 \frac{d\underline{U}}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + f(\underline{U}, v, x, \varepsilon) \cdot \varphi\right) dx \le 0,\\
&\forall v \in C[-1,1],\ \ \underline{V} \le v \le \overline{V},\ x \in [-1,1];\ \forall \varphi \in W_2^1(-1,1) \cap L_2^+(-1,1);\\
&-\varepsilon^2 \left(b^{(+)}\varphi(1) - b^{(-)}\varphi(-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} \left(\varepsilon^2 \frac{d\overline{V}}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + g(u, \overline{V}, x, \varepsilon) \cdot \varphi\right) dx \ge 0,\\
&- \varepsilon^2 \left(b^{(+)}\varphi(1) - b^{(-)}\varphi(-1)\right) + \int\limits_{-1}^{1} \left(\varepsilon^2 \frac{d\underline{V}}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + g(u, \underline{V}, x, \varepsilon) \cdot \varphi\right) dx \le 0,\\
&\forall u \in C[-1,1],\ \ \underline{U} \le u \le \overline{U},\ x \in [-1,1];\ \forall \varphi \in W_2^1(-1,1) \cap L_2^+(-1,1).
\end{aligned}
$$

В процессе доказательства потребуется вспомогательное определение обобщённого решения задачи (5).

Определение 5.3. Назовём пару функций $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ таких, что

$$
u_\varepsilon(x) \in C^1[-1,1] \cap W_2^2(-1,1), \quad v_\varepsilon(x) \in C^1[-1,1] \cap C^2(-1,1),
$$

обобщённым решением задачи (5), если $v_\varepsilon(x)$ поточечно удовлетворяет второму уравнению (5) и граничным условиям, а $u_\varepsilon(x)$ удовлетворяет граничным условиям и дифференциальному уравнению $\varepsilon^4 u'' = f(u, v, x, \varepsilon)$ для почти всех $x \in (-1,1)$.

Предлагается следующий итерационный процесс:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^4 \frac{d^2\bar{u}^{(k)}}{dx^2} - c\bar{u}^{(k)} = f(\bar{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, x, \varepsilon) - c\bar{u}^{(k-1)},\ \text{ для п.в. } x \in (-1,1),\\
&\varepsilon^2 \frac{d^2\overline{v}^{(k)}}{dx^2} - c\overline{v}^{(k)} = g(\bar{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, x, \varepsilon) - c\overline{v}^{(k-1)},\ \ x \in (-1,1),\\
&\frac{d\bar{u}^{(k)}}{dx}(\mp 1) = a^{(\mp)},\ \ \frac{d\overline{v}^{(k)}}{dx}(\mp 1) = b^{(\mp)};
\end{aligned}
\tag{173}
$$

$$\varepsilon^4 \frac{d^2\underline{u}^{(k)}}{dx^2} - c\underline{u}^{(k)} = f(\underline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x, \varepsilon) - c\underline{u}^{(k-1)}, \ \text{ для п.в. } x \in (-1,1),$$
$$\varepsilon^2 \frac{d^2\underline{v}^{(k)}}{dx^2} - c\underline{v}^{(k)} = g(\underline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x, \varepsilon) - c\underline{v}^{(k-1)}, \ \ x \in (-1,1),$$
$$\frac{d\underline{u}^{(k)}}{dx}(\mp 1) = a^{(\mp)}, \ \ \frac{d\underline{v}^{(k)}}{dx}(\mp 1) = b^{(\mp)}; \tag{174}$$

где $k = 1, 2, \ldots$, c — достаточно большая положительная константа, и полагаем $(\overline{u}^{(0)}, \overline{v}^{(0)}) = (\overline{U}, \overline{V})$, а $(\underline{u}^{(0)}, \underline{v}^{(0)}) = (\underline{U}, \underline{V})$.

В качестве леммы о положительности будем использовать EPL (см. гл. 1).

Лемма 5.1. *Пусть выполнены Условия 5.1–5.7, тогда последовательность верхних решений* $(\overline{u}^{(k)}, \overline{v}^{(k)})$ *сходится к обобщённому решению* $(\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon)$ *задачи* (5)*, и нижняя последовательность* $(\underline{u}^{(k)}, \underline{v}^{(k)})$ *сходится к, вообще говоря другому, обобщённому решению* $(\underline{u_\varepsilon}, \underline{v_\varepsilon})$ *задачи* (5)*, причём*

$$\underline{U} \le \underline{u_\varepsilon} \le \bar{u}_\varepsilon \le \overline{U}, \quad \underline{V} \le \underline{v_\varepsilon} \le \bar{v}_\varepsilon \le \overline{V}, \quad x \in [-1,1].$$

Рассмотрим первую итерацию:

$$\varepsilon^4 \frac{d^2\bar{u}^{(1)}}{dx^2} - c\bar{u}^{(1)} = f(\overline{U}, \overline{V}, x, \varepsilon) - c\overline{U}, \ \text{ для п.в. } x \in (-1,1),$$
$$\varepsilon^2 \frac{d^2\bar{v}^{(1)}}{dx^2} - c\bar{v}^{(1)} = g(\overline{U}, \overline{V}, x, \varepsilon) - c\overline{V}, \ \ x \in (-1,1),$$
$$\frac{d\bar{u}^{(1)}}{dx}(\mp 1) = a^{(\mp)}, \ \ \frac{d\bar{v}^{(1)}}{dx}(\mp 1) = b^{(\mp)}, \tag{175}$$

$$\varepsilon^4 \frac{d^2\underline{u}^{(1)}}{dx^2} - c\underline{u}^{(1)} = f(\underline{U}, \underline{V}, x, \varepsilon) - c\underline{U}, \ \text{ для п.в. } x \in (-1,1)$$
$$\varepsilon^2 \frac{d^2\underline{v}^{(1)}}{dx^2} - c\underline{v}^{(1)} = g(\underline{U}, \underline{V}, x, \varepsilon) - c\underline{V}, \ \ x \in (-1,1),$$
$$\frac{d\underline{u}^{(1)}}{dx}(\mp 1) = a^{(\mp)}, \ \ \frac{d\underline{v}^{(1)}}{dx}(\mp 1) = b^{(\mp)}. \tag{176}$$

Введём функции

$$\mathrm{U}[u,v](x,\varepsilon) = \varepsilon^4 \left(a^{(+)} G^u(x,1) - a^{(-)} G^u(x,-1) \right) + \int\limits_{-1}^{1} G^u(x-s)\left(f(u,v,s,\varepsilon) - cu\right) ds,$$
$$\mathrm{V}[u,v](x,\varepsilon) = \varepsilon^2 \left(b^{(+)} G^v(x,1) - b^{(-)} G^v(x,-1) \right) + \int\limits_{-1}^{1} G^v(x-s)\left(g(u,v,s,\varepsilon) - cv\right) ds, \tag{177}$$

где $G^u(x-s)$ и $G^v(x-s)$ — функции Грина задач (173), (174). Заметим, что при непрерывных $u(x)$,

$v(x)$ имеем $f(u(x),v(x),x,\varepsilon)\in L_2(-1,1)$ (это следует из замкнутости множества нулей непрерывной $u(x)$, кусочной непрерывности f и гладкости $f^{(\mp)}$), и, очевидно, $g(u(x),v(x),x,\varepsilon)\in C[-1,1]$, тогда

$$\mathrm{U}[u,v]\in C^1[-1,1]\cap W_2^2(-1,1),\quad \mathrm{V}[u,v]\in C^1[-1,1]\cap C^2(-1,1), \tag{178}$$

где гладкость $\mathrm{U}[u,v]$ доказывается путём аппроксимации $f(u(x),v(x),x,\varepsilon)\in L_2(-1,1)$ бесконечно гладкими финитными функциями (см. [110]).

Итак, $(\bar{u}^{(1)},\bar{v}^{(1)})=\big(\mathrm{U}[\overline{U},\overline{V}],\mathrm{V}[\overline{U},\overline{V}]\big)$, $(\underline{u}^{(1)},\underline{v}^{(1)})=(\mathrm{U}[\underline{U},\underline{V}],\mathrm{V}[\underline{U},\underline{V}])$ являются решениями задач, соответственно, (175) и (176).

