

Отзыв научного руководителя на диссертацию
Колегова Никиты Антоновича
«Системы образующих матричных колец инцидентности»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика

Колегов Никита Антонович поступил в очную аспирантуру, окончив механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова в 2022 г. Перед диссертантом была поставлена задача исследования систем образующих матричных колец инцидентности и их числовых характеристик.

Исследование колец инцидентности как колец функций на парах элементов некоторого локально-конечного частично упорядоченного множества берет начало с работы Джан-Карло Роты 1987 г. Эта область активно развивается и остаётся в центре внимания исследователей. Несмотря на имеющийся прогресс, в этом направлении исследований осталось много интересных нерешённых проблем и задач.

Кольца инцидентности, построенные на конечных частично упорядоченных множествах, также являются матричными кольцами специального вида. Такие кольца состоят из матриц с определённым узором из нулей, т.е. более формально, кольцо инцидентности является свободным модулем над кольцом коэффициентов с базисом, который состоит из некоторых матричных единиц. Таким образом, указанный класс колец стоит на пересечении теории колец, теории частично упорядоченных множеств и теории матриц. Диссертация Н.А. Колегова представляет собой глубокое исследование порождающих множеств колец инцидентности, опирающееся на все три перечисленных направления. Такой подход способствует существенному расширению теоретических основ и открывает новые перспективы для дальнейших исследований в теории колец инцидентности.

Диссертанту были поставлены задачи исследования систем образующих колец инцидентности над ассоциативными кольцами, в частности, задача поиска необходимых и достаточных условий того, что подмножество является порождающим. Также целью исследования был поиск значений таких числовых характеристик систем образующих, как минимальная мощность общей системы

образующих, минимальная мощность системы идемпотентных образующих, длина алгебры инцидентности над полем.

В ходе исследования для доказательств утверждений Н.А. Колегов использовал методы линейной и общей алгебры, теории колец, комбинаторики и теории графов. Ему удалось успешно решить поставленные перед ним задачи и разработать новые методы. В частности, введен граф полных разностей кольца коэффициентов и установлена взаимосвязь мощности системы порождающих и кликового числа указанного графа. Для построения оценок значений функции длины алгебр инцидентности, частично упорядоченное множество разбивается на антицепи и рассматривается как m -дольное. При исследовании реализуемых значений длины решена специальная задача дискретной оптимизации. Усовершенствованные автором подходы могут быть применимы далее в решении смежных проблем.

Диссертация Н.А. Колегова состоит из пяти глав. Во введении описывается постановка задач, рассматривается история вопроса и актуальность темы исследования. Первая глава диссертации является вводной и содержит основные определения, обозначения и вспомогательные результаты, которые используются в дальнейшем.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию минимальной мощности систем образующих колец инцидентности. Доказан критерий того, что множество матриц является порождающим в кольце инцидентности, в терминах проверки совпадения некоторого конечного множества идеалов, построенных на разностях диагональных элементов матриц из данного множества и на некоторых внедиагональных элементах матриц специального вида, со всем кольцом коэффициентов. Заметим, что достаточно редко бывает возможность алгоритмически проверить, является ли множество порождающим в некотором классе матричных колец или алгебр, поэтому подобные результаты имеют особую ценность. Получены явные значения минимальной мощности системы образующих для таких классических классов колец коэффициентов, как простые и полулокальные кольца, в частности, ответ получен для алгебр инцидентности над полями. Установлено, что в зависимости от мощности самого кольца коэффициентов, либо минимального по мощности матричного прямого слагаемого в разложении Веддербарна-Артина фактор кольца по радикалу Джекобсона, эта характеристика может принимать либо фиксированное малое значение 1 или 2, либо выражаться логарифмической функцией от порядка матриц.

