

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

На правах рукописи

Чистяков Иван Александрович

**Методы приближённого решения
задач управления нелинейными системами
за счёт их кусочной линеаризации**

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Точилин Павел Александрович

Москва — 2026

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Случай нелинейности по одной переменной	23
1.1 Постановка задачи	23
1.2 Кусочная линейаризация системы на объединении гиперполос	25
1.3 Метод динамического программирования	28
1.3.1 Основные понятия	28
1.3.2 Аппроксимация функции цены	31
1.4 Оценка множества разрешимости	33
1.4.1 Позиционное управление для кусочно-линейной системы	33
1.4.2 Изменение функции вдоль траектории	34
1.4.3 Итоговая оценка множества разрешимости	40
1.5 Численный метод	41
1.5.1 Поиск псевдорешения	42
1.5.2 О выборе параметров численного метода	43
Глава 2. Случай нелинейности по нескольким переменным	45
2.1 Математическая модель системы управления	45
2.2 Кусочная линейаризация системы на совокупности симплексов	46
2.3 Кусочно-квадратичная оценка функции цены	51
2.3.1 Аппроксимация функции цены	51
2.3.2 Построение непрерывной аппроксимации	53
2.3.3 Граничные условия	56
2.3.4 Предложенное управление	57
2.3.5 Основной результат	59
2.4 Регуляризирующие члены	60
Глава 3. Применение разрывных аппроксимаций	62
3.1 Достижимость симплексов	63
3.2 Алгоритм построения разрывного управления	64
3.3 Изменение нумерации симплексов	66
3.4 Основной результат	68
3.5 Оптимизация вычислений	71

3.5.1	Поиск управлений в вершинах симплексов	71
3.5.2	Переиспользование результатов	72
Глава 4.	Анализ результатов	73
4.1	Альтернативные классы кусочно-заданных функций	73
4.1.1	Кусочно-аффинная аппроксимация функции цены	73
4.1.2	Кусочно-кубическая аппроксимация функции цены	75
4.2	Альтернативные алгоритмы поиска управлений	76
4.3	Примеры вычислений	79
4.3.1	Управление квадрокоптером	79
4.3.2	Маятник на тележке	82
4.3.3	Маятник с электромотором	87
4.3.4	Линейная система	91
	Заключение	94
	Список литературы	95
	Публикации автора по теме диссертации	105

Введение

Актуальность темы исследования. Тема диссертационной работы относится к одному из важных направлений в области дифференциальных уравнений — теории оптимального управления. Автором рассматривается задача целевого управления: требуется перевести систему обыкновенных дифференциальных уравнений из известного начального состояния в заданное множество конечных состояний, при наличии ограничений на управляющее воздействие. Особый интерес при этом представляют нелинейные системы, поскольку, с одной стороны, с их помощью описывается большинство исследуемых процессов, а с другой — зачастую для них чрезвычайно сложно получить точное аналитическое решение.

Один из основных вопросов заключается в том, существует ли решение поставленной задачи. Поскольку ответ может оказаться отрицательным (например, в заданное множество невозможно попасть за указанный промежуток времени), рассматриваются задачи попадания в как можно меньшую окрестность целевого множества. Такая постановка сопряжена с понятиями *множества достижимости* — совокупности всех точек, в которые можно попасть из заданной точки при использовании допустимых управлений, — и *множества разрешимости* (также *попятное множество достижимости*) — совокупности всех начальных точек, при которых поставленная задача управления разрешима. Нахождение этих множеств для нелинейных систем является трудоёмким процессом, в настоящее время точный результат известен лишь для некоторых простых случаев (например, для машины Дубинса [26] и для трёхмерной каскадной системы управления [30]). В то же время во многих практических задачах, таких как планирование движения с учётом огибания препятствий [96] или определение положения воздушного судна [107], требуется если не точное выражение для границы множеств, то хотя бы наличие некоторых гарантированных оценок. В данной работе исследуются численные методы построения *внутренних оценок множества разрешимости*, т.е. выделяется подмножество множества начальных точек, при которых задача целевого управления гарантированно имеет решение.

При построении траекторий системы могут использоваться различные классы управлений. Например, *программные управления*, когда управляющие функции зависят только от времени. Для их нахождения применяется развитый математический аппарат на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [22; 28; 55], а итоговые управления вычисляются заранее, до проведения эксперимента. Другим важным классом являются *позиционные управления* (также *управления с обратной связью*), при которых имеется зависимость от дополнительных данных, например, от вектора фазовых координат. Именно они предпочтительны

во многих прикладных задачах, поскольку в реальном времени позволяют скомпенсировать негативные эффекты от погрешности численных методов, а также от непредвиденных внешних воздействий. Поэтому данная работа сфокусирована на построении позиционных управляющих стратегий. Отметим, что если оставить за скобками возможное наличие неизвестных возмущений, то множества достижимости при использовании указанных классов совпадают.

Для систем с непрерывной динамикой одним из основных способов оценки множеств достижимости (разрешимости) является переход к задаче разрешения соответствующего дифференциального включения. При этом правая часть дифференциального включения может подменяться более простым объектом: например, в [77] она в каждый момент времени ограничивается многомерным параллелепипедом, в [112] — шаром или эллипсоидом, а в работах [49; 75; 76] рассматриваются оценки на основе разложения в ряд Тейлора. В таком случае используются методы численного интегрирования и различные алгоритмы вычислительной геометрии для работы со множествами. Кроме того, для дифференциальных включений можно построить сеточную аппроксимацию [24; 44] и проанализировать погрешность полученного решения.

Чтобы понизить вычислительную сложность, предложены методы, позволяющие представить множества достижимости с помощью множеств более простой формы. В частности, в работах А.Б. Куржанского [88—90], а также ряда других авторов [48; 56; 109; 114] применительно к линейным системам был использован аппарат *эллипсоидального исчисления*, в рамках которого точное множество достижимости (разрешимости) представимо в виде объединения или пересечения, вообще говоря, бесконечного числа эллипсоидов. Выбирая конечное подмножество таких эллипсоидов, можно добиться произвольной точности как внутренних, так и внешних оценок. Использование эллипсоидов в качестве аппроксимирующих множеств является оправданным механизмом гарантированного оценивания: такие объекты задаются несколькими удобными способами, класс эллипсоидов инвариантен по отношению к линейным преобразованиям, а квадратичное описание множеств позволяет легко решать возникающие задачи оптимизации. Предприняты попытки применить этот подход и для нелинейных систем: в [48; 61] предложено линеаризовать систему и ограничить погрешность аппроксимации эллипсоидом, после чего применить полученные ранее результаты; в работах [46; 47] нелинейность исходной системы представлена квадратичными членами. Позже для линейных систем были разработаны сходные теории для оценок в виде параллелотопов [12; 86] (обобщение параллелограмма в многомерных пространствах), а также зонотопов [73] (многогранники, представимые как сумма Минковского конечного числа отрезков). Эти семейства множеств используются в различных методах, поскольку замкнуты относительно суммы по

Минковскому и, как следствие, не нуждаются в дополнительной аппроксимации на каждом шаге численного интегрирования. Таким образом, итоговая погрешность в задачах с большим временным горизонтом может быть значительно понижена за счёт отсутствия *эффекта обёртывания* [87].

В действительности для описания эволюции множества достижимости во времени достаточно отслеживать не всё множество, а только его границу. На этом основана ещё одна группа методов: в таком случае сперва находится внешняя аппроксимация границы целевого множества, а затем исследуется её поведение во времени на основе интервального разложения в ряд Тейлора [93]. При этом строить описание множеств можно на основе зонотопов [84; 85] или полуалгебраических множеств [124]. Подобный подход также использован в [82] для исследования множества достижимости при выходе из строя некоторых компонентов системы, при условии, что множество достижимости исходной системы было известно. Наконец, та же идея применима к сеточным методам [10].

Другой класс алгоритмов основан на использовании метода динамического программирования, разработанного Р. Беллманом [3]. Этот подход заключается во введении вспомогательного объекта — функции цены, которая вычисляется как оптимальное значение соответствующего задаче функционала для каждой позиции системы. Позиция определяется таким образом, что функция цены удовлетворяет *принципу оптимальности* в форме полугруппового свойства, и обычно представляет собой пару объектов: момент времени и фазовые координаты системы. В таком случае функция цены является решением дифференциального уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ) в частных производных. При этом функция цены применяется для получения позиционных синтез-управлений, а множество уровня функции цены в задаче целевого управления совпадает со множеством разрешимости.

Отметим, что функция цены может оказаться негладкой, в таком случае она удовлетворяет уравнению ГЯБ лишь в точках дифференцируемости. Возникает необходимость использовать различные понятия обобщённых решений: в то время как решения в классическом смысле может не существовать, введение слабых решений (аналогично таковым в пространствах Соболева) не гарантирует единственность. В 1975 г. С.Н. Кружков представил концепцию обобщённых решений для уравнения ГЯБ эйконального типа [16], где указанная проблема решена за счёт учёта дополнительного условия — ограничения на значения второй разностной производной. Определённая таким образом конструкция не только гарантирует существование и единственность решения, но и допускает интерпретацию в соответствии с принципами Ферма и Гюйгенса в геометрической оптике. В 1980-х гг. идеи С.Н. Кружкова были развиты М.Дж. Крэндаллом и П.-Л. Лионсом [63—65], что позволило ввести понятие

обобщённого решения для более широкого класса уравнений, а также упростить доказательства приведённых теорем. Предложенное ими определение на основе вспомогательных, пробных функций называется *вязкостным решением*. Название обусловлено *методом исчезающей вязкости* [21; 25; 69; 81], который первоначально использовался для обоснования существования решения: в этом подходе исходная задача модифицируется добавлением нового слагаемого, зависящего от малого параметра ε , после чего в ответе к полученной задаче осуществляется предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$. Существуют и другие формализации: в частности, стоит выделить эквивалентное определение *минимаксного решения* [35; 36], введённое А.И. Субботиным на основе исследований в теории позиционных дифференциальных игр [13; 14].

Обобщённые решения уравнения ГЯБ могут быть найдены различными способами. В работах Н.Н. Субботиной [37; 38] минимаксные решения ищутся с использованием формул *метода характеристик*. В [39; 40; 66; 116] исследуется применение разностных схем и аппроксимирующих операторов для уравнения ГЯБ. В случае уравнений эйконального типа для построения вязкостного решения используется *метод быстрого марша* [67; 71; 111]. Временная сложность последнего линейно зависит от количества узлов сетки, и, кроме того, допускается параллельная реализация алгоритма [122]. В случае выпуклого гамильтониана разрабатываются методы на основе *формулы Лакса–Хопфа* [52] и применения различных численных методов для решения возникающей задачи оптимизации, см. [62; 92].

Поскольку поиск решения уравнения ГЯБ также является трудоёмким процессом, можно перейти к задаче построения оценок функции цены. При рассмотрении полиномиальных систем такое построение осуществимо на основе задач выпуклого программирования [123], а в более общем случае допустимо воспользоваться *принципом сравнения*, который был предложен А.Б. Куржанским [17; 91]. Он позволяет сконструировать верхние и нижние оценки функции цены путём оценивания гамильтониана в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана. Сам принцип сравнения не даёт конкретного алгоритма для построения оценок множеств достижимости (разрешимости), однако разработаны подходы для его применения к конкретным задачам управления или классам задач: например, в [33] метод используется для анализа билинейных систем, а в [115] исследуется модель динамического уницикла. В работах М.И. Гусева рассмотрены системы с нелинейными перекрёстными связями, а также системы, где можно выделить линейную часть [6–8]. Как следствие, даже при достаточно общей постановке задачи можно строить гарантированные оценки за счёт линеаризации правых частей дифференциальных уравнений. П.А. Точилин развил этот метод путём перехода к вспомогательной задаче для кусочно-линейной системы с помехой [42; 119]. Полученную

систему принято называть *гибридной* [58; 106], поскольку для её описания требуется не только указывать непрерывную динамику, но также использовать дискретную величину — номер активной (в данном случае линейной) подсистемы в текущий момент времени. Такие системы ранее рассматривались многими авторами (например, [72; 80; 104; 121]), однако особенностью указанного подхода является применение методов динамического программирования. Также см. [18—20].

При использовании принципа сравнения удобно искать верхнюю либо нижнюю оценку функции цены как приближённое решение уравнения ГЯБ в некотором параметрически заданном классе функций. К примеру, если исходная нелинейная система аппроксимируется кусочно-аффинной на множестве симплексов в фазовом пространстве, то представляется разумным строить кусочно-аффинную оценку функции цены на этом же множестве симплексов. Тогда вычисление её коэффициентов сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Вычисленная при этом функция может быть как непрерывной, так и иметь разрывы на границах симплексов [130; 42]. Последний метод также подразумевает использование разрывных управлений, что, вообще говоря, приводит к сложностям при решении задачи Коши для замкнутой системы. Однако доказано, что рассмотренные управления имеют конечное число разрывов и потому можно корректно определить траектории системы. Кроме того, точность метода может быть повышена, если рассматривать аппроксимации функции цены более сложной структуры. В частности, в работах П.А. Точилина и К.С. Маянцева [23; 41; 97] предприняты попытки обобщить подход на случай кусочно-квадратичных оценок. В диссертационной работе автором предлагается дальнейшее развитие этой идеи.

Отдельно необходимо упомянуть, что в последнее время распространяются методы, базирующиеся на алгоритмах машинного обучения. Этому способствует растущая популярность нейронных сетей [5; 74] и средств автоматического дифференцирования [53]. Так, в работах [60; 100] тоже ищется приближённое решение уравнения ГЯБ, из которого впоследствии выводится синтез-управление, однако функция цены рассматривается в классе нейросетевых моделей. Поиск управления может осуществляться и напрямую: в работе [105] в виде нейронной сети представляется сама управляющая стратегия, обучение которой происходит на основе оптимальных траекторий, предварительно вычисленных с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина. Кроме того, на практике активно применяется обучение с подкреплением [32], в том числе такие современные алгоритмы, как SAC [79], DDPG [95], PPO [108]. Эффективность обучения с подкреплением проявляется в самых различных задачах, например, связанных с управлением беспилотными транспортными средствами [83; 125].

Однако отметим, что перечисленные методы требуют длительной настройки параметров и большого объёма вычислительных ресурсов, а процесс обучения зиждется на сборе статистических данных и зачастую даже не опирается на математическую модель исследуемой системы. Как следствие, для полученных решений сложно вывести какие-либо гарантированные результаты. Тем не менее, в диссертационной работе показано, что, имея произвольную наперёд заданную позиционную стратегию управления, с использованием принципа сравнения также можно построить гарантированные оценки множества разрешимости, равно как и априорную погрешность попадания траектории системы, замкнутой выбранным управлением, в целевое множество.

Целью работы является разработка численных методов для построения гарантированных внутренних оценок множеств разрешимости, а также решение задачи синтеза управлений для определённых классов нелинейных систем.

Методы исследования. Описанный в диссертационной работе подход в первую очередь основан на методах динамического программирования, в частности на принципе сравнения. Для перехода к вспомогательной задаче для кусочно-аффинной системы с помехой используются алгоритмы триангуляции пространства и линеаризации нелинейных систем. Построение решения связано с методами выпуклого анализа, алгоритмами численного интегрирования и различными методами оптимизации, в том числе рассматриваются задачи квадратичного программирования и алгоритмы на графах. Доказательство корректности полученного решения опирается на теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и теорию дифференциальных включений. Кроме того, применительно к задаче нахождения управляющей стратегии затрагиваются методы машинного обучения.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Предложенные алгоритмы на основе вычисления кусочно-квадратичных верхних оценок функции цены, заданных на совокупности симплексов в фазовом пространстве, позволяют получить внутренние аппроксимации множеств разрешимости для нелинейных систем дифференциальных уравнений, аффинных по управляющему параметру.
2. Предложенный алгоритм на основе вычисления кусочно-кубических оценок функции цены, заданных на совокупности множеств, разделённых набором параллельных гиперплоскостей, позволяет построить внутренние аппроксимации множеств разрешимости для систем дифференциальных уравнений, имеющих нелинейность по единственной координате.
3. Непрерывные и разрывные позиционные управления на основе полученных оценок

функции цены переводят систему в окрестность целевого множества с гарантированной априорной оценкой погрешности.

4. Указанные априорные оценки погрешности попадания траектории в целевое множество являются гарантированными при использовании кусочно-аффинной аппроксимации произвольной непрерывной позиционной стратегии управления.

Научная новизна работы. Полученные автором результаты являются новыми. Диссертационная работа продолжает исследования [41; 42; 119] построения гарантированных оценок множеств разрешимости на основе методов динамического программирования и перехода к вспомогательной задаче для кусочно-аффинной системы с помехой, однако применяемый подход усовершенствован за счёт вывода кусочно-заданных оценок функции цены с большим числом неизвестных параметров. Новизна работы проявляется в следующих результатах:

1. В случае кусочно-аффинной аппроксимации системы на совокупности параллельных гиперполос автором расширен класс рассматриваемых нелинейных систем, поскольку предложенный численный метод не требует выполнения условий односторонней проницаемости либо непрерывного сопряжения [23; 97] на смежных границах гиперполос.
2. Представленные алгоритмы позволяют получить более точные верхние оценки функции цены (как следствие, и более точные внутренние оценки множеств разрешимости) посредством поиска приближённых решений в более широких классах функций.
3. Показано, что возникающие подзадачи для поиска управлений и устранения разрывов кусочно-заданных функций допускают эффективные численные решения путём их сведения к задачам выпуклого программирования.
4. Впервые предложено применять указанный подход для гарантированного оценивания функционала качества при использовании внешних алгоритмов управления. Разработан метод построения оценок функции цены на основе результатов обучения с подкреплением.

Степень достоверности. Достоверность результатов подтверждена строгими математическими доказательствами, а также численными экспериментами. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет, в основном, теоретический характер: показано, что приведённые в диссертационной работе формулы применимы при решении задач целевого управления для широкого класса нелинейных систем. Эти результаты представляют интерес для дальнейших исследований. В частности, интересует возможность обобщения методов на случай произвольных полиномиальных кусочно-заданных

оценок функции цены, а также стоит вопрос о разработке алгоритмов с использованием параллельных вычислений, поскольку некоторые возникающие задачи оптимизации возможно решать независимо друг от друга. В таком случае развитые автором методы смогут быть полезны при решении сложных практических задач в таких прикладных областях, как управление механическими системами, автоматизация транспортных средств, математическое моделирование экономических и биологических процессов и др. В то же время для задач небольшой размерности описанные в диссертационной работе алгоритмы могут применяться уже сейчас, что демонстрируется приведёнными примерами вычислений.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих все-российских и международных конференциях:

1. Ежегодная научная конференция “Тихоновские чтения” (Москва, МГУ, факультет ВМК, 28 октября – 1 ноября 2019 г.);
2. Ежегодная научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция вычислительной математики и кибернетики (Москва, МГУ, факультет ВМК, 21 октября – 2 ноября 2020 г.);
3. III Международный семинар “Теория управления и теория обобщённых решений уравнений Гамильтона–Якоби (CGS’2020)”, посвящённый 75-летию академика А.И. Субботина (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 26–31 октября 2020 г.);
4. Ежегодная научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция вычислительной математики и кибернетики (Москва, МГУ, факультет ВМК, 20–29 апреля 2021 г.);
5. Ежегодная научная конференция “Ломоносовские чтения”, секция вычислительной математики и кибернетики (Москва, МГУ, факультет ВМК, 14–22 апреля 2022 г.);
6. Международная научная конференция “Теория оптимального управления и приложения (ОСТА 2022)” (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 27 июня – 1 июля 2022 г.);
7. Ежегодная научная конференция “Тихоновские чтения” (Москва, МГУ, факультет ВМК, 29 октября – 3 ноября 2023 г.);
8. LIV Международная научная конференция аспирантов и студентов “Процессы управления и устойчивость” (Петергоф, СПбГУ, факультет ПМ-ПУ, 3–7 апреля 2023 г.);
9. Международная конференция “Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2024)”, посвящённая 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 9–13 сентября 2024 г.).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 6 работах, которые опубликованы в центральных рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

Результаты [127–131] были подготовлены совместно с научным руководителем П.А. Точилиным. Работа [126] выполнена автором полностью самостоятельно.

В работах [127–129] П.А. Точилиным были предложены классы функций, в которых следует искать оценки функции цены на основе принципа сравнения, а также разработан метод кусочной линеаризации системы уравнений на совокупности симплексов. Автором настоящей работы выведены формулы для внутренних оценок множеств разрешимости и доказаны соответствующие теоремы; предложены численные методы для реализации этих формул в форме алгоритма и далее компьютерной программы.

В публикациях [130; 131] основные теоретические результаты получены П.А. Точилиным, однако автором настоящей работы разработаны численные методы и рассмотрено их применение к решению конкретных задач управления для модельных систем.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки) по направлению исследований: “15. Теория управления дифференциальными уравнениями и системами: вопросы управляемости, наблюдаемости, задачи стабилизации посредством управления с обратной связью”.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации составляет 106 страниц, включая 15 рисунков. Библиография включает 131 наименование, в том числе публикации автора.

Первая глава диссертации посвящена поиску приближённого решения задачи целевого управления для класса систем, в которых нелинейные члены могут зависеть только от одной фиксированной компоненты фазового вектора. Такая особенность позволяет достаточно просто вычислить кусочно-аффинную аппроксимацию системы, построение которой является одной из ключевых особенностей всего разрабатываемого подхода. Как следствие, соответствующий алгоритм удобен в реализации и требует значительно меньше вычислительных ресурсов в случае многомерных систем, чем описанные в последующих главах численные методы.

В разделе 1.1 представлены математические постановки решаемых задач разрешимости и синтеза управлений. На фиксированном и конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$ при $x \in \Omega$, где

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}$ — компактное множество, рассматривается нелинейная управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \hat{A}(t)g(x_1) + B(t)u + f(t), \quad (1)$$

где вектор $x(t) = (x_1(t), \dots, x_{n_x}(t))^T \in \mathbb{R}^{n_x}$ — состояние системы в момент времени $t \in [t_0, t_1]$, вектор $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ — позиционное управление, а отображение $g(x_1) = (g_1(x_1), \dots, g_r(x_1))^T$ — заданная гладкая функция со значениями в \mathbb{R}^r , зависящая от единственной координаты $x_1 = x_1(t)$. Матрицы коэффициентов системы $A(t)$, $\hat{A}(t)$, $B(t)$, $f(t)$ соответствующих размерностей также считаются известными. При этом искомые управления в каждый момент времени должны удовлетворять геометрическим ограничениям, которые в данной главе представлены эллипсоидами:

$$u \in \mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad p(t) \in \mathbb{R}^{n_u}, \quad P(t) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad P(t) = P^T(t) > 0.$$

В задаче разрешимости требуется построить множество $\mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1)$, $\mu \geq 0$, состоящее из таких и только таких стартовых точек, что запущенные из них в момент времени t траектории системы (1) при выполнении вышеуказанных ограничений на управление могут оказаться в μ -окрестности заданного компактного множества \mathcal{X}_1 в конечный момент времени t_1 . В связанной с этим задаче синтеза требуется найти позиционную управляющую стратегию, которая гарантированно переводит нелинейную систему из заданной точки множества $\mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ в μ -окрестность целевого множества \mathcal{X}_1 . Такой задаче сопоставляется функционал

$$J[u(\cdot)] = \phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1; t_0, x^0)|_{u(\cdot)}) \rightarrow \inf, \quad (2)$$

где $x(\cdot; t_0, x^0)|_{u(\cdot)}$ — траектория системы, замкнутой позиционным управлением $u(\cdot)$, выпущенная в момент времени t_0 из точки x^0 ; функция $\phi_{\mathcal{X}_1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ является аналогом расстояния от заданной точки до множества \mathcal{X}_1 и подобрана так, что её множество нулевого подуровня совпадает с целевым множеством:

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leq 0\}.$$

В работе также рассматриваются многозначные управления $u(t, x) \subseteq \mathcal{P}$, в связи с чем в функционале (2) появляется максимум от функции $\phi_{\mathcal{X}_1}$ по всевозможным однозначным управляющим стратегиям из соответствующего пучка. Таким образом, полученные результаты будут соответствовать принципу гарантированного оценивания.

Раздел 1.2 посвящён разбиению рассматриваемого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}$ на смежные области с помощью конечного числа параллельных гиперплоскостей, а также построению кусочно-аффинной аппроксимации нелинейной системы (1) на совокупности полученных

множеств $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$. Такая аппроксимация позволяет перейти к задаче управления для системы с автономными переключениями [19; 94], состоящей из набора N подсистем, каждая из которых задаётся совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A^{(i)}(t)x + B(t)u + f^{(i)}(t) + \hat{A}(t)v, \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (3)$$

Особенностью уравнения (3) является наличие величины $v \in \mathbb{R}^r$, связанной с погрешностью локальной линеаризации. В дальнейшем этот вектор будет считаться неизвестным и интерпретироваться как помеха. Тем не менее, для вывода последующих результатов существенным фактом является ограниченность данной величины. В указанном разделе приведён способ оценивания вектора v с помощью эллипсоида минимального объёма на основе решения задачи выпуклой оптимизации [57; 120].

В разделе 1.3 введены основные понятия, связанные с методом динамического программирования. Применительно к задачам целевого управления обычно определяют функцию цены как

$$V(t, x) = \inf_{u(\cdot)} \{ \phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1, t, x)|_{u(\cdot)}) \},$$

где $x(\cdot; t, x)|_{u(\cdot)}$ — траектория системы (1), выпущенная в прямом времени из начальной позиции (t, x) . Известно, что указанная функция цены задаёт окрестность множества разрешимости исходной нелинейной системы [91]:

$$\mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1) = \{x \in \Omega : V(t_0, x) \leq \mu\},$$

а также является решением (вообще говоря, обобщённым) уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана с соответствующим граничным условием:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{P}(t)} \left\langle \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, A(t)x(t) + \hat{A}(t)g(x_1) + B(t)u + f(t) \right\rangle = 0, & t \in [t_0, t_1], \\ V(t_1, x) = \phi_{\mathcal{X}_1}(x). \end{cases}$$

В диссертационной работе предлагается построить функцию $\hat{W} = \hat{W}(t, \tilde{x})$, которая будет соответствовать приближённому решению этого уравнения. Здесь и далее используется обозначение $\tilde{x} = (x^T, 1)^T$ для упрощения выкладок.

Такое приближение ищется в классе кусочно-кубических функций, которые вблизи каждой гиперплоскости $\mathcal{H}^{(i)}$, разделяющей области $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(i+1)}$, определяются равенством

$$\hat{W}(t, \tilde{x}) = \alpha^{(i)}(x) \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t)\tilde{x} \rangle + (1 - \alpha^{(i)}(x)) \langle \tilde{x}, K^{(i+1)}(t)\tilde{x} \rangle. \quad (4)$$

Здесь значение линейной функции $\alpha^{(i)}(x)$ зависит от расстояния между точкой x и гиперплоскостью $\mathcal{H}^{(i)}$, а матричные функции $K^{(i)}(t)$ и $K^{(i+1)}(t)$ суть неизвестные коэффициенты.

Рассмотрение функций вида (4) позволяет при построении аппроксимации функции цены избежать проверки специальных “условий склейки” на гиперплоскостях переключений кусочно-линейной системы (3), выполнение которых требовалось в предшествующих работах [23; 97] и усложняло применение метода.

Раздел 1.4 посвящён анализу функции (4). Оценка изменения её значений вдоль траекторий кусочно-линейной системы (3) позволяет на основе принципа сравнения [17; 91] построить для исходной системы (1) гарантированную внутреннюю оценку множества разрешимости вида

$$\mathcal{W}_\mu^{\text{int}}(t, t_1, \mathcal{X}_1) = \left\{ x \in \Omega : \hat{W}(t, \tilde{x}) \leq c(t) + \mu \right\} \subseteq \mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1), \quad (5)$$

где значение $c(t)$ определяется в ходе вычисления $\hat{W}(t, \tilde{x})$. Отметим, что вложение (5) доказывается при использовании управлений специального вида, выбор которых также основан на приближённом решении уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана в каждой из областей $\Omega^{(i)}$. Как следствие, это же управление является решением поставленной задачи синтеза.

Раздел 1.5 более подробно описывает детали численного метода: исследуются решения вспомогательных задач оптимизации при вычислении коэффициентов аппроксимации (4), обсуждаются способы более точного вычисления величины $c(t)$.

Вторая глава диссертации посвящена обобщению метода на случай наличия нелинейных членов, зависящих сразу от нескольких переменных. В такой ситуации требуется более сложное разбиение рассматриваемого множества Ω на подмножества, в связи с чем предлагается представить эту область как конечное объединение симплексов. В некотором смысле представленный результат является продолжением работы [119], где сперва в каждой вершине симплексов разбиения задавалась однопараметрическая функция, а итоговая аппроксимация функции цены внутри каждого симплекса получалась в результате интерполяции этих функций. В настоящей работе в вершинах симплексов задаются аффинные функции от всех фазовых переменных, и в качестве аппроксимации функции цены строится непрерывная в Ω кусочно-квадратичная функция. Это усовершенствование допускает более точное численное приближение решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, что, в свою очередь, позволяет снизить погрешность метода.

В разделе 2.1 приведена соответствующая математическая постановка задачи. В отличие от предыдущей главы, исследуется нелинейная система

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}, \quad (6)$$

где $f(t, x)$, $g(t, x)$ — произвольные функции, непрерывные по t и достаточно гладкие по x , со

значениями в \mathbb{R}^{n_x} и $\mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ соответственно. На управления наложены поточечные ограничения, в каждый момент времени задаваемые выпуклым компактным множеством. Требуется построить управляющую стратегию в позиционной форме, которая переводит систему (6) из заданной позиции x^0 в момент времени t_0 в компактное целевое множество $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$ в момент времени t_1 . Если попасть во множество \mathcal{X}_1 нельзя, необходимо достичь как можно меньшей его окрестности:

$$x(t_1; t_0, x^0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_1 + B_\mu(0),$$

где $B_\mu(0)$ — шар радиуса μ с центром в нуле, а значение $\mu \geq 0$ необходимо минимизировать.

Раздел 2.2 содержит описание кусочной линеаризации системы (6). Для этого сперва осуществляется разбиение множества Ω на симплексы $\Omega^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$. Оно может быть получено, например, с помощью триангуляции Делоне [34; 99]. Приведённые в работе формулы позволяют далее выписать непрерывную кусочно-аффинную аппроксимацию правой части исходной системы:

$$f(t, x) + g(t, x)u = A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u + r^{(i)}(t) + v^{(i)}(t, x, u), \quad x \in \Omega^{(i)},$$

где $v^{(i)}$ — ограниченная погрешность полученной аппроксимации. Поскольку при задании квадратичных функций удобно работать с “расширенным” пространством переменных, где $\tilde{x} = (x^T, 1)^T$, осуществляется переход к системе

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x} + \tilde{B}^{(i)}(t)u + \tilde{C}(t)v^{(i)}, \quad \tilde{x} \in \Omega^{(i)} \times \{1\}, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (7)$$

В разделе 2.3 определена кусочно-квадратичная функция вида

$$V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t)\tilde{H}^{(i)}\tilde{x} \rangle, \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad (8)$$

где $K^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$ — матрицы неизвестных коэффициентов, $\tilde{H}^{(i)} \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$ — известные матрицы, однозначно задающие форму и положение симплексов $\Omega^{(i)}$. На основе работы [42] определяются значения матриц $K^{(i)}(t)$ в конечный момент времени, так, что при всех $i = 1, \dots, N$ выполнено неравенство

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leq V^{(i)}(t_1, \tilde{x}) \quad \forall x \in \Omega^{(i)},$$

позволяющее задать граничное условие в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана. Оценка производной функции (8) по направлению $\ell = (\ell_t, \ell_x^T)^T \in \mathbb{R}^{n_x+2}$, где

$$\ell_t = 1, \quad \ell_x = \tilde{A}^{(i)}\tilde{x} + \tilde{B}^{(i)}u + \tilde{C}v^{(i)},$$

приводит к неравенству

$$\frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) \leq \langle \tilde{x}, [\dot{K}^{(i)} + \hat{Z}^{(i)}] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle, \quad (9)$$

в котором $\hat{Z}^{(i)} = \hat{Z}^{(i)}(t, K^{(1)}(t), \dots, K^{(N)}(t))$ — известные матричные функции. Представлен такой способ нахождения матриц $\hat{Z}^{(i)}$, что функция (8) с коэффициентами, полученными при решении задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{K}^{(i)}(t) + \hat{Z}^{(i)}(t, K^{(1)}, \dots, K^{(N)}) = 0, & i = \overline{1, N}, t \in [t_0, t_1], \\ K^{(i)}(t_1) = \hat{K}(\tilde{H}^{(i)})^{-1}, & i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (10)$$

где матрица \hat{K} определяется целевым множеством \mathcal{X}_1 , является непрерывной по совокупности переменных во всей области определения. Тогда из (9)–(10) следует, что функция $V^{(i)}$ не возрастает вдоль траекторий системы, и, аналогично результатам предыдущей главы, для исходной нелинейной системы (6) доказывается оценка множества разрешимости вида

$$\mathcal{W}_\mu^{int}(t, t_1, \mathcal{X}_1) = \left\{ x \in \Omega \mid V^{(i(x))}(t, \tilde{x}) \leq \mu \right\} \subseteq \mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1). \quad (11)$$

Раздел 2.4 посвящён введению в уравнения (10) дополнительных слагаемых — регуляризирующих членов. Такая необходимость вызвана особенностью построенной задачи Коши: полученные матричные уравнения являются дифференциальными уравнениями типа Риккати, решения которых могут быстро возрастать, приводя к низкой точности оценок (11). Более того, решения могут не быть продолжимы на весь временной отрезок [9, с. 63–64]. Тем не менее, указанные проблемы могут быть устранены за счёт использования модифицированных уравнений: осуществляется переход от задачи (10) к задаче

$$\begin{cases} \dot{K}^{(i)}(t) + \hat{Z}^{(i)}(t, K^{(1)}, \dots, K^{(N)}) = \Delta^{(i)}(t), & i = \overline{1, N}, t \in [t_0, t_1], \\ K^{(i)}(t_1) = \hat{K}(\tilde{H}^{(i)})^{-1}, & i = \overline{1, N}, \end{cases}$$

где $\Delta^{(i)} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$ — зафиксированные непрерывные функции. В настоящее время неизвестно, как выбрать значения $\Delta^{(i)}(t)$, чтобы гарантировать продолжимость решения, однако предлагается подбирать функции $\Delta^{(i)}(t)$ на основе сравнения значений аппроксимации функции цены в соседних вершинах.

