

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Никулин Михаил Александрович

**Некоторые свойства квантовых и классических
бильярдов на софокусных столах**

Специальность 1.1.3.
Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Диссертация подготовлена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный — **Попеленский Федор Юрьевич**,
руководитель кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные — **Тюрин Николай Андреевич**,
оппоненты доктор физико-математических наук, профессор,
профессор РАН,
Объединенный институт ядерных исследований,
лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, начальник сектора.

Починка Ольга Витальевна,
доктор физико-математических наук, профессор,
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Нижегородский
филиал. Факультет информатики, математики и
компьютерных наук,
заведующий кафедрой фундаментальной математики

Соколов Сергей Викторович,
доктор физико-математических наук,
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
заведующий кафедрой теоретической механики

Защита диссертации состоится 29 мая 2026 года в 17 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3840>

Автореферат разослан « » апреля 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук

Кибкало В. А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы Диссертация относится к области дифференциальной геометрии и топологии, в ней исследуются квантовые и модифицированные классические бильярды в областях, ограниченных софокусными квадриками. Работа посвящена изучению слоения изоэнергетического многообразия на поверхности постоянного уровня дополнительного интеграла для бильярдов, заполненных средами разной оптической плотности, с косинусным законом преломления на границе раздела сред, а также асимптотике собственных функций и спектра энергии при стремлении эксцентриситета к нулю для свободной квантовой частицы на бильярдном столе, ограниченном софокусными квадриками.

Бильярд в плоской области, ограниченной эллипсом, интегрируем, см. книгу Дж. Д. Биркгофа¹. В книгах В. В. Козлова и Д. В. Трещева², а также С. Л. Табачникова³ можно найти обзор как современных, так и классических исследований, посвященных математическому бильярду. Естественным образом возникает вопрос о возможностях модификации бильярда с сохранением его интегрируемости. Здесь имеется до сих пор нерешенная в полном объеме знаменитая гипотеза Биркгофа (см.⁴), наиболее сильные, по всей видимости, результаты в этом направлении получены в работах А. Е. Миронова и М. Бялого⁵, см. также А. А. Глуцок⁶, и А. Ю. Калошин⁷.

¹Биркгоф, Д. Д. Динамические системы / Д. Д. Биркгоф. Ижевск : Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999. С. 408. Пер. с англ.: G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 9, Amer. Math. Soc., New York, 1927, viii+295 pp.

²В. В., К. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами / К. В. В., Т. Д. В. Изд-во МГУ, 1991.

³Табачников, С. Геометрия и бильярды, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ин-т компьютерных исследований, М / С. Табачников. 2011.

⁴Poritsky, H. The billiard ball problem on a table with a convex boundary – an illustrative dynamical problem / H. Poritsky // *Annals of Mathematics*. 1950. Т. 51, № 2. С. 446–470. (2-я сер.)

⁵Bialy, M. Angular billiard and algebraic Birkhoff conjecture / M. Bialy, A. E. Mironov // *Advances in Mathematics*. 2017. Т. 313. С. 102–126; Bialy, M. Polynomial non-integrability of magnetic billiards on the sphere and the hyperbolic plane / M. Bialy, A. E. Mironov // *Russian Mathematical Surveys*. 2019. Т. 74, № 2. С. 187; Bialy, M. Magnetic billiards: non-integrability for strong magnetic field; Gutkin type examples / M. Bialy, A. E. Mironov, L. Shalom // *Journal of Geometry and Physics*. 2020. Т. 154. С. 103716.

⁶Глуцок, А. А. О двумерных полиномиально интегрируемых бильярдах на поверхностях постоянной кривизны / А. А. Глуцок // Доклады Российской академии наук. 2018. Т. 481, № 6. С. 594–598. English translation: A. A. Glutsyuk, “On two-dimensional polynomially integrable billiards on surfaces of constant curvature”, *Doklady Mathematics*, 98:1 (2018), 382–385.

⁷Avila, A. An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse / A. Avila, J. De Simoi, V. Kaloshin // *Annals of Mathematics*. 2016. Т. 184, № 2. С. 527–558; Kaloshin, V. On the local Birkhoff conjecture for convex billiards / V. Kaloshin, A. Sorrentino // *Annals of Mathematics*. 2018. Т. 188, № 1. С. 315–380.

