

**ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Пустовойтова Сергея Евгеньевича
на тему: «Топология и классификация слоений Лиувилля
интегрируемых возмущений классических и топологических билиардов»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология**

Диссертационная работа Пустовойтова Сергея Евгеньевича представляет собой исследование в области дифференциальной геометрии и топологии, а ее основные результаты принадлежат, с одной стороны, теории слоений интегрируемых систем, а с другой – теории математических билиардов. Главной целью исследования выступает поиск интегрируемых билиардных систем, динамика которых возмущена добавлением потенциала или магнитного поля, и для таких систем – описание структуры их слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических многообразиях или в четырехмерных окрестностях особых слоев. Тематика исследования восходит к работам Дж.Биркгофа, изучавшего интегрируемость классических билиардов, где материальная точка движется прямолинейно с постоянной скоростью между абсолютно упругими отражениями от границы, и работам В.И.Драговича, М.Раднович и В.В.Ведюшкиной, изучавшим топологию слоения Лиувилля таких билиардов. Однако теперь материальная точка движется под действием сторонней силы, что накладывает дополнительные ограничения на интегрируемость системы. С.Е.Пустовойтов опирается на работы В.В.Козлова, Д.В.Трещева, А.Е.Миронова и М.Бялого об интегрируемости билиардов в потенциальном или магнитном поле, и, используя язык фундаментальной теории слоений интегрируемых систем, разработанной А.Т.Фоменко, Х.Цишангом, А.В.Болсиновым, С.В.Матвеевым, Н.Т.Зунгом и другими, строит свой аппарат работы с билиардами с возмущенной динамикой. Итогом исследований диссертанта служит топологическая классификация слоений Лиувилля эллипτικο-гиперболических билиардов с потенциалом Гука, эллиптических билиардов с полиномиальным потенциалом и топологических магнитных билиардов на их неособых уровнях энергии, а также классификация их четырехмерных полулокальных особенностей. Таким образом, являясь развитием идей и методов теории математических билиардов и лиувиллевой классификации интегрируемых систем, диссертационная работа несомненно посвящена актуальным проблемам математики.

Текст диссертации состоит из введения и пяти глав основной части. Общий объем диссертации составляет 207 страниц. Список литературы содержит 43 наименования, из которых 7 работ автора по теме диссертации.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, приведены основные работы по теме и, таким образом, рассмотрена степень ее разработанности в настоящий момент, сформулированы цели и задачи диссертационного исследования, приведены основные положения, выносимые на защиту, указаны объект и предмет исследования, обсуждаются научная новизна, методы исследования, теоретическая и практическая ценность работы, приведены данные об апробации результатов, а также подробно изложено содержание работы.

В **первой главе** даны необходимые в дальнейшем определения и сформулированы результаты, относящихся к топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем. Введены понятия атома, грубой молекулы для функции Морса на двумерных многообразиях и интегрируемых систем с двумя степенями свободы, понятие инварианта Фоменко-Цишанга и лиувиллевой эквивалентности. Также приводятся основные понятия теории математического бильярда.

Во **второй главе** рассмотрены плоские бильярды, ограниченные софокусными эллипсами и гиперболами, с упругим потенциалом Гука в центре координат. Всего рассмотрены классов 12 плоских областей, лиувиллево неэквивалентных друг другу. Для каждого класса бильярдов автором получен список инвариантов Фоменко-Цишанга, определяющих слоения Лиувилля всевозможных неособых изоэнергетических многообразий с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Также приведен список интегрируемых случаев динамики твердого тела, эквивалентных изученным бильярдам.

Третья глава посвящена эллиптическому бильярду с полиномиальным потенциалом. Была найдена явная формула потенциала, сохраняющего интегрируемость эллиптического бильярда. Как оказалось, бильярд с таким потенциалом является алгебраически разрешимой системой, т.е. он допускает разделение переменных. Это позволило применить метод областей возможности движения, разработанный М.П. Харламовым, для изучения слоения Лиувилля. На его основе был разработан алгоритм, который вычисляет инвариант Фоменко-Цишанга по параметрам бильярда. Также была доказана теорема о бифуркационных дугах такого бильярда. Затем, для частного случая потенциала четвертой степени были построены 18 бифуркационных диаграмм, а также эволюционные графы, определяющие зависимость диаграмм от параметров системы.