Третья глава диссертации посвящена приближённому решению поставленной в предыдущей главе задачи целевого управления с помощью построения кусочно-квадратичных аппроксимаций функции цены, которые могут иметь разрывы на границах симплексов разбиения. При этом предполагается, что позиционные управления тоже допускают разрывы по переменной x . Отказ от требования непрерывности позволяет получить более точную оценку матриц $\hat{Z}^{(i)}$ в выражениях (9)–(10), что способствует уменьшению погрешности попадания в целевое множество. Недостатком подхода, однако, является его применимость лишь к

автономным системам, где коэффициенты системы дифференциальных уравнений явно не зависят от времени:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}. \quad (12)$$

Несмотря на то, что в качестве ограничений на управления по-прежнему могут выступать различные выпуклые множества, в данной главе рассматриваются эллипсоидальные ограничения, поскольку возникающие задачи оптимизации в этом случае имеют наиболее простой вид.

В разделе 3.1 определено понятие достижимости симплексов: считается, что симплекс $\Omega^{(j)}$ достижим из симплекса $\Omega^{(i)}$, если существует такая точка на общей границе симплексов, что при некотором допустимом управлении вектор скорости рассматриваемой системы направлен в сторону симплекса $\Omega^{(j)}$ относительно разделяющей их гиперплоскости. Такое условие является лишь необходимым, но не достаточным, чтобы траектория системы переходила из $\Omega^{(i)}$ в $\Omega^{(j)}$, зато допускает простую численную проверку на основе опорных функций.

Далее можно выделить множества в фазовом пространстве, где оценка функции цены и функция управления всё-таки обязаны быть непрерывны и, таким образом, нуждаются в специальной “склейке”. Склейка производится, когда симплексы являются взаимодостижимыми: показано, что в этом случае можно корректно определить решения задачи Коши для системы (12), замкнутой предложенным позиционным управлением.

В разделе 3.2 описан алгоритм построения разрывного управления в фиксированный момент времени, разработанный для кусочно-квадратичных аппроксимаций функции цены на основе публикаций [130; 42; 119], в которых ранее рассматривались кусочно-аффинные функции. Идейно алгоритм устроен следующим образом:

1. В каждой вершине симплексов разбиения выбирается управление, использование которого не приведёт к попаданию траектории в соседний симплекс с бóльшим значением функции (8).
2. При найденных управлениях находятся все пары взаимодостижимых симплексов.
3. Алгоритм возвращается к шагу 1, однако далее на искомые управления накладываются дополнительные ограничения в связи со склейкой в обозначенных местах. Если же дополнительных склеек не требуется, алгоритм завершает работу.

Доказано, что алгоритм обязательно закончит свою работу за конечное число шагов.

В разделе 3.3 осуществляются подготовительные действия для введения вспомогательных задач оптимизации, позволяющих осуществлять склейки “наиболее аккуратно” — в против-

ном случае модифицированная оценка функции цены может давать менее точную оценку множества разрешимости. Для этого требуется в каждой вершине разбиения обойти содержащие её симплексы в определённом порядке, в соответствии с их достижимостью друг из друга. Такой порядок может быть получен за счёт рассмотрения симплексов как вершин графа, рёбра которого соответствуют возможному переходу траектории нелинейной системы (12) из одного симплекса в другой. Тогда указанная подзадача сводится к построению топологической сортировки вершин графа. Сложность, однако, вызывает возможное наличие в этом графе циклов, вследствие чего топологическая сортировка оказывается невозможной. Эта проблема решена за счёт выделения в графе компонент сильной связности [113; 118] и построения топологической сортировки графа конденсации, который получается стягиванием каждой сильной компоненты связности в единую вершину.

В разделе 3.4 выведена итоговая внутренняя оценка множества разрешимости вида

$$\mathcal{W}_\mu^{int}(t, t_1, \mathcal{X}_1) = \left\{ x \in \Omega \mid V(t, \tilde{x}) \leq \mu \right\},$$

где кусочно-квадратичная функция $V(t, x)$ получена на основе модифицированных уравнений (10) и представленного алгоритма поиска разрывных управлений. В частности, доказано, что искомые в алгоритме управления всегда существуют.

Наконец, раздел 3.5 описывает детали численного метода, позволяющие снизить вычислительную нагрузку при поиске управлений и решении задач с квадратичными ограничениями, необходимых для расчёта функции цены.

Четвёртая глава посвящена анализу полученных результатов и, кроме того, описывает обобщения разработанного подхода. Кратко описаны методы построения кусочно-аффинной и кусочно-кубической оценок функции цены на множестве симплексов, а также рассмотрен альтернативный способ нахождения субоптимального управления.

В разделе 4.1 без доказательств приведены основные утверждения, полученные в работах [130; 131; 119] в русле описанного подхода, но при рассмотрении оценок функции цены в других параметрических семействах. Указанные результаты могут быть использованы для сравнения разработанных алгоритмов.

Раздел 4.2 посвящён способам поиска субоптимальных управляющих стратегий при поиске приближённого решения уравнения ГЯБ. В ранее представленных алгоритмах они выбирались так, чтобы в каждой области $\Omega^{(i)}$ минимизировать производную функции цены вдоль траектории движения. Однако, с учётом кусочно-заданного характера оценки функции цены, возникала неоднозначность при выборе значений управления в вершинах разбиения. Для её устранения приходилось дополнительно корректировать эти значения, что,

в свою очередь, негативно сказывалось на полученном приближённом решении уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. В данном разделе описано, как позиционные управления могут быть выбраны на основе алгоритмов обучения с подкреплением.

В разделе 4.3 продемонстрированы результаты работы алгоритмов на модельных примерах. Приведены графики, позволяющие оценить априорные и апостериорные точности представленных методов, а также исследована их вычислительная сложность.

В **заключении** подводятся итоги выполненного исследования и обозначаются возможные направления дальнейших исследований.

Список основных обозначений

\mathbb{R} — множество вещественных чисел

\mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство

\mathbb{R}_+^n — подмножество n -мерного евклидова пространства, содержащее все точки с неотрицательными координатами: $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$

$i = \overline{k, m}$ — переменная i пробегает все значения из множества $\{k, k + 1, k + 2, \dots, m - 1, m\}$

$\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов x и y

$\|x\|$ — евклидова норма вектора x , равная $\sqrt{\langle x, x \rangle}$

\tilde{x} — вектор, полученный добавлением единичной компоненты к вектору-столбцу $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 1)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$\text{conv}\{g_1, \dots, g_k\}$ — выпуклая оболочка точек $g_1, \dots, g_k \in \mathbb{R}^n$

\emptyset — пустое множество

$\mathcal{A} + \mathcal{B}$ — сумма Минковского множеств \mathcal{A} и \mathcal{B} :

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a + b : a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$$

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — декартово произведение множеств \mathcal{A} и \mathcal{B} :

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(a, b) : a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$$

$\partial\mathcal{A}$ — граница множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n

$\text{int } \mathcal{A}$ — внутренность множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n

$B_\mu(0)$ — замкнутый шар радиуса $\mu > 0$ с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{E}(p, P)$ — эллипсоид с центром в точке p и матрицей конфигурации P :

$$\mathcal{E}(p, P) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle (x - p), P^{-1}(x - p) \rangle \leq 1\}, \quad P = P^T > 0$$

$\rho(\ell | \mathcal{A})$ — опорная функция в направлении $\ell \in \mathbb{R}^n$ ко множеству $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$:

$$\rho(\ell | \mathcal{A}) = \sup_{a \in \mathcal{A}} \langle \ell, a \rangle$$

$[k^1, \dots, k^\ell]$ — матрица, составленная из векторов-столбцов k^1, \dots, k^ℓ

A^T — транспонированная матрица A

$A > 0$ — положительно определённая матрица, т.е.

$$\langle x, Ax \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$$

A^{-1} — матрица, обратная к $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A^{1/2}$ — квадратный корень из матрицы $A = A^T > 0$, т.е. такая матрица $B = B^T > 0$, что выполнено

$$BB^T = B^T B = A$$

$\det A$ — определитель матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\mathbb{O}_{n \times m}$ — нулевая матрица размера n на m

$\mathbb{I}_{n \times n}$ — единичная матрица размера n на n

$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — диагональная матрица размера n на n с элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$\dot{x}(t)$ — полная производная по времени

$u(\cdot)$ — функция, аргументы которой ясны из контекста

$x(\tau; t, x^0)|_{u(\cdot)}$ — точка траектории системы в момент времени τ , выпущенной в момент времени t из точки x^0 при замыкании рассматриваемой системы управлением $u(\cdot)$

C^1 — множество непрерывно дифференцируемых функций

$\text{Argmin } f(x)$ — множество минимизаторов функции $f(x)$

$[x]$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}$

$\text{sign}(t)$ — функция вещественного аргумента, определяемая в данной работе как

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & t \leq 0, \\ +1, & t > 0. \end{cases}$$

Глава 1

Случай нелинейности по одной переменной

1.1 Постановка задачи

Внутри компактного множества $\Omega = [\zeta_0, \zeta_1] \times \Omega' \subset \mathbb{R}^{n_x}$ на конечном фиксированном отрезке времени $[t_0, t_1]$ рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A(t)x + \hat{A}(t)g(x_1) + B(t)u + f(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.1)$$

$$g(x_1) = (g_1(x_1), \dots, g_r(x_1))^T,$$

где вектор $x = (x_1, \dots, x_{n_x})^T \in \mathbb{R}^{n_x}$ является вектором состояния, вектор $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ — управляющим параметром. Коэффициенты системы

$$A(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad \hat{A}(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times r}, \quad B(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}, \quad f(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$$

непрерывны по времени, а нелинейные функции $g_j(x_1) : [\zeta_0, \zeta_1] \rightarrow \mathbb{R}$, $j = \overline{1, r}$, зависят от единственной компоненты x_1 вектора состояния и дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\zeta_0, \zeta_1]$.

В каждый момент времени на вектор управляющих параметров наложены геометрические ограничения $u \in \mathcal{P}(t)$, где $\mathcal{P}(\cdot)$ — непрерывное по Хаусдорфу [1; 27] многозначное отображение со значениями в \mathbb{R}^{n_u} . В данной главе будем полагать, что при всех $t \in [t_0, t_1]$ множество $\mathcal{P}(t)$ является эллипсоидом.

Определение 1.1. Эллипсоидом $\mathcal{E}(p, P)$ с центром в точке $p \in \mathbb{R}^n$ и матрицей конфигурации $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P^T > 0$, называется множество

$$\mathcal{E}(p, P) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle (x - p), P^{-1}(x - p) \rangle \leq 1\}.$$

В таком случае должно выполняться включение

$$u \in \mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(p(t), P(t)) \subset \mathbb{R}^{n_u}, \quad (1.2)$$

где заданные матрица $P(t)$ и вектор $p(t)$ непрерывны по $t \in [t_0, t_1]$. Без ограничения общности положим функцию $p(t)$ тождественно равной нулю — этого можно добиться путём замены $f(t)$ на $f(t) + B(t)p(t)$ в правой части (1.1).

Определение 1.2. Множеством допустимых позиционных управлений назовём класс функций \mathcal{U}_f , содержащий многозначные отображения $u = u(t, x) \subseteq \mathcal{P}(t)$, при подстановке которых в уравнение (1.1) получаются дифференциальные включения вида

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.3)$$

имеющие решения при любом начальном векторе фазовых переменных $x(t_0) = x^0 \in \Omega$.

Определение 1.3. Под решением дифференциального включения (1.3) на отрезке $[t_0, t_1]$ понимается абсолютно непрерывная функция $x(\tau) = x(\tau; t_0, x^0)|_{u(\cdot)}$, для которой выполнено $x(t_0) = x^0$ и которая удовлетворяет данному включению при почти всех $\tau \in [t_0, t_1]$.

Будем полагать, что функции $g_j(x_1)$ таковы, что любое решение $x(\tau)$, существующее на отрезке $[t_0, t_0 + \delta]$, $0 < \delta < t_1 - t_0$, можно продлить вправо вплоть до момента времени t_1 .

Зафиксируем компактное множество $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$. Будем считать, что границей множества \mathcal{X}_1 является поверхность второго порядка [43]. В таком случае его можно задать с помощью некоторой квадратичной функции $\phi_{\mathcal{X}_1}$:

$$\mathcal{X}_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : \phi_{\mathcal{X}_1}(\xi) \leq 0\}. \quad (1.4)$$

Пусть $x^0 = x(t_0)$ — фиксированное начальное состояние системы (1.1). Требуется построить такую управляющую стратегию $u = u(t, x)$, что в конечный момент времени будет выполняться включение

$$x(t_1; t_0, x^0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_1.$$

Поскольку при некоторых x^0 и \mathcal{X}_1 задача может не иметь решения, рассмотрим задачу попадания в окрестность целевого множества:

$$x(t_1; t_0, x^0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_1 + B_\mu(0), \quad (1.5)$$

где $B_\mu(0)$ — шар радиуса μ с центром в нуле, а значение $\mu \geq 0$ необходимо минимизировать.

Определение 1.4. Множеством разрешимости $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ называется совокупность всех векторов $x \in \Omega$, для каждого из которых существует управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$, переводящее любую из соответствующих траекторий системы $x(\tau) = x(\tau; t, x)|_{u(\cdot)}$, $\tau \in [t, t_1]$, выпущенную в момент времени t из точки x , в целевое множество: $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$.

Помимо построения приближённых решений (1.5), будем искать внутреннюю оценку множества разрешимости, т.е. построим подмножество точек, для которых гарантированно существует решение задачи. Будем полагать, что при всех $t \in [t_0, t_1]$ множество разрешимости содержится внутри множества Ω .

1.2 Кусочная линеаризация системы на объединении гиперполос в фазовом пространстве

Перейдём от исходной задачи для системы (1.1) к вспомогательной задаче для кусочно-линейной системы. Для этого сперва зафиксируем натуральное число N и представим множество $\Omega = [\zeta_0, \zeta_1] \times \Omega'$ как объединение гиперполос:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega^{(i)}, \quad \Omega^{(i)} = [\theta_{i-1}, \theta_i] \times \Omega',$$

где

$$\theta_0 = \zeta_0, \quad \theta_N = \zeta_1, \quad \theta_i - \theta_{i-1} = \Delta = \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{N}.$$

Таким образом, множество Ω разбивается на подмножества $\Omega^{(i)}$ с помощью $(N - 1)$ параллельных гиперплоскостей $\mathcal{H}^{(i)}$ размерности $(n_x - 1)$, которые равноудалены друг от друга:

$$\mathcal{H}^{(i)} = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \langle x, e_1 \rangle = \theta_i, \quad e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T\}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Далее каждую нелинейную функцию $g_j(x_1)$, $j = \overline{1, r}$, приблизим непрерывной ломаной $\tilde{g}_j(x_1)$ на отрезке $[\zeta_0, \zeta_1]$:

$$\tilde{g}_j(x_1) = g_j(\theta_{i-1}) + \frac{x_1 - \theta_{i-1}}{\theta_i - \theta_{i-1}} (g_j(\theta_i) - g_j(\theta_{i-1})), \quad x_1 \in [\theta_{i-1}, \theta_i].$$

Если воспользоваться обозначением

$$v_j(x) = g_j(x_1) - \tilde{g}_j(x_1), \quad j = \overline{1, r}, \tag{1.6}$$

то можно покомпонентно оценить погрешность построенной аппроксимации:

$$|v_j(x)| = |g_j(x_1) - \tilde{g}_j(x_1)| \leq C_{g,j}^{(i)} = \max_{\xi \in [\theta_{i-1}, \theta_i]} \left| \frac{\partial g_j}{\partial x}(\xi) \right| \cdot \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{2N}. \tag{1.7}$$

Следовательно, всевозможные векторы $v(x) = (v_1(x), \dots, v_r(x))^T$ при $x \in \Omega^{(i)}$ ограничены r -мерным параллелепипедом

$$M^{(i)} = \left\{ v \in \mathbb{R}^r : -C_{g,j}^{(i)} \leq v_j \leq C_{g,j}^{(i)}, \quad j = \overline{1, r} \right\},$$

диаметр которого стремится к нулю при $N \rightarrow +\infty$. В дальнейшем, однако, будет удобнее работать с ограничениями в форме эллипсоидов, получить которые можно на основе следующих утверждений [57; 78; 120].

Утверждение 1.1. Объём многомерного эллипсоида $\mathcal{E}(q, Q) \subset \mathbb{R}^{n_x}$ вычисляется по формуле

$$\text{vol}(\mathcal{E}(q, Q)) = w_{n_x} \sqrt{\det(Q)},$$

где w_{n_x} — объём единичного шара в пространстве \mathbb{R}^{n_x} , определяемый формулой

$$w_{n_x} = \frac{\pi^{n_x/2}}{\Gamma\left(\frac{n_x}{2} + 1\right)}.$$

Здесь $\Gamma(z) = \int_0^\infty y^{z-1} e^{-y} dy$ — гамма-функция Эйлера.

Определение 1.5. Аффинной оболочкой множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ называется множество всевозможных аффинных комбинаций точек из \mathcal{A} , т.е.

$$\text{aff } \mathcal{A} = \left\{ x : x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \mid n \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, x_j \in \mathcal{A} \right\}.$$

Утверждение 1.2. Пусть множество \mathcal{A} представляет собой конечный набор векторов $\{q^1, \dots, q^m\}$ в пространстве \mathbb{R}^{n_x} и обладает центральной симметрией, а аффинная оболочка векторов $\{q^1, \dots, q^m\}$ совпадает со всем пространством \mathbb{R}^{n_x} . Тогда эллипсоид минимального объёма, содержащий множество \mathcal{A} , выражается как $\mathcal{E}(0, G^{-1})$, где матрица $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ — решение задачи выпуклого программирования:

$$\begin{cases} -\ln \det(G) \rightarrow \min_G, \\ \langle q^j, Gq^j \rangle \leq 1, \quad j = \overline{1, m}, \\ G = G^T > 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Замечание. Задача выпуклого программирования (1.8) рассматривается на открытом множестве матриц $\{G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} : G = G^T > 0\}$, однако минимум функционала достигается во внутренней точке этого множества.

Замечание. Задачи выпуклого программирования обладают рядом свойств (например, каждый локальный минимум обязательно является глобальным минимумом), благодаря которым такие задачи допускают эффективные методы численного решения [54; 57; 98].

Следствие 1.1. Поскольку множество вершин параллелепипеда $M^{(i)}$ удовлетворяет всем условиям утверждения 1.2, в каждом множестве $\Omega^{(i)}$ можно ограничить векторы $v(x)$ с помощью эллипсоида.

Следствие 1.2. Существует эллипсоид с центром в нуле, ограничивающий векторы $v(x)$ сразу во всех множествах $\Omega^{(i)}$:

$$v(x) \in \mathcal{E}(0, Q), \quad x \in \Omega.$$

На основе замены (1.6) в правой части системы (1.1) можно заново выделить член, линейно зависящий от x :

$$A(t)x + \hat{A}(t)g(x_1) + B(t)u + f(t) = A^{(i)}(t)x + B(t)u + f^{(i)}(t) + \hat{A}(t)v(x), \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad (1.9)$$

причём норма слагаемого $\hat{A}(t)v(x)$ будет сколь угодно мала при достаточно большом N . Выше использованы обозначения

$$A^{(i)}(t) = A(t) + \left[\frac{1}{\Delta} \hat{A}(t)(g(\theta_i) - g(\theta_{i-1})) \quad \mathbb{O}_{n_x \times (n_x - 1)} \right], \quad (1.10)$$

$$f^{(i)}(t) = f(t) + \frac{1}{\Delta} \hat{A}(t)(\theta_i g(\theta_{i-1}) - \theta_{i-1} g(\theta_i)). \quad (1.11)$$

Таким образом, формула (1.9) может быть использована для построения кусочно-аффинной аппроксимации нелинейной системы (1.1).

Далее рассмотрим вспомогательную систему с автономными переключениями [19; 94], состоящую из набора N подсистем, каждая из которых задаётся совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A^{(i)}(t)x + B(t)u + f^{(i)}(t) + \hat{A}(t)v(t), \quad x \in \Omega^{(i)}. \quad (1.12)$$

В любой момент времени активной является только одна подсистема. Индекс $i = i(x(t))$ в формуле (1.12) является функцией состояния системы в момент времени t , однако для краткости аргументы этой функции будем опускать. Управление u здесь по-прежнему удовлетворяет ограничению $u \in \mathcal{E}(0, P(t))$, а величину $v(t)$ будем интерпретировать как помеху.

Определение 1.6. Будем называть помеху допустимой, если она является измеримой функцией от времени t , кроме того, в каждый момент времени удовлетворяет ограничению $v(t) \in \mathcal{E}(0, Q)$.

Наряду с (1.12) рассмотрим ещё одну вспомогательную систему, заданную в расширенном пространстве переменных.

Определение 1.7. Расширенным пространством переменных будем называть множество векторов $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n_x + 1}$, полученных добавлением к векторам $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ дополнительной единичной компоненты по правилу

$$\tilde{x} = (x^T, 1)^T. \quad (1.13)$$

Тогда системе (1.12) можно сопоставить кусочно-линейную систему с переключениями

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x} + \tilde{B}(t)u + \tilde{C}(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.14)$$

где “расширенные” матрицы определяются выражениями

$$\tilde{A}^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} A^{(i)}(t) & f^{(i)}(t) \\ \mathbb{O}_{1 \times n_x} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(t) = \begin{bmatrix} B(t) \\ \mathbb{O}_{1 \times n_u} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}(t) \\ \mathbb{O}_{1 \times r} \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Замечание. Благодаря преобразованию (1.13), любой квадратичный функционал вида

$$f(x) = \langle x, Qx \rangle + 2\langle q, x \rangle + q_0$$

представим как квадратичная форма в расширенном пространстве переменных:

$$f(x) = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q & q \\ q^T & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \quad (1.16)$$

Это будет удобно в последующих выкладках: например, для описания целевого множества \mathcal{X}_1 , которое задано квадратичной функцией (1.4).

1.3 Метод динамического программирования

1.3.1 Основные понятия

Пусть динамика системы задаётся уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.17)$$

где функция f , непрерывная по совокупности аргументов, удовлетворяет условиям, гарантирующим существование, единственность и продолжимость решения системы (1.17) на всём отрезке $[t_0, t_1]$ при любом граничном условии $x(\tau) = x^0$, $\tau \in [t_0, t_1]$; измеримое программное управление u удовлетворяет поточечным ограничениям $u(t) \in \mathcal{P}(t)$.

Применительно к задаче целевого управления введём вспомогательную функцию цены:

$$V(t, x) = \min_{u(\cdot)} \{ \phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1)) : x(t) = x \},$$

где $u(\cdot)$ — всевозможные программные управления, каждому из которых соответствует допустимая траектория $x(\cdot)$ системы (1.17), выпущенная в прямом времени из начальной позиции $\{t, x\}$. Функция цены связана со множеством разрешимости соотношением

$$\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1) = \{x \in \Omega : V(t, x) \leq 0\}.$$

Множество $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ является компактным и, вообще говоря, может быть пустым. В этом случае будем рассматривать μ -окрестность множества разрешимости

$$\mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1) = \{x \in \Omega : V(t, x) \leq \mu\},$$

которая будет непустой при достаточно большом $\mu > 0$.

Известно, что функция $V(t, x)$ удовлетворяет попятному уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана [51; 91]:

Теорема 1.1. Пусть функция цены $V(t, x)$ рассматриваемой задачи целевого управления дифференцируема в точке (t, x) , $t \in [t_0, t_1]$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \min_{u \in \mathcal{P}(t)} \left\langle \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, f(t, x, u) \right\rangle = 0. \quad (1.18)$$

Кроме того, выполнено краевое условие

$$V(t_1, x) = \phi_{x_1}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}. \quad (1.19)$$

Теорема 1.2. Пусть дифференцируемая функция $w(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.18) в области $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{n_x}$, а также граничному условию (1.19). Тогда в этой области выполнено $w(t, x) \leq V(t, x)$. Если к тому же существуют управление $u^*(\cdot)$ и соответствующая ему траектория $x^*[s] = x^*(s, t, x)$, $s \geq t$, $x^*[t] = x$, удовлетворяющие равенству

$$\left\langle \frac{\partial w(s, x^*[s])}{\partial x}, f(s, x^*[s], u^*(s)) \right\rangle = \min_{u \in \mathcal{P}(s)} \left\langle \frac{\partial w(s, x^*[s])}{\partial x}, f(s, x^*[s], u) \right\rangle, \quad (1.20)$$

то $u^*(\cdot)$ — оптимальное управление и $w(t, x) = V(t, x)$.

Следствие 1.3. Если нелинейная система (1.17) является аффинной по управлению, т.е. $f(t, x, u) = \hat{f}(t, x) + \hat{g}(t, x)u$, то условие (1.20) преобразуется в

$$\left\langle \frac{\partial w(s, x^*[s])}{\partial x}, \hat{g}(s, x^*[s]) \cdot u^*(s) \right\rangle = \min_{u \in \mathcal{P}(s)} \left\langle \frac{\partial w(s, x^*[s])}{\partial x}, \hat{g}(s, x^*[s]) \cdot u \right\rangle.$$

Таким образом, уравнения (1.18)–(1.19) могут быть использованы для нахождения функции цены и оптимального управления, причём управление можно выразить в позиционной форме:

$$u(t, x) \in \operatorname{Argmin}_{u \in \mathcal{P}(t)} \left\langle \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}, f(t, x, u) \right\rangle.$$

Отметим, что функция цены может не быть всюду дифференцируемой, поэтому решение уравнения ГЯБ следует понимать в обобщённом “вязкостном” [51; 63; 70] или “минимаксном” [35; 36] смысле. Тем не менее, целью данной работы является не точное решение данного уравнения, а лишь поиск приближённого решения в специальном классе функций. Поиск такого решения опирается на принцип сравнения [17; 91], представленный следующей теоремой.

Теорема 1.3 (А.Б. Куржанский). Пусть функция $V^{(b)}(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных и является вязкостным обобщённым решением “попятного” уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$V_t^{(b)} - \mathcal{H}(t, x, -V_x^{(b)}) = 0, \quad V^{(b)}(t_1, x) = \phi_{\mathcal{X}_1}(x),$$

где использовано обозначение для гамильтониана:

$$\mathcal{H}(t, x, p) = \max\{\langle p, f(t, x, u) \rangle \mid u \in \mathcal{P}(t)\}.$$

Пусть также заданы функции $h(t, x, p)$ и $w^-(t, x) \in C^1$, удовлетворяющие неравенствам

$$\mathcal{H}(t, x, p) \geq h(t, x, p) \quad \forall \{t, x, p\},$$

$$w_t^-(t, x) - h(t, x, -w_x^-(t, x)) \leq 0,$$

$$w^-(t_1, x) \geq V^{(b)}(t_1, x).$$

Тогда для любой пары $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{n_x}$ справедлива оценка

$$V^{(b)}(t, x) \leq w^-(t, x).$$

Следствие 1.4. Множество $W^-(t) = \{x : w^-(t, x) \leq 0\}$ вложено во множество $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ и, таким образом, является внутренней оценкой множества разрешимости.

В данной работе для поиска приближённого решения осуществляется переход от исходной нелинейной системы (1.1) к вспомогательным системам (1.12) и (1.14), на основе которых предлагается функция $w^-(t)$ и доказывается результат, аналогичный теореме 1.3. Приведённые кусочно-линейные системы, с одной стороны, позволяют упростить анализ нелинейностей, а с другой — служат достаточно хорошим приближением системы (1.1). Однако гибридный характер указанных кусочно-линейных систем вынуждает переопределить класс используемых позиционных управлений.

Определение 1.8. Позицией гибридной системы (1.12) назовём тройку $\pi = \{t, x, i\}$, где величина $t \in [t_0, t_1]$ определяет текущее время, x — текущее значение вектора фазовых переменных, i — номер активной подсистемы.

Замечание. В случае рассмотрения “расширенной” системы (1.14) фазовым вектором является $\tilde{x} = (x^T, 1)^T$, и потому позиция такой системы может быть определена как тройка $\{t, \tilde{x}, i\}$. В дальнейшем мы будем отождествлять наборы $\{t, x, i\}$ и $\{t, \tilde{x}, i\}$ в силу их взаимного соответствия.

Далее будем искать позиционное управление вида $u = u(\pi)$. Будет выбрана такая управляющая стратегия, что на гиперплоскостях переключений $\mathcal{H}^{(i)}$ она будет фиксированной и одинаковой для любых смежных областей $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$, потому выбор конкретного значения i не повлияет на значение вектора u ; внутри же множеств $\Omega^{(i)}$ каждой паре $\{t, x\}$ взаимнооднозначно соответствует тройка $\{t, x, i\}$. Будет также показано, что такое управление допустимо, т.е. можно корректно определить траектории замкнутой системы с переключениями, а также траектории системы (1.1).

1.3.2 Аппроксимация функции цены

Рассмотрим кусочно-заданную функцию

$$W^{(i)}(t, \tilde{x}) = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t)\tilde{x} \rangle, \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.21)$$

которая определяется набором симметричных матриц коэффициентов

$$K^{(i)}(t) = (K^{(i)}(t))^T \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}.$$

В работе [23] на основе принципа сравнения было показано, что функции вида (1.21) могут служить приближённым решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана в случае кусочно-линейной системы (1.14), однако для этого требуется непрерывность этих функций во всём множестве Ω . Это, в свою очередь, приводит к необходимости проверки специальных условий склейки на гиперплоскостях $\mathcal{H}^{(i)}$, что затрудняет разработку численных методов.

Чтобы обойти указанную сложность, в данной работе рассматривается класс аппроксимаций, заведомо непрерывных в Ω . А именно, на основе (1.21) зададим кусочно-кубическую функцию $\hat{W}(t, \tilde{x})$:

$$\hat{W}(t, \tilde{x}) = \begin{cases} W^{(1)}(t, \tilde{x}), & |x_1 - \zeta_0| \leq \frac{\Delta}{2}, \\ \alpha^{(i)}(x)W^{(i)}(t, \tilde{x}) + (1 - \alpha^{(i)}(x))W^{(i+1)}(t, \tilde{x}), & |x_1 - \theta_i| \leq \frac{\Delta}{2}, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ W^{(N)}(t, \tilde{x}), & |x_1 - \zeta_1| \leq \frac{\Delta}{2}, \end{cases} \quad (1.22)$$

где $\alpha^{(i)}(x)$ — линейная функция:

$$\alpha^{(i)}(x) = \frac{1}{2} - \frac{\langle x, e_1 \rangle - \theta_i}{\Delta}. \quad (1.23)$$

Для любого $x \in \mathcal{H}^{(i)}$ справедливо:

$$\alpha^{(i)}\left(x - \frac{\Delta}{2}e_1\right) = 1, \quad \alpha^{(i)}\left(x + \frac{\Delta}{2}e_1\right) = 0. \quad (1.24)$$

Таким образом, функция (1.22) получена сглаживанием разрывов функций (1.21) на гиперплоскостях $\mathcal{H}^{(i)}$.

Определение 1.9. Производной функционала $f(x)$ в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$ по направлению $\ell \in \mathbb{R}^n$ будем называть правый предел

$$\frac{\partial f}{\partial \ell}(x^0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(x^0 + h\ell) - f(x^0)}{h}.$$

Непосредственно проверяются следующие утверждения.

Утверждение 1.3. Функция $\hat{W}(t, \tilde{x})$ непрерывна по совокупности переменных, причём

$$\hat{W}(t, \tilde{x}) = W^{(i)}(t, \tilde{x}) \text{ при } x \in \mathcal{H}^{(i)} - \frac{\Delta}{2}e_1, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$\hat{W}(t, \tilde{x}) = W^{(i+1)}(t, \tilde{x}) \text{ при } x \in \mathcal{H}^{(i)} + \frac{\Delta}{2}e_1, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Утверждение 1.4. Функция $\hat{W}(t, \tilde{x})$ имеет производную по любому ненулевому направлению $\ell = (\ell_t, \ell_x^T)^T$, $\ell_t \in \mathbb{R}$, $\ell_x \in \mathbb{R}^{n_x+1}$, причём

1. если $x_1 \in [\theta_i - \Delta/2, \theta_i + \Delta/2]$, $i = \overline{1, N-1}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \ell}(t, \tilde{x}) &= \alpha^{(i)}(x) \left[\ell_t \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)}(t)\tilde{x} \rangle + 2\langle \ell_x, K^{(i)}(t)\tilde{x} \rangle \right] + \\ &+ (1 - \alpha^{(i)}(x)) \left[\ell_t \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i+1)}(t)\tilde{x} \rangle + 2\langle \ell_x, K^{(i+1)}(t)\tilde{x} \rangle \right] - \frac{1}{\Delta} \langle \ell_x, \hat{e}_1 \rangle (W^{(i)} - W^{(i+1)}), \end{aligned}$$

где использовано обозначение $\hat{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n_x+1}$;

2. если $x_1 \in [\zeta_0, \zeta_0 + \Delta/2]$, то

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \ell}(t, \tilde{x}) = \left[\ell_t \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(1)}(t)\tilde{x} \rangle + 2\langle \ell_x, K^{(1)}(t)\tilde{x} \rangle \right];$$

3. если $x_1 \in [\zeta_1 - \Delta/2, \zeta_1]$, то

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \ell}(t, \tilde{x}) = \left[\ell_t \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(N)}(t)\tilde{x} \rangle + 2\langle \ell_x, K^{(N)}(t)\tilde{x} \rangle \right].$$

Поскольку границей множества \mathcal{X}_1 является гиперповерхность второго порядка, то для функции $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ на основе (1.16) справедливо представление через квадратичную форму в расширенном пространстве переменных:

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x) = \langle \tilde{x}, \hat{K}\tilde{x} \rangle,$$

где $\hat{K} = \hat{K}^T \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$. Следовательно, если в конечный момент времени зафиксировать матрицы неизвестных коэффициентов как

$$K^{(i)}(t_1) = \hat{K}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.25)$$

то будет выполнено граничное условие

$$\hat{W}(t_1, \tilde{x}) = \phi_{\mathcal{X}_1}(x),$$

являющееся аналогом условия (1.19).