Теперь обратимся к интегрируемым модификациям эллиптического бильярда. Давно известно, что бильярды внутри плоских областей, ограниченных софокусными квадрами, тоже интегрируемы. Исследование этих систем в рамках теории А. Т. Фоменко топологической классификации интегрируемых систем было начато в работах В. Драговича, М. Раднович⁸, а также В. В. Ведюшкиной (Фокичевой)⁹.

Одна из важнейших модификаций — добавление потенциала к гамильтониану свободной частицы в бильярде при условии сохранения интегрируемости системы по Лиувиллю. Фундаментальным является результат В. В. Козлова о серии таких потенциалов¹⁰. Его потенциалы сохраняют интегрируемость как бильярда в эллипсе, так и бильярдов в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик.

В последние годы в проблеме нахождения интегрируемых модификаций эллиптического бильярда достигнут значительный прогресс. Основными здесь являются работы, выполненные А. Т. Фоменко и его научной школой. Объем полученных этой группой значимых результатов настолько велик, что даже краткое их изложение в рамках данного введения не представляется возможным, познакомиться с ними можно по обзору¹¹. Тем не менее, упомянем некоторые ключевые моменты. А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкина разработали теорию бильярдных книжек

⁸Dragović, V. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards / V. Dragović, M. Radnović // Regular and Chaotic Dynamics. 2009. Т. 14, № 4/5. С. 479–494; Драгович, В. Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе / В. Драгович, М. Раднович // Ижевск: Издательство РХД. 2010.

⁹Фокичева, В. В. Описание особенностей системы 'бильярд в эллипсе' / В. В. Фокичева // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. 2012. № 5. С. 31–34. English translation: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for system 'billiard in an ellipse'", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 67:5-6 (2012), 217–220; Фокичева, В. В. Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами / В. В. Фокичева // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. 2014. № 4. С. 18–27. English translation: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 69:4 (2014), 148–158; Фокичева, В. В. Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными параболоми / В. В. Фокичева // Математический сборник. 2014. Т. 205, № 8. С. 139–160. English translation: V. V. Fokicheva, "Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas", *Sbornik: Mathematics*, 205:8 (2014), 1201–1221; Фокичева, В. В. Топологическая классификация бильярдных движений в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик / В. В. Фокичева // Математический сборник. 2015. Т. 206, № 10. С. 127–176. English translation: V. V. Fokicheva, "A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics", *Sbornik: Mathematics*, 206:10 (2015), 1463–1507; Ведюшкина, В. В. Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдных областей / В. В. Ведюшкина // Математический сборник. 2019. Т. 210, № 3. С. 17–74.

¹⁰Kozlov, V. Some integrable extensions of Jacobi's Problem of geodesics on an ellipsoid / V. Kozlov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1995. Т. 59, № 1. С. 1–7.

¹¹А. Т. Фоменко, В. В. В. Бильярды и интегрируемые системы / В. В. В. А. Т. Фоменко // УМН. 2023. Т. 78, 5 (473). С. 93–176.

(введенных В. В. Ведюшкиной) — бильярдных систем на CW -комплексах, склеенных из плоских ограниченных софокусными квадриками столов¹². В терминах бильярдных книжек был сформулирован ряд гипотез Фоменко о моделировании интегрируемых гамильтоновых систем и их особенностей. В работе¹³ был введен класс бильярдных систем с проскальзыванием вдоль границы стола. Другому расширению интегрируемых бильярдных систем — силовым (эволюционным) бильярдам посвящена недавняя статья¹⁴.