В третьей главе диссертации исследуются системы образующих, состоящие из идемпотентных матриц, над коммутативными кольцами коэффициентов, и их минимальная мощность. Доказано, что минимальное количество идемпотентных матриц, которые порождают кольцо инцидентности как алгебру над кольцом коэффициентов, совпадает с минимальным таким натуральным числом m , что диаграмма Хассе частичного порядка, на котором построена алгебра инцидентности, может быть вложена в дополнение булева куба размерности m , и выражается как сумма целой части двоичного логарифма порядка матриц и номера класса идемпотентности диаграммы Хассе, который может быть равен 0 или 1, и определяются путём поиска специального подграфа в дополнении булева куба. Найденная формула обобщает аналогичные результаты, известные ранее для алгебры треугольных матриц. Кроме того, усовершенствованные в диссертации подходы позволили получить новую интерпретацию известного результата об идемпотентных порождающих алгебры треугольных матриц в терминах теории графов.

Четвёртая глава диссертации посвящена исследованию функции длины матричных алгебр инцидентности над полями. Эта характеристика является важной для исследования, поскольку длину можно рассматривать как некоторую меру сложности умножения в алгебре. Вычисление или оценка длины алгебры сопряжены со значительными техническими трудностями даже в случае классических алгебр. Так, например, самой известной открытой проблемой в области изучения длины алгебр является проблема Паза 1984 г. о вычислении длины полной матричной алгебры как функции порядка матриц. Для алгебр инцидентности известна нетривиальная зависимость длины от мощности поля коэффициентов. Н.А. Колеговым получены новые оценки длин алгебр инцидентности на основе структуры частично упорядоченного множества. Развита метод, позволяющий получать верхние и нижние оценки длины, путём перехода к m -дольному случаю с помощью разбиения частично упорядоченного множества на антицепи. Показано, в каких случаях найденные оценки лучше известных ранее границ. Также получена точная верхняя оценка длины алгебры инцидентности в виде функции от высоты и ширины частично упорядоченного множества и мощности поля коэффициентов.

В пятой главе диссертации содержится исследование длин алгебр инцидентности с квадратично-нильпотентным радикалом Джекобсона. Получены точные верхняя и нижняя оценки длин таких алгебр. Установлено, что если мощность поля не меньше половины размера матриц, то на указанных алгебрах

реализуются все возможные значения длин алгебр инцидентности без ограничений на радикал.

Диссертация Н.А. Колегова представляет собой законченное научное исследование и содержит заслуживающие внимания результаты, соответствующие передовым направлениям современного исследования в области алгебры. Все включенные в диссертацию результаты получены лично автором и прошли апробацию на конференциях и научных семинарах, опубликованы в ведущих научных журналах. Полученные результаты корректно доказаны и хорошо структурированы. Автор проделал большую работу, продемонстрировав высокий уровень научных способностей, широкие познания и выраженный творческий потенциал. В ходе выполнения исследования Никита Антонович проявил редкую добросовестность и вдумчивость, чётко определял и формулировал основные цели и задачи, глубоко осмысливал и анализировал полученные результаты, выбирая оптимальные методы исследования. Проведённое им комплексное и всеобъемлющее исследование каждой поставленной задачи свидетельствуют о научной зрелости автора и высокой результативности работы.

Основные результаты диссертации Н.А. Колегова изложены в семи статьях в рецензируемых научных изданиях, определенных п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Представленные публикации полно и правильно отражают результаты выполненных исследований. На протяжении обучения в аспирантуре Н.А. Колегов неоднократно принимал участие в международных математических конференциях и выступал на научных семинарах с высокопрофессиональными докладами об основных результатах работы.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Считаю, что диссертация Колегова Никиты Антоновича полностью соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», и рекомендую её к защите в диссертационном совете МГУ.011.4 по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам).

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей алгебры
механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Маркова Ольга Викторовна

10.04.2026

Контактные данные:

тел.: +7(495)939-16-11 e-mail:

Специальность, по которой научным руководителем защищена диссертация:
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Адрес места работы:

119234, г. Москва, Ленинские горы, д. 1,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра высшей алгебры
тел.: +7(495)939-12-44; e-mail: office@mech.math.msu.su

Подпись О.В. Марковой, доцента кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, удостоверяю:

Декан механико-математического факультета
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
член-корреспондент РАН А.И. Шафаревич