1.4 Оценка множества разрешимости

1.4.1 Позиционное управление для кусочно-линейной системы

Поскольку ограничения на управление в каждый момент времени задаются выпуклыми множествами — эллипсоидами, для работы с этими множествами удобно применить аппарат опорных функций [1; 27; 29; 48].

Определение 1.10. *Опорной функцией множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ в направлении $\ell \in \mathbb{R}^n$ называется функция*

$$\rho(\ell | \mathcal{A}) = \sup_{x \in \mathcal{A}} \langle \ell, x \rangle. \quad (1.26)$$

Утверждение 1.5. *Пусть множество $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и замкнуто. Тогда оно однозначно определяется своей опорной функцией:*

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x^*, x \rangle \leq \rho(x^* | \mathcal{A}) \forall x^* \in \mathbb{R}^n\}.$$

Утверждение 1.6. *Опорной функцией эллипсоида $\mathcal{E}(p, P)$ является функция*

$$\rho(\ell | \mathcal{E}(p, P)) = \langle \ell, p \rangle + \sqrt{\langle \ell, P\ell \rangle}, \quad (1.27)$$

причём супремум в (1.26) при $\ell \neq 0$ достигается на векторе

$$x^* = p + \frac{P\ell}{\sqrt{\langle \ell, P\ell \rangle}} \in \mathcal{E}(p, P).$$

При $\ell = 0$ супремум достигается на любом векторе из множества $\mathcal{E}(p, P)$.

Замечание. *Несложно также получить, что $\inf \{\langle \ell, x \rangle | x \in \mathcal{E}(p, P)\}$ при $\ell \neq 0$ достигается на векторе*

$$x^* = p - \frac{P\ell}{\sqrt{\langle \ell, P\ell \rangle}} \in \mathcal{E}(p, P). \quad (1.28)$$

При фиксированных значениях i рассмотрим следующие многозначные отображения, мотивированные следствием 1.3, видом кусочно-квадратичной функции (1.21) и формулой (1.28):

$$u^{(i)}(t, x) = \begin{cases} -\frac{P(t)\ell^*}{\sqrt{\langle \ell^*, P(t)\ell^* \rangle}}, & x \in \Omega^{(i)}, \ell^* \neq 0, \\ \mathcal{E}(0, P(t)), & x \in \Omega^{(i)}, \ell^* = 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

где в качестве $\ell^* = \ell^*(t, x)$ выступает вектор

$$\ell^* = \tilde{B}^T(t)K^{(i)}(t)\tilde{x}.$$

При каждом i указанное отображение принимает выпуклые компактные значения и полунепрерывно сверху по (t, x) . Следовательно, для дифференциального включения, соответствующего подсистеме (1.14) и полученного при замыкании управлением (1.29), будет выполнена следующая теорема о существовании решения [45, с. 60—61] на множестве $\Omega^{(i)}$.

Теорема 1.4 (А.Ф. Филиппов). *Пусть многозначная функция $\mathcal{F}(t, x)$, определённая в области G , полунепрерывна сверху по (t, x) и в каждой точке $(t, x) \in G$ является непустым, замкнутым, ограниченным, выпуклым множеством. Тогда для любой точки $(t_0, x^0) \in G$ существует решение задачи $\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x)$, $x(t_0) = x^0$. Каждое такое решение можно продлить в обе стороны до выхода на границу области G .*

В то же время при рассмотрении всего множества Ω свойство полунепрерывности может нарушаться на гиперплоскостях $\mathcal{H}^{(i)}$. Чтобы этого избежать, доопределим каждую функцию (1.29) при всех $x \in \Omega$ как

$$u^{(i)}(t, x) = \begin{cases} -\frac{P(t)\ell^*}{\sqrt{\langle \ell^*, P(t)\ell^* \rangle}}, & x \in \Omega, \ell^* \neq 0, \\ \mathcal{E}(0, P(t)), & x \in \Omega, \ell^* = 0, \end{cases} \quad (1.30)$$

и рассмотрим “склеенное” управление

$$u^*(\pi) = \begin{cases} u^{(1)}(\pi), & x_1 \in [\zeta_0, \zeta_0 + \frac{\Delta}{2}], \\ \alpha^{(i)}(x) \cdot u^{(i)}(\pi) + (1 - \alpha^{(i)}(x)) \cdot u^{(i+1)}(\pi), & |x_1 - \theta_i| \leq \frac{\Delta}{2}, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ u^{(N)}(\pi), & x_1 \in [\zeta_1 - \frac{\Delta}{2}, \zeta_1]. \end{cases} \quad (1.31)$$

Многозначное отображение (1.31) полунепрерывно сверху при всех $x \in \Omega$ и, следовательно, является допустимым управлением.

1.4.2 Изменение функции вдоль траектории

Пусть $S^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$ — некоторые непрерывные матричные функции, для которых справедливо $(S^{(i)})^T(t) = (S^{(i)}(t))^{-1}$, а $\gamma^{(i)}(t)$ — скалярные функции, принимающие положительные значения. Пусть также C — константа, равная максимальной норме вектора в компактном множестве Ω :

$$C = \max_{x \in \Omega} \|x\|.$$

Кроме того, введём следующие обозначения:

$$\mathbf{P}(t) = \tilde{B}(t)P(t) \left(\tilde{B}(t) \right)^T, \quad \mathbf{Q}(t) = \tilde{C}(t) Q \left(\tilde{C}(t) \right)^T,$$

$$D^{(i)}(t) = \tilde{A}^{(i)}(t) - \frac{1}{\sqrt{C^2 + 1}} (\mathbf{P}(t))^{\frac{1}{2}} (S^{(i)}(t))^T,$$

$$F^{(i)}(t) = K^{(i)}(t)D^{(i)}(t) + (D^{(i)}(t))^T K^{(i)}(t) + \frac{1}{2\gamma^{(i)}(t)} K^{(i)}(t)\mathbf{Q}(t)K^{(i)}(t) + 2\Gamma^{(i)}(t),$$

$$\Gamma^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_x \times n_x} & \mathbb{O}_{n_x \times 1} \\ \mathbb{O}_{1 \times n_x} & \gamma^{(i)}(t) \end{bmatrix}.$$

Лемма 1.1. Для любых непрерывных скалярной функции $\gamma^{(i)}(t) > 0$ и матричной функции $S^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$, $(S^{(i)}(t))^T = (S^{(i)}(t))^{-1}$, справедливы неравенства

$$\sqrt{\langle \tilde{x}, K^{(i)}(t)\mathbf{P}(t)K^{(i)}(t)\tilde{x} \rangle} \geq \frac{1}{\sqrt{\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle}} \langle \tilde{x}, S^{(i)}(t)\mathbf{P}^{1/2}(t)K^{(i)}(t)\tilde{x} \rangle, \quad (1.32)$$

$$\sqrt{\langle \tilde{x}, K^{(i)}(t)\mathbf{Q}(t)K^{(i)}(t)\tilde{x} \rangle} \leq \gamma^{(i)}(t) + \frac{1}{4\gamma^{(i)}(t)} \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t)\mathbf{Q}(t)K^{(i)}(t)\tilde{x} \rangle. \quad (1.33)$$

Равенство в (1.32) достигается, если существует такое $\lambda^{(i)}(t) \in \mathbb{R}$, что

$$S^{(i)}(t)\mathbf{P}^{1/2}(t)K^{(i)}(t)\tilde{x} = \lambda^{(i)}(t)\tilde{x}.$$

Равенство в (1.33) достигается при

$$\gamma^{(i)}(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\langle \tilde{x}, K^{(i)}(t)\mathbf{Q}(t)K^{(i)}(t)\tilde{x} \rangle}.$$

Доказательство. Оценка (1.32) следует из неравенства Коши–Буняковского, а (1.33) — из неравенства $4a^2 - 4ab + b^2 = (2a - b)^2 \geq 0$. \square

Лемма 1.2. В любой фиксированный момент времени $t \in [t_0, t_1]$ при всех значениях вектора $x \in \Omega^{(i)}$, а также при $x \in \Omega^{(i-1)}$ (если $i > 1$) и $x \in \Omega^{(i+1)}$ (если $i < N$), при любом значении $v \in \mathcal{E}(0, Q)$ и при любом значении вектора управления $u^{(i)}$, полученного на основе (1.30), справедливо неравенство

$$\langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)}(t)\tilde{x} \rangle + 2 \langle K^{(i)}(t)\tilde{x}, \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x} + \tilde{B}(t)u^{(i)} + \tilde{C}(t)v \rangle \leq a(t), \quad (1.34)$$

где функция $a(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$ определена как¹

$$a(t) = \max_{1 \leq i \leq N} \max_{x \in \Omega} \left\{ \langle \tilde{x}, \left(\dot{K}^{(i)}(t) + F^{(i)}(t) \right) \tilde{x} \rangle \mid x_1 \in [\theta_{i-1} - \Delta, \theta_i + \Delta] \right\}. \quad (1.35)$$

Доказательство. В силу утверждения 1.6 для выбранного управления справедливо

$$\langle \tilde{B}^T K^{(i)} \tilde{x}, u^{(i)} \rangle = - \langle \tilde{B}^T K^{(i)} \tilde{x}, -u^{(i)} \rangle = -\rho \left(\tilde{B}^T K^{(i)} \tilde{x} \mid \mathcal{E}(0, P(t)) \right).$$

¹В работе [127] была допущена неточность при определении величины $a(t)$: рассматривался максимум по точкам $x \in \Omega^{(i)}$, без учёта множеств $\Omega^{(i-1)}$ и $\Omega^{(i+1)}$. Тем не менее, ход дальнейших доказательств остаётся неизменным.

Далее в силу линейности скалярного произведения имеем

$$\begin{aligned} & \left\langle K^{(i)}(t)\tilde{x}, \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x} + \tilde{B}(t)u^{(i)} + \tilde{C}(t)v \right\rangle \leq \\ & \leq \left\langle K^{(i)}\tilde{x}, \tilde{A}^{(i)}\tilde{x} \right\rangle + \left\langle \tilde{B}^T K^{(i)}\tilde{x}, u^{(i)} \right\rangle + \sup_{v \in \mathcal{E}(0, Q)} \left\langle \tilde{C}^T K^{(i)}\tilde{x}, v \right\rangle = \\ & = \left\langle K^{(i)}\tilde{x}, \tilde{A}^{(i)}\tilde{x} \right\rangle - \rho \left(\tilde{B}^T K^{(i)}\tilde{x} \mid \mathcal{E}(0, P(t)) \right) + \rho \left(\tilde{C}^T K^{(i)}\tilde{x} \mid \mathcal{E}(0, Q) \right), \end{aligned}$$

откуда при подстановке опорной функции (1.27) и применении оценок (1.32)–(1.33) получим

$$\begin{aligned} & \left\langle K^{(i)}\tilde{x}, \tilde{A}^{(i)}\tilde{x} + \tilde{B}u^{(i)} + \tilde{C}v \right\rangle \leq \\ & \leq \left\langle K^{(i)}\tilde{x}, \tilde{A}^{(i)}\tilde{x} \right\rangle - \sqrt{\left\langle \tilde{B}^T K^{(i)}\tilde{x}, P\tilde{B}^T K^{(i)}\tilde{x} \right\rangle} + \sqrt{\left\langle \tilde{C}^T K^{(i)}\tilde{x}, Q\tilde{C}^T K^{(i)}\tilde{x} \right\rangle} = \\ & = \left\langle K^{(i)}\tilde{x}, \tilde{A}^{(i)}\tilde{x} \right\rangle - \sqrt{\left\langle \tilde{x}, K^{(i)}\mathbf{P}(t)K^{(i)}\tilde{x} \right\rangle} + \sqrt{\left\langle \tilde{x}, K^{(i)}\mathbf{Q}K^{(i)}\tilde{x} \right\rangle} \leq \\ & \leq \left\langle K^{(i)}\tilde{x}, \tilde{A}^{(i)}\tilde{x} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{\left\langle \tilde{x}, \tilde{x} \right\rangle}} \left\langle \tilde{x}, S^{(i)}(t)\mathbf{P}^{1/2}K^{(i)}\tilde{x} \right\rangle + \gamma^{(i)} + \frac{1}{4\gamma^{(i)}} \left\langle \tilde{x}, K^{(i)}\mathbf{Q}K^{(i)}\tilde{x} \right\rangle. \end{aligned}$$

Тогда с учётом соотношения $\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle \leq C^2 + 1$ и введённых обозначений получаем требуемое утверждение:

$$\begin{aligned} & \left\langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)}\tilde{x} \right\rangle + 2 \left\langle K^{(i)}\tilde{x}, \tilde{A}^{(i)}\tilde{x} + \tilde{B}u^{(i)} + \tilde{C}v \right\rangle \leq \\ & \leq \left\langle \tilde{x}, \left[\dot{K}^{(i)} + 2K^{(i)}\tilde{A}^{(i)} - \frac{2}{\sqrt{C^2 + 1}} S^{(i)}\mathbf{P}^{1/2}K^{(i)} + \frac{1}{2\gamma^{(i)}} K^{(i)}\mathbf{Q}K^{(i)} \right] \tilde{x} \right\rangle + 2\gamma^{(i)} = \\ & = \left\langle \tilde{x}, \left[\dot{K}^{(i)} + K^{(i)}D^{(i)} + D^{(i)}K^{(i)} + \frac{1}{2\gamma^{(i)}} K^{(i)}\mathbf{Q}K^{(i)} + 2\Gamma^{(i)} \right] \tilde{x} \right\rangle = \left\langle \tilde{x}, \left[\dot{K}^{(i)} + F^{(i)} \right] \tilde{x} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Утверждение 1.7. Пусть $x = x(t)$ — произвольное решение дифференциального включения, полученного при замыкании системы (1.12) “сглаженным” управлением (1.31). Пусть также $\hat{W}(t, \tilde{x})$ — кусочно-кубическая функция, определённая согласно (1.22). Тогда выполнено неравенство

$$\hat{W}(t_1, \tilde{x}(t_1)) - \hat{W}(t_0, \tilde{x}(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t_1} [a(t) + \eta(t)] dt, \quad (1.36)$$

где использованы обозначения

$$\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t) + \eta_3(t), \quad (1.37)$$

$$\eta_1(t) = \frac{1}{\Delta} \cdot |\dot{x}_1(t)| \cdot \left| \left\langle \tilde{x}(t), (K^{(i)}(t) - K^{(i+1)}(t)) \tilde{x}(t) \right\rangle \right|, \quad (1.38)$$

$$\eta_2(t) = 2(1 - \alpha^{(i)}(x(t))) \left| \left\langle K^{(i+1)}(t)\tilde{x}(t), (\tilde{A}^{(i)}(t) - \tilde{A}^{(i+1)}(t)) \tilde{x}(t) \right\rangle \right|, \quad (1.39)$$

$$\eta_3(t) = 4\alpha^{(i)}(x(t)) \cdot (1 - \alpha^{(i)}(x(t))) \cdot \left\| \tilde{B}^T(t) (K^{(i)}(t) - K^{(i+1)}(t)) \tilde{x}(t) \right\| \cdot \max_{u \in \mathcal{E}(0, P(t))} \|u\|, \quad (1.40)$$

причём индекс $i = i(x(t))$ в формулах (1.38)–(1.40) также является функцией.

Доказательство. Рассмотрим производную функции $\hat{W}(t, \tilde{x}(t))$ по направлению

$$\ell(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(t)u^* + \tilde{C}(t)v(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x+2},$$

где индекс $i = i(t)$ зависит от времени, функция $v = v(t)$ — допустимая помеха, а управление $u^* = u^*(t, x(t), i(x(t)))$ — однозначный программный селектор многозначного отображения (1.31), с помощью которого может быть получена рассматриваемая траектория. В соответствии с формулой (1.31), в каждый момент времени значения u^* также могут быть выражены через значения некоторых селекторов $u^{(i)}(t, x(t))$ многозначных отображений (1.30).

Поскольку выбранное управление и функция $\hat{W}(t, \tilde{x})$ являются кусочно-заданными, конкретная формула производной по направлению будет зависеть от значения компоненты x_1 . Чтобы унифицировать выкладки, определим вспомогательные величины $K^{(0)} = K^{(1)}$ и $K^{(N+1)} = K^{(N)}$. Тогда дальнейшие оценки будут справедливы при любых $x_1 \in [\zeta_0, \zeta_1]$.

Из утверждения 1.4 имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \ell}(t, \tilde{x}(t)) &= \alpha^{(i)} \left[\ell_t \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{x} \rangle + 2 \langle \ell_x, K^{(i)} \tilde{x} \rangle \right] + (1 - \alpha^{(i)}) \left[\ell_t \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i+1)} \tilde{x} \rangle + 2 \langle \ell_x, K^{(i+1)} \tilde{x} \rangle \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \langle \ell_x, \hat{e}_1 \rangle (\langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \tilde{x} \rangle - \langle \tilde{x}, K^{(i+1)}(t) \tilde{x} \rangle). \end{aligned}$$

На основе выражения для $\ell(t)$, добавляя и вычитая необходимые слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \ell}(t, \tilde{x}(t)) &= \alpha^{(i)} \left[\ell_t \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{x} \rangle + 2 \langle \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x} + \tilde{B}(t)u^{(i)} + \tilde{C}(t)v(t), K^{(i)} \tilde{x} \rangle \right] + \\ &\quad + \alpha^{(i)} \left[2 \langle -(1 - \alpha^{(i)})\tilde{B}(t)u^{(i)} + (1 - \alpha^{(i)})\tilde{B}u^{(i+1)}, K^{(i)} \tilde{x} \rangle \right] + \\ &\quad + (1 - \alpha^{(i)}) \left[\ell_t \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i+1)} \tilde{x} \rangle + 2 \langle \tilde{A}^{(i+1)}(t)\tilde{x} + \tilde{B}(t)u^{(i+1)} + \tilde{C}(t)v(t), K^{(i+1)} \tilde{x} \rangle \right] - \\ &\quad + (1 - \alpha^{(i)}) \left[2 \langle \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x} - \tilde{A}^{(i+1)}(t)\tilde{x} + \alpha^{(i)}\tilde{B}(t)u^{(i)} - \alpha^{(i)}\tilde{B}(t)u^{(i+1)}, K^{(i+1)} \tilde{x} \rangle \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \langle \ell_x, \hat{e}_1 \rangle (\langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \tilde{x} \rangle - \langle \tilde{x}, K^{(i+1)}(t) \tilde{x} \rangle), \end{aligned}$$

откуда после применения леммы 1.2 следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \ell}(t, \tilde{x}(t)) &\leq a(t) - \frac{1}{\Delta} \langle \ell_x, \hat{e}_1 \rangle (\langle \tilde{x}(t), K^{(i)}(t) \tilde{x}(t) \rangle - \langle \tilde{x}, K^{(i+1)}(t) \tilde{x}(t) \rangle) + \\ &\quad + 2(1 - \alpha^{(i)}) \left\langle K^{(i+1)}(t) \tilde{x}(t), \left(\tilde{A}^{(i)}(t) - \tilde{A}^{(i+1)}(t) \right) \tilde{x}(t) \right\rangle + \\ &\quad + 2\alpha^{(i)}(1 - \alpha^{(i)}) \left\langle \left(K^{(i+1)}(t) - K^{(i)}(t) \right) \tilde{x}(t), \tilde{B}(t) \left(u^{(i)}(t, x(t)) - u^{(i+1)}(t, x(t)) \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Тогда с учётом обозначений (1.37)–(1.40) будет справедливо

$$\hat{W}(t_1, \tilde{x}(t_1)) - \hat{W}(t_0, \tilde{x}(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \hat{W}'_{\ell(t)}(t, \tilde{x}(t)) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} [a(t) + \eta(t)] dt.$$

□

Замечание. Строго говоря, формулы (1.38)–(1.40) справедливы лишь для тех значений вектора $x(t) \in \Omega^{(i)}$, когда $x_1 \in [\theta_i - \Delta/2, \theta_i]$. Однако при $x_1 \in [\theta_{i-1}, \theta_i - \Delta/2]$ формулы аналогичны и получаются заменой $i(x(t))$ на $i(x(t)) - 1$. При этом все дальнейшие оценки останутся верными.

Отметим, что в формулах (1.38)–(1.40) функция $i = i(x(t))$ зависит от конкретной траектории, что неудобно для построения априорных гарантированных оценок. Далее приведены оценки величин η_1, η_2, η_3 , которые не зависят от i , а также от $x(t)$.

Предварительно введём обозначение

$$\varepsilon(t) = \max_i \|K^{(i)}(t) - K^{(i+1)}(t)\|. \quad (1.41)$$

Лемма 1.3. Величина $\eta_1(t)$ является ограниченной (сразу при всех i), и, кроме того,

$$\eta_1 \rightarrow 0 \text{ при } \frac{\varepsilon(t)}{\Delta} \rightarrow 0. \quad (1.42)$$

Доказательство. Пусть векторы $a_1(t), b_1(t), c_1(t)$ — первые строки матриц $\tilde{A}^{(i)}(t), \tilde{B}(t), \tilde{C}(t)$ соответственно. Тогда для системы (1.14) справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\dot{x}_1(t)| &\leq |\langle a_1^T(t), x(t) \rangle + \langle b_1^T(t), u \rangle + \langle c_1^T(t), v \rangle| \leq \\ &\leq \|a_1^T(t)\| \cdot \|x(t)\| + \rho(b_1^T(t) | \mathcal{E}(0, P(t))) + \rho(c_1^T | \mathcal{E}(0, Q)) = \\ &= \|a_1^T(t)\| \cdot C + \sqrt{\langle b_1^T(t), P(t)b_1^T(t) \rangle} + \sqrt{\langle c_1^T(t), Qc_1^T(t) \rangle}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$|\langle \tilde{x}, (K^{(i)} - K^{(i+1)})\tilde{x} \rangle| \leq \|\tilde{x}\|^2 \cdot \|K^{(i)} - K^{(i+1)}\| \leq (C^2 + 1) \cdot \varepsilon(t).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{1}{\Delta} \cdot |\dot{x}_1| \cdot |(W^{(i)} - W^{(i+1)})| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon(t)}{\Delta} \cdot (C^2 + 1) \cdot \left[\|a_1^T(t)\| \cdot C + \sqrt{\langle b_1^T(t), P(t)b_1^T(t) \rangle} + \sqrt{\langle c_1^T(t), Qc_1^T(t) \rangle} \right], \end{aligned}$$

откуда следует сходимость (1.42). \square

Лемма 1.4. Величина $\eta_2(t)$ является ограниченной (сразу при всех i), и, кроме того,

$$\eta_2 \rightarrow 0 \text{ при } \Delta \rightarrow 0. \quad (1.43)$$

Доказательство. Справедливо неравенство:

$$\eta_2(t) = 2(1 - \alpha^{(i)}) \left| \left\langle K^{(i+1)}\tilde{x}, \left(\tilde{A}^{(i)} - \tilde{A}^{(i+1)} \right) \tilde{x} \right\rangle \right| \leq 2\|K^{(i+1)}\| \cdot \|\tilde{A}^{(i)} - \tilde{A}^{(i+1)}\| \cdot (C^2 + 1).$$

В силу выражений (1.10)–(1.11) и (1.15) получим

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(i)} - \tilde{A}^{(i+1)} &= \begin{bmatrix} A^{(i)} - A^{(i+1)} & f^{(i)} - f^{(i+1)} \\ \mathbb{O}_{1 \times n_x} & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta} \hat{A} [g(\theta_{i-1}) - 2g(\theta_i) + g(\theta_{i+1})] & \mathbb{O}_{n_x \times (n_x-1)} & \frac{\theta_i}{\Delta} \hat{A} [g(\theta_{i-1}) - 2g(\theta_i) + g(\theta_{i+1})] \\ 0 & \mathbb{O}_{1 \times (n_x-1)} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Тейлора для функций $g_j(x_1)$:

$$\begin{aligned} g_j(\theta_{i+1}) &= g_j(\theta_i) + g'_j(\theta_i)\Delta + \frac{1}{2}g''_j(\theta_i)\Delta^2 + \bar{o}(\Delta^2), \quad j = \overline{1, r}, \\ g_j(\theta_{i-1}) &= g_j(\theta_i) - g'_j(\theta_i)\Delta + \frac{1}{2}g''_j(\theta_i)\Delta^2 + \bar{o}(\Delta^2), \quad j = \overline{1, r}, \end{aligned}$$

откуда получим:

$$g_j(\theta_{i-1}) - 2g_j(\theta_i) + g_j(\theta_{i+1}) = g''_j(\theta_i)\Delta^2 + \bar{o}(\Delta^2), \quad j = \overline{1, r}.$$

Таким образом, элементы матрицы $(\tilde{A}^{(i)} - \tilde{A}^{(i+1)})$ стремятся к нулю при $\Delta \rightarrow 0$ и, следовательно, $\eta_2(t) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$. \square

Лемма 1.5. *Величина $\eta_3(t)$ является ограниченной (сразу при всех i), и, кроме того,*

$$\eta_3 \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon(t) \rightarrow 0. \quad (1.44)$$

Доказательство. Поскольку максимум функции $\phi(\alpha) = \alpha(1-\alpha)$ на отрезке $[0, 1]$ достигается в точке $\alpha = \frac{1}{2}$, для η_3 справедлива оценка

$$\begin{aligned} \eta_3(t) &= 4\alpha^{(i)}(1-\alpha^{(i)}) \left\| \tilde{B}^T (K^{(i)} - K^{(i+1)}) \tilde{x} \right\| \cdot \max_{u \in \mathcal{E}(0, P(t))} \|u\| \leq \\ &\leq \|\tilde{B}\| \cdot \|K^{(i)} - K^{(i+1)}\| \cdot \|\tilde{x}\| \cdot \max_{u \in \mathcal{E}(0, P(t))} \|u\| \leq \sqrt{C^2 + 1} \cdot \|\tilde{B}(t)\| \cdot \varepsilon(t) \cdot \sqrt{\lambda_1(t)}, \end{aligned}$$

где $\lambda_1(t)$ — максимальное собственное значение матрицы $P(t)$. \square

Утверждение 1.8. *Величина $\eta(t)$ из формулы (1.36) стремится к нулю при одновременном стремлении*

$$\varepsilon(t) \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon(t)}{\Delta} \rightarrow 0. \quad (1.45)$$

Доказательство. Утверждение напрямую следует из формулы (1.37) и лемм 1.3–1.5. \square

Замечание. *Оценки, приведённые в доказательствах лемм 1.3–1.5, могут быть улучшены, например, за счёт более тщательного анализа, в каких множествах $\Omega^{(i)}$ могут оказаться точки рассматриваемых траекторий в момент времени t . Для этого можно использовать внешние оценки множеств разрешимости, построенные каким-либо способом.*

1.4.3 Итоговая оценка множества разрешимости

Получить внутреннюю оценку множества разрешимости можно с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.5. Пусть произвольные функции $\gamma^{(i)}(t) \in \mathbb{R}$ и $S^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$, $i = \overline{1, N}$, непрерывны на отрезке $[t_0, t_1]$ и удовлетворяют при всех $t \in [t_0, t_1]$ условиям $\gamma^{(i)} > 0$ и $(S^{(i)}(t))^{-1} = (S^{(i)}(t))^T$. Кроме того, пусть для вещественнозначной функции $\hat{W}(t, \tilde{x})$, определённой равенствами (1.21)–(1.23), в момент времени t_1 выполнено

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leq \hat{W}(t_1, \tilde{x}) \quad \text{для всех } x \in \Omega. \quad (1.46)$$

Пусть функции $a(t)$ и $\eta(t)$ определены согласно (1.35) и (1.37) соответственно. Тогда множество

$$\mathcal{W}_\mu^{\text{int}}(t) = \left\{ x \in \Omega : \hat{W}(t, \tilde{x}) \leq - \int_t^{t_1} [a(t) + \eta(t)] dt + \mu \right\} \quad (1.47)$$

является при любом $t \in [t_0, t_1]$ подмножеством множества разрешимости $\mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ исходной нелинейной системы (1.1).

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $x \in \mathcal{W}_\mu^{\text{int}}(t)$. Далее замкнём нелинейную систему (1.1) управлением в позиционной форме (1.31) и получим некоторое решение $x(\tau) = x(\tau; t, x)$, $\tau \in [t, t_1]$. Пусть теперь $u^* = u^*(\tau, x(\tau), i(x(\tau)))$ — однозначное программное управление, соответствующее данной траектории. Ей также будет соответствовать функция $v(\cdot)$, определяемая формулой (1.6), которую можно считать непрерывной. В расширенном пространстве переменных таким образом можно построить траекторию $\tilde{x}(\tau) = (x^T(\tau), 1)^T$ кусочно-линейной системы (1.14) с фиксированной, допустимой реализацией помехи $v(\tau)$.

В силу утверждения 1.7 для траектории кусочно-линейной системы справедливо

$$\hat{W}(t_1, \tilde{x}(t_1)) - \int_t^{t_1} [a(t) + \eta(t)] dt \leq \hat{W}(t, \tilde{x}(t)).$$

С другой стороны, из определения (1.47) следует неравенство

$$\hat{W}(t, \tilde{x}(t)) \leq - \int_t^{t_1} [a(t) + \eta(t)] dt + \mu.$$

Тогда имеем цепочку неравенств

$$\hat{W}(t_1, \tilde{x}(t_1)) - \int_t^{t_1} [a(t) + \eta(t)] dt \leq \hat{W}(t, \tilde{x}(t)) \leq - \int_t^{t_1} [a(t) + \eta(t)] dt + \mu,$$

откуда

$$\hat{W}(t_1, \tilde{x}(t_1)) \leq \mu.$$

Поскольку в конечный момент времени выполнено условие (1.46), то $\phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1)) \leq \mu$. Следовательно, $x(t) = x \in \mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ и $\mathcal{W}_\mu^{\text{int}}(t) \subseteq \mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1)$. \square

Замечание. При численной реализации алгоритма вместо вычисления значений функции $\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t) + \eta_3(t)$ необходимо воспользоваться оценками величин $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\eta_3(t)$, полученными в леммах 1.3–1.5, чтобы избежать зависимости от заранее неизвестных значений $x(t)$.

1.5 Численный метод

Из леммы 1.2 следует, что величина $a(t)$, определённая в (1.35), является погрешностью выполнения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана при рассмотрении в качестве его приближённого решения кусочно-квадратичной функции вида $W(t, \tilde{x})$ (1.21) во множестве $\Omega^{(i)}$. Таким образом, для построения более точных решений уравнения ГЯБ неизвестные матрицы $K^{(i)}$ следует подбирать таким образом, чтобы величина $a(t)$ была как можно ближе к нулю. Исходя из формулы (1.35), этого можно добиться путём решения дифференциальных уравнений

$$\dot{K}^{(i)}(t) + F^{(i)}(t) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

В соответствии с определением матриц $F^{(i)}$ такие уравнения являются матричными дифференциальными уравнениями типа Риккати [9, с. 191–200].

Кроме того, на точность полученной оценки множества разрешимости влияют неотрицательные члены η_1 , η_2 , η_3 , которые появляются из-за склейки квадратичных функций $W(t, \tilde{x})$ в окрестностях гиперплоскостей переключений при конструировании функции $\hat{W}(t, \tilde{x})$ (1.22). Эти члены зависят от матриц $K^{(i)}$, причём для улучшения оценок $\eta_1(t)$ и $\eta_3(t)$ требуются матричные равенства

$$K^{(j)}(t) - K^{(j+1)}(t) = 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

Поэтому перейдём к системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{K}^{(i)}(t) + F^{(i)}(t) = 0, \\ K^{(j)}(t) = K^{(j+1)}(t), \end{cases} \quad (1.48)$$

где индексы пробегают значения $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N-1}$. Для матриц $K^{(i)}$ также выполнены граничные условия (1.25):

$$K^{(i)}(t_1) = \hat{K}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Введём равномерную временную сетку $t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_M = t_1$ с шагом $\delta\tau = \tau_k - \tau_{k-1}$. Заменяя производные $\dot{K}^{(i)}$ их разностными аппроксимациями, получим следующую систему:

$$\begin{cases} K^{(i)}(\tau_{k-1}) - K^{(i)}(\tau_k) - F^{(i)}(\tau_k) \cdot \delta\tau = 0, \\ K^{(j+1)}(\tau_{k-1}) - K^{(j)}(\tau_{k-1}) = 0. \end{cases} \quad (1.49)$$

Эта система является переопределённой. Поэтому в каждый момент τ_k будем искать псевдорешение системы, т.е. такой набор матриц $K^{(i)}(\tau_{k-1})$ (при известных $K^{(i)}(\tau_k)$), что вектор, составленный из всех элементов левой части системы (1.49), будет иметь наименьшую евклидову норму.

1.5.1 Поиск псевдорешения

Заметим, что при поиске псевдорешения точность отдельных соотношений несовместной системы можно повысить, домножая обе части уравнений на весовые коэффициенты. Для этого введём веса $w_i > 0$, $i = \overline{1, N}$, и $\tilde{w}_j > 0$, $j = \overline{1, N-1}$, чтобы перейти к следующим системам уравнений:

$$\begin{cases} w_i \left[K_{pq}^{(i)}(\tau_{k-1}) - K_{pq}^{(i)}(\tau_k) - F_{pq}^{(i)}(\tau_k) \cdot \delta\tau \right] = 0, \\ \tilde{w}_j \left[K_{pq}^{(j+1)}(\tau_{k-1}) - K_{pq}^{(j)}(\tau_{k-1}) \right] = 0, \end{cases} \quad p, q = \overline{1, n_x + 1}. \quad (1.50)$$

В выражении (1.50) нижняя индексация соответствует конкретным элементам матриц, что позволяет перейти к $(n_x + 1)^2$ независимым подсистемам.