Ф. Ю. Попеленский и автор диссертации совместно обнаружили новый класс интегрируемых бильярдных систем. Пусть область Ω ограничивается набором софокусных квадратов и разбивается дугами квадратов того же семейства на области Ω_i . Припишем каждой области Ω_i коэффициент n_i , имеющий смысл показателя преломления. Рассмотрим движение материальной точки в области Ω : будем считать, что на внешней границе Ω движение подчиняется закону ‘угол падения равен углу отражения’, а на общей границе областей Ω_i и Ω_j выполняется соотношение $n_i \cos \theta_i = n_j \cos \theta_j$. Здесь θ_i, θ_j — углы, которые образуют отрезки траектории с нормалью к кривой $C \subset (\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j)$, если θ_i и θ_j корректно определены. В случае, когда косинус преломленного угла в силу этого соотношения превышает по модулю единицу, частица испытывает полное внутреннее отражение. Такая система оказывается интегрируемой. Если дуги софокусных квадратов, являющихся границами раздела сред, не имеют попарных пересечений, то интеграл движения Ξ является кусочно гладкой функцией на фазовом пространстве. Если же границы раздела сред пересекаются, то в точках пересечения возникают своего рода ветвления, и интеграл движения оказывается многозначным. В этой совместной работе описаны слоения изоэнергетического многообразия на поверхности уровня дополнительного интеграла в обоих случаях: при наличии ветвления и при его отсутствии.

Собственные функции и спектр оператора энергии свободной квантовой частицы в эллипсе хорошо известны и выражаются в терминах специальных функций Матье и их нулей. При стремлении эксцентриситета эллипса к нулю получается свободная квантовая частица в круге. Ее энергетический спектр выражается через функции Бесселя первого рода и их нули. Асимптотическое поведение собственных функций и спектра

¹²В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Ф. Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды / А. Т. Ф. В. В. Ведюшкина (Фокичева) // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83, № 6. С. 63–103.

¹³Fomenko, A. T. Liouville foliations of topological billiards with slipping / A. T. Fomenko, V. V. Vedyushkina, V. N. Zav'yalov // Russ. J. Math. Phys. 2021. Т. 28, № 1. С. 37–55.

¹⁴А. Т. Фоменко, В. В. В. Эволюционные силовые бильярды / В. В. В. А. Т. Фоменко // Изв. РАН. Сер. матем. 2022. Т. 86, № 5. С. 116–156.

частицы в эллипсе при эксцентриситете, стремящимся к нулю, хорошо известно, см.¹⁵. Автором была рассмотрена квантовая частица в плоской области, ограниченной дугами софокусных квадрик. При стремлении расстояния между фокусами к нулю предельная область оказывается ограниченной дугами концентрических окружностей и отрезками радиусов. В таких областях собственные функции и энергетический спектр выражаются в терминах функций Бесселя первого и второго рода и нулей их линейных комбинаций. Получение асимптотических формул для собственных функций и энергетического спектра — нетривиальная задача в силу наличия углов у такого бильярдного стола. В диссертации решена эта задача для двух областей, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса, которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора.

Цели и задачи диссертации Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Доказать интегрируемость классического бильярда на софокусных столах, разделенных софокусными квадриками на области, заполненные изотропными средами с различными показателями 'оптической плотности' при условии, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.
2. Исследовать слоения изоэнергетического многообразия на поверхности постоянного уровня дополнительного интеграла для двух 'оптических систем' с косинусным законом преломления, т.е. для софокусных столов, разделенных софокусными квадриками на области, заполненные изотропными средами с различными показателями 'оптической плотности' при условии, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.
3. Вычислить асимптотическое поведение уровней энергии свободной квантовой частицы в двух областях, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса, которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора при стремлении фокального расстояния к нулю, и нахождение спектра наблюдаемой, соответствующей дополнительному интегралу классической системы.

Положения, выносимые на защиту

1. Классический бильярд на софокусных столах, разделенных софокусными квадриками на области, заполненные изотропными средами с различными показателями 'оптической плотности' является интегрируемым в предположении, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.

¹⁵ *McLachlan, N. W. Theory and application of Mathieu functions / N. W. McLachlan. Clarendon Press, Oxford, 1947; Rayleigh, J. W. S. B. The theory of sound. T. 2 / J. W. S. B. Rayleigh. Macmillan, 1896.*

2. Топологическая классификация поверхностей постоянного уровня дополнительного интеграла для двух ‘оптических систем’ с косинусным законом преломления, т.е. для софокусных столов, разделенных софокусными квадрами на области, заполненные изотропными средами с различными показателями ‘оптической плотности’ при условии, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.
3. Асимптотика уровней энергии свободной квантовой частицы в двух областях, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса, которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора при стремлении фокального расстояния к нулю, и спектр наблюдаемой, соответствующей дополнительному интегралу классической системы.