Теперь домножим уравнения (175) и (176) на произвольную $\varphi(x)$ из $W_2^1(-1,1)\cap L_2^+(-1,1)$, проинтегрируем по частям (в смысле аппроксимации бесконечно гладкими функциями) с учётом граничных условий и вычтем полученное из неравенств (A_2) Определения 5.2 с теми же верхним и нижним решениями и той же пробной функцией φ; после минимальных преобразований получим неравенства

$$\begin{gathered}\int\limits_{-1}^{1}\Big(\varepsilon^4\left(\overline{U}-\bar{u}^{(1)}\right)'\cdot\varphi'+c\left(\overline{U}-\bar{u}^{(1)}\right)\cdot\varphi\Big)\,dx\geq 0,\\ \int\limits_{-1}^{1}\Big(\varepsilon^2\left(\overline{V}-\bar{v}^{(1)}\right)'\cdot\varphi'+c\left(\overline{V}-\bar{v}^{(1)}\right)\cdot\varphi\Big)\,dx\geq 0,\end{gathered} \tag{179}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{-1}^{1}\Big(\varepsilon^4\left(\underline{u}^{(1)}-\underline{U}\right)'\cdot\varphi'+c\left(\underline{u}^{(1)}-\underline{U}\right)\cdot\varphi\Big)\,dx\geq 0,\\ \int\limits_{-1}^{1}\Big(\varepsilon^2\left(\underline{v}^{(1)}-\underline{V}\right)'\cdot\varphi'+c\left(\underline{v}^{(1)}-\underline{V}\right)\cdot\varphi\Big)\,dx\geq 0.\end{gathered} \tag{180}$$

Применяя EPL, заключаем, что $\underline{U}\leq\underline{u}^{(1)}$, $\bar{u}^{(1)}\leq\overline{U}$, $\underline{V}\leq\underline{v}^{(1)}$, $\bar{v}^{(1)}\leq\overline{V}$ при всех $x\in[-1,1]$ в силу непрерывности функций, входящих в неравенства.

Далее вычтем (176) из (175):

$$\begin{aligned}&-\varepsilon^4\left(\bar{u}^{(1)}-\underline{u}^{(1)}\right)''+c\left(\bar{u}^{(1)}-\underline{u}^{(1)}\right)=\\ &\qquad=f(\underline{U},\underline{V},x,\varepsilon)-f(\overline{U},\overline{V},x,\varepsilon)+c(\overline{U}-\underline{U}),\quad \text{для п.в. } x\in(-1,1),\end{aligned} \tag{181}$$

$$\left(\bar{u}^{(1)}-\underline{u}^{(1)}\right)'(\mp 1)=0;$$

$$
\begin{gathered}
-\varepsilon^2\left(\bar{v}^{(1)}-\underline{v}^{(1)}\right)''+c\left(\bar{v}^{(1)}-\underline{v}^{(1)}\right)= \\
\qquad\qquad =g(\underline{U},\underline{V},x,\varepsilon)-g(\overline{U},\overline{V},x,\varepsilon)+c(\overline{V}-\underline{V}),\quad x\in(-1,1), \qquad (182)\\
\left(\bar{v}^{(1)}-\underline{v}^{(1)}\right)'(\mp 1)=0.
\end{gathered}
$$

Из (182) в силу Условия 5.2 и гладкости (178) функций $\bar{v}^{(1)}$, $\underline{v}^{(1)}$ согласно [33] немедленно следует $\underline{v}^{(1)}\le\bar{v}^{(1)},\ x\in[-1,1]$.

Отдельного исследования требует (181). Рассмотрим в общем виде правую часть уравнения (181), для этого заметим, что функции $f^{(\mp)}$ в силу гладкости по всем переменным на соответствующих множествах $\overline{S_u^{\mp}}\times I_v\times[-1,1]$ удовлетворяют с некоторой константой $c>0$ одностороннему условию Липшица

$$
f^{(\mp)}(\overline{u},v,x,\varepsilon)-f^{(\mp)}(\underline{u},v,x,\varepsilon)\le c(\overline{u}-\underline{u}),\ \ \underline{u}\le\overline{u},\ \ [\underline{u},\overline{u}]\in\overline{S_u^{\mp}},\ \ v\in\times I_v,\ \ x\in[-1,1], \qquad (183)
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
&f^{(-)}(0,v,x,\varepsilon)-f^{(-)}(\underline{u},v,x,\varepsilon)\le -c\underline{u},\ \ \underline{u}\le 0,\ \ v\in\times I_v,\ \ x\in[-1,1],\\
&f^{(+)}(\overline{u},v,x,\varepsilon)-f^{(+)}(0,v,x,\varepsilon)\le c\overline{u},\ \ \overline{u}\ge 0,\ \ v\in\times I_v,\ \ x\in[-1,1],
\end{aligned} \qquad (184)
$$

а значит при $\underline{u}\le 0\le\overline{u}$

$$
f^{(-)}(\underline{u},v,x,\varepsilon)-f^{(+)}(\overline{u},v,x,\varepsilon)+c(\overline{u}-\underline{u})\ge f^{(-)}(0,v,x,\varepsilon)-f^{(+)}(0,v,x,\varepsilon)\ge 0 \qquad (185)
$$

в силу Условия 7, поэтому

$$
f(\overline{u},v,x,\varepsilon)-f(\underline{u},v,x,\varepsilon)\le c(\overline{u}-\underline{u}),\ \ \underline{u}\le\overline{u},\ \ [\underline{u},\overline{u}]\in I_u,\ \ v\in\times I_v,\ \ x\in[-1,1]. \qquad (186)
$$

В силу (181), Условия 5.3 (которое влечёт $f^{(\mp)}(\underline{U},\underline{V},x,\varepsilon)\ge f^{(\mp)}(\underline{U},\overline{V},x,\varepsilon)$) и (186) к функции $\bar{u}^{(1)}-\underline{u}^{(1)}$ применима EPL, а стало быть, объединяя полученные неравенства,

$$
\underline{U}\le\underline{u}^{(1)}\le\bar{u}^{(1)}\le\overline{U},\quad \underline{V}\le\underline{v}^{(1)}\le\bar{v}^{(1)}\le\overline{V},\ \ x\in[-1,1]. \qquad (187)
$$

Доказательство того, что $(\bar{u}^{(1)},\bar{v}^{(1)})$ и $(\underline{u}^{(1)},\underline{v}^{(1)})$ являются верхним и нижним решениями в смысле Определения 5.2 производится аналогично [33] с учётом (186), но в слабом смысле.

Далее находятся пары $(\bar{u}^{(k)},\bar{v}^{(k)})=\left(\mathrm{U}[\bar{u}^{(k-1)},\bar{v}^{(k-1)}],\mathrm{V}[\bar{u}^{(k-1)},\bar{v}^{(k-1)}]\right)$, а также $(\underline{u}^{(k)},\underline{v}^{(k)})=\left(\mathrm{U}[\underline{u}^{(k-1)},\underline{v}^{(k-1)}],\mathrm{V}[\underline{u}^{(k-1)},\underline{v}^{(k-1)}]\right)$, $k=2,3,\ldots$, которые имеют ту же гладкость, что и первые итерации:

$$\{\bar{u}^{(k)}, \underline{u}^{(k)}\} \in C^1[-1,1] \cap W_2^2(-1,1), \quad \{\bar{v}^{(k)}, \underline{v}^{(k)}\} \in C^1[-1,1] \cap C^2(-1,1). \tag{188}$$

Аналогично [33] по индукции с использованием EPL доказываются неравенства

$$\begin{aligned} &\underline{U} \le \underline{u}^{(1)} \le \ldots \le \underline{u}^{(k)} \le \bar{u}^{(k)} \le \ldots \le \bar{u}^{(1)} \le \overline{U}, \\ &\underline{V} \le \underline{v}^{(1)} \le \ldots \le \underline{v}^{(k)} \le \bar{v}^{(k)} \le \ldots \le \bar{v}^{(1)} \le \overline{V}, \end{aligned} \quad x \in [-1,1], \quad k = 2,3,\ldots, \tag{189}$$

и тот факт, что $(\bar{u}^{(k)}, \bar{v}^{(k)})$, $(\underline{u}^{(k)}, \underline{v}^{(k)})$ являются верхними и нижними решениями в смысле Определения 5.2.