Квадрат нормы невязки системы (1.50) равен

$$\sum_{i=1}^N w_i^2 \left[K_{pq}^{(i)}(\tau_{k-1}) - K_{pq}^{(i)}(\tau_k) - F_{pq}^{(i)}(\tau_k) \cdot \delta\tau \right]^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{w}_j^2 \left[K_{pq}^{(j+1)}(\tau_{k-1}) - K_{pq}^{(j)}(\tau_{k-1}) \right]^2.$$

Поскольку полученное выражение является выпуклой функцией от переменных $K_{pq}^{(i)}$, то для нахождения элементов, соответствующих искомому псевдорешению, дифференцированием получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} (w_1^2 + \tilde{w}_1^2) \cdot K_{pq}^{(1)}(\tau_{k-1}) - \tilde{w}_1^2 K_{pq}^{(2)}(\tau_{k-1}) = w_1^2 \left[K_{pq}^{(1)}(\tau_k) + F_{pq}^{(1)}(\tau_k) \cdot \delta\tau \right], \\ -\tilde{w}_{l-1}^2 K_{pq}^{(l-1)}(\tau_{k-1}) + (w_l^2 + \tilde{w}_{l-1}^2 + \tilde{w}_l^2) \cdot K_{pq}^{(l)}(\tau_{k-1}) - \tilde{w}_l^2 K_{pq}^{(l+1)}(\tau_{k-1}) = \\ = w_l^2 \left[K_{pq}^{(l)}(\tau_k) + F_{pq}^{(l)}(\tau_k) \cdot \delta\tau \right], \\ -\tilde{w}_{N-1}^2 K_{pq}^{(N-1)}(\tau_{k-1}) + (w_N^2 + \tilde{w}_{N-1}^2) \cdot K_{pq}^{(N)}(\tau_{k-1}) = w_N^2 \left[K_{pq}^{(N)}(\tau_k) + F_{pq}^{(N)}(\tau_k) \cdot \delta\tau \right]. \end{cases} \quad l = \overline{2, N-1},$$

Матрица полученной системы является трёхдиагональной и имеет диагональное преобладание, откуда следует, что решение системы существует при любых неотрицательных весовых коэффициентах и может быть найдено методом прогонки [31, с. 411–417].

1.5.2 О выборе параметров численного метода

Точность решения системы (1.48) также зависит от параметров $S^{(i)}(t)$, $\gamma^{(i)}(t)$. В лемме 1.1 было показано, что оценка будет более точной, если существуют такие коэффициенты $\lambda^{(i)}(t) \in \mathbb{R}$, что

$$S^{(i)}(t) (\mathbf{P}(t))^{1/2} K^{(i)}(t) \tilde{x} = \lambda^{(i)}(t) \tilde{x}, \quad (1.51)$$

$$\gamma^{(i)}(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \mathbf{Q}(t) K^{(i)}(t) \tilde{x} \rangle}. \quad (1.52)$$

Однако в силу независимости параметров $S^{(i)}(t)$, $\gamma^{(i)}(t)$ от пространственной переменной x равенства (1.51)–(1.52), вообще говоря, не выполняются во всём множестве $\Omega^{(i)}$. Поэтому потребуем, чтобы они выполнялись хотя бы для одного вектора $x \in \Omega^{(i)}$.

При любом фиксированном $x \in \Omega^{(i)}$ условие (1.52) выполняется автоматически, а разрешимость уравнения (1.51) относительно $S^{(i)}$ и $\lambda^{(i)}$ подтверждается следующим утверждением.

Лемма 1.6. *Для произвольных векторов $a, b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, таких, что $\|a\| = \|b\|$, существует матрица ортогонального преобразования, переводящего a в b .*

Доказательство. Обоснование данной леммы может быть найдено, например, в [2, с. 153].

Ниже приведено другое известное автору доказательство.

Построим сингулярные разложения для векторов a и b :

$$a = V_a \Sigma_a u_a, \quad b = V_b \Sigma_b u_b,$$

где $V_a, V_b \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — ортогональные матрицы; $u_a, u_b \in \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}^1$,

$$\Sigma_a = (\sigma_a, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad \sigma_a > 0,$$

$$\Sigma_b = (\sigma_b, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad \sigma_b > 0.$$

Поскольку ортогональное преобразование сохраняет норму вектора [43, с. 241–244] и, кроме того, $\|a\| = \|b\|$, то справедливо $|\sigma_b u_b (\sigma_a u_a)^{-1}| = 1$.

Следовательно, матрица $(V_b V_a^T \sigma_b u_b (\sigma_a u_a)^{-1})$ ортогональна, при этом выполнено:

$$\begin{aligned} b = V_b \Sigma_b u_b &= V_b (V_a^T V_a) \Sigma_b u_b = V_b V_a^T \cdot V_a \Sigma_b u_b = V_b V_a^T \cdot V_a \left(\Sigma_a \frac{\sigma_b}{\sigma_a} \right) \left(u_a \frac{u_b}{u_a} \right) = \\ &= V_b V_a^T \frac{\sigma_b}{\sigma_a} \frac{u_b}{u_a} \cdot V_a \Sigma_a u_a = \left(V_b V_a^T \frac{\sigma_b}{\sigma_a} \frac{u_b}{u_a} \right) a. \end{aligned}$$

□

Утверждение 1.9. *При любом фиксированном векторе $x \in \Omega^{(i)}$ в момент времени t существуют такая ортогональная матрица $S^{(i)}$ и скаляр $\lambda^{(i)}$, что выполнено условие (1.51).*

Доказательство. Выберем значение $\lambda^{(i)}$ таким образом, что векторы $(\mathbf{P}(t))^{1/2} K^{(i)}(t)\tilde{x}$ и $\lambda^{(i)}\tilde{x}^{(i)}$ будут иметь одинаковую норму. В таком случае

$$\lambda^{(i)} = \frac{\left\| (\mathbf{P}(t))^{1/2} K^{(i)}(t)\tilde{x} \right\|}{\|\tilde{x}\|}.$$

Значение $\lambda^{(i)}$ определено корректно, поскольку норма вектора \tilde{x} в силу наличия единичной компоненты строго больше нуля. Тогда для нахождения матрицы $S^{(i)}$ воспользуемся леммой 1.6. □

Глава 2

Случай нелинейности по нескольким переменным

В данной главе постановка задачи целевого управления обобщена в том смысле, что теперь допускаются нелинейные члены, зависящие сразу от нескольких компонент фазового вектора.

2.1 Математическая модель системы управления

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}, \quad (2.1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}$ — компактное множество, вектор-функция $f(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и непрерывна по t , матричнозначная функция $g(t, x)$ один раз непрерывно дифференцируема по x и непрерывна по t . Начальный и конечный моменты времени t_0, t_1 фиксированы. На управление u наложены поточечные ограничения

$$u \in \mathcal{P}(t) \subset \mathbb{R}^{n_u}, \quad (2.2)$$

где $\mathcal{P}(\cdot)$ — непрерывное многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями.

Определение 2.1. Множеством \mathcal{U}_f допустимых позиционных управлений назовём класс функций $u = u(t, x)$ со значениями в \mathbb{R}^{n_u} , которые измеримы по переменной t и непрерывны по переменной x , а также удовлетворяют ограничению (2.2) при всех $t \in [t_0, t_1]$.

Определение 2.2. Решением системы (2.1) при замыкании допустимым управлением $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$ назовём абсолютно непрерывную функцию $x = x(t)$, почти всюду удовлетворяющую этой системе уравнений.

Замечание. Можно определить класс допустимых управлений через решение дифференциального включения, аналогично определениям 1.2–1.3 предыдущей главы. Однако предлагаемые далее управляющие стратегии непрерывны по x , что позволяет ограничиться более простым случаем.

Будем полагать, что функции $f(t, x)$ и $g(t, x)$ удовлетворяют условиям, гарантирующим продолжимость решения [22, с. 262–263] на весь отрезок времени $[t_0, t_1]$ при любом граничном условии $x(t_0) = x^0 \in \Omega$.

Пусть целевое множество \mathcal{X}_1 — произвольное компактное множество, задаваемое дважды непрерывно дифференцируемой функцией $\phi_{\mathcal{X}_1}$:

$$\mathcal{X}_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : \phi_{\mathcal{X}_1}(\xi) \leq 0\}.$$

Целью данной главы является поиск допустимого позиционного управления, которое переводит систему (2.1) из заданной точки x^0 в как можно меньшую окрестность целевого множества:

$$x(t_1; t_0, x^0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_1 + B_\mu(0), \quad \mu \geq 0, \quad \mu \rightarrow \inf.$$

Будем считать, что множество Ω достаточно большое, чтобы содержать множество разрешимости при всех $t \in [t_0, t_1]$. Будем также полагать, что границей Ω является многогранник.

Определение 2.3. Множеством разрешимости $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ называется совокупность всех векторов $x \in \Omega$, для каждого из которых существует позиционное управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}_f$, переводящее траекторию системы $x(\tau) = x(\tau; t, x)|_{u(\cdot)}$, $\tau \in [t, t_1]$, вытущенную в момент времени t из точки x , в целевое множество: $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$.

2.2 Кусочная линеаризация системы на совокупности симплексов в фазовом пространстве

Ключевым для данного раздела является понятие симплекса.

Определение 2.4. n_x -мерным симплексом [29, с. 12] с вершинами $x_1, x_2, \dots, x_{n_x+1} \in \mathbb{R}^{n_x}$, при условии, что векторы $x_2 - x_1, \dots, x_{n_x+1} - x_1$ являются линейно независимыми, называется множество

$$S = \left\{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n_x+1} x_{n_x+1} : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n_x+1} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Определение 2.5. Диаметром $d(S)$ симплекса S называется максимальное расстояние между точками этого симплекса:

$$d(S) = \max\{\|x - y\| : x \in S, y \in S\}.$$

Утверждение 2.1. Вокруг любого симплекса в пространстве \mathbb{R}^{n_x} можно описать сферу.

Определение 2.6. *Триангуляцией \mathcal{T} ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}$ называется такое разбиение множества Ω на n_x -мерные симплексы, что*

1. *Любые два симплекса в \mathcal{T} пересекаются по одной общей грани какой-либо размерности (в том числе размерности нуль, т.е. допускается пересечение по одной вершине) либо вообще не пересекаются.*
2. *Количество симплексов в \mathcal{T} конечно.*

Определение 2.7. *Триангуляцией Делоне [103] называется такая триангуляция, что для любого симплекса разбиения $\Omega^{(i)}$ внутренность шара, ограниченного описанной вокруг $\Omega^{(i)}$ сферой, не содержит вершин симплексов разбиения.*

Утверждение 2.2. *Пусть $\{g_1, \dots, g_S\} \subset \Omega$ — произвольное конечное множество точек, содержащее внутри себя все вершины многогранника Ω . Тогда для Ω существует триангуляция Делоне, в которой множество $\{g_1, \dots, g_S\}$ совпадает со множеством вершин симплексов разбиения. Кроме того, триангуляция Делоне взаимно однозначно соответствует диаграмме Вороного для того же множества точек [68, p. 300—303].*

Следствие 2.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ можно построить такую триангуляцию множества Ω , что диаметр каждого симплекса разбиения будет не превосходить ε .*

В силу утверждения 2.2 можно разбить множество Ω на N симплексов $\Omega^{(i)}$, вершины которых обозначим $g^{(i),1}, \dots, g^{(i),n_x+1}$. Здесь первый индекс в круглых скобках обозначает номер симплекса, которому принадлежит вершина, а второй верхний индекс — номер вершины в локальной нумерации вершин этого симплекса. Будем также использовать глобальную нумерацию вершин разбиения: $g_1, \dots, g_S \in \Omega$.

Замечание. *В данной работе не требуется, чтобы была использована именно триангуляция Делоне, однако она удобна в силу простоты алгоритмов её построения [34; 99]. В частности, триангуляция в пространстве размерности n_x может быть эффективно получена за счёт построения выпуклой оболочки точек в пространстве размерности $(n_x + 1)$ [50; 59]. Кроме того, алгоритмы построения триангуляции Делоне реализованы во многих комплексах программ для математических вычислений.*

Для каждого симплекса $\Omega^{(i)}$ составим из векторов-столбцов $g^{(i),1}, \dots, g^{(i),n_x+1}$ матрицу $G^{(i)}$:

$$G^{(i)} = \begin{bmatrix} g^{(i),1} & \dots & g^{(i),n_x+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)}.$$

Утверждение 2.3. Для каждого вектора $x \in \Omega^{(i)}$ найдётся единственный вектор барицентрических координат

$$\alpha^{(i)}(x) = (\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{n_x+1}^{(i)})^T, \quad \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) = 1, \quad \alpha_l^{(i)}(x) \geq 0 \quad \forall l,$$

такой, что вектор x выражается как выпуклая комбинация вершин симплекса, т.е.

$$G^{(i)}\alpha^{(i)}(x) = x. \quad (2.3)$$

Зададим “расширенную” матрицу $\tilde{G}^{(i)}$:

$$\tilde{G}^{(i)} = \begin{bmatrix} g^{(i),1} & \dots & g^{(i),n_x+1} \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}. \quad (2.4)$$

Из определения 2.4 следует, что $\det(\tilde{G}^{(i)}) \neq 0$, поэтому существует обратная матрица:

$$\tilde{H}^{(i)} = (\tilde{G}^{(i)})^{-1}. \quad (2.5)$$

Также будем использовать обозначение

$$\tilde{H}^{(i)} = [H^{(i)} \ h^{(i)}], \quad H^{(i)} \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times n_x}, \quad h^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x+1}.$$

Утверждение 2.4. Для расширенного пространства переменных справедливы выражения

$$\tilde{G}^{(i)}\alpha^{(i)}(x) = \tilde{x},$$

$$\alpha^{(i)} = \tilde{H}^{(i)}\tilde{x} = H^{(i)}x + h^{(i)}. \quad (2.6)$$

Доказательство. Следует непосредственно из формул (2.3), (2.4), (2.5). □

Отметим, что вектор $\alpha^{(i)}(x)$ в формуле (2.6) имеет все неотрицательные компоненты тогда и только тогда, когда $x \in \Omega^{(i)}$. Кроме того, для каждой вершины симплекса вектор барицентрических координат совпадает с одним из элементов стандартного ортонормированного базиса пространства \mathbb{R}^{n_x+1} .

Для функции $f(t, x) + g(t, x)u$ из (2.1) справедливо представление

$$f(t, x) + g(t, x)u = A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u + r^{(i)}(t) + v^{(i)}(t, x, u), \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad (2.7)$$

где

$$F^{(i)}(t) = (f(t, g^{(i),1}), \dots, f(t, g^{(i),n_x+1}))^T \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)},$$

$$A^{(i)}(t) = F^{(i)}(t)H^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad r^{(i)}(t) = F^{(i)}(t)h^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x},$$

$$B^{(i)}(t) = \frac{1}{n_x + 1} \sum_{l=1}^{n_x+1} g(t, g^{(i),l}),$$

а $v^{(i)}(t, x, u) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — погрешность локальной линеаризации [42]. Полученная кусочно-аффинная аппроксимация системы (2.1) является непрерывной в том смысле, что для любых граничащих симплексов $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ выполнено

$$A^{(i)}(t)x + B^{(i)}(t)u + r^{(i)}(t) = A^{(j)}(t)x + B^{(j)}(t)u + r^{(j)}(t) \quad \forall x \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}.$$

Утверждение 2.5. *Погрешность кусочной линеаризации $v^{(i)}(t, x, u)$ в каждый момент времени в каждом симплексе $\Omega^{(i)}$ можно ограничить n_x -мерным прямоугольным параллелепипедом, не зависящим от конкретных значений вектора $x \in \Omega^{(i)}$ и вектора $u \in \mathcal{P}(t)$.*

Доказательство. Разложим функцию $f_s(t, x)$, $s = 1, \dots, n_x$, (т. е. s -ю компоненту вектор-функции) как функцию аргумента x по формуле Тейлора до членов 2-го порядка включительно с центром в точке $x \in \Omega^{(i)}$, взяв итоговое значение в вершине $g^{(i),k}$ указанного симплекса:

$$f_s(t, g^{(i),k}) = f_s(t, x) + \left(\frac{\partial f_s}{\partial x}(t, x) \right)^T (g^{(i),k} - x) + (g^{(i),k} - x)^T \frac{\partial^2 f_s}{\partial^2 x}(t, \xi_k) (g^{(i),k} - x),$$

где $\xi_k = \xi_k(s, x, g^{(i),k}) \in \Omega^{(i)}$.

Сложим полученные соотношения при различных $k = 1, \dots, n_x + 1$, домножив их на соответствующие величины $\alpha_k(x)$. Тогда с учётом соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) \left(\frac{\partial f_s}{\partial x}(t, x) \right)^T (g^{(i),k} - x) &= \left(\frac{\partial f_s}{\partial x}(t, x) \right)^T \left(\sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) g^{(i),k} - x \right) = \\ &= \left(\frac{\partial f_s}{\partial x}(t, x) \right)^T (x - x) = 0 \end{aligned}$$

получим

$$(F^{(i)}\alpha^{(i)}(x))_s = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) f_s(t, g^{(i),k}) = f_s(t, x) + \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) (g^{(i),k} - x)^T \frac{\partial^2 f_s}{\partial^2 x}(t, \xi_k) (g^{(i),k} - x). \quad (2.8)$$

Пусть $\rho_{\max}(R)$ — максимальное сингулярное число матрицы R . Оно совпадает со спектральной нормой матрицы [43, с. 244]. Тогда для любого $x \in \Omega^{(i)}$ можно выписать следующую оценку:

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) (g^{(i),k} - x)^T \frac{\partial^2 f_s}{\partial^2 x}(t, \xi_k) (g^{(i),k} - x) \right| \leq \\
& \leq \max_{\xi \in \Omega^{(i)}} \rho_{\max} \left(\frac{\partial^2 f_s}{\partial^2 x}(t, \xi) \right) \cdot \left| \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) \|g^{(i),k} - x\|^2 \right| \leq \\
& \leq \max_{\xi \in \Omega^{(i)}} \rho_{\max} \left(\frac{\partial^2 f_s}{\partial^2 x}(t, \xi) \right) \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) \left\| g^{(i),k} - \sum_{r=1}^{n_x+1} \alpha_r(x) g^{(i),r} \right\|^2 \right\| \leq \\
& \leq \max_{\xi \in \Omega^{(i)}} \rho_{\max} \left(\frac{\partial^2 f_s}{\partial^2 x}(t, \xi) \right) \cdot \max_{\alpha_k \in [0,1]} \left\{ \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k \left\| \sum_{r=1}^{n_x+1} \alpha_r (g^{(i),r} - g^{(i),k}) \right\|^2 : \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k = 1 \right\} \leq \\
& \leq \max_{\xi \in \Omega^{(i)}} \rho_{\max} \left(\frac{\partial^2 f_s}{\partial^2 x}(t, \xi) \right) \cdot \max_{1 \leq r \leq n_x+1} \|g^{(i),r} - g^{(i),k}\|^2 = M_s^{(i)}(t). \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Разложим теперь функцию $g_{sp}(t, x)$ (элемент матрицы $g(t, x)$, стоящий в s -й строке и p -м столбце) по формуле Тейлора до членов 1-го порядка включительно:

$$g_{sp}(t, g^{(i),k}) = g_{sp}(t, x) + \left(\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(t, \zeta_k) \right)^T (g^{(i),k} - x), \quad \zeta_k = \zeta_k(s, p, x, g^{(i),k}).$$

Тогда

$$B_{sp}^{(i)} = g_{sp}(t, x) + \frac{1}{1 + n_x} \sum_{k=1}^{n_x+1} \left(\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(t, \zeta_k) \right)^T (g^{(i),k} - x)$$

и, кроме того, справедлива оценка

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{1 + n_x} \sum_{k=1}^{n_x+1} \left(\frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(t, \zeta_k) \right)^T (g^{(i),k} - x) \right| \leq \frac{1}{1 + n_x} \cdot \max_{x \in \Omega^{(i)}} \left\| \frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(t, x) \right\| \cdot \sum_{k=1}^{n_x+1} \|g^{(i),k} - x\| \leq \\
& \leq \max_{x \in \Omega^{(i)}} \left\| \frac{\partial g_{sp}}{\partial x}(t, x) \right\| \cdot \max_{1 \leq r \leq n_x+1} \|g^{(i),k} - g^{(i),r}\| = N_{sp}^{(i)}(t). \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Введём также обозначение

$$N_s^{(i)}(t) = \max \left\{ \sum_{p=1}^{n_u} |u_p| N_{sp}^{(i)} : u \in \mathcal{P}(t) \right\}.$$

Таким образом, при всех $x \in \Omega^{(i)}$ и $u \in \mathcal{P}(t)$ получена оценка для s -й компоненты погрешности линеаризации

$$|v_s^{(i)}(t, x, u)| \leq M_s^{(i)}(t) + N_s^{(i)}(t). \quad (2.11)$$

□

Следствие 2.2. Погрешность локальной линеаризации стремится к нулю при стремлении к нулю диаметра разбиения множества Ω на симплексы $\Omega^{(i)}$.

Доказательство. Если $d(\Omega^{(i)}) \rightarrow 0$, то в формулах (2.9)–(2.10) $\max_{1 \leq r \leq n_x+1} \|g^{(i),r} - g^{(i),k}\|^2 \rightarrow 0$, откуда $\|v^{(i)}(t, x, u)\| \rightarrow 0$. □

Тогда на основании утверждения 2.5 и следствия 1.1 предыдущей главы в каждом симплексе можно ограничить погрешность $v^{(i)}$ эллипсоидом:

$$v^{(i)}(t, x, u) \in \mathcal{Q}^{(i)}(t) = \mathcal{E}(0, Q^{(i)}(t)), \quad x \in \Omega^{(i)}.$$

Исходной системе (2.1) с учётом (2.7) можно сопоставить вспомогательную систему с переключениями в расширенном пространстве переменных:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x} + \tilde{B}^{(i)}(t)u + \tilde{C}v^{(i)}(t), \quad \tilde{x} \in \Omega^{(i)} \times \{1\}, \quad t \in [t_0, t_1], \\ \tilde{A}^{(i)}(t) &= \begin{bmatrix} A^{(i)}(t) & r^{(i)}(t) \\ \mathbb{O}_{1 \times n_x} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}^{(i)}(t) = \begin{bmatrix} B^{(i)}(t) \\ \mathbb{O}_{1 \times n_u} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_x \times n_x} \\ \mathbb{O}_{1 \times n_x} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $u \in \mathcal{P}(t)$, а величина $v^{(i)}(t)$ интерпретируется как помеха.

Определение 2.8. Будем называть помеху допустимой, если она является измеримой функцией от времени u , кроме того, в каждый момент времени удовлетворяет ограничению $v^{(i)}(t) \in \mathcal{E}(0, Q^{(i)}(t))$ при $x(t) \in \Omega^{(i)}$.

2.3 Кусочно-квадратичная оценка функции цены

2.3.1 Аппроксимация функции цены

В каждой вершине $g^{(i),l}$ определим аффинную по x функцию

$$v^{(i),l}(t, \tilde{x}) = \langle k^{(i),l}(t), \tilde{x} \rangle,$$

где вектор $k^{(i),l} \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ — вектор неизвестных параметров. Для каждого симплекса $\Omega^{(i)}$ можно определить матрицу параметров, структура которой соответствует набору вершин $g^{(i),1}, \dots, g^{(i),n_x+1}$:

$$K^{(i)} = \begin{bmatrix} k^{(i),1}, \dots, k^{(i),n_x+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}.$$

Тогда внутри симплекса $\Omega^{(i)}$ можно задать функцию $V^{(i)}(t, \tilde{x})$, интерполируя значения функций $v^{(i),l}(t, \tilde{x})$ следующим образом:

$$V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \left\langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle. \quad (2.13)$$

Формула (2.13) действительно соответствует интерполяции. Если $x = g^{(i),l}$ — вершина симплекса $\Omega^{(i)}$, то вектор $\tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ будет представлять собой вектор, у которого компонента с индексом l равна 1, а все остальные компоненты нулевые; скалярное умножение такого вектора на вектор $(K^{(i)}(t))^T \tilde{x}$ даст значение заданной функции $v^{(i),l}$ в вершине $x = g^{(i),l}$.

Через $u^*(\cdot)$ обозначим позиционное управление вида

$$u^*(t, x) = Y^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) y^{(i),k}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}. \quad (2.14)$$

Здесь матрица $Y^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+1)}$ составлена из столбцов $y^{(i),k} \in \mathcal{P}(t)$ — значений управлений в вершинах симплекса $\Omega^{(i)}$. Эти управления будут выбраны далее. Заметим, что в силу выпуклости множества $\mathcal{P}(t)$ достигается условие $u^*(t, x) \in \mathcal{P}(t)$.

Утверждение 2.6. При $\ell = (\ell_t, \ell_x^T)^T \in \mathbb{R}^{n_x+2}$, где

$$\ell_t = 1 \in \mathbb{R}, \quad \ell_x = \tilde{A}^{(i)}(t) \tilde{x} + \tilde{B}^{(i)}(t) u^*(t, x) + \tilde{C} v^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_x+1}, \quad (2.15)$$

справедлива оценка производной функции $V^{(i)}(t, \tilde{x})$ по направлению:

$$\frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) \leq \left\langle \tilde{x}, \left[\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)} \right] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle, \quad (2.16)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} Z^{(i)}(t, K^{(i)}) &= (\tilde{A}^{(i)})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{G}^{(i)} + \mathcal{K}^{(i)} \tilde{B} Y^{(i)} + \Gamma^{(i)} \tilde{G}^{(i)} + (4\gamma^{(i)})^{-1} \mathcal{K}^{(i)} \tilde{C} Q^{(i)} (\tilde{C})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{G}^{(i)}, \\ \mathcal{K}^{(i)} &= (\mathcal{K}^{(i)})^T = K^{(i)} \tilde{H}^{(i)} + (\tilde{H}^{(i)})^T (K^{(i)})^T, \\ \gamma^{(i)} &= \left\langle \tilde{x}, \Gamma^{(i)} \tilde{G}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle, \\ \Gamma^{(i)} &= \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n_x \times n_x} & \mathbb{O}_{n_x \times 1} \\ \mathbb{O}_{1 \times n_x} & \gamma^{(i)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем производную функции $V^{(i)}(t, \tilde{x})$ по направлению $\ell = (\ell_t, \ell_x^T)^T$:

$$\frac{dV^{(i)}}{d\ell} = \ell_t \left\langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle + \left\langle \ell_x, [K^{(i)} \tilde{H}^{(i)} + (\tilde{H}^{(i)})^T (K^{(i)})^T] \tilde{x} \right\rangle.$$

Тогда из (2.15) получим:

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) &= \left\langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle + \left\langle \tilde{A}^{(i)} \tilde{x} + \tilde{B}^{(i)} u^* + \tilde{C} v^{(i)}, \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle = \\ &= \left\langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle + \left\langle \tilde{x}, (\tilde{A}^{(i)})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle + \left\langle \tilde{x}, \mathcal{K}^{(i)} \tilde{B}^{(i)} Y^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle + \left\langle v^{(i)}, \tilde{C}^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Воспользовавшись утверждением 1.6 для вычисления опорной функции эллипсоида и леммой 1.1 предыдущей главы, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \left\langle v^{(i)}, (\tilde{C})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle &\leq \sqrt{\left\langle \tilde{C}^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x}, Q^{(i)} \tilde{C}^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle} = \\ &= \sqrt{\left\langle \tilde{x}, \mathcal{K}^{(i)} \tilde{C} Q^{(i)} \tilde{C}^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle} \leq \gamma^{(i)} + \frac{1}{4\gamma^{(i)}} \left\langle \tilde{x}, \mathcal{K}^{(i)} \tilde{C} Q^{(i)} \tilde{C}^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, из (2.17) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) \leq & \left\langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle + \left\langle \tilde{x}, (\tilde{A}^{(i)})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle + \left\langle \tilde{x}, \mathcal{K}^{(i)} \tilde{B}^{(i)} Y^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle + \\ & + \left\langle \tilde{x}, \Gamma^{(i)} \tilde{G}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle + \frac{1}{4\gamma^{(i)}} \left\langle \tilde{x}, \mathcal{K}^{(i)} \tilde{C} Q^{(i)} \tilde{C}^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle, \end{aligned}$$

откуда после объединения квадратичных форм получается

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) \leq & \left\langle \tilde{x}, \left[\dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} + (\tilde{A}^{(i)})^T \mathcal{K}^{(i)} + \mathcal{K}^{(i)} \tilde{B}^{(i)} Y^{(i)} \tilde{H}^{(i)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \Gamma^{(i)} \tilde{G}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} + (4\gamma^{(i)})^{-1} \mathcal{K}^{(i)} \tilde{C} Q^{(i)} \tilde{C}^T \mathcal{K}^{(i)} \right] \tilde{x} \right\rangle = \left\langle \tilde{x}, \left[\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)} \right] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Приравнявая выражения $\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)}$ к нулевой матрице, получим систему матричных дифференциальных уравнений:

$$\dot{K}^{(i)}(t) + Z^{(i)}(t, K^{(i)}(t)) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.18)$$

Эта система при каждом $i = \overline{1, N}$ является матричным дифференциальным уравнением Риккати и может быть использована для вычисления коэффициентов функции $V^{(i)}(t, \tilde{x})$.

2.3.2 Построение непрерывной аппроксимации

Отметим, что, поскольку матрицы $Z^{(i)}$, определяемые утверждением 2.6, в каждом симплексе $\Omega^{(i)}$ строятся независимо друг от друга, решение уравнения (2.18) будет, вообще говоря, иметь разрывы на границах симплексов. Это приводит к разрывным синтез-управлениям и сложностям при определении замкнутых ими решений системы (2.1).

Для устранения этой проблемы предлагается модифицировать оценку (2.16) таким образом, что полученная в итоге функция $V^{(i)}(t, \tilde{x})$ будет непрерывной во всём множестве $[t_0, t_1] \times \Omega \times \{1\}$. Рассмотрим два способа осуществления этой идеи.

Первый способ

Первый способ является вычислительно менее затратным и основан на предположении, что $\Omega \subset \mathbb{R}_+^{n_x}$, т.е. все элементы произвольного вектора $x \in \Omega$ неотрицательны. Если это не так, требуется произвести замену переменных в системе (2.1), например, следующую:

$$x' = x - c,$$

где элементы вектора $c \in \mathbb{R}^{n_x}$ определяются как

$$c_i = \min \left\{ 0, \min_{x \in \Omega} x_i \right\}, \quad i = \overline{1, n_x}.$$

Перейдём к системе неравенств для каждого элемента матрицы $(\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)})$ внутри квадратичной формы. Для любых $p, q = \overline{1, n_x + 1}$ справедливо

$$\dot{K}_{p,q}^{(i)} + Z_{p,q}^{(i)} \leq \dot{K}_{p,q}^{(i)} + \hat{Z}_{p,q}^{(i)},$$

где использовано обозначение

$$\hat{Z}_{p,q}^{(i)} = \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ Z_{p,\nu(i,q,k)}^{(k)} \mid g^{(i),q} \in \Omega^{(k)} \right\}. \quad (2.19)$$

Здесь нижние индексы обозначают конкретный элемент матрицы, а $\nu(i, q, k)$ — номер вершины $g^{(i),q}$ в списке вершин симплекса $\Omega^{(k)}$. Интерпретация проделанных действий такова: для каждого столбца матрицы параметров $K^{(i)}$ фиксируем соответствующую ему вершину $g^{(i),q}$ симплекса $\Omega^{(i)}$, затем определяем номера этой вершины во всех граничащих симплексах $\Omega^{(k)}$ и, наконец, берём поэлементный максимум по всем столбцам матриц $Z^{(k)}$ с соответствующими номерами (включая симплекс $\Omega^{(i)}$).

Утверждение 2.7. Пусть элементы матриц $\hat{Z}^{(i)} \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$ определены согласно (2.19). Тогда в обозначениях утверждения 2.6 справедливо неравенство

$$\frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) \leq \left\langle \tilde{x}, \left[\dot{K}^{(i)} + \hat{Z}^{(i)} \right] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle.$$

Доказательство. Выражение $\langle \tilde{x}, \hat{Z}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle$ можно рассматривать как функцию $\langle \tilde{x}, \hat{Z}^{(i)} \alpha^{(i)} \rangle$ от вектора \tilde{x} расширенного пространства переменных и вектора барицентрических координат $\alpha^{(i)}(x) = \tilde{H}^{(i)} \tilde{x}$, каждый из которых имеет неотрицательные компоненты при $x \in \Omega^{(i)}$.

В силу (2.19) коэффициенты этой функции не меньше, чем коэффициенты функции $\langle \tilde{x}, Z^{(i)} \alpha^{(i)} \rangle$, откуда

$$\left\langle \tilde{x}, Z^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle \leq \left\langle \tilde{x}, \hat{Z}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle \quad \forall x \in \Omega^{(i)}.$$

Следовательно,

$$\frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) \leq \left\langle \tilde{x}, \left[\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)} \right] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle \leq \left\langle \tilde{x}, \left[\dot{K}^{(i)} + \hat{Z}^{(i)} \right] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle.$$

□

Утверждение 2.8. Пусть аппроксимация (2.13) функции цены является непрерывной в момент времени t_1 , а при $t \in [t_0, t_1)$ определяется на основе решения системы уравнений

$$\dot{K}^{(i)}(t) + \hat{Z}^{(i)}(t, K^{(1)}(t), \dots, K^{(N)}(t)) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.20)$$

Тогда она является непрерывной по x во всём множестве Ω .