Научная новизна Автором получены новые результаты:

- Доказана интегрируемость классического бильярда на софокусных столах, разделенных софокусными квадрами на области, заполненные изотропными средами с различными показателями ‘оптической плотности’ при условии, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.
- Исследованы и описаны слоения изоэнергетического многообразия на поверхности постоянного уровня дополнительного интеграла для двух ‘оптических систем’ с косинусным законом преломления, т.е. для софокусных столов, разделенных софокусными квадрами на области, заполненные изотропными средами с различными показателями ‘оптической плотности’ при условии, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления.
- Вычислена асимптотика уровней энергии свободной квантовой частицы в двух областях, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса, которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора при стремлении фокального расстояния к нулю, и вычислен спектр наблюдаемой, соответствующей дополнительному интегралу классической системы.

Методы исследования В исследовании бильярда с косинусным законом преломления на софокусных квадрах применяются методы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с одной и двумя степенями свободы, построенной А.Т. Фоменко, Х. Цишангом, А.В. Болсиновым и другими. В исследовании асимптотического поведения уровней энергии квантового бильярда используются элементы теории Штурма и теории специальных функций, методы теории краевых задач.

Теоретическая и практическая ценность работы Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании собственных функций и собственных значений

оператора Лапласа в областях, ограниченных софокусными квадратами. Разработанная автором техника позволяет получить асимптотику собственных значений в том числе для областей с углами на границе.

Результаты по теории бильярда с косинусным законом преломления могут быть использованы для расширения и исследования класса интегрируемых бильярдных систем. Ожидается нахождение новых интересных примеров интегрируемых систем с весьма нетривиальной топологией слоения Лиувилля.

Апробация диссертации Основные результаты диссертации обобщены в виде строгих математических доказательств и прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Студенческая школа-конференция «Математическая весна – 2023», Нижний Новгород, Россия, 27-30 марта 2023;
2. Ломоносовские чтения 2023, Россия, 4-14 апреля 2023;
3. XXX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2023», Москва, Россия, 10-21 апреля 2023;
4. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна, Воронеж, Россия, 26-30 января 2024;
5. Студенческая школа-конференция «Математическая весна – 2024», Нижний Новгород, Россия, 25-28 марта 2024;
6. XXXI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2024», Москва, Россия, 12-26 апреля 2024;
7. Семинар “Дифференциальная геометрия и приложения” под руководством акад. А.Т. Фоменко на механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова, 25 ноября 2024;
8. XXXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2025», Москва, Россия, 11-25 апреля 2025.
9. V Конференция математических центров России, Красноярск, 11-16 августа 2025
10. Семинар Международной лаборатории динамических систем и приложений, НИУ ВШЭ - Нижний Новгород, Россия, 26 ноября 2025.
11. Конференция "Алгебра, геометрия и алгебраическая геометрия Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, 1-5 декабря 2025.

Публикации Основные результаты диссертационной работы изложены в 4 работах, которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты из списка диссертационном совете

МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология (физико-математические науки).

Объем и структура работы Диссертация состоит из введения, 5 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 137 страниц, включая 92 рисунка и 4 таблицы. Список литературы содержит 34 наименования.

Основное содержание работы

Во введении формулируется цель работы, кратко излагаются результаты и содержание. Условно диссертация может быть разделена на две части. Главы 1–2 посвящены исследованию асимптотики собственных значений для квантовых бильярдов на софокусных столах. Главы 3–5 целиком посвящены развитию новой динамической системы, в основе которой лежит косинусный закон преломления траектории.