В силу (189) для всех $x \in [-1,1]$ существуют поточечные ограниченные пределы

$$\begin{aligned} &\bar{u}_\varepsilon(x) := \lim_{k\to\infty} \bar{u}^{(k)}, \quad \bar{v}_\varepsilon(x) := \lim_{k\to\infty} \bar{v}^{(k)}, \\ &\underline{u_\varepsilon}(x) := \lim_{k\to\infty} \underline{u}^{(k)}, \quad \underline{v_\varepsilon}(x) := \lim_{k\to\infty} \underline{v}^{(k)}, \end{aligned} \tag{190}$$

что влечёт равномерную ограниченность потенциалов в $\mathrm{U}[\bar{u}^{(k)}, \bar{v}^{(k)}]$, $\mathrm{V}[\bar{u}^{(k)}, \bar{v}^{(k)}]$, $\mathrm{U}[\underline{u}^{(k)}, \underline{v}^{(k)}]$, $\mathrm{V}[\underline{u}^{(k)}, \underline{v}^{(k)}]$, $k = 2,3,\ldots$, а поскольку $f(\bar{u}^{(k)}, \bar{v}^{(k)}, x, \varepsilon) - c\bar{u}^{(k)}$, $g(\bar{u}^{(k)}, \bar{v}^{(k)}, x, \varepsilon) - c\bar{v}^{(k)}$ — монотонно неубывающие последовательности функций, $f(\underline{u}^{(k)}, \underline{v}^{(k)}, x, \varepsilon) - c\underline{u}^{(k)}$, $g(\underline{u}^{(k)}, \underline{v}^{(k)}, x, \varepsilon) - c\underline{v}^{(k)}$ — монотонно невозрастающие, то для объёмных потенциалов, входящих в U и V, выполнены все условия теоремы Леви, что влечёт равномерную сходимость (190) к предельным функциям, откуда $\{\bar{u}_\varepsilon(x), \underline{u_\varepsilon}(x), \bar{v}_\varepsilon(x), \underline{v_\varepsilon}(x)\} \in C[-1,1]$ и

$$\underline{U} \le \ldots \le \underline{u_\varepsilon} \le \bar{u}_\varepsilon \le \ldots \le \overline{U}, \quad \underline{V} \le \ldots \le \underline{v_\varepsilon} \le \bar{v}_\varepsilon \le \ldots \le \overline{V}, \quad x \in [-1,1]. \tag{191}$$

Опять же, в силу теоремы Леви и непрерывности вышеназванных предельных функций почти всюду на $[-1,1]$ существуют пределы

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{F}}(x) := \lim_{k\to\infty} f(\bar{u}^{(k)}, \bar{v}^{(k)}, x, \varepsilon), \quad \overline{\mathcal{G}}(x) := \lim_{k\to\infty} g(\bar{u}^{(k)}, \bar{v}^{(k)}, x, \varepsilon), \\ &\underline{\mathcal{F}}(x) := \lim_{k\to\infty} f(\underline{u}^{(k)}, \underline{v}^{(k)}, x, \varepsilon), \quad \underline{\mathcal{G}}(x) := \lim_{k\to\infty} g(\underline{u}^{(k)}, \underline{v}^{(k)}, x, \varepsilon), \end{aligned} \tag{192}$$

принадлежащие $L^1(-1,1)$. Поскольку функция $g(u, v, x, \varepsilon)$ гладкая по всем переменным, то

$$\overline{\mathcal{G}}(x) = g(\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon, x, \varepsilon), \quad \underline{\mathcal{G}}(x) = g(\underline{u_\varepsilon}, \underline{v_\varepsilon}, x, \varepsilon). \tag{193}$$

В силу монотонности итераций (189) и непрерывности справа по u функции f для $\overline{\mathcal{F}}(x)$ ситуация аналогична:

$$\overline{\mathcal{F}}(x) = \lim_{k\to\infty} f(\bar{u}^{(k)}, \bar{v}^{(k)}, x, \varepsilon) = f(\lim_{k\to\infty} \bar{u}^{(k)}, \lim_{k\to\infty} \bar{v}^{(k)}, x, \varepsilon) = f(\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon, x, \varepsilon) \in L_2(-1,1),$$

В свою очередь,

$$\underline{\mathcal{F}}(x) = \lim_{k\to\infty} f(\underline{u}^{(k)}, \underline{v}^{(k)}, x, \varepsilon) = f^l(\lim_{k\to\infty} \underline{u}^{(k)}, \lim_{k\to\infty} \underline{v}^{(k)}, x, \varepsilon) = f^l(\underline{u_\varepsilon}, \underline{v_\varepsilon}, x, \varepsilon) \in L_2(-1,1),$$

где

$$f^l(u,v,x,\varepsilon) = \lim_{\lambda\to+0} f(u-\lambda, v, x, \varepsilon),$$

являющаяся непрерывной слева по u как следствие гладкости $f^{(\mp)}$.

Введём функцию $\tilde{\mathrm{U}}[\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon]$, как и $\mathrm{U}[\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon]$, но с заменой в (177) функции f на f^l, тогда:

- $(\mathrm{U}[\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon], \mathrm{V}[\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon])$ — обобщённое решение (5);
- $\big(\tilde{\mathrm{U}}[\underline{u_\varepsilon}, \underline{v_\varepsilon}], \mathrm{V}[\underline{u_\varepsilon}, \underline{v_\varepsilon}]\big)$ — обобщённое решение (5), в которой f заменена на f^l.

Пусть $\underline{u_\varepsilon}(x)$ обращается в нуль на замкнутом[2] множестве $\underline{\Omega}$, тогда необходимым образом следует равенство $0 \overset{\text{п.в.}}{=} f^{(-)}(0, \underline{v_\varepsilon}, x, \varepsilon)$, $x \in \underline{\Omega}$, и в силу Условия 5.7 заключаем, что $\tilde{\mathrm{U}}[\underline{u_\varepsilon}, \underline{v_\varepsilon}]$ почти всюду совпадает с $\mathrm{U}[\underline{u_\varepsilon}, \underline{v_\varepsilon}]$, а значит $\big(\mathrm{U}[\underline{u_\varepsilon}, \underline{v_\varepsilon}], \mathrm{V}[\underline{u_\varepsilon}, \underline{v_\varepsilon}]\big)$ будет обобщённым решением (5).

Лемма 5.1 доказана. □

Конкретные верхнее и нижнее решения задачи (5), обеспечивающие существование удовлетворяющего Определению 5.1 решения с внутренним переходным слоем, строятся согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств [27, 75] как модификации асимптотического приближения решения этой задачи. Далее мы будем обозначать нижним индексом «n» верхнее и нижнее решения, построенные с использованием асимптотического приближения n-го порядка. Как и асимптотическое приближение (168), будем строить их из двух частей:

$$\begin{aligned}
&\overline{U}_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{U}_n^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \le x < \overline{x}\,, \\ \overline{U}_n^{(+)}(x,\varepsilon), & \overline{x} \le x \le 1\,, \end{cases} \qquad \overline{V}_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{V}_n^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \le x < \overline{x}\,, \\ \overline{V}_n^{(+)}(x,\varepsilon), & \overline{x} \le x \le 1. \end{cases} \\
&\underline{U_n}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{U_n}^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \le x < \underline{x}\,, \\ \underline{U_n}^{(+)}(x,\varepsilon), & \underline{x} \le x \le 1\,, \end{cases} \qquad \underline{V_n}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{V_n}^{(-)}(x,\varepsilon), & -1 \le x < \underline{x}\,, \\ \underline{V_n}^{(+)}(x,\varepsilon), & \underline{x} \le x \le 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{194}$$

[2] Следствие непрерывности $\underline{u_\varepsilon}(x)$.

Введём точки $\overline{x}$ и $\underline{x}$ как

$$\overline{x} = x_{n+1}^*(\varepsilon) - \varepsilon^{n+1}\delta, \quad \underline{x} = x_{n+1}^*(\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\delta, \tag{195}$$

а также введём новые переменные

$$\overline{\tau} = \frac{x - \overline{x}}{\varepsilon}, \quad \overline{\sigma} = \frac{x - \overline{x}}{\varepsilon^2}; \qquad \underline{\tau} = \frac{x - \underline{x}}{\varepsilon}, \quad \underline{\sigma} = \frac{x - \underline{x}}{\varepsilon^2} \tag{196}$$

Верхнее и нижнее решения сшиваются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\overline{U}_n^{(-)}(\overline{x},\varepsilon) = \overline{U}_n^{(+)}(\overline{x},\varepsilon) && \overline{V}_n^{(-)}(\overline{x},\varepsilon) = v_{n+1}^*(\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\mu = \overline{V}_n^{(+)}(\overline{x},\varepsilon)\\
&\underline{U_n}^{(-)}(\underline{x},\varepsilon) = \underline{U_n}^{(+)}(\underline{x},\varepsilon) && \underline{V_n}^{(-)}(\underline{x},\varepsilon) = v_{n+1}^*(\varepsilon) - \varepsilon^{n+1}\mu = \underline{V_n}^{(+)}(\underline{x},\varepsilon)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$L_{u,\varepsilon}(u,v) := -\varepsilon^4\frac{d^2u}{dx^2} + f(u,v,x,\varepsilon), \quad L_{v,\varepsilon}(u,v) := -\varepsilon^2\frac{d^2v}{dx^2} + g(u,v,x,\varepsilon).$$

Помимо условия упорядоченности (A_1) из Определения 5.2 будем (как следствие КМ NN типа) для $\underline{U_n}, \underline{V_n}, \overline{U}_n, \overline{V}_n$ требовать выполнения более жёстких условий, нежели (A_2):