Доказательство. Зафиксируем некоторую вершину $g^{(i),j}$ симплекса $\Omega^{(i)}$. Значение функции (2.13) в этой точке определяется j -м столбцом матрицы $K^{(i)}(t)$:

$$V^{(i)}(t, \tilde{g}^{(i),j}) = \langle \tilde{g}^{(i),j}, K^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{g}^{(i),j} \rangle = \langle \tilde{g}^{(i),j}, K^{(i)} \hat{e}_j \rangle = \langle \tilde{g}^{(i),j}, k^{(i),j} \rangle,$$

$$\hat{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \text{ — } j\text{-й элемент стандартного базиса в } \mathbb{R}^{n_x+1}.$$

Столбец $k^{(i),j}$ однозначно восстанавливается из системы (2.20) по j -му столбцу матричной функции $\hat{Z}^{(i)}(t)$. При этом матрицы $\hat{Z}^{(i)}$ подобраны таким образом, что их столбцы, соответствующие одной и той же вершине разбиения в различных симплексах, совпадают. Поскольку функция (2.13) полагается непрерывной при $t = t_1$, то и при всех $t \in [t_0, t_1]$ в каждой вершине разбиения значения этой функции во всех соприкасающихся симплексах равны между собой.

Тогда в любой граничной точке каждого симплекса разбиения аппроксимация функции цены также непрерывна, поскольку значение в ней однозначно определяется барицентрическими координатами и значениями функции в вершинах.

Непрерывность функции (2.13) во внутренних точках $\Omega^{(i)}$ очевидна. \square

Второй способ

Сформулируем (2.18) в векторной форме, т.е. запишем дифференциальное уравнение для каждого столбца матрицы $K^{(i)}$:

$$\dot{k}^{(i),l}(t) + z^{(i),l}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, n_x + 1}, \quad (2.21)$$

где $z^{(i),l}$ — соответствующий столбец матрицы $Z^{(i)}$. Это позволяет переписать оценку (2.16) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(i)}}{dl}(t, \tilde{x}) &\leq \langle \tilde{x}, [\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)}] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle = \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}, Z^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle \leq \\ &\leq \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \langle \tilde{x}, Z^{(i)} \alpha^{(i)}(x) \rangle = \langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) \langle \tilde{x}, z^{(i),l} \rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

В каждой вершине $g^{(i),l}$ определим следующую вспомогательную задачу линейного программирования относительно нового неизвестного вектора $\hat{z}^{(i),l}$:

$$\begin{cases} \langle \hat{z}^{(i),l}, \tilde{g}^{(i),l} \rangle \rightarrow \min, \\ \langle \hat{z}^{(i),l}, \tilde{g}^{(j),k} \rangle \geq \langle z^{(j),\nu(i,l,j)}, \tilde{g}^{(j),k} \rangle \quad \forall j : \tilde{g}^{(i),l} \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}, \quad k = 1, \dots, n_x + 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Из решений $\hat{z}^{(i),l}$ аналогичным образом составим матрицы $\hat{Z}^{(i)}$. Учитывая ограничения задачи (2.23) и линейность рассматриваемых функций, можем продолжить неравенство (2.22):

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(i)}}{dl}(t, \tilde{x}) &\leq \left\langle \tilde{x}, \left[\dot{K}^{(i)} + Z^{(i)} \right] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle \leq \left\langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) \langle \tilde{x}, z^{(i),l} \rangle \leq \\ &\leq \left\langle \tilde{x}, \dot{K}^{(i)} \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) \langle \tilde{x}, \hat{z}^{(i),l} \rangle = \left\langle \tilde{x}, \left[\dot{K}^{(i)} + \hat{Z}^{(i)} \right] \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \right\rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что решения задач (2.23), соответствующие одной и той же вершине g_l в различных симплексах $\Omega^{(i)}$, будут совпадать (в случае, если задача линейного программирования допускает неединственное решение, их можно выбрать одинаковыми). Следовательно, кусочно-заданная аппроксимация функции цены (2.13), полученная при решении

$$\dot{K}^{(i)} + \hat{Z}^{(i)} = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N},$$

будет непрерывной по (t, \tilde{x}) в $[t_0, t_1] \times \Omega \times \{1\}$, если её значение при $t = t_1$ непрерывно по x . При этом функционал в задаче (2.23) соответствует значениям $V(t, \tilde{x})$ в вершинах симплексов, и, таким образом, способствует уменьшению значений функции в этих точках.

В результате доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.9. Пусть функция $V^{(i)}(t, \tilde{x})$ в момент времени t_1 является непрерывной, а при $t \in [t_0, t_1)$ вычисляется на основе решения системы уравнений

$$\dot{K}^{(i)}(t) + \hat{Z}^{(i)}(t, K^{(1)}(t), \dots, K^{(N)}(t)) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.24)$$

где матрицы $\hat{Z}^{(i)}$ определяются на основе решений (2.23). Тогда аппроксимация (2.13) функции цены является непрерывной по x в Ω .

2.3.3 Граничные условия

Для решения системы матричных дифференциальных уравнений (2.20) или (2.24) необходимо задать граничные условия на неизвестные $K^{(i)}(t)$ в конечный момент времени $t = t_1$. Для этого необходимо построить непрерывную кусочно-квадратичную оценку сверху функции $\phi_{\mathcal{X}_1}$, представив которую в виде (2.13), можно определить матрицы коэффициентов $K^{(i)}(t_1)$.

В частности, если границей множества \mathcal{X}_1 является гиперповерхность второго порядка, то такая оценка сверху может быть выбрана точной, поскольку для функции $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ справедливо представление через квадратичную форму в расширенном пространстве переменных:

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x) = \langle \tilde{x}, \hat{K} \tilde{x} \rangle, \quad \hat{K} = \hat{K}^T \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}.$$

Следовательно, в конечный момент времени в каждом симплексе $\Omega^{(i)}$ можно выбрать значения параметров функции $V^{(i)}(t, \tilde{x})$, равные

$$K^{(i)}(t_1) = \hat{K} \cdot (\tilde{H}^{(i)})^{-1}. \quad (2.25)$$

В дальнейшем для простоты обозначений будем рассматривать именно случай (2.25).

Замечание. Предложенные граничные условия не являются единственно возможными: например, функцию $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$ можно домножить на любую положительную константу. В таком случае целевое множество $\mathcal{X}_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : \phi_{\mathcal{X}_1}(\xi) \leq 0\}$ останется тем же самым, но коэффициенты $K^{(i)}(t_1)$ изменят свои значения.

В общем случае для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $\phi_{\mathcal{X}_1}$ и точки $x \in \Omega^{(i)}$ справедливо

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{X}_1}(g^{(i),k}) &= \phi_{\mathcal{X}_1}(x) + \left(\frac{\partial \phi_{\mathcal{X}_1}}{\partial x}(x) \right)^T (g^{(i),k} - x) + (g^{(i),k} - x)^T \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}}{\partial x^2}(\eta_k) (g^{(i),k} - x), \\ \eta_k &= \eta_k(x, g^{(i),k}) \in \Omega^{(i)}. \end{aligned}$$

Аналогично выводу формулы (2.8) получим

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) \phi_{\mathcal{X}_1}(g^{(i),k}) - \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x) (g^{(i),k} - x)^T \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}}{\partial x^2}(\eta_k) (g^{(i),k} - x),$$

причём

$$\left| (g^{(i),k} - x)^T \frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}}{\partial x^2}(\eta_k) (g^{(i),k} - x) \right| \leq K_k^{(i)} = \max_{\xi \in \Omega^{(i)}} \rho_{\max} \left(\frac{\partial^2 \phi_{\mathcal{X}_1}}{\partial x^2}(\xi) \right) \cdot \max_{j=1, \dots, n_x+1} \|g^{(i),k} - g^{(i),j}\|.$$

Тогда кусочно-аффинная функция, принимающая в каждой вершине $g \in \Omega^{(i_1)} \cap \dots \cap \Omega^{(i_r)}$ значение

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(g) + \max_{i_1, \dots, i_r} \sum_{k=1}^{n_x+1} K_k^{(i_r)},$$

будет являться оценкой сверху функции $\phi_{\mathcal{X}_1}(x)$. Такая оценка является частным случаем кусочно-квадратичной и приводит к условиям типа (2.25). При этом полученная аппроксимация функции цены в конечный момент времени $t = t_1$ будет непрерывной по x .

2.3.4 Предложенное управление

Предложенная функция (2.14) значений управляющего параметра подразумевает, что фиксируются некоторые функции-управления в вершинах симплексов, а внутри каждого симплекса интерполируются значения функций в его вершинах.

При этом заметим, что на основании следствия 1.3 и оценок, полученных в утверждении 2.6, в каждом из симплексов минимум по управлению в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана достигается на точках из множества

$$\hat{\mathcal{Y}}^{(i)}(t, x) = \begin{cases} \hat{\mathcal{P}}(\ell, t), & \ell = -(\tilde{B}^{(i)}(t))^T \mathcal{K}^{(i)}(t) \tilde{x} \neq 0, \\ \mathcal{P}(t), & \ell = 0, \end{cases}$$

где $\hat{\mathcal{P}}(\ell, t)$ — опорное множество к $\mathcal{P}(t)$ в направлении ℓ , т.е. множество точек, на которых достигается супремум в (1.26).

Пусть вершина $g^{(i),k}$ входит в симплексы с номерами s_1, \dots, s_m . Тогда в этой вершине рассмотрим множество

$$\mathcal{Y}^{(i),k}(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{\mathcal{Y}}^{(s_j)}(t, g^{(i),k}). \quad (2.26)$$

У многозначного отображения $\mathcal{Y}^{(i),k}(\cdot)$ можно выделить измеримый селектор, поскольку справедливы следующие теоремы [1, с. 130–133].

Теорема 2.1. *Если многозначное отображение с непустыми компактными значениями полунепрерывно сверху, то оно измеримо.*

Теорема 2.2. *Если многозначное отображение измеримо, то у него существует измеримый селектор.*

Следовательно, на основе (2.26) можно определить измеримые функции $y^{(i),k}(\cdot)$ в вершинах симплексов, в таком случае управление

$$u^*(t, x) = Y^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x}, \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad (2.27)$$

определённое на множестве $[t_0, t_1] \times \Omega$, будет допустимым, т.е. $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}_f$.

Утверждение 2.10. *При любом начальном векторе $x^0 \in \Omega$ задача Коши*

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u^*(t, x), \quad x(t_0) = x^0$$

для замкнутой системы (2.1) имеет ровно одно решение.

Доказательство. Управление $u^* = u^*(t, x)$ измеримо по t , непрерывно по x и ограничено: $u^*(t, x) \in \mathcal{P}$. Следовательно, правая часть системы (2.1) при подстановке управления (2.27) удовлетворяет условиям Каратеодори [45, с. 7], гарантирующим существование решения задачи Коши.

Покажем теперь, что правая часть замкнутой системы удовлетворяет условию Липшица по переменной x . Действительно, для любых $x', x'' \in \Omega$ верно

$$\begin{aligned} & \| [f(t, x') + g(t, x')u^*(t, x')] - [f(t, x'') + g(t, x'')u^*(t, x'')] \| \leq \\ & \leq \| f(t, x') - f(t, x'') \| + \| g(t, x') \| \cdot \| u^*(t, x') - u^*(t, x'') \| + \| g(t, x') - g(t, x'') \| \cdot \| u^*(t, x'') \|. \end{aligned}$$

При каждом фиксированном $t \in [t_0, t_1]$ функции $f(t, x)$ и $g(t, x)$ являются липшицевыми по x в силу их непрерывной дифференцируемости на компакте Ω , а управление $u^*(t, x)$ липшицево по x с константой $L_u(t) = \max_{1 \leq i \leq N} \| Y^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \|$, так как является непрерывной кусочно-аффинной функцией по этой переменной. Поскольку значения $g(t, x')$ и $u^*(t, x'')$ ограничены, из приведённой оценки следует

$$\| [f(t, x') + g(t, x')u^*(t, x')] - [f(t, x'') + g(t, x'')u^*(t, x'')] \| \leq l(t) \| x' - x'' \|, \quad t \in [t_0, t_1],$$

для некоторой ограниченной функции $l(t)$. Таким образом, выполнены достаточные условия единственности решения [45, с. 8]. \square

2.3.5 Основной результат

Теорема 2.3. Пусть множество \mathcal{X}_1 представимо в виде

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \Omega : \phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leq 0\}, \quad \phi_{\mathcal{X}_1}(x) = \langle \tilde{x}, \hat{K}\tilde{x} \rangle, \quad \hat{K} \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)},$$

а для множества $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}$ в силу его ограниченности можно записать $\|x\| \leq C \forall x \in \Omega$.

Пусть матричные функции $K^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$, $i = \overline{1, N}$, являются решениями системы матричных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{K}^{(i)}(t) + \hat{Z}^{(i)}(t, K^{(1)}, \dots, K^{(N)}) = \Delta^{(i)}(t), & i = \overline{1, N}, \quad t \in [t_0, t_1], \\ K^{(i)}(t_1) = \hat{K}\tilde{G}^{(i)}, & i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (2.28)$$

где $\hat{Z}^{(i)}(t)$ — матричные функции, используемые в утверждениях 2.8 или 2.9, а $\Delta^{(i)}(t)$ — некоторые заданные непрерывные функции со значениями в $\mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$. Пусть также $V(t, \tilde{x})$ — непрерывная кусочно-квадратичная функция в расширенном пространстве переменных, для каждого множества $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$, определённая как

$$V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \tilde{x} \in \Omega^{(i)} \times \{1\}.$$

Тогда множество

$$\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) = \left\{ x \in \Omega \mid V(t_0, x) \leq \mu - \sqrt{C^2 + 1} \int_{t_0}^{t_1} \max_{1 \leq i \leq N} \|\Delta^{(i)}(t)\| dt \right\} \quad (2.29)$$

(в предположении его непустоты) является внутренней оценкой множества разрешимости:

$$\mathcal{W}_\mu^{\text{int}}(t_0) \subseteq \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1).$$

Доказательство. Для произвольного вектора $x^0 \in \mathcal{W}_\mu^{\text{int}}(t_0)$ на отрезке $[t_0, t_1]$ построим решение системы (2.1) $x(t) = x(t; t_0, x^0)$ при допустимом управлении $u^*(t, x) = Y^{(i)}(t)\tilde{H}^{(i)}\tilde{x}$.

Используя уравнение (2.28), оценим изменение функции $V(t, \tilde{x})$ вдоль построенной траектории:

$$\begin{aligned} V(t_1, \tilde{x}(t_1)) - V(t_0, \tilde{x}(t_0)) &= \int_{t_0}^{t_1} V'_\ell(t, \tilde{x}(t)) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \langle \tilde{x}, [\dot{K}^{(i)} + \hat{Z}^{(i)}]\tilde{H}^{(i)}\tilde{x} \rangle dt \leq \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} \langle \tilde{x}(t), \Delta^{(i)}(t)\tilde{H}^{(i)}\tilde{x}(t) \rangle dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \|\tilde{x}(t)\| \cdot \|\Delta^{(i)}(t)\| \cdot \|\tilde{H}^{(i)}\tilde{x}(t)\| dt \leq \\ &\leq \sqrt{C^2 + 1} \int_{t_0}^{t_1} \max_{1 \leq i \leq N} \|\Delta^{(i)}(t)\| dt. \end{aligned}$$

В последнем переходе использован тот факт, что $\tilde{H}^{(i)}\tilde{x}(t)$ является вектором барицентрических координат, норма которого не превышает единицу при $x \in \Omega^{(i)}$.

Тогда, согласно (2.29), справедливо $V(t_1, x(t_1)) \leq \mu$. В силу граничных условий (2.28) выполняется неравенство $\phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1)) \leq \mu$, откуда следует включение $x(t_0) \in \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1)$. Поскольку $x^0 \in \mathcal{W}_\mu^{\text{int}}(t_0)$ произвольно, получим $\mathcal{W}_\mu^{\text{int}}(t_0) \subseteq \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1)$. \square

Замечание. Используемое в теореме выражение $\sqrt{C^2 + 1} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \max_{1 \leq i \leq N} \|\Delta^{(i)}(t)\| dt$ стремится к нулю при $\max_{t \in [t_0, t_1]} \max_{1 \leq i \leq N} \|\Delta^{(i)}(t)\| \rightarrow 0$.

2.4 Регуляризирующие члены

Полученные матричные уравнения (2.28) являются дифференциальными уравнениями типа Риккати, решения которых могут быстро возрастать, приводя к низкой точности оценок (2.29). Более того, решения этих уравнений могут быть непродолжимы на весь временной отрезок [9, с. 197–199]. Поэтому предлагается модифицировать систему, используя дополнительные параметры, обозначенные в системе (2.28) за $\Delta^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$.

Вообще говоря, полученная в теореме 2.3 оценка погрешности справедлива для любых непрерывных функций $\Delta^{(i)}(t)$. Основными требованиями при их выборе являются существование продолжимого решения системы (2.28) и малость величины $\max_{t \in [t_0, t_1]} \max_{1 \leq i \leq N} \|\Delta^{(i)}(t)\|$. Так, в работе [119] в качестве регуляризирующих членов выбрана величина, характеризующая разницу градиентов функции $V^{(i)}(t, \tilde{x})$ в соседних симплексах, что соответствует использова-

нию “малой вязкости” при численном решении линейного уравнения в частных производных в [15].

В настоящей работе предлагается использовать более простой с точки зрения вычислений метод, заключающийся в сравнении значений аппроксимации функции цены в соседних вершинах симплексов.

Чтобы задать величины $\Delta^{(i)}(t)$, сперва перейдём от матричной записи системы (2.28) к векторной:

$$\frac{dk^{(i),q}}{dt} + \hat{z}^{(i),q} = \delta^{(i),q}, \quad i = \overline{1, N}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad q = \overline{1, n_x + 1},$$

где $\hat{z}^{(i),q}$ — q -й столбец матрицы $\hat{Z}^{(i)}$, а $\delta^{(i),q}$ — q -й столбец матрицы $\Delta^{(i)}$. Зафиксируем вершину $g^{(i),q}$, и пусть $\{g^{(r_1),q_1}, \dots, g^{(r_m),q_m}\}$ — множество уникальных вершин, граничащих с $g^{(i),q}$ в каком-либо симплексе. Тогда определим регуляризующие члены как

$$\delta^{(i),q} = \varepsilon \left(k^{(i),q} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m k^{(r_j),q_j} \right),$$

где $\varepsilon > 0$ — настраиваемый скалярный параметр. Таким образом, если значения параметров $k^{(i),q}$ в произвольной вершине существенно отличаются от их среднего значения по соседним вершинам, то вычисленная аппроксимация функции цены в этой точке имеет “нежелательный скачок” и корректируется благодаря предложенному процессу регуляризации.

Отметим также другой способ устранения представленной проблемы — за счёт модификации функционала в задачах (2.23). В частности, можно следить за тем, чтобы решения этих задач в соседних вершинах “не сильно” отличались друг от друга. Так, линейный функционал

$$\langle \hat{z}^{(i),l}, \tilde{g}^{(i),l} \rangle \rightarrow \min$$

можно заменить на квадратичный функционал вида

$$\sum_j \left\| \hat{z}^{(i),l} - z^{(j),\nu(i,l,j)} \right\|^2 \rightarrow \min, \quad (2.30)$$

где суммирование идёт по всем индексам j , таким, что $g^{(i),l} \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$. Обозначение $\nu(i, l, j)$ по-прежнему соответствует локальному номеру вершины $g^{(i),l}$ в симплексе $\Omega^{(j)}$. В случае (2.30) полученная задача будет задачей квадратичного программирования, которая может быть решена численно, например, методом внутренней точки [98] или методом переменного направления множителей [117].

Глава 3

Применение разрывных аппроксимаций

Данная глава по-прежнему посвящена приближённому решению рассмотренной ранее задачи целевого управления на основе построения кусочно-квадратичной аппроксимации функции цены

$$V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t) \tilde{H}^{(i)} \tilde{x} \rangle, \quad \tilde{x} = (x^T, 1)^T, \quad x \in \Omega^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n_x}, \quad (3.1)$$

однако теперь функция (3.1) и управления допускают разрывы по переменной x на границах симплексов разбиения $\Omega^{(i)}$.

В связи с особенностями используемого далее алгоритма предполагается, что исследуемая система автономна, т.е. правая часть дифференциальных уравнений явно не зависит от времени:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}. \quad (3.2)$$

Кроме того, в качестве управлений будем использовать многозначные отображения вида

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \mathcal{Y}^{(i),k}(t) \subset \mathbb{R}^{n_u}, \quad (3.3)$$

где $\alpha_k^{(i)}(x)$ — барицентрические координаты точки $x \in \Omega^{(i)}$, а многозначные функции $\mathcal{Y}^{(i),k}(\cdot)$ принимают выпуклые компактные значения и будут заданы далее.

Определение 3.1. *Под решением системы (3.2), замкнутой управлением (3.3), понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая соответствующему дифференциальному включению при почти всех $t \in [t_0, t_1]$.*

Определение 3.2. *Множеством разрешимости $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ называется совокупность всех векторов $x \in \Omega$, для каждого из которых существует многозначное управление $u = u(t, x)$, переводящее любую из соответствующих траекторий $x(\tau) = x(\tau; t, x)|_{u(\cdot)}$, $\tau \in [t, t_1]$, выпущенную в момент времени t из точки x , в целевое множество: $x(t_1) \in \mathcal{X}_1$.*

Будем также полагать, что на управления наложены эллипсоидальные ограничения

$$u(t, x) \subseteq \mathcal{P} = \mathcal{E}(p, P) \subset \mathbb{R}^{n_u}.$$

Вектор p и матрица P , соответствующие центру эллипсоида и его матрице конфигурации, постоянны.

3.1 Достижимость симплексов

Поскольку далее при определении значений разрывных функций в каждой вершине разбиения g_l необходимо оговаривать, о значении в каком именно симплексе $\Omega^{(i)} \ni g_l$ идёт речь, удобно задавать вершину парой (i, l) . Определим множество всех таких допустимых пар:

$$\mathcal{K} = \{(i, l) : i \in \{1, \dots, N\}, l \in \{1, \dots, S\}, g_l \in \Omega^{(i)}\}.$$

Также будем использовать обозначение $\sigma(i, l)$ для локальной нумерации вершины g_l в симплексе $\Omega^{(i)}$.

В данной главе будем полагать, что множества $\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i, l)}(t) \subseteq \mathcal{P}$, $(i, l) \in \mathcal{K}$, соответствующие произвольной вершине $g_l \in \Omega^{(i)}$, могут различаться при разных i . Далее потребуется выбрать их таким образом, чтобы траектория исходной нелинейной системы (3.2) не смогла перейти в соседний симплекс, если на общей границе симплексов возможно возрастание функции (3.1) вдоль траектории движения. Однако для этого сперва требуется формализовать понятие *достижимости симплексов* [42] при заданных $\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i, l)}(t) \subseteq \mathcal{P}$ в произвольный момент времени $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть \mathcal{H}_{ij} — некоторая фиксированная гиперплоскость размерности $n_x - 1$ в \mathbb{R}^{n_x} , такая что $\Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)} \subset \mathcal{H}_{ij}$, причём $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ лежат в разных полупространствах относительно \mathcal{H}_{ij} . Пусть также n_{ij} — единичная нормаль к \mathcal{H}_{ij} , указывающая в сторону $\Omega^{(i)}$.

Определение 3.3. *Рассмотрим кусочную линейризацию (2.7) системы (3.2). Будем говорить, что симплекс $\Omega^{(j)}$ достижим из $\Omega^{(i)}$ в момент времени t , если*

$$\min \left\{ (n_{ij})^T (A^{(i)}x + B^{(i)}u + r^{(i)} + v^{(i)}) : x \in \mathcal{H}_{ij}, v^{(i)} \in \mathcal{Q}^{(i)}, u \in \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l(x) \mathcal{Y}^{(i), l}(t) \right\} \leq 0. \quad (3.4)$$

Таким образом, если существует точка на общей границе симплексов, такая что при некотором допустимом управлении вектор скорости нелинейной системы (3.2) направлен в сторону симплекса $\Omega^{(j)}$ относительно \mathcal{H}_{ij} , то в соответствии с введённым определением симплекс $\Omega^{(j)}$ достижим из $\Omega^{(i)}$. При этом полученное определение достижимости является необходимым, но не достаточным условием того, что траектория системы (3.2) может попасть из одного симплекса в другой, соседний.

После преобразования (3.4) получим следующее эквивалентное соотношение:

$$\min \left\{ (n_{ij})^T (A^{(i)}g_s + r^{(i)}) - \rho(-n_{ij} | B^{(i)} \mathcal{Y}^{(i), \sigma(i, s)}(t)) - \rho(-n_{ij} | \mathcal{Q}^{(i)}) \mid g_s \in \mathcal{N}(i, j) \right\} \leq 0,$$

где через

$$\mathcal{N}(i, j) = \{g \in \{g_1, \dots, g_S\} : g \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}\}$$

обозначено множество общих вершин двух симплексов.

Для каждой вершины $g_l \in \mathcal{N}(i, j)$ введём также обозначение

$$\mathcal{P}_{ijl} = \{u \in \mathcal{P} : (n_{ij})^T (A^{(i)} g_l + B^{(i)} u + r^{(i)}) - \rho(-n_{ij} | \mathcal{Q}^{(i)}) \geq 0\}.$$

Если $\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i, l)} \subseteq \mathcal{P}_{ijl}$ для любой вершины $g_l \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$, то при использовании управления (3.3) траектория системы гарантированно не может перейти из $\Omega^{(i)}$ в $\Omega^{(j)}$ через их общую границу. Заметим, что для некоторых i, j, l множества \mathcal{P}_{ijl} могут оказаться пустыми.

Пусть i_1, \dots, i_m — номера всех симплексов, включающих вершину g_l . Для каждого номера $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$ определим множество

$$\mathcal{I}(i, l, \tilde{\mathcal{Y}}(t)) = \{j \in \{i_1, \dots, i_m\}, j \neq i, \Omega^{(j)} \text{ достижим из } \Omega^{(i)}\} \cup \{i\}.$$

Здесь и далее через $\tilde{\mathcal{Y}}(t)$ обозначена совокупность величин $\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i, l)}(t)$ для всех $(i, l) \in \mathcal{K}$.

Определение 3.4. Пусть заданы функции $\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i, l)}(t)$, принимающие выпуклые компактные значения. Будем говорить, что соответствующее им многозначное управление (3.3) является допустимым, если для любых i, j, l , таких, что

$$(i, l) \in \mathcal{K}, (j, l) \in \mathcal{K}, i \in \mathcal{I}(j, l, \tilde{\mathcal{Y}}(t)), j \in \mathcal{I}(i, l, \tilde{\mathcal{Y}}(t)),$$

выполнено условие

$$\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i, l)}(t) = \mathcal{Y}^{(j), \sigma(j, l)}(t). \quad (3.5)$$

Условие (3.5) гарантирует, что на границах взаимодостижимых симплексов правая часть замкнутой системы (3.2) будет непрерывной по x , причём на границах любых размерностей. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.1. При подстановке допустимого управления в исходную систему (3.2) при любом заданном начальном значении $x(t_0) = x^0$ будет разрешима соответствующая задача Коши для дифференциального включения, а любое её решение $x(t; t_0, x^0)$ определено при всех $t \in [t_0, t_1]$.

3.2 Алгоритм построения разрывного управления

Цель представленного алгоритма состоит в нахождении в каждый фиксированный момент времени $t \in [t_0, t_1]$ множеств $\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i, l)}(t) \in \mathcal{P}$, которые затем будут использованы для построения аппроксимации функции цены. При этом должно быть выполнено условие (3.5). Поскольку момент времени считается фиксированным, то зависимость от t будем опускать.

1. Рассмотрим вспомогательные множества $\mathcal{J}(i, l)$, $(i, l) \in \mathcal{K}$. Далее множества $\mathcal{J}(i, l)$ будут хранить номера симплексов, учитываемых для “склейки” функции (3.1) и управлений. Изначально положим $\mathcal{J}(i, l) = \{i\}$.
2. Определим множества:

$$\mathcal{S}(i, l) = \{j \mid (j, l) \in \mathcal{K}, j \neq i, \exists g \in \mathcal{N}(i, j) : \langle k^{(j), \sigma(j, l)}, \tilde{g} \rangle > \langle k^{(i), \sigma(i, l)}, \tilde{g} \rangle, \tilde{g} = (g^T, 1)^T\},$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{il} = \begin{cases} \mathcal{P} \cap \left(\bigcap_{j \in \mathcal{S}(i, l)} \mathcal{P}_{ijl} \right), & \text{если } \mathcal{S}(i, l) \neq \emptyset, \\ \mathcal{P}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Множество $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$ задаёт множество управлений, использование которых не приведёт к попаданию траектории из симплекса $\Omega^{(i)}$ в симплекс с бóльшим значением оценки функции цены; далее это будет доказано. Выберем управления из $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$ таким образом, чтобы они были наиболее близки к управлению, реализующему операцию \min_u в уравнении ГЯБ. Тогда из оценки (2.16) с учётом обозначения

$$\eta_{\sigma(i, l)}^{(i)} = \left\langle \tilde{g}_l, \left[(\tilde{A}^{(i)})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{G}^{(i)} + \Gamma^{(i)} \tilde{G}^{(i)} + (4\gamma^{(i)})^{-1} \mathcal{K}^{(i)} \tilde{C} Q^{(i)} (\tilde{C})^T \mathcal{K}^{(i)} \tilde{G}^{(i)} \right] \tilde{H}^{(i)} \tilde{g}_l \right\rangle$$

получим следующую задачу:

$$\zeta(l, i, u) = \max_j \left\{ \left\langle \tilde{g}_l, \mathcal{K}^{(j)} \tilde{B}^{(j)} u \right\rangle + \eta_{\sigma(j, l)}^{(j)} \mid j \in \mathcal{J}(i, l) \right\}, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i, l)} = \text{Argmin} \left\{ \zeta(l, i, u) : u \in \tilde{\mathcal{P}}_{il} \right\}. \quad (3.8)$$

Задача (3.7)–(3.8) является задачей выпуклого программирования, вследствие чего множества $\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i, l)}$ также будут выпуклыми.

3. Определим номера достижимых симплексов $\mathcal{I}(i, l, \tilde{\mathcal{Y}})$ с учётом посчитанных на предыдущем шаге величин $\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i, l)}$.
4. Найдём все такие пары $(i, l) \in \mathcal{K}$, что

$$\exists j \in \mathcal{I}(i, l, \tilde{\mathcal{Y}}), \exists g \in \mathcal{N}(i, j) : \langle k^{(j), \sigma(j, l)}, \tilde{g} \rangle \geq \langle k^{(i), \sigma(i, l)}, \tilde{g} \rangle, \mathcal{J}(j, l) \not\subseteq \mathcal{J}(i, l). \quad (3.9)$$

Совокупность таких пар обозначим через \mathcal{D} .

5. Для каждых $(i, l) \in \mathcal{D}$ дополним множество $\mathcal{J}(i, l)$ до множества

$$\mathcal{J}(i, l) \cup \{\mathcal{J}(j, l) : j \text{ удовлетворяет (3.9)}\}.$$

6. Если множество \mathcal{D} оказалось пустым, то алгоритм завершает работу. Иначе алгоритм переходит к следующему шагу.
7. Пересчитаем новое, “склеенное” управление в каждой вершине $g^{(i),\sigma(i,l)}$ согласно формулам (3.7)–(3.8), учитывая новые множества $\mathcal{J}(i, l)$. Алгоритм возвращается к шагу 3.

В итоге получена такая совокупность множеств $\tilde{\mathcal{Y}}$, что если аппроксимация функции цены непрерывна на общей границе двух симплексов, а сами симплексы достижимы друг из друга, то выполнено условие (3.5). Если же аппроксимация функции цены терпит разрыв, то переход траектории в соседний симплекс с увеличением значений этой функции невозможен в силу выбора управлений из соответствующих множеств $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$.

Утверждение 3.2. *Описанный выше алгоритм обязательно завершит свою работу за конечное количество итераций.*

Доказательство. На каждой итерации алгоритма мощность хотя бы одного из множеств $\mathcal{J}(i, l)$ увеличивается на 1, но количество элементов в каждом множестве ограничено сверху. При этом, если все множества $\mathcal{J}(i, l)$ максимальны, то есть

$$\mathcal{J}(i, l) = \{j \in \{1, \dots, N\} : g_l \text{ — вершина } \Omega^{(j)}\},$$

то полученное в результате кусочно-аффинное управление будет непрерывным по x , допустимым, и будет соответствовать пустому множеству \mathcal{D} . \square

Определённое в соответствии с приведённым алгоритмом кусочно-аффинное управление, а также множества $\mathcal{J}(i, l)$ могут быть далее использованы для построения разрывной кусочно-квадратичной оценки функции цены.

3.3 Изменение нумерации симплексов

Прежде чем указать окончательный способ построения функции $V(t, \tilde{x})$, требуется для каждой вершины g_l упорядочить содержащие её симплексы $\Omega^{(i)}$ на основе найденных множеств $\mathcal{J}(i, l)$ — это позволит последовательно вычислять векторы неизвестных коэффициентов в разных симплексах. Для этого удобно перейти к анализу графов.

Пусть вершине g_l сопоставлен ориентированный граф $G_l(V_l, E_l)$, допускающий существование петель, множеством вершин которого является $V_l = \{i : (i, l) \in \mathcal{K}\}$, а множеством рёбер — $E_l = \{(i, j) : j \in \mathcal{J}(i, l)\}$.

Определение 3.5. Будем говорить, что вершина $v \in V_l$ достижима из вершины $w \in V_l$, если в графе G_l существует путь из w в v .

Таким образом, необходимо упорядочить вершины графа на основе их достижимости друг из друга. Задача, однако, усложняется возможным наличием циклов в графе G_l .