В первой главе приведены сведения, необходимые для исследования асимптотики уровней энергии оператора Шрёдингера на софокусных столах при близком к нулю расстоянии между фокусами. Рассматривается уравнение свободной квантовой частицы с потенциалом «бесконечной ямы». Такой подход устанавливает соответствие между решениями стационарного уравнения Шрёдингера и собственными функциями ψ оператора Лапласа с условием Дирихле на границе области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Напомним, что в полярной системе координат $(x, y) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ в предположении $\psi(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ уравнение Гельмгольца расщепляется в систему дифференциальных уравнений на функции $R(r)$ и $\Phi(\phi)$. В частности, радиальная составляющая $R(r)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Бесселя. Ввиду значительной роли функций Бесселя в дальнейших соображениях, в главе приводится основная теория функций Бесселя. Связь собственных значений оператора Лапласа и нулей функций Бесселя для задачи в полярной системе координат проиллюстрирована на примере свободной квантовой частицы в круге. Также приводится анализ задачи в круговом кольце и секторе, поскольку эти области являются предельными для аналогичных областей в эллиптической системе координат $(x, y) = (\delta \cosh \rho \cos \phi, \delta \sinh \rho \sin \phi)$ с фокусами в точках $(\pm \delta, 0)$ при $\delta \rightarrow 0$. Уравнение Гельмгольца в новой системе координат также расщепляется: если $\psi(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$, то функции $\Phi(\phi)$ и $R(\rho)$ удовлетворяют *угловому* и *радиальному уравнению Матъё*, соответственно. Ключевым свойствам решений этих уравнений, *функциям Матъё*, посвящен отдельный раздел первой главы. Приводятся элементы теории Флоке и теории Штурма.

В отличие от квантового бильярда в круге, в эллипсе появляется дополнительное условие на решения стационарного уравнения Шрёдингера. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ и J – это часть соединяющего фокусы $(\pm \delta, 0)$ отрезка. Предположим, что J содержится во внутренности области Ω . Тогда гладкое

квантовой свободной частицы в областях двух типов: симметричной A_δ и несимметричной B_δ (см. рис. 2.1 и 2.2), где симметрия подразумевается относительно горизонтальной оси Ox . Обе области при $\delta \rightarrow 0$ имеют своим

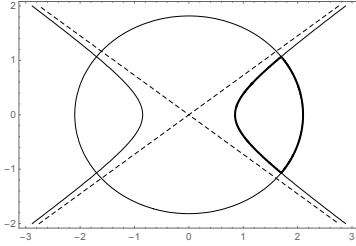


Рисунок 2.1 — Множество A_δ для $\phi_0 < \pi/2$.

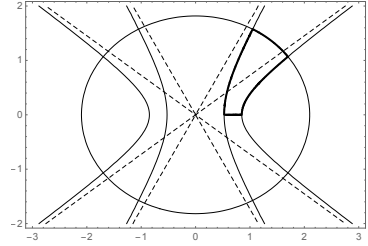


Рисунок 2.2 — Множество B_δ для $\phi_0 < \phi_1 < \pi/2$.

пределом круговой сектор, результат для которого получен в работе¹⁶.

Для симметричной области A_δ вычислена следующая асимптотика собственных значений:

Теорема 5. Для собственных функций $\psi_{k,m}(\rho, \phi)$ оператора \hat{H} справедлива выражения

$$\psi_{k,m}(\rho, \phi) = \begin{cases} Ce_\nu(\rho, q)ce_\nu(\phi, q), & \text{нечетный } k \geq 1 \\ Se_\nu(\rho, q)se_\nu(\phi, q), & \text{четный } k \geq 2 \end{cases} \quad (2.9)$$

с параметрами

$$\nu = \nu_{k,m} = \nu_0 + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{4r_0^2} \nu_1 + o(\delta^2), \quad q = q_{k,m} = \frac{\varkappa_{k,m}^2 \delta^2}{4},$$

где

$$\nu_0 = \frac{\pi k}{2\phi_0} \quad \text{и} \quad \nu_1 = \frac{\pi k \sin 2\phi_0}{\pi^2 k^2 - 4\phi_0^2}.$$

Соответствующие собственные значения $E_{k,m}$ выражаются через величины $\varkappa_{k,m}^2$ по формуле $E_{k,m} = \frac{\hbar^2 \varkappa_{k,m}^2}{2M}$, при этом для последних справедливы равенства

$$\varkappa_{k,m}^2 = \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^3}{2r_0^4} \frac{\varkappa_1}{\left. \frac{\partial J_{\nu_0}(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{\nu_0,m}}} + o(\delta^2), \quad (2.10)$$

¹⁶Quantum and classical solutions for a free particle in wedge billiards / A. G3ngora-T [и др.] // Physics Letters A. 2000. Т. 274, № 3/4. С. 117–122.

