

ОТЗЫВ

научного руководителя на диссертацию

Тищенко Богдана Викторовича

«Решения с переходными слоями в системе уравнений реакция-диффузия с разрывными источниками различной интенсивности»,

представленную на соискание учёной степени кандидата

физико-математических наук по специальности

1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация Тищенко Б.В. посвящена исследованию решений с внутренним переходным и пограничными слоями сингулярно возмущённых систем реакция-диффузия с различными степенями малого параметра при старших производных, описывающих процессы в средах с разрывными характеристиками. Системы сингулярно возмущённых уравнений находят своё применение, например, в моделях биофизики, химической и физической кинетике, где моделируемые физические величины имеют резко изменяющиеся характеристики в областях, пространственный размер которых много меньше размера всей модельной области. В таком случае говорят о наличии внутреннего переходного слоя в постановке задачи, а функции, обладающие большим градиентом во внутреннем переходном слое, называют контрастными структурами. В диссертации Тищенко Б.В. проводится аналитическое исследование решений систем уравнений с разрывными правыми частями, которые используются в моделях автоволновых процессов в подобных средах.

Ранее методы асимптотического анализа, на которых базируется диссертация Тищенко Б.В., применялись для систем сингулярно возмущённых уравнений типа реакция-диффузия, имеющих решения вида контрастных структур, в случае когда реактивные слагаемые описывались гладкими функциями, в частности Васильевой А.Б., Бутузовым В.Ф. с соавторами. Кроме того, более двух десятков работ, касающихся скалярных задач с разрывными коэффициентами, опубликовано авторами, входящими в исследовательскую группу, занимающуюся асимптотической теорией на кафедре математики физического факультета МГУ. Новизна исследований, проведённых в диссертационной работе Тищенко Б.В., состоит в получении результатов, касающихся существования, единственности и устойчивости решений с внутренним переходным слоем систем уравнений с разрывными реактивными членами.

Основным методом исследования в диссертации является асимптотический метод дифференциальных неравенств. Это особый способ построения верхнего и нижнего решений задачи как модификаций асимптотического приближения решения. Как следует из принципа сравнения, точное решение задачи заключено между верхним и нижним решениями. Применение этого подхода особенно эффективно при анализе систем, ведь они значительно более трудоёмкие как для аналитического, так и численного исследования, чем скалярные уравнения. Кроме того, применение асимптотического метода дифференциальных неравенств позволяет сформулировать условия существования и устойчивости решений, которые можно использовать при анализе прикладных задач.

Область локализации переходного слоя зачастую можно определить на основе асимптотики низкого порядка (нулевого или первого). Это позволяет получить хорошее начальное приближение для численного счёта, которое будет находиться в области

устойчивости стационарного решения, тем самым снимается вопрос обоснованности численного решения.

Работа Тищенко Б. В является преимущественно теоретической, её цель – исследование контрастных структур в нелинейных двухкомпонентных системах реакция-диффузия с различными степенями малого параметра при старших производных в следующих случаях:

- 1) с пограничными слоями и гладкими реактивными членами;
- 2) с разрывными правыми частями (реактивными членами), имеющими разрыв первого рода в известной внутренней точке интервала или на известной внутренней гладкой кривой области в, соответственно, одномерном и двумерном пространствах, а также при различных условиях квазимонотонности;
- 3) с разрывной по первой из искомым переменных правой частью первого уравнения и гладкой по всем переменным правой частью второго уравнения в одномерном случае.

С учётом сказанного выше, тематика исследования Тищенко Б.В. является актуальной как в теоретическом плане, так и в практическом.

Структурно диссертация Тищенко Б.В. состоит из введения, обзора литературы, пяти содержательных глав, заключения и списка литературы. Объём диссертации – 112 стр.

Введение представляет собой общую характеристику работы, в частности, в нём обосновывается её актуальность, приводятся цели, новизна, значимость и основные результаты работы.

Обзор литературы посвящён краткой истории исследований в области асимптотической теории, а также некоторым современным результатам в области задач с разрывными членами.

Первая глава является вспомогательной – во избежание в дальнейшем излишних повторений в ней приводится общая постановка задачи, тогда как в последующих главах она конкретизируется; также приводятся универсальные обозначения и неоднократно используемые в работе утверждения – леммы о положительности.