Определение 3.6. Компонентой сильной связности называется такое максимальное по включению подмножество вершин $C \subseteq V_l$, что любые две вершины этого подмножества достижимы друг из друга.

Определение 3.7. Графом конденсации называется граф, получаемый из данного графа сжатием каждой компоненты сильной связности в одну вершину. Каждой вершине графа конденсации соответствует компонента сильной связности графа G_l (возможно, состоящая из одного элемента), а ориентированное ребро между двумя вершинами C_i и C_j графа конденсации проводится, если найдётся пара вершин $w \in C_i$, $v \in C_j$, между которыми существовало ребро в исходном графе, т.е. $(w, v) \in E_l$.

Очевидно, что различные компоненты сильной связности не пересекаются, а граф конденсации не содержит циклов.

Определение 3.8. Топологической сортировкой называется такая нумерация вершин ориентированного ациклического графа, что каждое ребро графа ведёт из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером.

Утверждение 3.3. Пусть $M(i, l)$ — множество вершин графа G_l , достижимых из вершины графа с номером i . Можно перенумеровать вершины исходного графа G_l таким образом, что будет выполнено

$$i_1 < i_2 \Rightarrow M(i_1, l) \subseteq M(i_2, l) \text{ или } M(i_1, l) \cap M(i_2, l) = \emptyset. \quad (3.10)$$

Доказательство. Воспользуемся алгоритмом Тарьяна [118] либо алгоритмом Косарайю–Шарира [113] для поиска компонент сильной связности в графе G_l , при этом в качестве побочного результата получится топологическая сортировка графа конденсации. Будем последовательно обходить граф конденсации в соответствии с порядком его вершин, в каждой компоненте сильной связности нумеруя вершины графа G_l в произвольном порядке. \square

Далее через $\mathcal{C}(i, l)$ будем обозначать номера вершин, входящих в одну компоненту сильной связности с вершиной i в графе G_l .

3.4 Основной результат

Следующая теорема позволяет построить внутреннюю оценку функции цены на всем отрезке времени $[t_0, t_1]$ с использованием разрывных управлений, в каждый фиксированный момент времени полученных с помощью описанного выше алгоритма. При этом для вычисления неизвестных коэффициентов функции $V^{(i)}(t, \tilde{x})$ используются вспомогательные задачи оптимизации, которые поставлены таким образом, что в каждой вершине g_l соответствующие ей векторы $k^{(i),\sigma(i,l)}(t)$ при различных i можно вычислять последовательно, в порядке обхода (3.10), на основе уже обработанных симплексов. Добиться этого удаётся за счёт того, что в каждой вершине g_l для всех i из одной сильной компоненты связности решения задач оптимизации будут одинаковы.

Теорема 3.1. Пусть для каждого $t \in [t_0, t_1]$ в соответствии с приведённым выше алгоритмом определены многозначные отображения $\mathcal{Y}^{(i),\sigma(i,l)}(t) \subseteq \mathcal{P}$, а также множества $\mathcal{J}(i, l)$ и $\mathcal{C}(i, l)$, $(i, l) \in \mathcal{K}$. Пусть симплексы $\Omega^{(i)}$ пронумерованы согласно (3.10). Пусть также для каждого $(i, l) \in \mathcal{K}$ величина $\zeta^{(i),\sigma(i,l)}(t) \in \mathbb{R}^{n_x+1}$ при некотором фиксированном $\varepsilon > 0$ является решением следующей оптимизационной задачи:

$$P_l^{(i)}(t) : \begin{cases} \langle \zeta^{(i),\sigma(i,l)}(t), \tilde{g}^{(i),\sigma(i,l)} \rangle + \varepsilon \|\zeta^{(i),\sigma(i,l)}(t)\|^2 \rightarrow \min_{\zeta^{(i),\sigma(i,l)}} \\ \langle \zeta^{(i),\sigma(i,l)}(t), \tilde{g} \rangle \geq \langle z^{(j),\sigma(j,l)}(t), \tilde{g} \rangle, \quad \forall g - \text{вершина } \Omega^{(j)}, \quad \forall j \in \mathcal{C}(i, l), \\ \langle \zeta^{(i),\sigma(i,l)}(t), \tilde{g} \rangle \geq \langle \zeta^{(j),\sigma(j,l)}(t), \tilde{g} \rangle, \quad \forall j \in \mathcal{J}(j_1, l) \setminus \mathcal{C}(i, l), \quad \forall j_1 \in \mathcal{C}(i, l), \\ \text{при } \forall g \in \mathcal{N}(j, j_1), \end{cases} \quad (3.11)$$

где $z^{(i),\sigma(i,l)}$ — столбец с номером $\sigma(i, l)$ матрицы $Z^{(i)}$ из утверждения 2.6, а различные задачи $P_l^{(i)}(t)$ решаются в порядке возрастания индекса (i) при каждом фиксированном l .

Рассмотрим систему векторных ОДУ:

$$\dot{k}^{(i),\sigma(i,l)}(t) = -\zeta^{(i),\sigma(i,l)}(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (3.12)$$

Граничное условие $k^{(i),\sigma(i,l)}(t_1)$ определяется как столбец с номером $\sigma(i, l)$ матрицы $K^{(i)}(t_1)$ из формулы (2.25).

Пусть $V(t, \tilde{x})$ — разрывная кусочно-квадратичная функция, определённая согласно формуле (3.1) на основе решений систем (3.12). Тогда множество

$$\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) = \left\{ x \in \Omega \mid V(t_0, \tilde{x}) \leq \mu \right\}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости: $\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) \subseteq \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1)$.

Доказательство. Сначала докажем, что для любого $t \in [t_0, t_1]$ множества $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$, определённые согласно (3.6), не пусты, а значит, указанный выше алгоритм является корректным. При $t = t_1$ кусочно-квадратичная функция $V(t, \tilde{x})$ является непрерывной, и потому $\tilde{\mathcal{P}}_{il} = \mathcal{P}$ для всех $(i, l) \in \mathcal{K}$.

Предположим, что для некоторых i, l , в некоторый момент времени $t^* < t_1$ выполнено $\tilde{\mathcal{P}}_{il} = \emptyset$. Тогда найдётся такое значение $\tilde{t} \in [t^*, t_1)$, что

1. $\forall j = j_1, \dots, j_r \quad \forall g \in \mathcal{N}(i, j) \quad \langle k_{\sigma(j,l)}^{(j)}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle \geq \langle k_{\sigma(i,l)}^{(i)}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle$, но если в вершине $g^* \in \mathcal{N}(i, j)$ достигается равенство

$$\langle k^{(j),\sigma(j,l)}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle = \langle k^{(i),\sigma(i,l)}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle, \quad (3.13)$$

то обязательно выполнено неравенство для производных:

$$\langle \dot{k}^{(j),\sigma(j,l)}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle < \langle \dot{k}^{(i),\sigma(i,l)}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle. \quad (3.14)$$

2. $\forall j = j_{r+1}, \dots, j_m \quad j \in \mathcal{S}(i, l)$.

Здесь j_1, \dots, j_m — все номера симплексов, содержащих вершину g_l , за исключением i . При этом обязательно $r \geq 1$. Кроме того, момент времени \tilde{t} можно взять такой, что $\mathcal{Y}^{(i),\sigma(i,l)}(\tilde{t}+0) \neq \emptyset$.

Проанализируем теперь множество $\mathcal{I}(i, l, \tilde{\mathcal{Y}}(\tilde{t}+0))$. Возможен один из двух описанных ниже случаев.

1. Если $\mathcal{I}(i, l, \tilde{\mathcal{Y}}(\tilde{t}+0)) = \{i\}$, то для i -го симплекса существует управление, для которого траектория системы (3.2), выпущенная из вершины g_l , будет направлена внутрь этого симплекса. В силу стационарности системы это управление будет обладать указанным свойством и при всех $t < \tilde{t}$, а значит, $\tilde{\mathcal{P}}_{il} \neq \emptyset \forall t \in [t_0, t_1]$. Получено противоречие.
2. Существует $\tilde{j} \neq i$, $\tilde{j} \in \mathcal{I}(i, l, \tilde{\mathcal{Y}}(\tilde{t}+0))$. Тогда в силу ограничения (3.6), выполненного при $t > \tilde{t}$, обязательно $\tilde{j} \in \{j_1, \dots, j_r\}$. Согласно (3.9) $\tilde{j} \in \mathcal{J}(i, l)$ в момент времени \tilde{t} . Тогда при $\tilde{j} \notin \mathcal{C}(i, l)$ из второй группы ограничений в задаче (3.11) следует, что для любой вершины $g \in \mathcal{N}(i, \tilde{j})$ выполняется неравенство $\langle \zeta^{(i),\sigma(i,l)}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle \geq \langle \zeta^{(\tilde{j}),\sigma(\tilde{j},l)}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle$; если же $\tilde{j} \in \mathcal{C}(i, l)$, это неравенство следует из того, что задачи (3.11) совпадают для всех симплексов внутри одной компоненты связности и имеют единственное решение в силу строгой выпуклости функционала. Используя неравенство (3.12), получим

$$\langle \dot{k}^{(i),\sigma(i,l)}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle \leq \langle \dot{k}^{(\tilde{j}),\sigma(\tilde{j},l)}(\tilde{t}), \tilde{g} \rangle \quad \forall g \in \mathcal{N}(i, \tilde{j}).$$

Пусть g^* — вершина, на которой достигается равенство в (3.13). Тогда

$$\langle \dot{k}^{(i),\sigma(i,l)}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle \leq \langle \dot{k}^{(\tilde{j}),\sigma(\tilde{j},l)}(\tilde{t}), \tilde{g}^* \rangle,$$

что противоречит неравенству (3.14).

Таким образом, доказана непустота множеств $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$.

Рассмотрим управление

$$u^*(t, x) = \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x) \mathcal{Y}^{(i),l}(t), \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.15)$$

Функция $u^*(t, x)$ непрерывна по x в каждом из симплексов, но может иметь разрывы на их границах. Однако такое разрывное управление является допустимым, так как выполнено условие (3.5). Из указанного условия следует, что разрыв управления на границе между симплексами $\Omega^{(i^*)}$ и $\Omega^{(i^{**})}$ возможен только в тех случаях, когда траектория системы может попасть из первого симплекса во второй, либо обратно, но не туда и обратно одновременно, при различных управлениях.

Заметим, что от векторных уравнений (3.12) мы можем вновь перейти к матричным уравнениям вида (2.18):

$$\dot{K}^{(i)} + \hat{Z}^{(i)} = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = \overline{1, N},$$

где матрицы $\hat{Z}^{(i)}$ составлены из соответствующих векторов $\zeta_{\sigma(i,l)}^{(i)}$.

Для произвольного начального вектора $x^0 \in \mathcal{W}_\mu^{int}(t_0)$ определим некоторое решение $x(t) = x(t; t_0, x^0)|_{u^*(\cdot)}$, $t \in [t_0, t_1]$, замкнутой системы (3.2). Найдутся такие моменты времени

$$t_0 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{K-1} < \tau_K = t_1,$$

для которых на каждом из отрезков $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = \overline{1, K-1}$, траектория замкнутой системы либо находится в одном из симплексов $\Omega^{(i)}$, либо движется по границе нескольких (одних и тех же) симплексов $\Omega^{(i_1)}, \dots, \Omega^{(i_m)}$. Во втором случае симплексы достижимы друг из друга вследствие неравенства (3.4) и, следовательно, значения $V^{(i_1)}(t, \tilde{x}), \dots, V^{(i_m)}(t, \tilde{x})$ совпадают на общей границе симплексов.

При $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$ можно оценить производную функции $V(t, \tilde{x})$ вдоль траектории системы аналогично выводу (2.22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, \tilde{x})}{\partial \ell} &\leq \langle \tilde{x}(t), [\dot{K}^{(i(t))} + Z^{(i(t))}] \tilde{H}^{(i(t))} \tilde{x}(t) \rangle = \langle \tilde{x}(t), \dot{K}^{(i(t))} \tilde{H}^{(i(t))} \tilde{x}(t) \rangle + \langle \tilde{x}(t), Z^{(i(t))} \alpha^{(i)}(x(t)) \rangle = \\ &= \langle \tilde{x}(t), \dot{K}^{(i(t))} \tilde{H}^{(i(t))} \tilde{x}(t) \rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x(t)) \langle \tilde{x}(t), z^{(i(t)),l} \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая ограничения задачи (3.11) и линейность рассматриваемых функций, можем про-

должить это неравенство:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(t, \tilde{x})}{\partial \ell} &\leq \langle \tilde{x}(t), \dot{K}^{(i(t))} \tilde{H}^{(i(t))} \tilde{x}(t) \rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x(t)) \langle \tilde{x}(t), z^{(i(t)), l} \rangle \leq \\
&\leq \langle \tilde{x}(t), \dot{K}^{(i(t))} \tilde{H}^{(i(t))} \tilde{x}(t) \rangle + \sum_{l=1}^{n_x+1} \alpha_l^{(i)}(x(t)) \langle \tilde{x}(t), \zeta^{(i(t)), l} \rangle = \\
&= \langle \tilde{x}(t), [\dot{K}^{(i(t))} + \hat{Z}^{(i(t))}] \tilde{H}^{(i(t))} \tilde{x}(t) \rangle = 0. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Из условия (3.6) и задач (3.11) вытекает, что описанный выше алгоритм определяет управление $u^*(t, x)$, при котором для любых двух номеров симплексов i и j , таких, что $j \in \mathcal{I}(i, l, \tilde{\mathcal{Y}}(t))$, верно $V^{(i)}(t, \tilde{g}) \geq V^{(j)}(t, \tilde{g})$ для любой вершины $g \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$ и для любого $t \in [t_0, t_1]$. Поскольку значение функции $V(t, \tilde{x})$ в произвольной точке Ω определяется как линейная комбинация аффинных функций в вершинах соответствующего симплекса, то $V^{(i)}(t, \tilde{x}) \geq V^{(j)}(t, \tilde{x})$ для любого $x \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$, $j \in \mathcal{I}(i, l, \tilde{\mathcal{Y}}(t))$. Следовательно, любой разрыв сопровождается лишь уменьшением функции $V(t, \tilde{x})$.

Тогда из (3.16) получим, что если $V(t_0, \tilde{x}(t_0)) \leq \mu$, то $V(t_1, \tilde{x}(t_1)) = \phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1)) \leq \mu$ и, следовательно, $\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) \subseteq \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1)$. ■

Замечание. Доказанная теорема даёт априорную оценку погрешности при использовании управления, соответствующего формулам (3.7), (3.8) и (3.15). Для синтеза управлений разумно использовать предварительно вычисленные значения $\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i), l}$. Это позволяет максимально упростить процедуру построения позиционного управления, хотя всю необходимую информацию можно получить из анализа значений функции $V(t, \tilde{x})$.

3.5 Оптимизация вычислений

3.5.1 Поиск управлений в вершинах симплексов

Опишем решение задачи (3.7)–(3.8) более подробно.

В соответствии с определением множества $\tilde{\mathcal{P}}_{il}$ (3.6), требуется найти такие значения $s \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, что будет достигнут минимум функционала в задаче

$$\left\{ \begin{array}{l} s \rightarrow \min_{s, u}, \\ s \geq \langle \tilde{g}_i, \mathcal{K}^{(j)} \tilde{B}^{(j)} u \rangle + \eta_{\sigma(j), l}^{(j)}, \quad \forall j \in \mathcal{J}(i, l), \\ \langle u, P^{-1} u \rangle \leq 1, \\ (n_{ij})^T (A^{(i)} g_l + B^{(i)} u + f^{(i)}) - \rho(-n_{ij} | \mathcal{Q}^{(i)}) \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{S}(i, l). \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} z &= (s, u^T)^T \in \mathbb{R}^{n_u+1}, \\ e_1 &= (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n_u+1}, \\ R &= \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{n_u \times 1} & \mathbb{I}_{n_u \times n_u} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_u+1)}. \end{aligned}$$

Тогда задачу (3.17) можно переформулировать иначе:

$$\begin{cases} \langle e_1, z \rangle \rightarrow \min_z, \\ \langle R^T (\tilde{B}^{(j)})^T \mathcal{K}^{(j)} \tilde{g}_l - e_1, z \rangle + \eta_{\sigma^{(j,l)}}^{(j)} \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}(i, l), \\ \langle z, R^T P^{-1} R z \rangle - 1 \leq 0, \\ \langle -R^T (B^{(i)})^T n_{ij}, z \rangle + [\rho(-n_{ij} | \mathcal{Q}^{(i)}) - (n_{ij})^T (A^{(i)} g_l + f^{(i)})] \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{S}(i, l). \end{cases} \quad (3.18)$$

Задача (3.18) представляет собой задачу минимизации с линейно-квадратичными ограничениями, при этом матрица $R^T P^{-1} R$ симметрична и неотрицательно определена. Таким образом, задача может быть эффективно решена численно за счёт использования метода внутренней точки [98].

3.5.2 Переиспользование результатов

Заметим, что если симплексам $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$, $g_l \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$, соответствуют вершины графа G_l , лежащие в одной сильной компоненте связности, то задачи $P_l^{(i)}$ и $P_l^{(j)}$ из (3.11) полностью совпадают. При этом решение этих задач единственно, поскольку рассмотренный функционал является строго выпуклым. Следовательно, можно сократить количество задач оптимизации, воспользовавшись уже найденными решениями.

Вообще говоря, в задаче (3.11) можно рассматривать и другие функционалы. При условии, что в каждой сильной компоненте связности будет выбираться одно и то же решение в каждом симплексе, можно отказаться от квадратичного члена $\varepsilon \|\zeta^{(i), \sigma^{(i,l)}}(t)\|^2$, в результате чего задача (3.11) преобразуется к задаче линейного программирования и может быть решена, например, с помощью симплекс-метода [4, с. 105–131]. Однако на практике квадратичный член необходим, чтобы коэффициенты оценки функции цены не возрастали “слишком сильно” и чтобы, как следствие, оценка функции цены не “сильно” возрастала внутри симплексов. Линейный же член нужен, чтобы уменьшить значение функции в выбранной вершине.

Глава 4

Анализ результатов

4.1 Альтернативные классы кусочно-заданных функций

В данном разделе без доказательств приведены основные утверждения, полученные П.А. Точилиным в работах [130; 131; 119] для системы

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}, \quad (4.1)$$

в русле описанного подхода, но при рассмотрении аппроксимаций функции цены в других параметрических семействах. Автором настоящей работы были реализованы соответствующие численные методы, впоследствии также используемые для сравнения с результатами глав 1–3.

Далее, если не оговорено иное, используется класс допустимых управлений в соответствии с определением 2.1, а также применяются введённые ранее обозначения. Позиционные управления должны удовлетворять ограничению $u(t, x) \in \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ — постоянное во времени выпуклое компактное множество. Будем считать, что компактное множество Ω допускает разбиение на симплексы.

4.1.1 Кусочно-аффинная аппроксимация функции цены

Пусть функция $f(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируема по x , а функция $g(t, x)$ один раз непрерывно дифференцируема по x ; обе функции непрерывны по t .

Рассмотрим непрерывную кусочно-аффинную функцию, определённую на множестве симплексов $\bigcup_{i=1}^N \Omega^{(i)} = \Omega$ как

$$V(t, x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) v_k^{(i)}(t), \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad (4.2)$$

где скалярные функции $v_k^{(i)}(t) = V(t, g^{(i),k})$ дифференцируемы по $t \in [t_0, t_1]$, $\alpha^{(i)}(x)$ — вектор барицентрических координат точки $x \in \Omega^{(i)}$.

Теорема 4.1. Пусть для любых $t \in [t_0, t_1]$, $k = 1, \dots, S$

$$\zeta_k(t) = \min\{\zeta_k(t, u) : u \in \mathcal{P}\},$$

$$\zeta_k(t, u) = \max_{(i,k) \in \mathcal{K}} \{(\gamma^{(i)})^T (A^{(i)}(t)g_k + f^{(i)}(t)) + \rho(\gamma^{(i)}(t)|\mathcal{Q}^{(i)}(t)) + \langle (B^{(i)}(t))^T \gamma^{(i)}(t), u \rangle\},$$

$$\gamma^{(i)}(t) = (H^{(i)})^T v^{(i)}(t).$$

Пусть $V(t, x)$ — непрерывная кусочно-аффинная функция, определённая согласно (4.2), а функции $v_k(t)$, $k = 1, \dots, S$, являются решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{v}_k(t) = -\zeta_k(t), & t \in [t_0, t_1], \\ v_k(t_1) = \eta_k, \end{cases}$$

где значения η_k подобраны так, что $\phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leq V(t_1, x) \forall x \in \Omega$.

Тогда для достаточно большого $\mu > 0$ множество

$$\mathcal{W}_\mu^{int} = \{x \in \Omega : V(t_0, x) \leq \mu\}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости нелинейной системы (4.1):

$$\mathcal{W}_\mu^{int} \subseteq \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1).$$

Если система (4.1) автономна, существует обобщение теоремы 4.1 на случай разрывных функций. Тогда используется класс многозначных управлений \mathcal{U}_f из определения 1.2, а под траекторией системы понимается решение соответствующего дифференциального включения.

Теорема 4.2. Пусть для любых $t \in [t_0, t_1]$, $(i, k) \in \mathcal{K}$ получено решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{v}_{\sigma(i,k)}^{(i)}(t) = -\zeta_{\sigma(i,k)}^{(i)}(t), & t \in [t_0, t_1], \\ v_k(t_1) = \eta_k, \end{cases}$$

$$\zeta_{\sigma(i,k)}^{(i)}(t) = \max_{s \in \mathcal{J}(i,k)} \{(\gamma^{(s)}(t))^T (A^{(s)} g_k + f^{(s)}) + \rho(\gamma^{(s)}(t) | \mathcal{Y}^{(s), \sigma(s,k)}(t)) + \rho(\gamma^{(s)}(t) | \mathcal{Q}^{(s)})\},$$

где совокупность многозначных отображений $\mathcal{Y}^{(i), \sigma(i,k)}(t) \subseteq \mathcal{P}$ и множества $\mathcal{J}(i, k)$ определены в соответствии с алгоритмом из работы [130], а $V(t, x)$ — разрывная кусочно-аффинная функция, определённая согласно (4.2). Тогда для достаточно большого $\mu > 0$ множество

$$\mathcal{W}_\mu^{int} = \{x \in \Omega : V(t_0, x) \leq \mu\}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости:

$$\mathcal{W}_\mu^{int} \subseteq \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1).$$

4.1.2 Кусочно-кубическая аппроксимация функции цены

В работе [131] для нелинейной системы (3.2) было подробно рассмотрено построение кусочно-кубических аппроксимаций функций цены вида

$$V(t, \tilde{x}) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \langle \tilde{x}, \tilde{P}_k^{(i)}(t)\tilde{x} \rangle, \quad x \in \Omega^{(i)}. \quad (4.3)$$

Матрицы параметров $\tilde{P}_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+1) \times (n_x+1)}$ симметричны и подбираются таким образом, что функция (4.3) всюду непрерывна в Ω .

Теорема 4.3. Пусть все матрицы $\tilde{P}_k^{(i)}(t)$ (при разных i, k) непрерывны по t , и для любой пары соседних симплексов $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(j)}$ с общей границей

$$\mathcal{H}^{(ij)} = \text{conv} \{g_{k_1}, \dots, g_{k_{n_x}}\}$$

максимально возможной размерности выполнено условие

$$\langle \tilde{g}_{l_1}, \tilde{P}_s^{(i)}(t)\tilde{g}_{l_2} \rangle = \langle \tilde{g}_{l_1}, \tilde{P}_s^{(j)}(t)\tilde{g}_{l_2} \rangle \quad \forall s = \overline{1, n_x+1}, \quad \forall l_1, l_2 \in \{k_1, \dots, k_{n_x}\}, \quad l_1 \leq l_2. \quad (4.4)$$

Тогда функция $V(t, \tilde{x})$ непрерывна при $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \Omega$.

Введём обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(i)}(t) &= \begin{bmatrix} A^{(i)}(t) & f^{(i)}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)}, \\ \tilde{I} &= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{n_x \times n_x} & \mathbb{O}_{n_x \times 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+1)}, \end{aligned}$$

а также обозначения

$$\begin{aligned} \eta^{(i)}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n_x} \left(\max \left\{ (R_{s,-}^{(i)} + R_{s,+}^{(i)})\lambda_s^-, (R_{s,-}^{(i)} + R_{s,+}^{(i)})\lambda_s^+ \right\} + (R_{s,+}^{(i)} + R_{s,-}^{(i)}) \max\{|\lambda_s^-|, |\lambda_s^+|\} \right), \\ \lambda_s^- &= \min_r \left\{ \lambda_{\min} \left(\tilde{P}_s^{(i)} \right) \sqrt{1 + \|g_r^{(i)}\|^2} \right\}, \\ \lambda_s^+ &= \max_r \left\{ \lambda_{\max} \left(\tilde{P}_s^{(i)} \right) \sqrt{1 + \|g_r^{(i)}\|^2} \right\}, \\ \tilde{P}_s^{(i)} &= \sum_{k=1}^{n_x+1} \left(H_{ks}^{(i)} \tilde{P}_k^{(i)} + (\tilde{H}_k^{(i)})^T (\tilde{P}_k^{(i)})_s + (\tilde{P}_k^{(i)})_s^T \tilde{H}_k^{(i)} \right), \end{aligned}$$

где $\lambda_{\min}(Q)$, $\lambda_{\max}(Q)$ — соответственно минимальное и максимальное собственные значения симметричной матрицы Q , $(\tilde{P}_k^{(i)})_s$ — s -я строка матрицы $\tilde{P}_k^{(i)}$, s -я компонента погрешности линеаризации (2.11) ограничена отрезком $[R_{s,-}^{(i)}, R_{s,+}^{(i)}]$.

Теорема 4.4. Пусть для каждого $t \in [t_0, t_1]$, для некоторых кусочно-непрерывных вектор-функций $y_j(t) \in \mathcal{P}(t)$, $j = \overline{1, S}$, и дифференцируемых матричнозначных функций $\tilde{P}_k^{(i)}(t)$ выполнены дифференциальные неравенства

$$\begin{aligned} (\tilde{g}_{l_2}^{(i)})^T \left(\dot{\tilde{P}}_k^{(i)} + \tilde{P}_k^{(i)} \tilde{I}^T (\tilde{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \tilde{H}^{(i)}) + (\tilde{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \tilde{H}^{(i)})^T \tilde{I} \tilde{P}_k^{(i)} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{n_x+1} H_s^{(i)} (\tilde{A}^{(i)} \tilde{g}_{l_1}^{(i)} + B^{(i)} y_{l_1}^{(i)}) \tilde{P}_s^{(i)} \right) \tilde{g}_{l_3}^{(i)} \leq 0 \quad (4.5) \end{aligned}$$

для любых трёх (возможно, совпадающих) вершин $g_{l_1}^{(i)}$, $g_{l_2}^{(i)}$, $g_{l_3}^{(i)}$ симплекса $\Omega^{(i)}$. Пусть также выполнены условия непрерывности (4.4) функции $V(t, \tilde{x})$, а значения матриц $\tilde{P}_k^{(i)}(t_1)$ подобраны так, что $\phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leq V(t_1, \tilde{x}) \forall x \in \Omega$. Тогда множество

$$\mathcal{W}^{int} = \left\{ x \in \Omega : V(t, \tilde{x}) \leq - \int_t^{t_1} \eta(\tau) d\tau \right\}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости $\mathcal{W}(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ нелинейной системы (3.2).

Теорема 4.5. Матрицы $\tilde{P}_k^{(i)}$, удовлетворяющие условиям теоремы 4.4, при фиксированных управлениях в вершинах могут быть получены при решении следующей задачи оптимизации:

$$\sum_{i,k,l_1,l_2,l_3} \delta_{i,k,l_1,l_2,l_3}^2 \rightarrow \min, \quad (4.6)$$

$$\delta_{i,k,l_1,l_2,l_3} \geq 0, \quad (4.7)$$

$$\left\langle \tilde{g}_{l_1}, \dot{\tilde{P}}_{\sigma(i,l_3)}^{(i)}(t) \tilde{g}_{l_2} \right\rangle = \left\langle \tilde{g}_{l_1}, \dot{\tilde{P}}_{\sigma(j,l_3)}^{(j)}(t) \tilde{g}_{l_2} \right\rangle, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{g}_{l_2}^{(i)})^T \left(\dot{\tilde{P}}_k^{(i)} + \tilde{P}_k^{(i)} \tilde{I}^T (\tilde{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \tilde{H}^{(i)}) + (\tilde{A}^{(i)} + B^{(i)} Y^{(i)} \tilde{H}^{(i)})^T \tilde{I} \tilde{P}_k^{(i)} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{n_x+1} H_s^{(i)} (\tilde{A}^{(i)} \tilde{g}_{l_1}^{(i)} + B^{(i)} y_{l_1}^{(i)}) \tilde{P}_s^{(i)} \right) \tilde{g}_{l_3}^{(i)} + \delta_{i,k,l_1,l_2,l_3} = 0, \quad (4.9) \end{aligned}$$

где $\{i, k, l_1, l_2, l_3\}$ — все возможные наборы индексов, т.ч. $i \in \{1, \dots, N\}$, $k \in \{1, \dots, n_x + 1\}$, $l_1, l_2, l_3 \in \{1, \dots, S\}$: $g_{l_1} \in \Omega^{(i)}$, $g_{l_2} \in \Omega^{(i)}$, $g_{l_3} \in \Omega^{(i)}$. Условие (4.8) выполнено только для тех индексов, для которых $\{g_{l_1}, g_{l_2}, g_{l_3}\} \subset \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$.

Решение поставленной задачи существует, т.е. условия (4.7)–(4.9) совместны.

4.2 Альтернативные алгоритмы поиска управлений

В предыдущих главах выбор позиционных стратегий управления был основан на формулах (1.29), (2.26), (3.8), которые позволяют подобрать управления на основе уравнения

Гамильтона–Якоби–Беллмана с учётом вида его приближённого решения. Однако такие управления не лишены недостатков:

- формулы опираются на значения функции цены, которая ищется лишь приближённо, и потому соответствующие управления не являются оптимальными;
- в связи с кусочно-заданным характером построенной аппроксимации функции цены приходится применять дополнительные эвристики, увеличивающие погрешность метода — например, сглаживание разрывов (1.31) или усреднение по соседним симплексам (2.26).

В то же время для нахождения управлений могут быть использованы результаты любых других алгоритмов, допускающих построение позиционных стратегий, в результате чего построенная аппроксимация функции цены может оказаться более точной. В частности, могут применяться различные методы обучения с подкреплением, эффективность которых проявляется во многих задачах [83; 125].

Обучение с подкреплением [32] — это раздел машинного обучения, в котором поведение агента корректируется при взаимодействии с окружающей средой в зависимости от получаемых от неё вознаграждений при каждом совершённом действии. Применительно к рассматриваемым задачам, агент реализует управляющую стратегию $u = u(t, x)$, а в качестве функции мгновенного вознаграждения можно выбрать

$$\mathcal{L}(t, x) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ -d^2(x, \mathcal{X}_1), & t = t_1, \end{cases} \quad (4.10)$$

$d(x, \mathcal{X}_1)$ обозначает расстояние от точки x до множества \mathcal{X}_1 .

В качестве конкретных алгоритмов могут выступать SAC [79], DDPG [95], PPO [108], а также некоторые другие, если они рассчитаны на работу с континуальными множествами управлений и допустимых состояний системы. При этом стратегия управления представляется с помощью нейронной сети, веса которой обновляются методом градиентного спуска при оптимизации некоторого функционала качества. Функционал качества основан на максимизации кумулятивного вознаграждения по окончании эксперимента, однако в каждом из упомянутых алгоритмов представляет собой более сложное выражение, чтобы обеспечить стабильный процесс обучения.

При реализации описанного в главе 2 метода с разбиением множества Ω на симплексы для построения непрерывного кусочно-аффинного управления вида (2.14) в качестве значений в

вершинах можно непосредственно брать выход нейронной сети от входных данных (t, x) . Отметим, однако, что такие алгоритмы, как PPO и SAC, рассчитаны на стохастические стратегии управления, т.е. результат работы нейронной сети не является детерминированным. Это свойство может нарушить непрерывность управления (2.14), что приведёт к дополнительным сложностям при определении траекторий системы дифференциальных уравнений (2.1).

Опишем, как указанная проблема может быть решена за счёт небольшой модификации метода. Пусть множество \mathcal{P} допускает конечномерную параметризацию, в таком случае вектор $u \in \mathcal{P}$ определяется набором параметров $\theta \in \mathbb{R}^r$, где

$$\theta_i \in [\theta_i^{\min}, \theta_i^{\max}], \quad i = \overline{1, r}, \quad (4.11)$$

и цель заключается в определении этого набора для каждой фиксированной позиции (t, x) . В алгоритмах PPO и SAC обычно предполагается, что θ — это случайный вектор, имеющий многомерное нормальное распределение $\theta \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}, \Sigma)$ с вектором средних значений $\hat{\mu} \in \mathbb{R}^r$ и диагональной матрицей ковариации $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$. При использовании алгоритма сперва обучается нейронная сеть, которая предсказывает параметры этого распределения, а затем, во время расчёта значений $u(t, x)$, генерируются реализации соответствующего случайного вектора. Тем не менее, имея обученную нейронную сеть, легко получить детерминированное управление: для этого вместо генерации случайного вектора достаточно взять соответствующие математические ожидания: $\theta = \hat{\mu}$.

Отметим также, что на значения параметров θ_i наложены интервальные ограничения (4.11), в то время как носителем нормального случайного вектора является всё пространство \mathbb{R}^r . Чтобы удовлетворять требованиям, на практике значения параметров “обрезаются” [102] и новые значения получаются по формуле

$$\tilde{\theta}_i = \min\{\theta_i^{\max}, \max\{\theta_i, \theta_i^{\min}\}\},$$

хотя допускается использование других преобразований. Кроме того, для указанных случайных величин можно использовать распределения с ограниченным носителем, в частности, бета-распределение [101].