где

$$\varkappa_1 = \begin{cases} \frac{J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4(\nu_0-1)} - \frac{J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4(\nu_0+1)} - \nu_1 \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_0}(\alpha_{\nu_0,m}), & \text{для нечетных } k \geq 1; \\ \frac{(\nu_0-2)J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0-1)} - \\ - \frac{(\nu_0+2)J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0+1)} - \nu_1 \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_0}(\alpha_{\nu_0,m}), & \text{для четных } k \geq 2. \end{cases}$$

Здесь $\alpha_{\nu_0,m}$ – m -й нуль функции Бесселя первого рода $J_{\nu_0}(x)$.

Случай $k = 1$ для области A_δ при $\phi_0 = \pi/2$ рассматривается отдельно. Для этого случая формула имеет следующий вид:

$$\varkappa_{1,m}^2 = \frac{\alpha_{1,m}^2}{r_0^2} - \delta^2 \frac{\alpha_{1,m}^3}{16r_0^4} \frac{J_3(\alpha_{1,m})}{\frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{1,m}}} + o(\delta^2), \quad (2.18)$$

Для несимметричной области B_δ аналогичная асимптотика подчиняется следующей формуле:

Теорема 6. В области B_δ для собственных функций $\psi_{k,m}(\rho, \phi)$ оператора \hat{H} справедливы выражения

$$\psi_{k,m}(\rho, \phi) = Se_\nu(\rho, q) \left(ce_\nu(\phi_0, q) se_\nu(\phi, q) - ce_\nu(\phi, q) se_\nu(\phi_0, q) \right), \quad (2.19)$$

с параметрами

$$\nu = \nu_{k,m} = \nu_0 + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{4r_0^2} \nu_1 + o(\delta^2), \quad q = q_{k,m} = \frac{\varkappa_{k,m}^2 \delta^2}{4},$$

где

$$\nu_0 = \frac{\pi k}{\phi_1 - \phi_0}, \quad u \quad \nu_1 = \frac{\pi k (\sin 2\phi_1 - \sin 2\phi_0)}{\pi^2 k^2 - (\phi_1 - \phi_0)^2}.$$

Соответствующие собственные значения $E_{k,m}$ выражаются через величины $\varkappa_{k,m}^2$ по формуле $E_{k,m} = \frac{\hbar^2 \varkappa_{k,m}^2}{2M}$, при этом для последних справедливы равенства

$$\varkappa_{k,m}^2 = \frac{\alpha_{\nu_0,m}^2}{r_0^2} + \delta^2 \frac{\alpha_{\nu_0,m}^3}{2r_0^4} \frac{1}{\frac{\partial J_{\nu_0}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\alpha_{\nu_0,m}}} \left(\frac{(\nu_0-2)J_{\nu_0-2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0-1)} - \right. \\ \left. - \frac{(\nu_0+2)J_{\nu_0+2}(\alpha_{\nu_0,m})}{4\nu_0(\nu_0+1)} - \nu_1 \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_0}(\alpha_{\nu_0,m}) \right) + o(\delta^2). \quad (2.20)$$

Здесь $\alpha_{\nu_0,m}$ – m -й нуль функции Бесселя первого рода $J_{\nu_0}(x)$.

Случай $k = 1$ для области B_δ для $(\phi_0, \phi_1) = (0, \pi)$ рассматривается отдельно. Для нее имеет место следующая формула:

$$\varkappa_{1,m}^2 = \frac{\alpha_{1,m}^2}{r_0^2} - \delta^2 \frac{3\alpha_{1,m}^3}{16r_0^4} \frac{J_3(\alpha_{1,m})}{\left. \frac{\partial J_1(u)}{\partial u} \right|_{u=\alpha_{1,m}}} + o(\delta^2). \quad (2.21)$$

В завершение главы приведена постоянная наблюдаемая величина для квантовой свободной частицы на софокусных столах.