Вторая глава посвящена одномерной параболической задаче с гладкими реактивными членами – её решение имеет только пограничные слои. Методом Васильевой построено асимптотическое приближение решения стационарной задачи, при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств построены верхнее и нижнее решения этой задачи как модификации асимптотического приближения для четырёх случаев квазимонотонности правых частей; доказано существование классического решения стационарной задачи, его локальная единственность и асимптотическая устойчивость как решения начально-краевой задачи.

Третья глава – это исследование одномерной параболической задачи с разрывными реактивными членами, имеющими разрыв первого рода в известной внутренней точке рассматриваемого отрезка. Решение этой задачи имеет как пограничные слои, которые с точностью до обозначений идентичны изученным во второй главе, так и внутренний

переходный слой, который и лежит в фокусе внимания. Методом Васильевой построено асимптотическое приближение решения стационарной задачи. При помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств построены негладкие верхнее и нижнее решения этой задачи как модификации асимптотического приближения для четырёх случаев квазимонотонности правых частей. Проверена корректность применения метода монотонных итераций с использованием лемм о положительности для функций из пространств Соболева, и на его основе в совокупности с методами теории потенциала доказано существование гладкого решения стационарной задачи, его локальная единственность и асимптотическая устойчивость как решения начально-краевой задачи.

В четвёртой главе проведено обобщение результатов глав 2 и 3 на случай двумерной области с достаточно гладкой границей и достаточно гладкой известной кривой разрыва реактивных членов. Для построения асимптотического приближения дополнительно использован метод Вишика-Люстерника. В конце главы приведён пример, в котором численно-аналитически получено асимптотическое приближение нулевого порядка решения модельной задачи, а также иллюстрируется стабилизация численного решения начально краевой задачи к решению стационарной задачи. В упомянутом примере рассмотрена постановка задачи, использовавшаяся в автоволновой модели развития мегаполисов, разработанной совместным научным коллективом кафедр биофизики и математики физического факультета МГУ.

Пятая глава посвящена исследованию одномерной системы ОДУ, у которой реактивное слагаемое в одном из уравнений разрывно по искомой переменной вдоль нулевого уровня этой переменной, а все функции, входящие во второе уравнение, являются гладкими. Методом Васильевой построено асимптотическое приближение решения задачи вида контрастной структуры, при помощи асимптотического метода дифференциальных неравенств построены верхнее и нижнее решения этой задачи как модификации асимптотического приближения решения для случая квазимонотонности одного знака функций в правых частях уравнений системы; методом монотонных итераций с использованием методов теории потенциала доказано существование гладкого решения.

В заключении приводятся основные результаты диссертации, а также перспективы их применения.

Список литературы содержит 105 наименований.

В ходе исследования получены строго обоснованные новые результаты о существовании, единственности и асимптотической устойчивости решений рассмотренных задач и предложены модернизации асимптотического метода дифференциальных неравенств, которые позволяют применять этот метод для систем с разрывными слагаемыми. Результаты, полученные Тищенко Б.В., являются новыми и представляют научный и практический интерес, поскольку могут быть использованы для построения и обоснования моделей, например, в биофизике, а также для разработки эффективных численных методов. Кроме того, полученные результаты о существовании и устойчивости обосновывают корректность численного решения, полученного, в частности, при помощи счёта на установление в задаче с известной локализацией разрыва.

Результаты диссертации Тищенко Б.В. опубликованы в 5 статьях, 2 из которых написаны им лично, 3 статьи написаны в соавторстве. Результаты, представленные в диссертации, получены Тищенко Б.В. лично.

Четыре статьи Тищенко Б. В. опубликованы в отечественных журналах (ВМУ, ЖВМ и МФ, ТМФ), индексирующихся РИНЦ; переводные версии этих журналов индексируются в WoS и SCOPUS. Пятая работа, касающаяся тематики диссертации, опубликована в журнале «Algorithms», индексируемом в WoS и SCOPUS, входящем во второй квартиль базы данных SCOPUS (двухлетний импакт-фактор (2022) – 2,3; CiteScore – 3,7). Также результаты доложены на 6 конференциях и в рамках научно-исследовательского семинара научной группы по асимптотическим методам кафедры математики физического факультета МГУ.

Считаю, что диссертация Тищенко Б.В. «Решения с переходными слоями в системе уравнений реакция-диффузия с разрывными источниками различной интенсивности» соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова». Диссертация рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.011.8 по специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук
профессор, заведующий кафедры математики
физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова
Нефёдов Николай Николаевич

Нефёдов Н. Н.
13 сентября 2023 г.