В **четвертой главе** изучаются четырехмерные полулокальные особенности слоений Лиувилля билиардов с потенциалом. Для уже рассмотренного эллиптического билиарда с потенциалом четвертой степени были вычислены невырожденные особые точки ранга 0 и вырожденные орбиты ранга 1, и затем описано слоение Лиувилля в четырехмерных окрестностях слоев, содержащих эти особенности, в терминах почти прямого произведения. Далее, для билиардной книжки, склеенной из круговых билиардов с потенциалом Гука, были вычислены точки типа фокус-фокус и определена соответствующая им полулокальная особенность. Оказалось, такие книжки реализуют любую фокальную особенность с произвольной меткой монодромии.

В последней **пятой главе** рассматриваются интегрируемые билиарды в магнитном поле. Автор устанавливает класс лиувиллевой эквивалентности плоских билиардов, ограниченных окружностью и парой окружностей, в постоянном магнитном поле, и затем строит на их основе топологические билиарды, т.е. билиардные книжки, задающие ориентируемые замкнутые многообразия. Всего существует четыре типа топологических магнитных билиардов: цилиндрические, дисковые, сферические и торические. Для каждого из них был разработан алгоритм, который вычисляет инвариант Фоменко-Цишанга по форме топологического билиарда. Также была установлена лиувиллева эквивалентность билиардов с системами геодезических потоков на поверхностях вращения с потенциалом.

Таким образом, диссертантом получены следующие результаты:

- установлена топологическая классификация эллиптико-гиперболических билиардов с потенциалом Гука,
- выявлен класс полиномиальных потенциалов, сохраняющих интегрируемость эллиптического билиарда,
- разработан алгоритм вычисления инварианта Фоменко-Цишанга эллиптического билиарда с полиномиальным потенциалом,
- для билиарда с потенциалом четвертой степени построены бифуркационные диаграммы и установлена их зависимость от параметров системы, и определены типы полулокальных особенностей, содержащих невырожденные точки ранга 0 или вырожденные орбиты,
- с помощью билиардных книжек с потенциалом Гука реализованы фокальные особенности интегрируемых систем,

- разработан алгоритм вычисления инварианта Фоменко-Цишанга магнитных топологических бильярдов.

Основные результаты диссертационной работы получены лично автором, являются новыми, строго доказаны и подробно изложены в семи публикациях в рецензируемых журналах, удовлетворяющих положению о присуждении ученых степеней в МГУ.

Автореферат соответствует диссертации, достаточно точно отражая все основные положения и полученные результаты.

В своей работе С.Е. Пустовойтов расширил теорию интегрируемых математических бильярдов на случай бильярдов с возмущенной динамикой и адаптировал для них методы теории интегрируемых гамильтоновых систем. Полученные результаты носят глобальный теоретический характер, а также подкреплены многочисленными иллюстрациями. Они могут быть интересны специалистам в области интегрируемых систем и математических бильярдов.

Укажем некоторые вопросы и замечания:

1. В третьей главе автор определяет зависимость бифуркационных диаграмм от параметров системы с помощью т.н. эволюционного графа. Обычно для этих целей используют атлас бифуркационных диаграмм. Как он устроен в этом случае и как связан с эволюционным графом?
2. Часть бифуркационных диаграмм для бильярдных систем, рассмотренных в диссертационной работе, имеет вид подобный известным случаям разделения переменных. Кажется перспективным продолжить исследования в указанном направлении, а именно, найти переменные разделения и их связь с исходными фазовыми переменными.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Пустовойтов Сергей Евгеньевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой теоретической механики
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

СОКОЛОВ Сергей Викторович

 27.10.2025
(подпись, дата)

Контактные данные:

тел.: , e-mail:

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

01.02.01 — «Теоретическая механика»

Адрес места работы:

141701, Московская область, г. Долгопрудный,
Институтский переулок, д. 9,

Московский физико-технический институт,
кафедра теоретической механики

Тел.: +7 (495) 408-78-66; e-mail: sokolov.sv@mipt.ru

ПОДПИСЬ РУКИ С. В. СОКОЛОВА
ЗАВЕРЯЮ:
АДМИНИСТРАТОР КАНЦЕЛЯРИИ
АДМИНИСТРАТИВНОГО ОТДЕЛА
С. А. КОРАБЛЕВА