(A_2^s). $L_{u,\varepsilon}(\overline{U}_n, \overline{V}_n) > 0, \;\; x \in (-1,\overline{x}) \cup (\overline{x},1); \;\; 0 > L_{u,\varepsilon}(\underline{U_n}, \underline{V_n}), \;\; x \in (-1,\underline{x}) \cup (\underline{x},1);$
$L_{v,\varepsilon}(\overline{U}_n, \overline{V}_n) > 0, \;\; x \in (-1,\overline{x}) \cup (\overline{x},1); \;\; 0 > L_{v,\varepsilon}(\underline{U_n}, \underline{V_n}), \;\; x \in (-1,\underline{x}) \cup (\underline{x},1);$

(A_3^s). $\overline{U}_n'(-1) \le a^{(-)} \le \underline{U_n}'(-1), \;\; \overline{U}_n'(1) \ge a^{(+)} \ge \underline{U_n}'(1),$
$\overline{V}_n'(-1) \le b^{(-)} \le \underline{V_n}'(-1), \;\; \overline{V}_n'(1) \ge b^{(+)} \ge \underline{V_n}'(1);$

(A_4^s). $\overline{U}_n'(\overline{x}-0) - \overline{U}_n'(\overline{x}+0) \ge 0, \;\; \underline{U_n}'(\underline{x}-0) - \underline{U_n}'(\underline{x}+0) \le 0,$
$\overline{V}_n'(\overline{x}-0) - \overline{V}_n'(\overline{x}+0) \ge 0, \;\; \underline{V_n}'(\underline{x}-0) - \underline{V_n}'(\underline{x}+0) \le 0.$

В явном виде функции $\overline{U}_n$, $\underline{U_n}$, $\overline{V}_n$ и $\underline{V_n}$ строятся как

$$\begin{aligned}
\overline{U}_n^{(\mp)} &= U_n^{(\mp)}\Big|_{\substack{\tau=\overline{\tau}\\ \sigma=\overline{\sigma}\\ x_n^*=\overline{x}}} + \varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}(x) + \alpha^{(\mp)}(x) + q_{sup}^{(\mp)}u(\overline{\tau}) + m_{sup}^{(\mp)}u(\overline{\sigma})\right) + \varepsilon^{n+3}C_u e^{-k_u|\eta_\mp|},\\
\underline{U_n}^{(\mp)} &= U_n^{(\mp)}\Big|_{\substack{\tau=\underline{\tau}\\ \sigma=\underline{\sigma}\\ x_n^*=\underline{x}}} + \varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}(x) - \alpha^{(\mp)}(x) + q_{sub}^{(\mp)}u(\underline{\tau}) + m_{sub}^{(\mp)}u(\underline{\sigma})\right) - \varepsilon^{n+3}C_u e^{-k_u|\eta_\mp|},
\end{aligned} \tag{197}$$

$$\overline{V}_n^{(\mp)} = V_n^{(\mp)}\Big|_{\substack{\tau=\overline{\tau}\\ \sigma=\overline{\sigma}\\ x_n^*=\overline{x}}} + \varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}(x) + \beta^{(\mp)}(x) + q_{sup}^{(\mp)}v(\overline{\tau})\right) + \varepsilon^{n+2}C_v e^{-k_v|\zeta_\mp|} +$$
$$+ \varepsilon^{n+3}m_{sup}^{(\mp)}v(\overline{\sigma}) - \varepsilon^{n+2}\; M_{n+2}^{(\mp)}v(0)\Big|_{x_n^*=\overline{x}} - \varepsilon^{n+3}m_{sup}^{(\mp)}v(0),$$
$$\underline{V_n}^{(\mp)} = V_n^{(\mp)}\Big|_{\substack{\tau=\underline{\tau}\\ \sigma=\underline{\sigma}\\ x_n^*=\underline{x}}} + \varepsilon^{n+1}\left(\bar{u}_{n+1}(x) - \beta^{(\mp)}(x) + q_{sub}^{(\mp)}v(\underline{\tau})\right) - \varepsilon^{n+2}C_v e^{-k_v|\zeta_\mp|} +$$
$$+ \varepsilon^{n+3}m_{sub}^{(\mp)}v(\underline{\sigma}) - \varepsilon^{n+2}\; M_{n+2}^{(\mp)}v(0)\Big|_{x_n^*=\underline{x}} - \varepsilon^{n+3}m_{sub}^{(\mp)}v(0). \tag{198}$$

Нахождение неизвестных функций, а также проверка выполнения условий (A$_1$), (A$_2^s$)–(A$_4^s$) производятся идентично [27] в области переходного слоя и идентично главе 2 в области погранслоя.

Отдельно необходимо отметить свойство функций $\underline{U_n}$, $\overline{U}_n$, вытекающее из самого способа их построения (см. [27]), которое назовём (P$_1$):

(P$_1$) функции $\underline{U_n}, \overline{U}_n$ лишь единожды пересекают ноль на отрезке $[-1,1]$ в точках, соответственно, $\underline{x}$, $\overline{x}$, причём $\underline{U_n}'|_{x=\overline{x}\mp 0} > 0$ и $\overline{U}'_n\big|_{x=\overline{x}\mp 0} > 0$ при достаточно малых ε.

К $\left(\underline{U_n}, \underline{V_n}\right)$ и $\left(\overline{U}_n, \overline{V}_n\right)$ применимы результаты Леммы 5.1, и между ними заключено $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ — некоторое обобщённое решение задачи (12),(13). Согласно [27]

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \left(\underline{U_n}, \underline{V_n}\right) + O(\varepsilon^{(n-1)}) = \left(\overline{U}_n, \overline{V}_n\right) + O(\varepsilon^{(n-1)}) = (U_{n-2}, V_{n-2}) + O(\varepsilon^{(n-1)}). \tag{199}$$

Помимо этого в силу (191) и (P$_1$) имеем:

- все нули $\underline{u}^{(k)}$, $\bar{u}^{(k)}$, $\underline{u_\varepsilon}$ и $\bar{u}_\varepsilon$ находятся на отрезке $[\overline{x}, \underline{x}]$;
- $\{\underline{u_\varepsilon}, \bar{u}_\varepsilon\} \in C^1[-1,1] \cap C^2\left((-1,1)\backslash[\overline{x}, \underline{x}]\right) \cap W_2^2(-1,1)$ как следствие свойств гладкости функции U (см. (177) и (178)).

Теперь исследуем вопрос о возможности однократного обращения в нуль u-компонент решений задач (5).

Всё так же воспользуемся Леммой 5.1 и придём к выводу о существовании как минимум обобщённых решений $(\underline{u_\varepsilon}, \underline{v_\varepsilon})$ и $(\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon)$.

Уже с $\underline{u}^{(1)}$, $\bar{u}^{(1)}$ априори не известно ни количество, ни положение нулей функций итерационных последовательностей $\underline{u}^{(k)}$, $\bar{u}^{(k)}$,$k = 1, 2, \ldots$, на отрезке $[\overline{x}, \underline{x}]$ — тем более это так для $\underline{u_\varepsilon}$ и $\bar{u}_\varepsilon$.

Будем проводить рассуждения для u-компонент верхней последовательности.

Пусть $\overline{u}^{(1)}$ достигает нуля хотя бы дважды на отрезке $[\overline{x}, \underline{x}]$. В силу гладкости $\overline{u}^{(1)}$ это возможно, когда

1) в некоторой точке x_1 достигает локального максимума и локального минимума в некоторой x_2;

2) $\overline{u}^{(1)} \equiv 0$ на некотором отрезке $[x_1, x_2] \subsetneq [\overline{x}, \underline{x}]$ (строгое вложение реализуется вследствие (A_4^s) и (P_1));

3) комбинация двух пунктов выше.