Такие детерминированные управления на основе нейросетевой модели, удовлетворяющие ограничению $u \in \mathcal{P}$, будем обозначать как $\hat{u}(t, x)$. Результирующее кусочно-аффинное управление будет определяться по формуле (2.14):

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) \hat{u}(t, g_k^{(i)}), \quad x \in \Omega^{(i)}. \quad (4.12)$$

В силу устройства нейросети функция $\hat{u}(t, x)$ будет непрерывной по (t, x) . Отсюда также следует, что при стремлении диаметра разбиения множества Ω на симплексы к нулю итоговое управление (4.12) будет поточечно сходиться к $\hat{u}(t, x)$.

Замечание. Алгоритмы обучения с подкреплением могут аналогичным образом использоваться при вычислении непрерывных кусочно-аффинных (4.2) и кусочно-кубических (4.3) аппроксимаций функции цены, а также для определения начальных приближений (3.8) в вершинах симплекса при построении разрывных управлений в главе 3.

4.3 Примеры вычислений

В данном разделе представлены результаты применения рассмотренных подходов к конкретным задачам управления. Численные методы были реализованы с помощью языка программирования Python 3, разработка и запуск программ проводились на персональном компьютере с использованием операционной системы macOS и процессора 3 GHz 6-Core Intel Core i5.

4.3.1 Управление квадрокоптером

Рассмотрим модификацию модели движения квадрокоптера в горизонтальной плоскости [11], в которой угловые скорости, соответствующую углам крена и тангажа, зафиксируем нулевыми. Угол крена также положим нулевым. Тогда движение квадрокоптера описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ m\dot{v}_x = g \cos(\psi) \operatorname{tg}(\theta^*), \\ m\dot{v}_y = g \sin(\psi) \operatorname{tg}(\theta^*), \\ \dot{\psi} = w_\psi, \\ I_{zz}\dot{w}_\psi = du. \end{cases} \quad (4.13)$$

Здесь (x, y) — положение центра масс квадрокоптера в инерциальной системе координат, (v_x, v_y) — соответствующие скорости, m — масса квадрокоптера, d — расстояние от центра масс до роторов квадрокоптера, g — ускорение свободного падения; $\theta^* \neq 0$ — зафиксированный угол тангажа, ψ — угол рыскания, w_ψ — соответствующая ему угловая скорость

вращения квадрокоптера. Также считаем, что тензор инерции квадрокоптера задаётся матрицей $\mathcal{I} = \text{diag}(I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Управляющим параметром является величина

$$u = -f_1 + f_2 - f_3 + f_4 \in \mathbb{R},$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 — силы тяги, создаваемые каждым из четырёх роторов квадрокоптера, рис. 4.1.

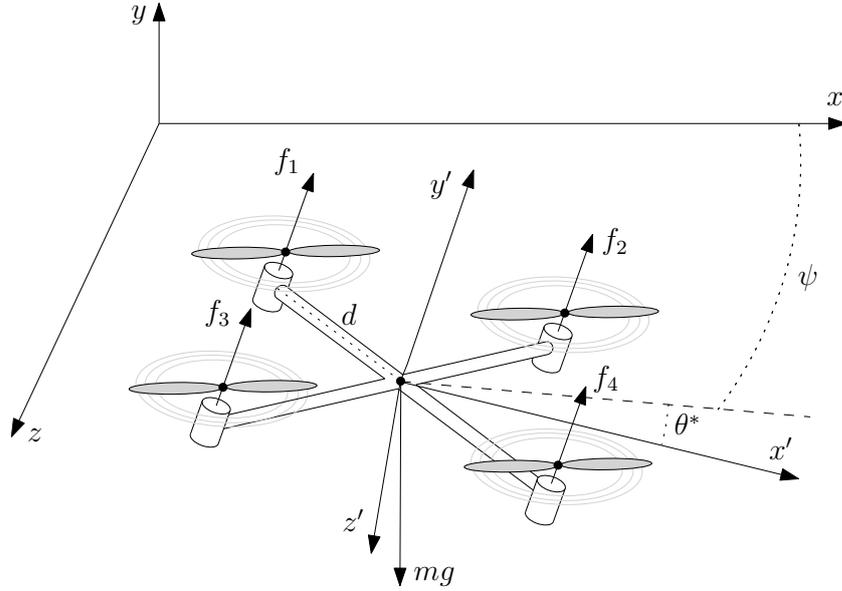


Рис. 4.1: Схематическое изображение квадрокоптера.

Если в качестве вектора состояния выбрать вектор

$$z = (\psi, w_\psi, x, y, v_x, v_y)^T \in \mathbb{R}^6,$$

то систему (4.13) можно переписать в виде

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{g}{m} \text{tg}(\theta^*) & 0 \\ 0 & \frac{g}{m} \text{tg}(\theta^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(z_1) \\ \sin(z_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{d}{I_{zz}}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (4.14)$$

Система (4.14) имеет размерность шесть, что уже представляет серьёзные вычислительные сложности при использовании различных сеточных методов, а также алгоритмов, требующих разбиение пространства на симплексы. Однако нелинейные члены в (4.14) зависят от единственной компоненты z_1 вектора состояния, что позволяет применить метод с разбиением пространства набором параллельных гиперплоскостей, описанный в главе 1.

Будем рассматривать траектории системы внутри гиперполосы

$$\Omega = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}^5$$

и разобьём множество Ω на N полос меньшего размера с помощью гиперплоскостей, расположенных на расстоянии $\Delta = \pi/N$ друг от друга. Считаем, что все рассматриваемые гиперплоскости ортогональны вектору $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0)^T$.

Зафиксируем значения параметров, равные

$$m = 1, \quad d = 1, \quad I_{zz} = 0.2, \quad \theta^* = \frac{\pi}{6}.$$

Пусть на управление наложено ограничение $u \in [-1, 1]$ и требуется перевести систему из состояния

$$z^0 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0, -0.05, 0.70, 0, 0\right)^T$$

в начальный момент времени $t_0 = 0$ в целевое множество

$$\mathcal{X}_1 = \{z = (\psi, w_\psi, x, y, v_x, v_y)^T : x = y = 0\}$$

в конечный момент времени $t_1 = 0.5$.

При численной реализации метода в качестве весовых коэффициентов в формуле (1.50) были выбраны значения $w_i = 0.15$ и $\tilde{w}_j = 1$ при всех соответствующих индексах i и j .

На рис. 4.2 в координатах (x, y) представлена траектория, полученная предложенным методом при $N = 40$. Конечная точка траектории попадает в 0.003-окрестность целевого множества. При этом теорема 1.5 априорно гарантирует, что при замыкании системы (4.14) управлением (1.31) конечная точка траектории окажется во множестве $\{x \in \Omega : V(t_1, x) \leq 0.062\}$, что соответствует оценке отклонения от множества \mathcal{X}_1 , равной 0.248 в стандартной метрике пространства \mathbb{R}^6 .

На рис. 4.3 представлены зависимости априорной и апостериорной погрешностей метода в зависимости от числа N множеств $\Omega^{(i)}$, при этом соседние гиперплоскости $\mathcal{H}^{(i)}$ полагаются равноудалёнными друг от друга. Значение априорной погрешности не стремится к нулю при уменьшении Δ , однако это объясняется тем, что остальные параметры численного метода были зафиксированы и, как следствие, не выполнялось требование (1.45).

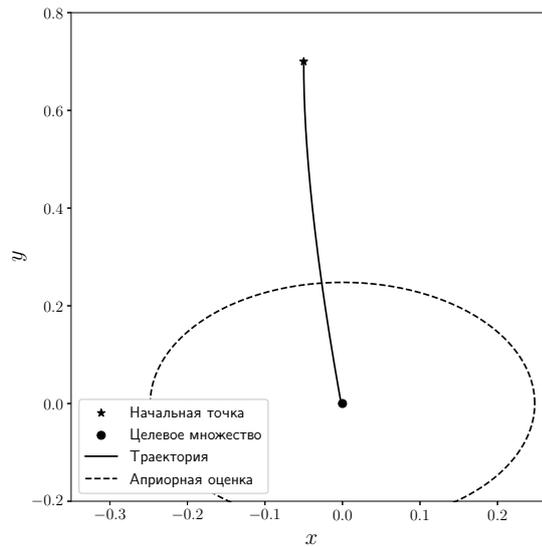


Рис. 4.2: Проекция траектории системы (4.13) на плоскость (x, y) .

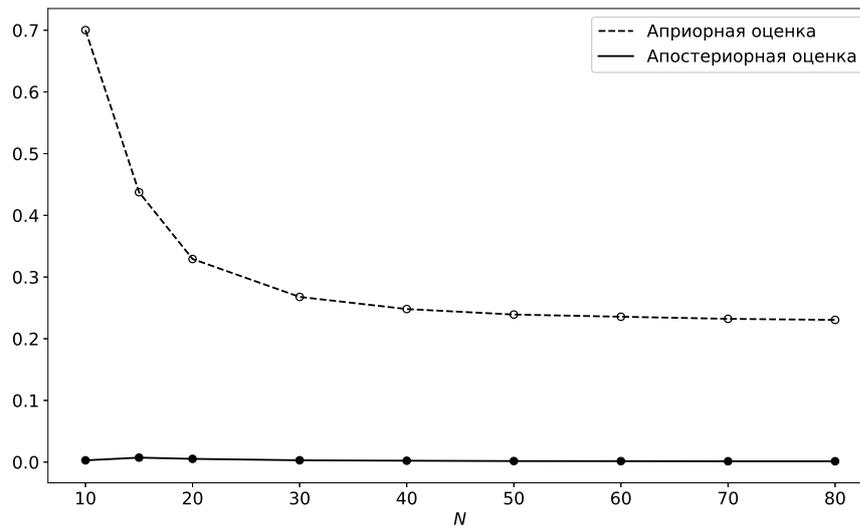


Рис. 4.3: Априорная и апостериорная оценки попадания траектории системы (4.14) в окрестность целевого множества.

4.3.2 Маятник на тележке

Для демонстрации работы остальных методов рассмотрим движение маятника на тележке с учётом силы трения [104], которое описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin(x_1) - 2\gamma x_2 - \omega^2 \cos(x_1) \cdot u, \end{cases} \quad (4.15)$$

где ω и γ являются параметрами, x_1 и x_2 — угол отклонения маятника и угловая скорость соответственно, управление u соответствует ускорению тележки. Пусть $\omega = 1$, $\gamma = 0.1$ и

требуется перевести систему из начального положения $x^0 = (-0.2, 0.4)^T$ при $t_0 = 0$ в начало координат в момент времени $t_1 = 1$. На управление наложено ограничение $u \in [-1, 1]$.

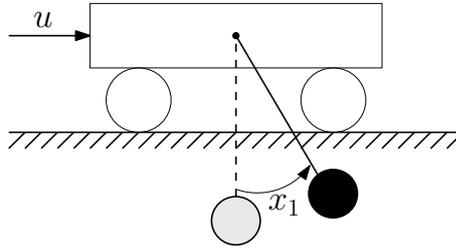


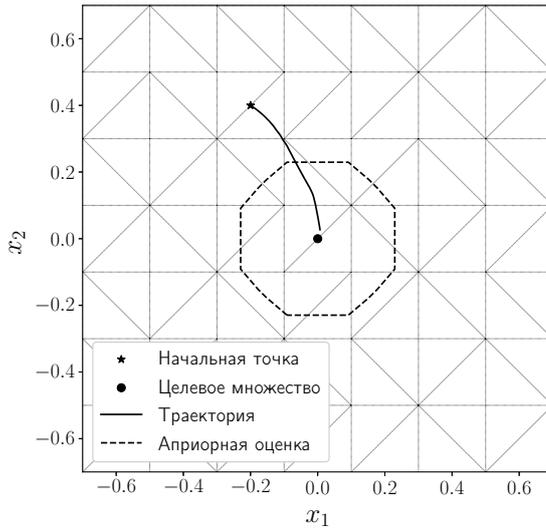
Рис. 4.4: Схема маятника на тележке.

В системе (4.15) присутствует нелинейный член $\omega^2 \cos(x_1)u$, не позволяющий свести систему к виду (1.1) и применить метод, описанный в главе 1. Однако могут быть использованы алгоритмы, требующие разбиения пространства на симплексы. Для этого во множестве $\Omega = [-0.7, 0.7] \times [-0.7, 0.7]$ была рассмотрена правильная прямоугольная сетка с шагом $\Delta = 0.2$ (по каждой координате), вершины которой использовались для построения триангуляции.

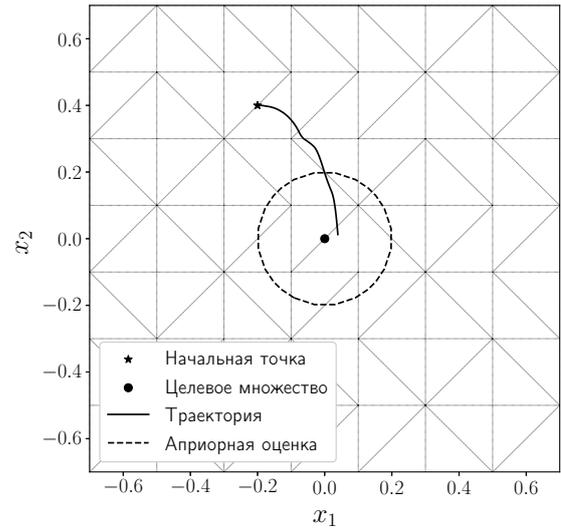
На рис. 4.5 приведены результаты запусков для различных методов при фиксированном разбиении на симплексы. В каждом из случаев сплошной линией обозначена траектория системы (4.15), замкнутой соответствующим синтез-управлением, а пунктирной линией — множество, куда априорно гарантируется попадание траектории в конечный момент времени.

На представленных графиках отклонения конечных точек траекторий от начала координат не превосходят 0.05, что демонстрирует применимость методов для поиска приближённого решения задачи целевого управления. В то же время погрешности методов могут заметно отличаться, что объясняется несколькими причинами:

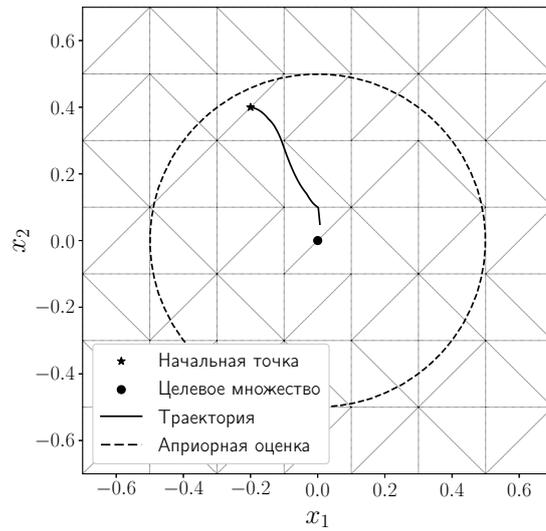
1. Указанные результаты получены при фиксированном разбиении на симплексы, однако оптимальное значение диаметра разбиения следует подбирать для каждого метода в отдельности. Так, на рис. 4.6 приведён пример, когда при шаге сетки $\Delta = 0.07$ одновременно удаётся получить гораздо более точные априорную и апостериорные оценки для непрерывной кусочно-квадратичной аппроксимации функции цены.
2. Помимо диаметра разбиения, для получения наилучших результатов требуется тщательная настройка остальных параметров. В частности, это касается подбора регуляризирующих членов, описанных в разделе 2.4, а также рассмотрения различных функционалов во вспомогательных задачах оптимизации. Поскольку методы построения кусочно-



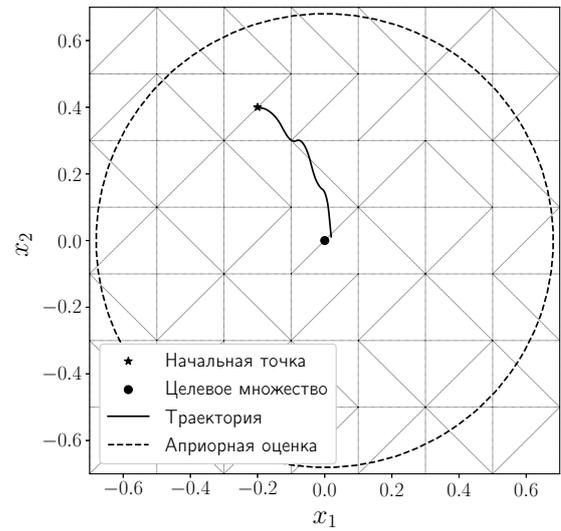
(а) Непрерывная кусочно-аффинная оценка функции цены (4.2)



(б) Непрерывная кусочно-квадратичная оценка функции цены (2.13)



(в) Разрывная кусочно-квадратичная оценка функции цены (3.1)



(г) Кусочно-кубическая оценка функции цены (4.3)

Рис. 4.5: Траектории системы (4.15) и соответствующие априорные оценки отклонения от целевой точки при использовании различных алгоритмов.

квадратичных и кусочно-кубических функций существенно опираются на задачи выпуклого программирования, соответствующие результаты чувствительны к модификациям этих задач.

Из-за указанных особенностей погрешности методов, вообще говоря, не стремятся к нулю при уменьшении диаметра разбиения на симплексы. В качестве примера на рис. 4.7 для той же фиксированной начальной точки x^0 приведены зависимости априорной и

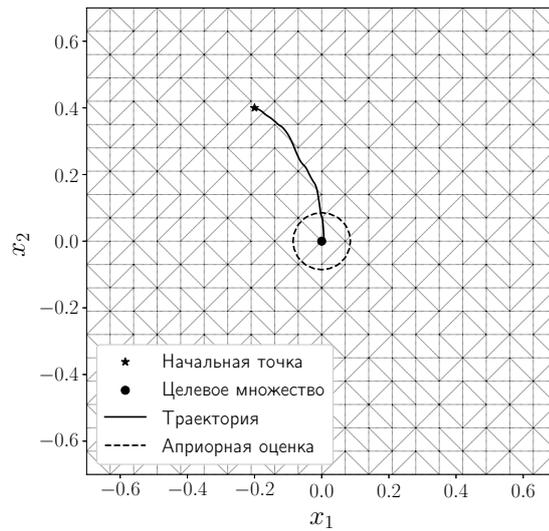


Рис. 4.6: Траектория системы (4.15) и соответствующая априорная оценка при использовании кусочно-квадратичной функции цены (2.13) и шаге сетки $\Delta = 0.07$.

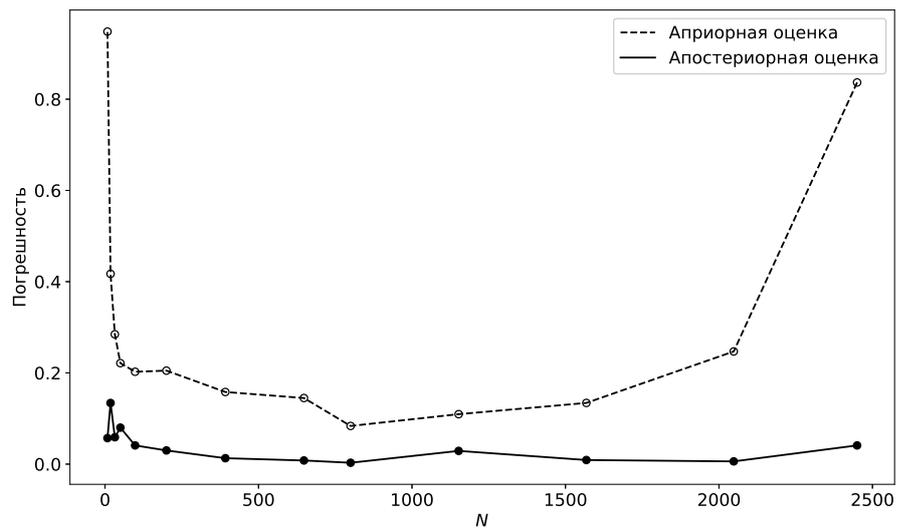


Рис. 4.7: Априорная и апостериорная оценки попадания траектории системы (4.14) в окрестность целевого множества.

апостериорной погрешностей от числа N симплексов разбиения $\Omega^{(i)}$ множества Ω при использовании оценок функции цены вида (2.13). Видно, что при малых Δ априорная погрешность начинает возрастать. Такое увеличение объясняется несовершенством задач (2.23): их решения в соседних вершинах могут значительно отличаться друг от друга, что влияет на устойчивость метода при мелком диаметре разбиения.

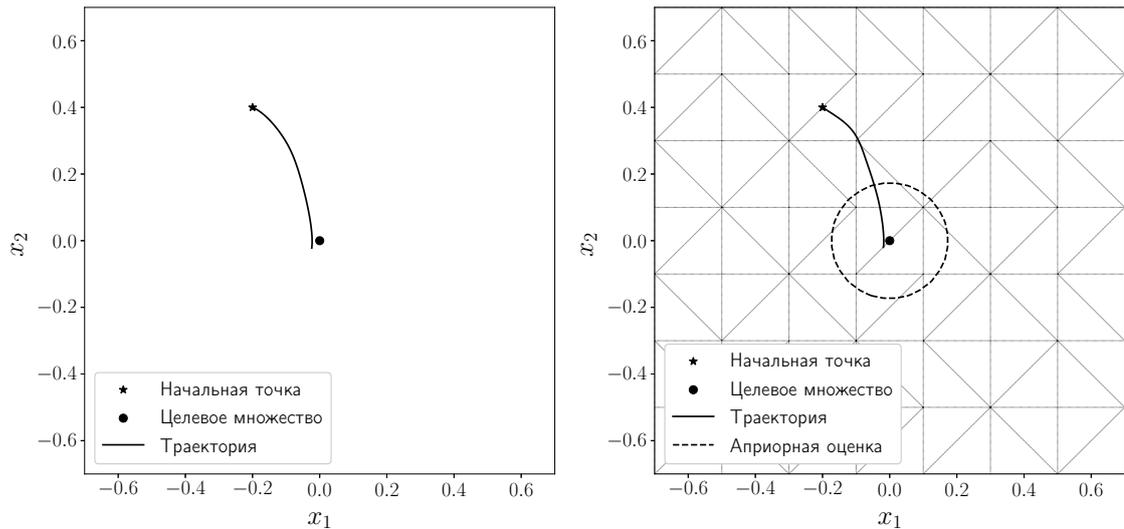
3. Алгоритмы с более сложной структурой аппроксимаций функции цены способны да-

вать более точные приближения искомого решения уравнения ГЯБ в конкретных случаях, однако, вообще говоря, не гарантируют построение более точных решений. Это связано с тем, что такие методы не являются прямым обобщением более “простых” алгоритмов: используемые при доказательствах оценки выводятся независимо друг от друга. Таким образом, в каждой конкретной задаче рекомендуется воспользоваться сразу несколькими алгоритмами, после чего для произвольной начальной точки x^0 можно выбрать наименьшую гарантированную оценку погрешности среди рассмотренных методов.

Кроме того, для решения поставленной задачи может использоваться обучение с подкреплением. В частности, был рассмотрен алгоритм Proximal Policy Optimization (PPO), упомянутый в разделе 4.2. В качестве простейшей модели нейронных сетей, используемых в алгоритме PPO, был выбран двухслойный перцептрон [5; 74] с функцией активации $\tanh(x)$. При обучении было сгенерировано 10000 пробных траекторий системы (4.15), стартующих из различных случайных точек $x^0 \in \Omega$ в момент времени t_0 , и нейросетевая стратегия управления $\hat{u}(t, x)$ обновлялась на основе штрафов (4.10). На рис. 4.8(а) представлена траектория, полученная при использовании алгоритма PPO без дополнительных модификаций. Расстояние между конечной точкой траектории и началом координат составляет 0.032.

Отметим, что алгоритмы обучения с подкреплением также подразумевают построение функции цены, которая является оценкой результирующей выгоды из каждой возможной позиции (в данном случае речь идёт о расстоянии до целевого множества в конечный момент времени), или её аналогов. Но даже при удачно подобранном управлении такая оценка не является гарантированной и может быть неточной. Таким образом, в отличие от результатов на рис. 4.5–4.6, в данном случае нельзя получить гарантированную оценку отклонения от целевого множества.

В то же время подход, указанный в разделе 4.2, позволяет приблизить любую наперёд заданную позиционную стратегию кусочно-аффинным управлением, для которого полученная оценка будет гарантированной. На рис. 4.8(б) представлена траектория, полученная при построении кусочно-квадратичной аппроксимации функции цены (2.13) при использовании нейросетевого управления $\hat{u}(t, x)$ в вершинах симплексов разбиения. Расстояние до начала координат в этом случае равно 0.034, при этом возрастание ошибки объясняется разницей между исходным нейросетевым управлением $\hat{u}(t, x)$ и его аппроксимацией (4.12). Однако в данном случае гарантировано оценена априорная погрешность метода.



(а) Траектория, полученная с помощью
исходного нейросетевого управления $\hat{u}(t, x)$.

(б) Траектория на основе
аппроксимации (4.12) управления $\hat{u}(t, x)$.

Рис. 4.8: Траектории, полученные на основе обучения с подкреплением.

4.3.3 Маятник с электромотором

Рассмотрим устройство маятника, схематично изображённого на рис. 4.9. В стену встроен электромотор, работающий от постоянного тока и способный вращать брус, на конце которого закреплён груз массы M . Положение и скорость бруса определяются углом $\theta(t)$ и угловой скоростью $w(t) = \dot{\theta}(t)$. Пусть также J — момент инерции бруса, I — сила тока в сети, $\tau = k_1 I$ — вращающий момент, создаваемый электромотором. Расстояние между точкой крепления бруса к стене и точкой крепления груза обозначим за L . На брус действует сила трения $f = k_2 w$. Требуется перевести систему в окрестность заданной точки (θ^0, w^0) в момент времени t_1 , управляя величиной силы тока I .

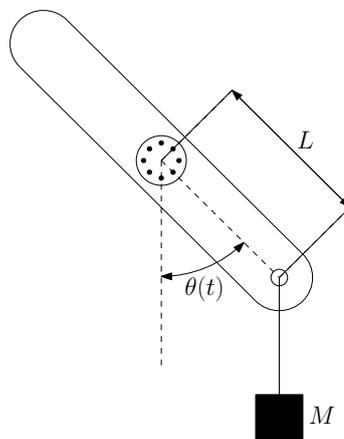


Рис. 4.9: Схема маятника.

Динамика системы описывается уравнением

$$J\ddot{\theta} + k_2\dot{\theta} + MgL \sin(\theta) = \tau.$$

Введя вектор состояния $x = (\theta, w)^T$, перейдём к системе

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_2}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{MgL}{J} \end{bmatrix} \sin(x_1) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{J} \end{bmatrix} I. \quad (4.16)$$

Пусть целевое множество \mathcal{X}_1 представляет собой точку $(\pi/2, 0)^T$, в начальный момент времени $t_0 = 0$ система находится в положении $x^0 = (1.2, 0.5)^T$. Зафиксируем конечное время $t_1 = 1$ и выберем следующие значения параметров:

$$J = 2, \quad k_2 = 1, \quad M = 0.1, \quad L = 1, \quad k_1 = 2, \quad I \in [-1, 1].$$

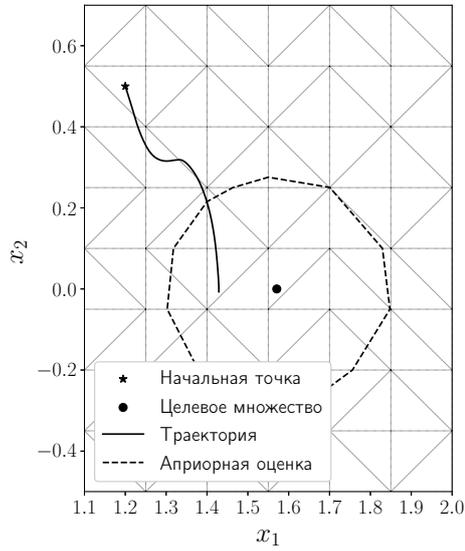
К системе (4.16) применимы все упомянутые в работе методы, в том числе алгоритм на основе разбиения множества Ω на полосы параллельными гиперплоскостями. Результаты работы алгоритмов представлены на рис. 4.10. В данном случае наименьшую апостериорную погрешность попадания в целевое множество дал метод, связанный с построением разрывной аппроксимации функции цены и описанный в главе 3: отклонение составило 0.009.

Рис. 4.11–4.12 позволяют на примере системы (4.16) сравнить время работы представленных методов. При каждом фиксированном значении N числа симплексов, если метод подразумевает деление на симплексы, разбиение множества Ω было фиксированным.

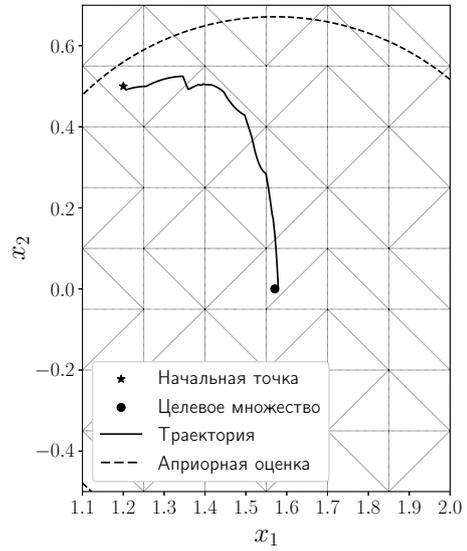
Можно сделать следующие выводы:

1. В случае непрерывных кусочно-квадратичных функций (2.13) и кусочно-кубических функций (4.3) зависимость времени работы программы от числа N симплексов разбиения напоминает линейную. Это связано с тем, что количество дифференциальных уравнений, соответственно (2.28) или (4.5), решение которых составляет основу представленного подхода, линейно зависит от количества симплексов.

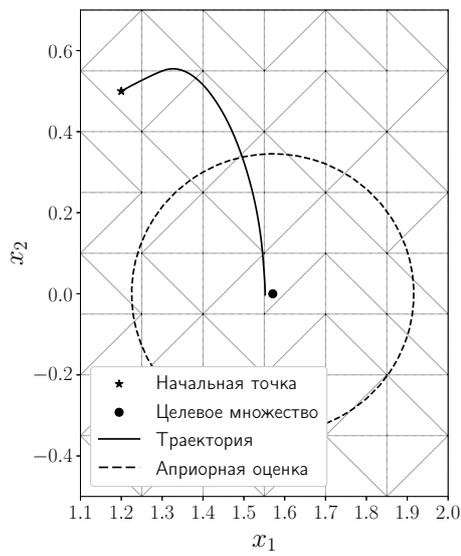
Вычислительная сложность, однако, повышается за счёт использования вспомогательных задач оптимизации типа (2.23) в вершинах разбиения. Очевидно, что если каждую вершину учитывать несколько раз по количеству содержащих её симплексов, то количество таких вспомогательных задач линейно растёт при увеличении N . В действительности достаточно рассматривать только уникальные вершины (см. раздел 2.3.2), однако в указанных экспериментах их количество также линейно (асимптотически) росло с увеличением количества симплексов. В общем же случае количество уникальных вершин ограничено сверху величиной $O(N^{\lfloor n_x/2 \rfloor})$ [110], что может привести к зависимостям другого типа при решении задач большей размерности.



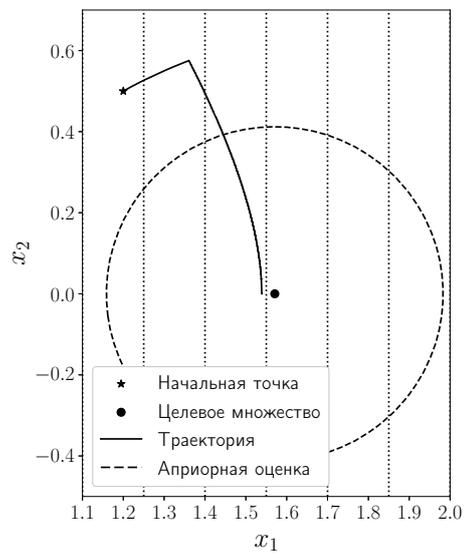
(а) Непрерывная кусочно-квадратичная
оценка функции цены (2.13)



(б) Разрывная кусочно-квадратичная
оценка функции цены (3.1)



(в) Кусочно-кубическая
оценка функции цены (3.1)



(г) Кусочно-кубическая
оценка функции цены (1.22)

Рис. 4.10: Траектории системы (4.16) и соответствующие априорные оценки отклонения от целевой точки при использовании различных алгоритмов.

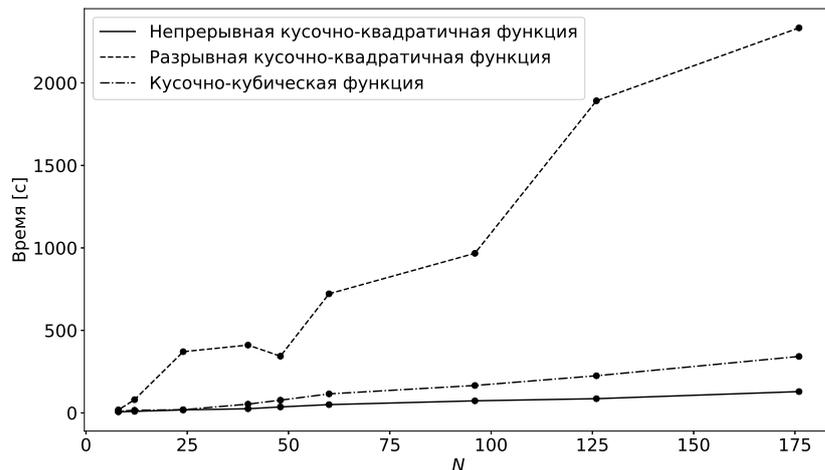


Рис. 4.11: Время вычисления аппроксимаций (2.13), (3.1), (4.3) функции цены в зависимости от числа N симплексов $\Omega^{(i)}$.