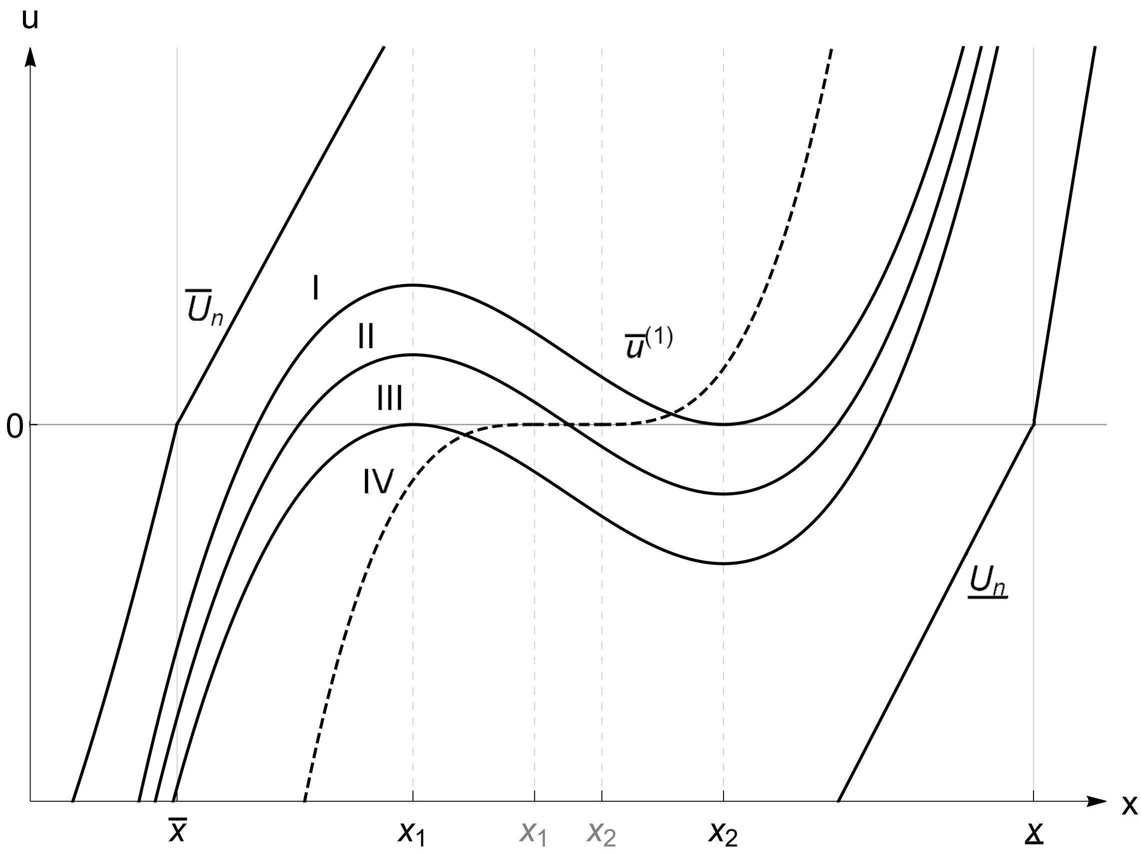


Рисунок 4: Характерные варианты «плохого» поведения функции $\overline{u}^{(1)}$.

На Рис. 4 схематично изображены характерные варианты $I - IV$ «плохого» поведение функции $\overline{u}^{(1)}$, однако благодаря Условию 5.7 ни один из подобных вариантов, а значит ни один из пунктов 1)–3), не реализуется, поскольку в любом случае (см. (175), (184) с учётом $\overline{U}_n > 0$ при $x \in (\overline{x}, \underline{x})$)

$$\underbrace{\varepsilon^4 \frac{d^2 \bar{u}^{(1)}}{dx^2}\bigg|_{x_2}}_{\geq 0} \underbrace{- c\bar{u}^{(1)}\big|_{x_2}}_{\geq 0} = \left(f^{(+)}(\overline{U}_n, \overline{V}_n, x, \varepsilon) - c\overline{U}_n\right)\big|_{x_2} \leq \underbrace{f^{(+)}(0, \overline{V}_n, x, \varepsilon)\big|_{x_2}}_{<0}, \tag{200}$$

то есть наблюдается противоречие. Более того, получаем очень важный результат: $\overline{u}^{(1)}$ не может пересекать ноль с отрицательной производной, так как (200) исключает случай II; $\overline{u}^{(1)}$ вместе с производной не могут одновременно обращаться в нуль, так как (200) исключает случаи I, III, IV, в том числе вариант IV с $x_1 = x_2$.

Итак, $\overline{u}^{(1)}$ пересекает нуль лишь один раз в некоторой точке $\overline{x}^{(1)} \in [\overline{x}, \underline{x}]$ с, что важно, положительной производной $\dfrac{d\overline{u}^{(1)}}{dx}(\overline{x}^{(1)}) > 0$.

Для $\bar{u}^{(k)}$, $k = 2, 3, \ldots$, доказательство единственности пересечения нуля в некоторой точке $\overline{x}^{(k)}$ с положительной производной в ней же осуществляется идентично по индукции.

Поскольку члены итерационной последовательности $\bar{u}^{(k)}$ монотонно не убывают (см. (189)), $\dfrac{d\overline{u}^{(1)}}{dx}(\overline{x}^{(k)}) > 0$ и, очевидно, $\overline{x}^{(1)} \leq \ldots \leq \overline{x}^{(k)} \leq \underline{x}$, приходим к выводу: предельная функция $\bar{u}_\varepsilon$ может только пересекать ноль и/или касаться его сверху, в том числе совпадая с нулём на некотором интервале (см. Рис. 5).

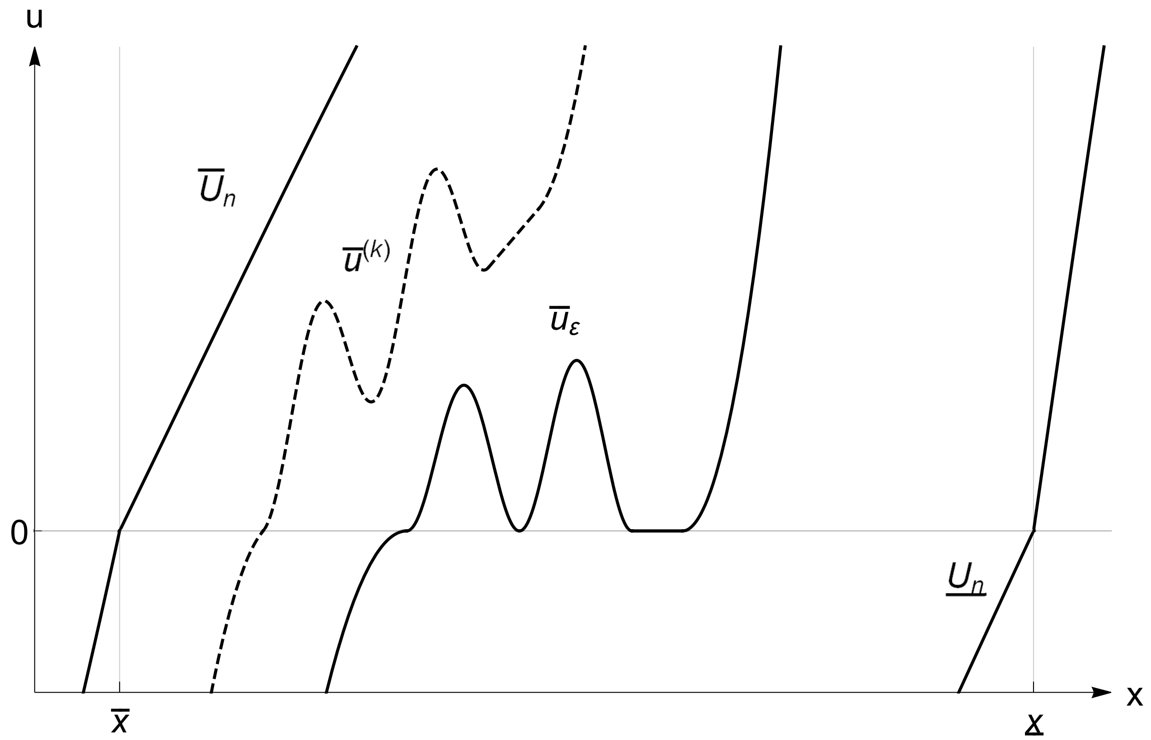


Рисунок 5: Иллюстрация появления «плохого» поведения у предельной функции $\bar{u}_\varepsilon$, в то числе в точке пересечения нуля.

Касание нуля необходимым образом требует существования хотя бы одной точки $\tilde{x} \in [\underline{x}, \bar{x}]$ такой, что $\bar{u}_\varepsilon(\tilde{x}) = \bar{u}'_\varepsilon(\tilde{x}) = 0$. Тогда, поскольку выполнено Условие 5.7, можно выбрать некоторую точку $\hat{x} \in (\tilde{x}, 1]$ так, чтобы на интервале $(\tilde{x}, \hat{x})$ и $\bar{u}_\varepsilon(x) > 0$, и $f(\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon, x, \varepsilon) < 0$. Следует отметить, на том же интервале $f = f^{(+)}$ (так как $\bar{u}_\varepsilon(x) > 0$).

Подставим в первое уравнение (5) функции $(\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon)$, домножим полученное равенство на $(\hat{x} - x)$, проинтегрируем по частям и получим противоречие:

$$0 < \varepsilon^4 \bar{u}_\varepsilon(\hat{x}) = \int\limits_{\tilde{x}}^{\hat{x}} f^{(+)}(\bar{u}_\varepsilon, \bar{v}_\varepsilon, x, \varepsilon)(\hat{x} - x)dx \leq 0.$$

Итак, для $\bar{u}_\varepsilon$ исключены касания нуля и равенство её нулю на интервале. Более того, установленный факт отсутствия у $\bar{u}_\varepsilon$ точек, в которой она и её производная одновременно обращаются в ноль означает невозможность пересечения нуля функцией $\bar{u}_\varepsilon$ по типу $y = x^3$.

Рассуждения для $\underline{u}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, аналогичны. Точки пересечения нуля функциями $\underline{u}^{(k)}$ назовём $\underline{x}^{(k)}$.

Для большего порядка можно явно уточнить итерационные процессы (173), (174), заменив области рассмотрения на $x \in (-1, 1) \backslash \overline{x}^{(k-1)}$ для $\bar{u}^{(k)}$ и $x \in (-1, 1) \backslash \underline{x}^{(k-1)}$ для $\underline{u}^{(k)}$ — здесь $[\overline{x}^{(k)}, \underline{x}^{(k)}] \subseteq [\overline{x}^{(k-1)}, \underline{x}^{(k-1)}]$, $\overline{x}^{(0)} := \overline{x}$, $\underline{x}^{(0)} := \underline{x}$, а в качестве нулевых итераций в самих процессах $(\overline{u}^{(0)}, \overline{v}^{(0)}) = (\overline{U}_n, \overline{V}_n)$ и $(\underline{u}^{(0)}, \underline{v}^{(0)}) = (\underline{U_n}, \underline{V_n})$.

В конце остаётся заменить в рассуждениях n на $n + 2$ (поэтому требуется $C^{(n+3)}$ гладкость функций $f^{(\mp)}$ и g), и с учётом (199), переходящим искомую оценку, Теорема 5.1 доказана во всей полноте. ■

Замечание 5.2. *Для любого решения задачи* (5)*, заключённого между* $\big(\underline{U_n}(x, \varepsilon), \underline{V_n}(x, \varepsilon)\big)$ *и* $\big(\overline{U}_n(x, \varepsilon), \overline{V}_n(x, \varepsilon)\big)$*, пара функций* $(U_n(x, \varepsilon), V_n(x, \varepsilon))$ *является равномерным асимптотическим приближением одинаковой точности.*

Заключение

Проведён подробный анализ для одномерной (7),(9) и двумерной (6),(8) параболических задач в отношении гладких решений с пограничными слоями и внутренним переходным слоем, порождаемым разрывом первого рода правых частей (реактивных членов) по пространственной переменной. Специального развёрнутого исследования этих задач в пространствах с размерностью 3 и выше не требуется по причине универсальности метода Вишика–Люстерника — достаточно обозначить технические отличия от 2D случая и указать гладкость границы области и многообразия разрыва.

В задаче с разрывом по первой из искомых переменных доказано существование гладкого решения, пересекающего единожды уровень разрыва и имеющего внутренний переходный и пограничные слои.

Доказанные в обоих случаях существование и гладкость решений, а также корректность асимптотического приближения могут служить хорошим подспорьем для разработки численных методов решения исследованных задач, которые являются жёсткими.

Для задачи с известной локализацией разрыва возможен счёт на установление, поскольку доказаны локальная единственность и асимптотическая устойчивость решения.

Перспективным направлением, где могут быть применены результаты диссертационной работы, является исследование изученных задач в контексте стационирования бегущих фронтов, что в настоящее время находит обширное применение в биофизике и других дисциплинах, использующих нелинейные модели распространения волн, — оно имеет свои, иные особенности, обусловленные разрывами правых частей.

Список литературы

[1] *Сидорова А. Э., Мухартова Ю. В.* Пространственно-временная модель урбоэкосистем как сопряженных активных сред // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2013. — № 5. — С. 65–70.

[2] *Сидорова А. Э., Мухартова Ю. В. Яковенко Л. В.* Урбоэкосистемы как суперпозиция сопряженных активных сред // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2014. — № 5. — С. 29–35.

[3] *Левашова Н. Т., Мельникова А. А., Лукьяненко Д. В., Сидорова А. Э., Быцюра С. В.* Моделирование урбоэкосистем как процессов самоорганизации // *Матем. моделирование.* — 2017. — Т. 29, № 11. — С. 40–52.

[4] *Сидорова А. Э., Левашова Н. Т., Мельникова А. А. Семина А. Е.* Модель структурообразования урбоэкосистем как процесс автоволновой самоорганизации в активных средах // *Матем. биология и биоинформ.* — 2017. — Т. 12, № 1. — С. 186–197.

[5] *Sidorova A. E., Levashova N. T., Semina A. E. Mel'nikova A. A.* The Application of a Distributed Model of Active Media for the Analysis of Urban Ecosystems Development // *Mathematical Biology and Bioinformatics.* — 2018. — Vol. 13, no. 2. — P. 454–465.

[6] *Levashova N. T., Sidorova A. E., Semina A. E., Ni M.* A spatio-temporal autowave model of shanghai territory development // *Sustainability.* — 2019. — Vol. 11, no. 13. — P. 3658 (1–13).

[7] *Левашова Н. Т., Генералов Е. А., Сидорова А. Э., Гольцов А. Н.* Нелинейность модульного типа в моделировании роста опухолевого сфероида // *ТМФ.* — 2025. — Т. 224, № 1. — С. 118–128.

[8] *Левашова Н. Т., Мухартова Ю. В., Давыдова М. А. и др.* Применение теории контрастных структур для описания поля скорости ветра в пространственно-неоднородном растительном покрове // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2015. — № 3. — С. 3–10.

[9] *Левашова Н. Т., Мухартова Ю. В., Ольчев А. В.* Трёхмерное моделирование турбулентного переноса в приземном слое атмосферы с применением теории контрастных структур // *Компьютерные исследования и моделирование.* — 2016. — Т. 8, № 2. — С. 355–367.

[10] *Левашова Н. Т., Мухартова Ю. В., Ольчев А. В.* Два подхода к описанию турбулентного переноса в приземном слое атмосферы // *Математическое моделирование.* — 2017. — Т. 29, № 5. — С. 46–60.

[11] *Давыдова М. А., Нечаева А. Л.* Асимптотически устойчивые периодические решения в одной задаче атмосферной диффузии примесей: асимптотика, существование, единственность // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2020. — Т. 60, № 3. — С. 451–461.

[12] *Аргун Р. Л., Левашова Н. Т., Полежаева Е. В.* Асимптотика решения системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в модели распространения лесного пожара // *ТМФ.* — 2025. — Т. 224, № 2. — С. 243–256.

[13] *Михайлов Е. А.* Задачи с малым параметром и распространение фронтов в теории галактического динамо // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2015. — № 2. — С. 27–31.

[14] *Mikhailov E. A.* Wavefronts of the magnetic field in galaxies: asymptotic and numerical approaches // *Magnetohydrodynamics.* — 2016. — Vol. 52, no. 1. — P. 117–125.

[15] *Белов А. А., Калиткин Н. Н., Кузьмина Л. В.* Моделирование химической кинетики в газах // *Математическое моделирование.* — 2016. — Т. 28, № 8. — С. 46–64.

[16] *Булатов П. Е., Белов А. А., Калиткин Н. Н.* Расчет химической кинетики явными схемами с геометрически-адаптивным выбором шага // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* — 2018. — № 173. — С. 1–32.

[17] *Левашова Н. Т., Николаева О. А., Пашкин А. Д.* Моделирование распределения температуры на границе раздела вода-воздух с использованием теории контрастных структур // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2015. № 5. — С. 12–16.

[18] *Щепакина Е. А.* Условия безопасности воспламенения горючей жидкости в пористом изоляционном материале // *Сиб. журн. индустр. матем.* — 2002. — Т. 5, № 3. — С. 162–169.

[19] *Щепакина Е. А.* Притягивающе-отталкивающие интегральные поверхности в задачах горения // *Математическое моделирование.* — 2002. — Т. 14, № 3. — С. 30–42.

[20] *Щепакина Е. А.* Сингулярные возмущения в задаче моделирования безопасных режимов горения // *Математическое моделирование.* — 2003. — Т. 15, № 8. — С. 113–117.

[21] *Голодова Е.С., Щепакина Е. А.* Моделирование безопасных процессов горения с максимальной температурой // *Математическое моделирование.* — 2008. — Т. 20, № 5. — С. 55–68.

[22] *Norbury J., Stuart A. M.* Parabolic Free Boundary Problems Arising in Porous Medium Combustion. *IMA Journal of Applied Mathematics.* — 1987. — Vol. 39. — P. 241–257.

[23] *Norbury J., Stuart A. M.* Parabolic Free Boundary Problems Arising in Porous Medium Combustion. *IMA Journal of Applied Mathematics.* — 1988. — Vol. 40. — P. 217–234.