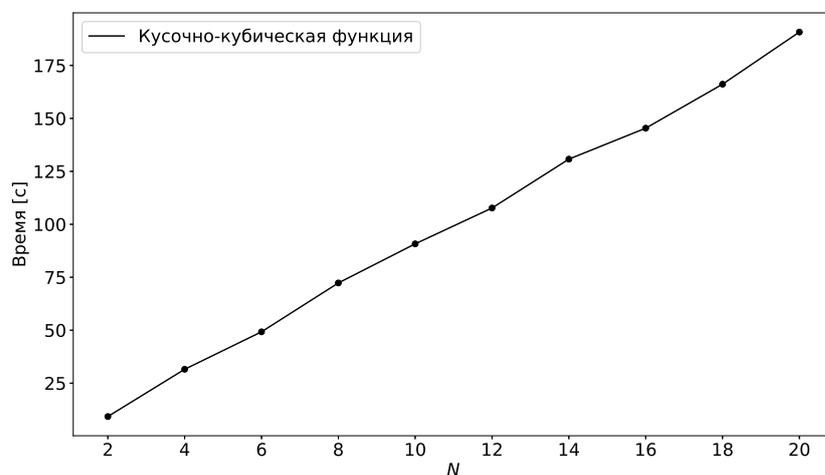


Рис. 4.12: Время вычисления кусочно-кубической функции (1.22) в зависимости от числа N гиперполос $\Omega^{(i)}$.

2. Построение разрывной кусочно-квадратичной функции требует гораздо больше времени, что объясняется следующими причинами:
 - (а) Описанный в разделе 3.2 алгоритм является итеративным. В худшем случае в каждой вершине в каждый момент времени требуется выполнить количество итераций, равное числу симплексов, содержащих данную вершину.
 - (б) Задача (3.11) содержит большое количество ограничений и потому является вычислительно сложной. Более того, сама формулировка этой задачи требует дополнительной подготовки, в том числе построение топологической сортировки графа.
 - (в) Метод требует вычисления векторов нормалей n_{ij} к гиперплоскостям, разделяющим соседние симплексы. Количество таких векторов существенно возрастает при

уменьшении диаметра разбиения.

Таким образом, несмотря на то, что данный метод способен предоставить высокую точность в конкретных задачах, с точки зрения временных затрат применение альтернативных алгоритмов с меньшим диаметром разбиения может оказаться более выгодным.

3. Время построения разрывной кусочно-квадратичной функции меняется немонотонно при увеличении числа симплексов N . Это объясняется тем, что затраты на вычисления зависят от количества “склеек”, которое может зависеть от N нетривиальным образом.
4. Метод на основе разбиения множества Ω с помощью параллельных гиперплоскостей, описанный в главе 1, имеет линейную сложность, так как задача (1.50) решается методом прогонки [31, с. 411–417].

4.3.4 Линейная система

Продемонстрируем применимость кусочно-заданных оценок функций цены на примере задачи, для которой можно легко получить аналитическое решение. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u \quad (4.17)$$

на отрезке $t \in [0, 2]$, где значения управления в каждый момент времени удовлетворяют ограничению $u \in [-1, 1]$. В качестве целевого множества \mathcal{X}_1 выберем точку $x^1 = (0, 0)^T$.

Система (4.17) хорошо изучена в литературе [22; 28; 48; 91] и является линейной системой вида $\dot{x} = Ax + Bu$ с постоянными матрицами коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

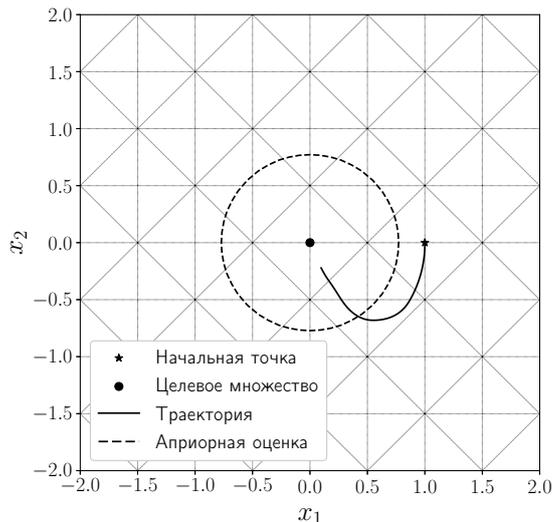
а значит, не нуждается в описанных ранее процессах кусочной линеаризации. Тем не менее, искомая функция цены является непрерывной, но не гладкой, и потому поиск функции $V(t, \tilde{x})$ в каком-либо классе кусочно-заданных функций представляется оправданным.

На основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [22, с. 336–344] может быть получено, что все программные кусочно-непрерывные управления, выводящие точки построенных в обратном времени траекторий на границу множества разрешимости, принимают лишь граничные значения -1 , $+1$ и допускают не более одного переключения между ними. Как следствие, на границе множества разрешимости в момент времени $t_0 = 0$ находится точка $x^0 = (1, 0)^T$, соответствующая кусочно-постоянному управлению

$$u^*(t) = \text{sign}(t - 1), \quad t \in [0, 2]. \quad (4.18)$$

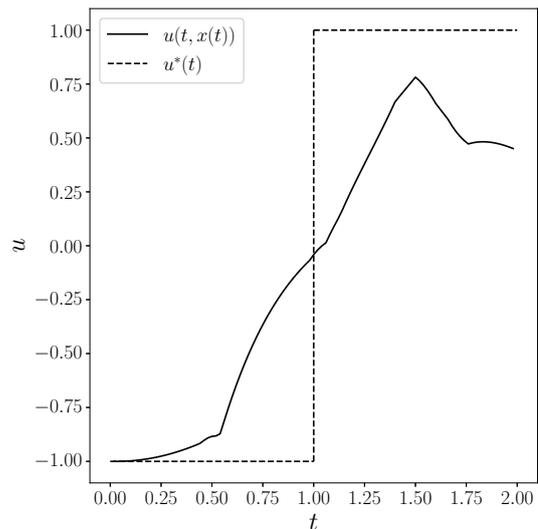
Действительно, формула Коши [9, с. 128–130] при данном управлении даёт

$$\begin{aligned} x(t_1) &= e^{A(t_1-t_0)}x^0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu^*(\tau)d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 2-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-1) d\tau + \int_1^2 \begin{bmatrix} 1 & 2-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (+1) d\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x^1. \end{aligned}$$



(а) Траектория на основе

кусочно-квадратичной функции (2.13)



(б) Соответствующее позиционное

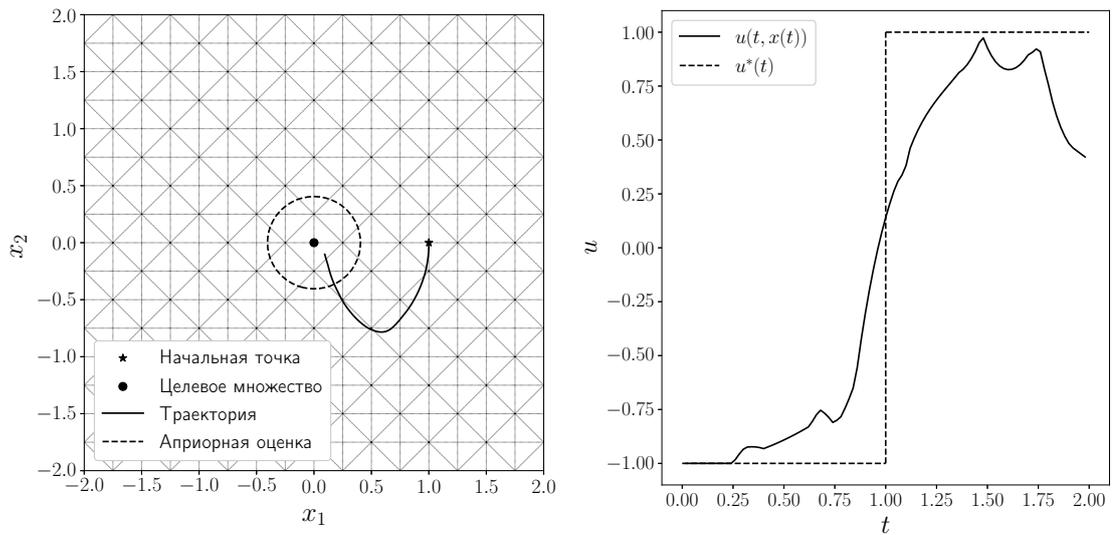
управление (2.14) в зависимости от времени,

а также оптимальное управление (4.18)

Рис. 4.13: Приближённое решение при числе симплексов $N = 128$.

На рис. 4.13 на примере метода из главы 2 показано, что разработанный подход позволяет получить приближённое решение поставленной задачи. Итоговая погрешность определяется невозможностью получения разрывного управления при использовании данного метода, а также несовершенством выбора управлений в форме (2.14). Однако эта погрешность может быть понижена за счёт изменения диаметра разбиения на симплексы, что демонстрируется на рис. 4.14, полученном при увеличении числа симплексов в четыре раза.

Чтобы можно было получить более полное представление о работе указанного позиционного управления, на рис. 4.15 изображены траектории, полученные при старте из различных начальных точек; стрелками обозначено направление движения вдоль траекторий. Кроме того, пунктирной линией отмечена граница множества разрешимости, вычисленная на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина.



(а) Траектория на основе кусочно-квадратичной функции (2.13) (б) Соответствующее позиционное управление (2.14) в зависимости от времени, а также оптимальное управление (4.18)

Рис. 4.14: Приближённое решение при числе симплексов $N = 512$.

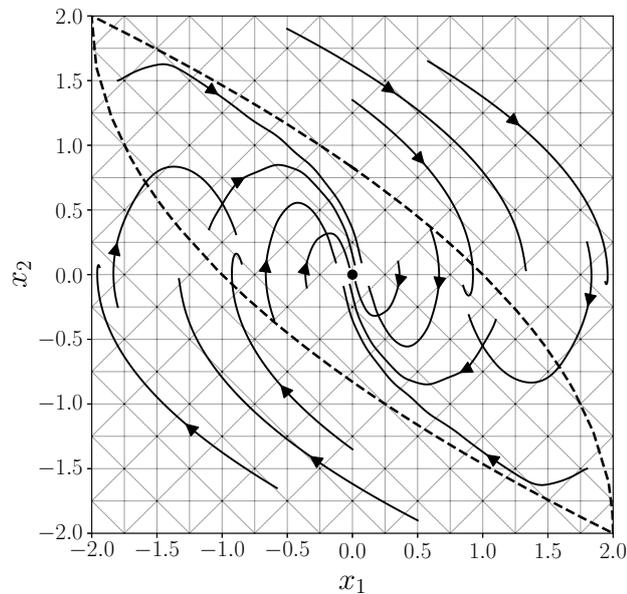


Рис. 4.15: Граница множества разрешимости при $t = t_0$ и траектории системы (4.17) при замыкании позиционным управлением (2.14).

Заключение

В заключение кратко формулируем основные результаты, полученные в диссертации.

1. Предложены алгоритмы построения внутренних аппроксимаций множеств разрешимости для нелинейных систем дифференциальных уравнений, аффинных по управляющему параметру, на основе вычисления кусочно-квадратичных и кусочно-кубических оценок функции цены, заданных на совокупности множеств (симплексов либо гиперполос) в фазовом пространстве.
2. На основе полученных оценок функции цены представлены способы определения непрерывных и разрывных позиционных управлений, позволяющих перевести систему в окрестность целевого множества с гарантированной априорной оценкой погрешности.
3. Разработан численный метод, позволяющий получить гарантированные внутренние оценки множества разрешимости, а также априорные оценки погрешности попадания траектории в целевое множество при использовании кусочно-аффинной аппроксимации произвольной фиксированной позиционной стратегии управления.

Изложенные в настоящей работе методы оценивания множеств разрешимости могут быть использованы при численном решении конкретных задач целевого управления для указанных классов нелинейных систем. Дальнейшие исследования могут развиваться по нескольким направлениям и, в частности, могут быть нацелены на уточнение построенных оценок за счёт рассмотрения аппроксимаций функции цены в других параметрических семействах. Схожие выкладки могут быть проведены для построения внешних оценок множеств разрешимости, которые, в свою очередь, позволяют уточнить и внутренние, подобно результатам работ [119] и [130]. Наконец, поиск решений набора вспомогательных оптимизационных задач допускает использование параллельных вычислений, что ставит вопрос о разработке эффективного алгоритма для многопроцессорных систем.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — кандидату физико-математических наук Точилину Павлу Александровичу — за постановку задач и постоянное внимание к работе. Также автор благодарит за полученные знания весь профессорско-преподавательский состав факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова и коллектив кафедры системного анализа в отдельности.

Список литературы

1. *Арутюнов А. В.* Лекции по выпуклому и многозначному анализу. — М.: Физматлит, 2014.
2. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука, 1983.
3. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960.
4. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002.
5. *Голубев Ю. Ф.* Нейронные сети в мехатронике // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2005. — Т. 11, № 8. — С. 81—103.
6. *Гусев М. И.* Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* — 2009. — Т. 15, № 3. — С. 82—94.
7. *Гусев М. И.* О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* — 2011. — Т. 17, № 1. — С. 60—69.
8. *Гусев М. И.* Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // *Автоматика и телемеханика.* — 2012. — № 3. — С. 39—51.
9. *Егоров А. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. — М.: Физматлит, 2005.
10. *Зимовец А. А.* Метод приграничного слоя для приближённого построения множеств достижимости управляемых систем // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия “Математика. Механика. Физика”.* — 2013. — Т. 5, № 1. — С. 18—25.
11. *Каплунова Е. П., Точилин П. А.* Задача целевого управления квадрокоптером при движении в горизонтальной плоскости с огибанием препятствий // *Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика.* — 2021. — № 4. — С. 21—36.
12. *Костоусова Е. К.* Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // *Вычислительные технологии.* — 1998. — Т. 3, № 2. — С. 11—20.
13. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970.
14. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.

15. *Кружков С. Н.* Обобщённые решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными. I // Математический сборник. — 1966. — Т. 70, № 3. — С. 394—415.
16. *Кружков С. Н.* Обобщённые решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // Математический сборник. — 1975. — Т. 98, № 3. — С. 450—493.
17. *Куржанский А. Б.* Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 173—183.
18. *Куржанский А. Б., Варайя П.* Задачи динамики и управления в гибридных системах // Тр. междунар. сем. “Теория управления и теория обобщённых решений уравнений Гамильтона–Якоби”. — 2005. — С. 21—37.
19. *Куржанский А. Б., Точилин П. А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 11. — С. 1523—1533.
20. *Куржанский А. Б., Точилин П. А.* Импульсные управления в моделях гибридных систем // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 5. — С. 716—727.
21. *Ладыженская О. А.* О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении “коэффициента вязкости” к нулю // Труды Московского математического общества. — 1957. — № 6. — С. 465—480.
22. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М: Наука, 1972.
23. *Маянцев К. С., Точилин П. А.* Об одном методе построения кусочно-квадратичных функций цены для задачи управления системой с переключениями // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 11. — С. 1497—1507.
24. *Незнахин А. А., Ушаков В. Н.* Сеточный метод приближённого построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 6. — С. 895—908.
25. *Олейник О. А.* Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. — 1957. — Т. 12, № 3. — С. 3—73.
26. *Пацко В. С., Федотов А. А.* Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 1. — С. 182—197.

27. *Половинкин Е. С.* Мнозначный анализ и дифференциальные включения. — М.: Физматлит, 2015.
28. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М: Наука, 1983.
29. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М: Наука, 1980.
30. *Рублёв И. В.* Множество достижимости трёхмерной каскадной системы управления // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 13. — С. 1672—1679.
31. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М: Наука, 1989.
32. *Саттон Р. С., Барто Э. Г.* Обучение с подкреплением. — М.: ДМК пресс, 2020.
33. *Синяков В. В.* Метод вычисления внешних и внутренних аппроксимаций множеств достижимости билинейных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 1101—1114.
34. *Скворцов А. В., Мирза Н. С.* Алгоритмы построения и анализа триангуляции. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006.
35. *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. — М.: Наука, 1991.
36. *Субботин А. И.* Минимаксные решения уравнений с частными производными первого порядка // Успехи математических наук. — 1996. — Т. 51, № 2. — С. 105—138.
37. *Субботина Н. Н.* Метод характеристик Коши и обобщённые решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана // Доклады Академии наук. — 1991. — Т. 320, № 3. — С. 556—561.
38. *Субботина Н. Н., Токманцев Т. Б.* Классические характеристики уравнения Беллмана в конструкциях сеточного оптимального синтеза // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. — 2010. — Т. 271. — С. 259—277.
39. *Тарасьев А. М.* Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнения Гамильтона–Якоби // Прикладная математика и механика. — 1994. — Т. 58, № 2. — С. 22—36.
40. *Тарасьев А. М., Успенский А. А., Ушаков В. Н.* Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщённых решений уравнения Гамильтона–Якоби // Известия РАН. Техническая кибернетика. — 1994. — № 3. — С. 173—185.

41. *Точилин П. А.* О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейных систем // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 11. — С. 1503—1515.
42. *Точилин П. А.* О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 1. — С. 223—238.
43. *Тырттышников Е. Е.* Матричный анализ и линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2007.
44. *Ушаков В. Н., Хрипунов А. П.* О приближённом построении интегральных воронок дифференциальных включений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1994. — Т. 34, № 7. — С. 965—977.
45. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
46. *Филиппова Т. Ф.* Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 1. — С. 223—232.
47. *Филиппова Т. Ф.* Оценки множеств достижимости систем с импульсным управлением, неопределенностью и нелинейностью // Известия Иркутского государственного университета. Серия “Математика”. — 2017. — № 19. — С. 205—216.
48. *Черноузько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. — М.: Наука, 1988.
49. *Althoff M.* Reachability Analysis of Nonlinear Systems using Conservative Polynomialization and Non-Convex Sets // Proceedings of the 16th international conference on Hybrid systems: computation and control. — 2013. — P. 173—182.
50. *Barber C. B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H. T.* The Quickhull algorithm for convex hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. — 1996. — Vol. 22, no. 4. — P. 469—483.
51. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Ser. Systems & Control: Foundations & Applications. — Birkhäuser, 2008.
52. *Bardi M., Evans L.* On Hopf’s formulas for solutions of Hamilton–Jacobi equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 1984. — Vol. 8, no. 11. — P. 1373—1381.

53. *Baydin A. G., Pearlmutter B. A., Radul A. A., Siskind J. M.* Automatic Differentiation in Machine Learning: a Survey // The Journal of Machine Learning Research. — 2018. — Vol. 18, no. 1. — P. 5595—5637.
54. *Bertsekas D. P.* Nonlinear programming. — Athena Scientific, 1999.
55. *Betts J. T.* Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming. — SIAM, 2010.
56. *Botchkarev O., Tripakis S.* Verification of Hybrid Systems with Linear Differential Inclusions Using Ellipsoidal Approximations // Hybrid Systems: Computation and Control / ed. by N. Lynch, B. H. Krogh. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2000. — P. 73—88.
57. *Boyd S. P., Vandenberghe L.* Convex Optimization. — Cambridge University Press, 2004.
58. *Branicky M. S., Borkar V. S., Mitter S. M.* A Unified Framework for Hybrid Control: Model and Optimal Control Theory // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1998. — Vol. 43, no. 1. — P. 31—45.
59. *Brown K. Q.* Voronoi diagrams from convex hulls // Information processing letters. — 1979. — Vol. 9, no. 5. — P. 223—228.
60. *Cheng T., Lewis F. L., Abu-Khalaf M.* Fixed-Final-Time-Constrained Optimal Control of Nonlinear Systems Using Neural Network HJB Approach // IEEE Transactions on Neural Networks. — 2007. — Vol. 18, no. 6. — P. 1725—1737.
61. *Chernousko F. L., Ovseevich A. I., Trushchenkov V. L.* Ellipsoidal State Estimation of Dynamic Systems // IFAC Proceedings Volumes. — 1986. — Vol. 19, no. 5. — P. 139—143.
62. *Chow Y. T., Darbon J., Osher S., Yin W.* Algorithm for overcoming the curse of dimensionality for state-dependent Hamilton-Jacobi equations // Journal of Computational Physics. — 2019. — Vol. 387, no. 15. — P. 376—409.
63. *Crandall M. G., Evans L. C., Lions P.-L.* Some properties of solutions of Hamilton-Jacobi equations // Transactions of American Mathematical Society. — 1984. — Vol. 282, no. 2. — P. 487—502.
64. *Crandall M. G., Ishii H., Lions P.-L.* User's guide to viscosity solutions of second order differential equations // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1992. — Vol. 27. — P. 1—67.

65. *Crandall M. G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Transactions of American Mathematical Society. — 1983. — Vol. 277. — P. 1—41.
66. *Crandall M. G., Lions P.-L.* Two Approximations of Solutions of Hamilton–Jacobi Equations // Mathematics of Computation. — 1984. — Vol. 43, no. 67. — P. 1—19.
67. *Cristiani E.* A Fast Marching Method for Hamilton-Jacobi Equations Modeling Monotone Front Propagations // Journal of Scientific Computing. — 2009. — Vol. 39. — P. 189—205.
68. *Edelsbrunner H.* Algorithms in Combinatorial Geometry. — Springer-Verlag, 1987.
69. *Fleming W. H.* The Cauchy problem for a nonlinear first order partial differential equation // Journal of Differential Equations. — 1967. — Vol. 5. — P. 515—530.
70. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov Processes and viscosity solutions. — Springer, 2006.
71. *Garrido S., Moreno L. E., Blanco D., Jurewicz P. P.* Optimal control using the Fast Marching Method // 35th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics. — 2009. — P. 1669—1674.
72. *Girard A., Martin S.* Synthesis for Constrained Nonlinear Systems Using Hybridization and Robust Controllers on Simplices // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2012. — Vol. 57, no. 4. — P. 1046—1051.
73. *Girard A., Le Guernic C., Maler O.* Efficient Computation of Reachable Sets of Linear Time-Invariant Systems with Inputs // Hybrid Systems: Computation and Control / ed. by J. P. Hespanha, A. Tiwari. — Springer Berlin Heidelberg, 2006. — P. 257—271.
74. *Goodfellow I., Bengio Y., Courville A.* Deep Learning. — MIT Press, 2016.
75. *Goubault E., Putot S.* Forward Inner-Approximated Reachability of Non-Linear Continuous Systems // Proceedings of the 20th International Conference on Hybrid Systems: Computation and Control. — 2012. — P. 1—10.
76. *Goubault E., Putot S.* Inner and Outer Reachability for the Verification of Control Systems // Proceedings of the 22nd ACM International Conference on Hybrid Systems: Computation and Control. — 2019. — P. 11—22.
77. *Greenstreet M. R., Mitchell I.* Reachability Analysis Using Polygonal Projections // Hybrid Systems: Computation and Control / ed. by F. W. Vaandrager, J. H. van Schuppen. — Springer Berlin Heidelberg, 1999. — P. 103—116.

78. *Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.* Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization. — Springer, 1988.
79. *Haarnoja T., Zhou A., Abbeel P., Levine S.* Soft actor-critic: Off-policy maximum entropy deep reinforcement learning with a stochastic actor // International conference on machine learning. — PMLR. 2018. — P. 1861—1870.
80. *Habets L. C. G. J. M., Collins P. J., van Schuppen J. H.* Reachability and Control Synthesis for Piecewise-Affine Hybrid Systems on Simplices // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2006. — Vol. 51, no. 6. — P. 938—948.
81. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1950. — Vol. 3, no. 3. — P. 201—230.
82. *El-Kebir H., Ornik M.* Online Inner Approximation of Reachable Sets of Nonlinear Systems with Diminished Control Authority // 2021 Proceedings of the Conference on Control and its Applications (CT). — P. 9—16.
83. *Kiran B. R.* [et al.] Deep Reinforcement Learning for Autonomous Driving: A Survey // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. — 2022. — Vol. 23, no. 6. — P. 4909—4926.
84. *Kochdumper N., Althoff M.* Sparse polynomial zonotopes: A novel set representation for reachability analysis // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2019. — Vol. 66. — P. 4043—4058.
85. *Kochdumper N., Althoff M.* Computing Non-Convex Inner-Approximations of Reachable Sets for Nonlinear Continuous Systems // 59th IEEE Conference on Decision and Control. — 2020. — P. 2130—2137.
86. *Kostousova E. K.* On Tight Polyhedral Estimates for Reachable Sets of Linear Differential Systems // AIP Conf. Proc. — 2012. — P. 579—586.
87. *Kühn W.* Rigorously computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect // Computing. — 1998. — No. 61. — P. 47—67.
88. *Kurzhanski A. B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. — Birkhäuser, 1997.
89. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* On Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Part I: External approximations // Optimization Methods and Software. — 2002. — Vol. 17, no. 2. — P. 177—206.

90. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* On Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimization Methods and Software. — 2002. — Vol. 17, no. 2. — P. 207—237.
91. *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Dynamics and control of trajectory tubes. — Birkhäuser, 2014.
92. *Lee D., Tomlin C. J.* Efficient Computation of State-Constrained Reachability Problems Using Hopf–Lax Formulae // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2023. — P. 1—15.
93. *Liao X.* [et al.] An interval Taylor-based method for transient stability assessment of power systems with uncertainties // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. — 2018. — Vol. 98. — P. 108—117.
94. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. — Birkhäuser, 2003.
95. *Lillicrap T. P.* [et al.] Continuous control with deep reinforcement learning. — 2015. — URL: <https://arxiv.org/abs/1509.02971>.
96. *Liniger A., Lygeros J.* Real-time control for autonomous racing based on viability theory // IEEE Transactions on Control Systems Technology. — 2019. — Vol. 27. — P. 464—478.
97. *Mayantsev K. S., Tochilin P. A.* The Feedback Control Problem for Switched System with Uncertainties // IFAC-PapersOnLine. — 2017. — Vol. 50, no. 1. — P. 2187—2192.
98. *Nesterov Y., Nemirovskii A.* Interior-point polynomial algorithms in convex programming. — SIAM, 1994.
99. *O’Rourke J.* Computational Geometry in C. — Cambridge University Press, 1998.
100. *Onken D.* [et al.] A Neural Network Approach for High-Dimensional Optimal Control Applied to Multiagent Path Finding // IEEE Transactions on Control Systems Technology. — 2023. — Vol. 31, no. 1. — P. 235—251.
101. *Petrazzini I. G., Antonelo E. A.* Proximal Policy Optimization with Continuous Bounded Action Space via the Beta Distribution // 2021 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence. — 2021. — P. 1—8.
102. *Raffin A.* [et al.] Stable-Baselines3: Reliable Reinforcement Learning Implementations // Journal of Machine Learning Research. — 2021. — Vol. 22, no. 268. — P. 1—8.
103. *Rajan V. T.* Optimality of the Delaunay triangulation in \mathbb{R}^d // Discrete & Computational Geometry. — 1994. — Vol. 12, no. 2. — P. 189—202.

104. *Reifbig G.* Computing abstractions of nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2011. — Vol. 56, no. 11. — P. 2583—2598.
105. *Sánchez-Sánchez C., Izzo D., Hennes D.* Learning the optimal state-feedback using deep networks // 2016 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence. — 2016. — P. 1—8.
106. *Schaft A., Schumacher H.* An introduction to hybrid dynamical systems. Vol. 251. — Springer, 2000.
107. *Schuet S.* [et al.] Computing abstractions of nonlinear systems // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2016. — Vol. 40, no. 4. — P. 1—16.
108. *Schulman J.* [et al.] Proximal policy optimization algorithms. — 2017. — URL: <https://arxiv.org/abs/1707.06347>.
109. *Schweppe F.* Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1968. — Vol. 13, no. 1. — P. 22—28.
110. *Seidel R.* The upper bound theorem for polytopes: an easy proof of its asymptotic version // Computational Geometry. — 1995. — Vol. 5, no. 2. — P. 115—116.
111. *Sethian A., Vladimirovsky A.* Ordered upwind methods for static Hamilton–Jacobi equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2001. — Vol. 41, no. 1. — P. 325—363.
112. *Shafa T., Ornik M.* Reachability of Nonlinear Systems With Unknown Dynamics // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2023. — Vol. 68, no. 4. — P. 2407—2414.
113. *Sharir M.* A strong-connectivity algorithm and its applications in data flow analysis // Computers & Mathematics with Applications. — 1981. — Vol. 7, no. 1. — P. 67—72.
114. *Shishido N., Tomlin C. J.* Ellipsoidal Approximations of Reachable Sets for Linear Games // Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. — 2000. — P. 999—1004.
115. *Sinyakov V. V., Roublev I. V.* Approximation of reachability sets for nonlinear unicycle control system using the comparison principle // IFAC Proceedings Volumes. — 2013. — Vol. 46, no. 23. — P. 688—692.
116. *Souganidis P. E.* Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Journal of Differential Equations. — 1985. — Vol. 59, no. 1. — P. 1—43.
117. *Stellato B.* [et al.] OSQP: an operator splitting solver for quadratic programs // Mathematical Programming Computation. — 2020. — Vol. 12, no. 4. — P. 637—672.

118. *Tarjan R.* Depth-first search and linear graph algorithms // SIAM Journal on Computing. — 1971. — Vol. 1, no. 2. — P. 146—160.
119. *Tochilin P. A.* Piecewise affine feedback control for approximate solution of the target control problem // IFAC-PapersOnLine. — 2020. — Vol. 53, no. 2. — P. 6127—6132.
120. *Todd M. J., Yildirim E. A.* On Khachiyan’s algorithm for the computation of minimum-volume enclosing ellipsoids // Discrete Applied Mathematics. — 2007. — Vol. 155, no. 13. — P. 1731—1744.
121. *Tomlin C., Lygeros J., Shankar Sastry S.* A game theoretic approach to controller design for hybrid systems // Proceedings of the IEEE. — 2000. — Vol. 88, no. 7. — P. 949—970.
122. *Tugurlan M. C.* Fast Marching Methods — parallel implementation and analysis : PhD thesis / Tugurlan M. C. — USA : Louisiana State University, 2008. — URL: https://repository.lsu.edu/gradschool_dissertations/236/.
123. *Xue B., Fränzle M., Zhan N.* Inner-Approximating Reachable Sets for Polynomial Systems with Time-Varying Uncertainties // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2019. — Vol. 65, no. 4. — P. 1468—1483.
124. *Xue B., She Z., Easwaran A.* Under-Approximating Backward Reachable Sets by Semialgebraic Sets // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2017. — Vol. 62, no. 10. — P. 5185—5197.
125. *Ye F., Zhang S., Wang P., Chan C.-Y.* A survey of deep reinforcement learning algorithms for motion planning and control of autonomous vehicles // 2021 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). — 2021. — P. 1073—1080.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертационной работы изложены в работах, которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

126. *Чистяков И. А.* О гарантированной оценке отклонения от целевого множества в задаче управления при обучении с подкреплением // Автоматика и телемеханика. — 2025. — № 1. — С. 80—98. — EDN: JQKKTQ. — Входит в RSCI, импакт-фактор 0,885 (РИНЦ); 1.2 п.л. — Перевод:
Chistiakov I. A. On Guaranteed Estimate of Deviations from the Target Set in a Control Problem under Reinforcement Learning // Automation and Remote Control. — 2025. — Vol. 86, no. 1. — P. 61—73. — DOI: 10.31857/S0005117925010055. — 0.8 п.л.
127. *Чистяков И. А., Точилин П. А.* Приближённое решение задачи целевого управления в случае нелинейности по одной переменной // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 11. — С. 1560—1571. — EDN: WCRMWX. — Входит в RSCI, импакт-фактор 0,73 (РИНЦ); 80%; 0.8 п.л. — Перевод:
Chistyakov I. A., Tochilin P. A. Approximate Solution of the Target Control Problem with a Nonlinearity Depending on One State Variable // Differential Equations. — 2019. — Vol. 55, no. 11. — P. 1518—1530. — EDN: ZJBXMN. — RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,8 (JIF); 80%; 0.8 п.л.
128. *Чистяков И. А., Точилин П. А.* Применение кусочно-квадратичных функций цены для приближённого решения нелинейной задачи целевого управления // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1545—1554. — EDN: MAEWWF. — Входит в RSCI, импакт-фактор 0,73 (РИНЦ); 75%; 0.6 п.л. — Перевод:
Chistyakov I. A., Tochilin P. A. Application of Piecewise Quadratic Value Functions to the Approximate Solution of a Nonlinear Target Control Problem // Differential Equations. — 2020. — Vol. 56, no. 11. — P. 1513—1523. — EDN: YROAKL. — RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,8 (JIF); 75%; 0.7 п.л.
129. *Чистяков И. А., Точилин П. А.* Построение разрывных кусочно-квадратичных функций цены в задаче целевого управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2022. — Т. 28, № 3. — С. 259—273. — EDN: RBYIYL. — Входит в RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,3 (JIF); 80%; 0.9 п.л. — Перевод:
Chistyakov I. A., Tochilin P. A. Construction of Discontinuous Piecewise Quadratic Value

- Functions in a Target Control Problem // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2022. — Vol. 319, no. 1. — P. 98—111. — EDN: FHDAVK. — RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,4 (JIF); 80%; 0.8 п.л.
130. *Точилин П. А., Чистяков И. А.* О построении разрывного кусочно-аффинного синтеза в задаче целевого управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 3. — С. 194—210. — EDN: VXMONV. — Входит в RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,3 (JIF); 25%; 1.1 п.л.
131. *Точилин П. А., Чистяков И. А.* О кусочно-кубических оценках функции цены в задаче целевого управления нелинейной системой // Дифференциальные уравнения. — 2024. — Т. 60, № 5. — С. 672—685. — EDN: LBIBKJ. — Входит в RSCI, импакт-фактор 0,73 (РИНЦ); 25%; 0.9 п.л. — Перевод:
Tochilin P. A., Chistyakov I. A. On Piecewise Cubic Estimates of the Value Function in a Target Control Problem for a Nonlinear System // Differential Equations. — 2024. — Vol. 60, no. 5. — P. 642—654. — EDN: MMYOXZ. — RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,8 (JIF); 25%; 0.8 п.л.