[24] *Norbury J., Stuart A. M.* Travelling Combustion Waves in a Porous Medium. Part I-Existence. *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 1988. — Vol. 48, no. 1. — P. 155–169.

[25] *Norbury J., Stuart A. M.* Travelling Combustion Waves in a Porous Medium. Part II-Stability. *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 1988. — Vol. 48, no. 2. — P. 374–392.

[26] *Васильева А. Б.* О контрастных структурах в системах сингулярно возмущенных уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 1994. — Т. 34, № 8–9. — С. 1168–1178.

[27] *Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2012. — Т. 52, № 11. — С. 1983–2003.

[28] *Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т., Мельникова А. А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2013. — Т. 53, № 9. — С. 1427–1447.

[29] *Нефёдов Н. Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // *Дифференц. уравнения.* — 1995. — Т. 31, № 4. — С. 719–722.

[30] *Левашова Н. Т., Самсонов Д. С.* Устойчивость стационарного решения с двухмасштабным внутренним переходным слоем системы уравнений типа активатор-ингибитор // *ТМФ.* — 2023. — Т. 215, № 2. — С. 269–288.

[31] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.

[32] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений — М.: Наука, 1973. — 272 с.

[33] Pao C. V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations — Plenum Press, New York, 1992. — p. XV, 777.

[34] *Мельникова А. А.* Существование и устойчивость периодического решения типа фронта в двухкомпонентной системе параболических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2019. — Т. 59, № 7. — С. 1184–1200.

[35] *Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т.* Об одной сингулярно возмущенной системе типа реакция-диффузия-перенос в случае малой диффузии и быстрых реакций // *Фундамент. и прикл. матем.* — 1995. — Т. 1, № 4. — С. 907–922.

[36] *Бутузов В. Ф., Левашова Н. Т.* О системе типа реакция-диффузия-перенос в случае малой диффузии и быстрых реакций // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2003. — Т. 43, № 7. — С. 1005–1017.

[37] *Левашова Н. Т., Мельникова А. А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущённой системе параболических уравнений // *Дифференц. уравнения.* — 2014. — Т. 51, № 3. — С. 339–358.

[38] *Нефёдов Н. Н., Ни М. К.* Внутренние слои в одномерном уравнении реакция диффузия с разрывным реактивным членом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2014. — Т. 55, № 12. — С. 2042–2048.

[39] *Пан Я Ф., Ни М. К., Давыдова М. А.* Контрастные структуры в задачах для стационарного уравнения реакция–диффузия–адвекция с разрывной нелинейностью // *Матем. заметки.* — 2018. — Т. 104, № 5. — С. 755–766.

[40] *Левашова Н. Т., Нефёдов Н. Н., Орлов А.О.* Стационарное уравнение реакции–диффузии с разрывным реактивным членом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2017. — Т. 57, № 5. — С. 854–866.

[41] *Левашова Н. Т., Нефёдов Н. Н., Орлов А. О.* Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция-диффузия с разрывным источником // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2019. — Т. 59, № 4. — С. 611–620.

[42] *Волков В. Т., Нефёдов Н. Н.* Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2006. — Т. 46, № 4. — С. 615–623.

[43] *Божевольнов Ю. В., Нефедов Н. Н.* Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2010. — Т. 50, № 2. — С. 276–285.

[44] *Левашова Н. Т., Нефёдов Н. Н., Ягремцев А. В.* Контрастные структуры в уравнениях реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной адвекции // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2013. — Т. 53, № 3. — С. 35–45.

[45] *Антипов Е. А., Левашова Н. Т., Нефёдов Н. Н.* Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2014. — Т. 54, № 10. — С. 1594–1607.

[46] *Левашова Н. Т., Николаева О. А.* Асимптотическое исследование решения уравнения теплопроводности вблизи границы раздела двух сред // *Модел. и анализ информ. систем.* — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 339–352.

[47] *Levashova N. T., Nefedov N. N., Nikolaeva O. A., Orlov A. O., Panin A. A.* The solution with internal transition layer of the reaction-diffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // *Math Meth Appl Sci.* — 2018. — Vol. 41, no. 18. — P. 9203–9217.

[48] *Левашова Н. Т., Нефёдов Н. Н., Николаева О. А.* Решение с внутренним переходным слоем двумерной краевой задачи реакция-диффузия-адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми // *ТМФ.* — 2021. — Т. 207, № 2. — С. 293–309.

[49] *Лукьяненко Д. В., Волков В. Т., Нефёдов Н. Н., Ягола А. Г.* Применение асимптотического анализа для решения обратной задачи определения коэффициента линейного усиления в уравнении типа Бюргерса // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2019. — № 2. — С. 38–43.

[50] *Nefedov N. N., Volkov V. T.* Asymptotic solution of the inverse problem for restoring the modular type source in burgers' equation with modular advection // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems.* — 2020. — Vol. 28, no. 5. — P. 950–959.

[51] *Волков В. Т., Нефёдов Н. Н.* Асимптотическое решение коэффициентных обратных задач для уравнений типа Бюргерса // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2020. — Т. 60, № 6. — С. 975–984.

[52] *Аргун Р. Л., Горбачев А. В., Лукьяненко Д. В., Шишленин М. А.* Особенности численного восстановления граничного условия в обратной задаче для уравнения типа реакция-диффузия-адвекция с данными о положении фронта реакции // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2022. — Т. 62, № 3. — С. 451–461.

[53] *Леонов А. С., Нефёдов Н. Н., Шаров А. Н., Ягола А. Г.* “Быстрое” решение трехмерной обратной задачи квазистатической эластографии с помощью метода малого параметра” // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2023. — Т. 63, № 3. — С. 449–464.

[54] *Быцюра С. В., Левашова Н. Т.* Верхнее и нижнее решения для системы уравнений типа ФицХью–Нагумо // *Моделирование и анализ информационных систем.* — 2018. — Т. 25, № 1. — С. 33–53.

[55] *Волков В. Т., Лукьяненко Д. В., Нефёдов Н. Н.* Аналитико-численный подход для описания периодических по времени движущихся фронтов в сингулярно возмущенных моделях реакция–диффузия–адвекция // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2019. — Т. 59, № 1. — С. 50–62.

[56] *Нефёдов Н. Н., Никулин Е. И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодических двумерных контрастных структур в задаче со слабой линейной адвекцией // *Математические заметки.* — 2019. — Т. 106, № 5. — С. 708–722.

[57] *Коцюбинский К. А., Левашова Н. Т., Мельникова А. А.* Стабилизация решения вида движущегося фронта в уравнении реакция—диффузия // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* — 2021. — № 6. — С. 3–11.

[58] *Argun R. L., Volkov V. T., Lukyanenko D. V.* Numerical simulation of front dynamics in a nonlinear singularly perturbed reaction–diffusion problem // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2022. — Vol. 412. — P. 114294.

[59] *Волков В. Т., Нефёдов Н. Н.* Асимптотическое решение задачи граничного управления для уравнения типа Бюргерса с модульной адвекцией и линейным усилением // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2022. — Т. 62, № 11. — С. 1851–1860.

[60] *Волков В. Т., Нефёдов Н. Н.* Граничное управление фронтами в уравнении типа Бюргерса с модульной адвекцией и периодическим усилением // *ТМФ.* — 2022. — Т. 212, № 2. — С. 179–189.

[61] *Nefedov, N. N., Nikulin E. I., Orlov A. O.* Front Motion in a Problem with Weak Advection in the Case of a Continuous Source and a Modular-Type Source // *Differential Equations.* — 2022. — Vol. 58, no. 6. — P. 757–770.

[62] *Hedberg C.M., Rudenko O.V.* Collisions, mutual losses and annihilation of pulses in a modular nonlinear medium // *Nonlinear Dyn.* — 2017. — Vol. 90, — P. 2083–2091.

[63] *Нефёдов Н.Н., Руденко О.В.* О движении фронта в уравнении типа Бюргерса с квадратичной и модульной нелинейностью при нелинейном усилении // *Докл. АН.* — 2018. — Т. 478, № 3. — С. 274–279.

[64] *Ни М. К., Нефёдов Н. Н., Левашова Н. Т.* Асимптотика решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // *Дифференциальные уравнения.* — 2020. — Т. 56, № 3. — С. 303–316.

[65] *Ни М. К., Чи К., Левашова Н.Т.* О внутреннем слое для сингулярно возмущённого уравнения с разрывной правой частью // *Дифференц. уравнения.* — 2020. — Т. 56, № 10. — С. 1310–1317.

[66] *Нефёдов Н. Н., Никулин Е. И., Орлов А. О.* О периодическом внутреннем слое в задаче реакция-диффузия с источником модульно-кубичного типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2020. — Т. 60, № 9. — С. 1513–1532.

[67] *Nefedov, N. N., Nikulin, E. I., Orlov, A. O.* Existence of Contrast Structures in a Problem with Discontinuous Reaction and Advection // *Russ. J. Math. Phys.* — 2022. — Vol. 29, — P. 214–224.

[68] *Нефёдов Н. Н.* Периодические контрастные структуры в задаче реакция-диффузия с быстрой реакцией и малой диффузией // *Матем. заметки.* — 2022. — Т. 112, № 4. — С. 601–612.

[69] *Руденко О. В.* Линеаризуемое уравнение для волн в диссипативных средах с модульной, квадратичной и квадратично-кубичной нелинейностями // *Докл. АН.* — 2016. — Т. 471, № 1. — С. 23–27.

[70] *Руденко О.В.* Модульные солитоны // *Докл. АН.* — 2016. — Т. 471, № 6. — С. 451–454.

[71] *Нефёдов Н. Н., Никулин Е. И.* О неустойчивых решениях с немонотонным пограничным слоем в двумерной задаче реакция-диффузия // *Математические заметки.* — 2021. — Т. 110, № 6. — С. 899–910.

[72] *Нефёдов Н. Н., Орлов А. О.* Существование и устойчивость решений с внутренним переходным слоем уравнения реакция-диффузия-адвекция с KPZ-нелинейностью // *Дифференциальные уравнения.* — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1007–1021.

[73] *Нефёдов Н. Н., Орлов А. О.* О неустойчивых контрастных структурах в одномерных задачах реакция-диффузия-адвекция с разрывными источниками // *ТМФ.* — 2023. — Т. 215, № 2. — С. 297–310.

[74] *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости — М.: Наука, 1982. — 320 с.

[75] *Нефёдов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция-диффузия-адвекция: теория и применение // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2074–2094.

[76] *De Coster C., Obersnel F., Omari P. A.* A qualitative analysis via lower and upper solutions of first order periodic evolutionary equations with lack of uniqueness // *Handbook of differential equations: ordinary differential equations*. — 2006. — Vol.3. — P. 203–339.

[77] *Bögelein, V., Duzaar, F., Gianazza, U.* Sharp boundedness and continuity results for the singular porous medium equation // *Isr. J. Math.* — 2016. — Vol. 214. — P. 259–314.

[78] *Bögelein V., Duzaar F., Korte R., Scheven C.* The higher integrability of weak solutions of porous medium systems // *Advances in Nonlinear Analysis.* — 2018. — Vol. 8, no. 1. — P. 1004–1034.

[79] *Bögelein, V., Duzaar, F., Marcellini, P., Scheven, C.* Doubly Nonlinear Equations of Porous Medium Type. *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 2018. — Vol. 229. — P. 503–545.

[80] *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью — М.: Наука, 1985. — 224 с.

[81] *Carl, S., Le, V.K., Motreanu, D.* Nonsmooth Variational Problems and Their Inequalities. Comparison Principles and Applications. — Springer, New York, 2007. — p. X, 398.

[82] *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа — М.: Наука, 1973. — 576 с.

[83] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа — М.: Наука, 1967. — 736 с.

[84] *Maugeri A., Palagachev D. K., Softova L. G.* Elliptic and Parabolic Equations with Discontinuous Coefficients, (2000). — WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH, Berlin, 2000. — p. 256.

[85] *Carl S., Le V. K.* Multi-valued variational inequalities and inclusions. — Springer, Cham, 2021.

[86] *Carl S.* The monotone iterative technique for a parabolic boundary value problem with discontinuous nonlinearity // *Nonlinear Anal.* — 1989. — Vol. 13, no. 12. — P. 1399–1407.

[87] *Carl S.* On a parabolic boundary value problem with discontinuous nonlinearity // *Nonlinear Anal.* — 1989. — Vol. 15, no. 11. — P. 1091–1095.

[88] *Carl S.* On extremal solutions of an elliptic problem involving discontinuous nonlinearities // *Differential and Integral Equations.* — 1992. — Vol. 5, no. 3. — P. 581–589.

[89] *Carl S.* A combined variational–monotone iterative method for elliptic boundary value problems with discontinuous nonlinearity // *Applicable Analysis.* — 1992. — Vol. 43, no. 1–2. — P. 21–45.

[90] *Carl S.* On the existence of extremal weak solutions for a class of quasilinear parabolic problems // *Differential and Integral Equations.* — 1993. — Vol. 6, no. 6. — P. 1493–1505.

[91] *Carl S., Grossmann C.* Smoothing and monotone interations for elliptic differential inclusions // *Applied Mathematics and Computation.* — 1996. — Vol. 74, no. 1. — P. 15–35.

[92] *Carl S., Heikkilä S.* Discontinuous reaction–diffusion equations under discontinuous and nonlocal flux conditions // *Math. Comput. Modelling.* — 2000. — Vol. 32. — P. 1333–1344.

[93] *Carl S., Motreanu D.* Extremal solutions of quasilinear parabolic inclusions with generalized Clarke's gradient // *Journal of Differential Equations.* — 2003. — Vol. 191, no. 1. — P. 206–233.

[94] *Carl S., Le V. K.* Sub-supersolution method for quasilinear parabolic variational inequalities // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* — 2004. — Vol. 293, no. 1. — P. 269–284.

[95] *Carl S.* Multiple solutions of quasilinear periodic-parabolic inclusions // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.* — 2010. — Vol. 72, no. 6. — P. 2909–2922.

[96] *Carl S., Le V.K.* Multi-Valued Parabolic Variational Inequalities and Related Variational-Hemivariational Inequalities // *Advanced Nonlinear Studies.* — 2014. — Vol. 14, no. 3. — P. 631–659.

[97] *Carl S., Motreanu D.* Extremal solutions for nonvariational quasilinear elliptic systems via expanding trapping regions // *Monatshefte für Mathematik.* — 2017. — Vol. 182, no. 4. — P. 801–821.

[98] *Carl S., Le V.K.* On systems of parabolic variational inequalities with multivalued terms // Monatsh Math. — 2021. — Vol. 194. — P. 227–260.

[99] *Павленко В. Н., Ульянова О. В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Матем. — 1998. — Т. 42, № 11. — С. 69–76.

[100] *Павленко В.Н., Ульянова О. В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений параболического типа с разрывными нелинейностями // *Дифференц. уравнения.* — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 499–504.

[101] *Павленко В. Н.* Сильные решения периодических параболических задача с разрывными нелинейностями // *Дифференц. уравнения.* — 2016. — Т. 52, № 4. — С. 528–538.

[102] *Павленко В. Н., Асрян А. А.* Существование периодических решений дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью // *Челяб. физ.-матем. журн.* — 2016. — Т. 4, № 3. — С. 323–332.

[103] *Feireisl E., Norbury J.* Some existence, uniqueness and nonuniqueness theorems for solutions of parabolic equations with discontinuous nonlinearities // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics.* — 1991. — Vol. 119, no. 1–2. — P. 1–17.

[104] *Deguchi, H.* Existence, uniqueness and non-uniqueness of weak solutions of parabolic initial-value problems with discontinuous nonlinearities // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics.* — 2005. — Vol. 135, no. 6. — P. 1139–1167.

[105] *Douchet, J.* The number of positive solutions of a non-linear problem with discontinuous non-linearity// *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics.* — 2005. — Vol. 90, no. 3–4. — P. 281–291.

[106] *Zhuoqun Wu, Jingxue Y., Chunpeng W.* Elliptic and Parabolic Equations — WORLD SCIENTIFIC, 2006. — p. 424.

[107] *Stakgold I., Holst M.* Green's Functions and Boundary Value Problems — John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011.

[108] *Корпусов М. О.* Лекции о параболических уравнениях второго порядка — М.: Физический факультет МГУ, 2023. — 292 с.

[109] *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа — М.: МИР, 1968.

[110] *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка — М.: Наука, 1989.

[111] *Fife P. C., McLeod J. B.* The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, — 1977. — Vol. 65, no. 4. — P. 335–361.

[112] *Канель Я. И.* О стабилизации решений уравнений теории горения при финитных начальных функциях // *Матем. сб.* — 1964. — Т. 65, № 107. — С. 398–413.

[113] *Nefedov N. N., Sakamoto K.* Multi-dimensional stationary internal layers for spatially inhomogeneous reaction-diffusion equations with balanced nonlinearity. *Hiroshima Math. J.* — 2003. — Vol. 33, no. 3. — P. 391–432.

[114] *Volpert A. A., Volpert Vit. A., Volpert Vl. A.* (1994) Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems. — American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[115] *Бутузов В. Ф., Неделько И. В.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений с разными степенями малого параметра // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2000. — Т. 40, № 6. — С. 877–899.