Третья глава содержит основные понятия теории интегрируемого математического бильярда, а также формулировку косинусного закона преломления.

Приведем косинусный закон преломления как изложено в работе. Пусть две области Ω_i и Ω_j граничат по кривой C . Показатели преломления для этих областей равны n_i и n_j , соответственно. Будем считать, что движение материальной точки при достижении кривой C подчиняется следующим правилам (далее мы будем ссылаться на них как на модифицированный закон преломления (*)).

1. Выполнено соотношение $n_i \cos \theta_i = n_j \cos \theta_j$, где $\theta_i, \theta_j \in [0, \frac{\pi}{2}]$ – углы, которые образуют отрезки траектории в соответствующих областях с нормалью к кривой C , если θ_i и θ_j корректно определены.
2. Если $n_i > n_j$ и материальная точка, двигаясь в области Ω_i , достигает кривой C , причем в точке пересечения траектории с кривой C выполнено неравенство $\cos \theta_i > \frac{n_j}{n_i}$, то происходит полное внутреннее отражение траектории в область Ω_i по закону «угол падения равен углу отражения» (в этом случае угол θ_j не определен, поскольку $\frac{n_i}{n_j} \cos \theta_i > 1$).
3. В предыдущих двух пунктах два соседних отрезка траектории с общей точкой на кривой C лежат по разные стороны от нормали к кривой C в этой точке.
4. Если $n_i > n_j$ и материальная точка, двигаясь в области Ω_j , достигает кривой C , причем $\theta_j = 0$, тогда $\cos \theta_i = \frac{n_j}{n_i}$ и материальная точка продолжает движение в области Ω_i вдоль любого из двух возможных направлений, образующих угол θ_i с нормалью к кривой C .
5. Аналогично при $n_i < n_j$.

Под *софокусным столом* будем понимать область, ограниченную дугами эллипсов и гипербол с общими фокусами в точках $(\pm c, 0)$, $c > 0$. В частности каждая из *софокусных квадриков* Q_λ удовлетворяет уравнению $\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$ для некоторого параметра $\lambda \in (0, a^2)$. В теории классического математического бильярда в эллипсе в качестве постоянной движения часто рассматривают параметр *каустики* – такой софокусной

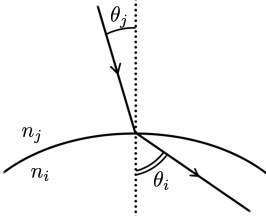


Рисунок 3.1 — Иллюстрация к пункту 1.

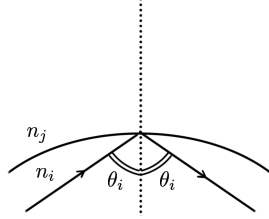


Рисунок 3.2 — Иллюстрация к пункту 2.

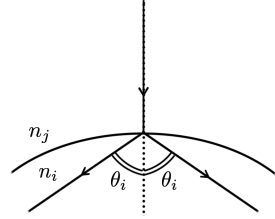


Рисунок 3.3 — Иллюстрация к пункту 4.

квадрики, которая является касательной к каждому звену бильярдной траектории. Этот параметр может быть вычислен явно как функция координат точки и компонент вектора скорости:

$$\Lambda(x, y, v_x, v_y) = \frac{a^2 v_y^2 + b^2 v_x^2 - (x v_y - y v_x)^2}{v_x^2 + v_y^2}.$$

Для бильярдов на софокусных столах, подчиняющихся этому закону, приводится выражение для постоянной движения. А именно, если преломление по закону (*) происходит на дугах непересекающихся квадрик Q_1, \dots, Q_k , тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 9. Пусть внутренность эллипса разбита попарно непересекающимися дугами софокусных квадрик на области $\Omega_1, \dots, \Omega_k$. Перенумеруем области так, чтобы общие границы имели только области с соседними номерами. Пусть λ_j — параметр софокусной квадрики, разделяющей Ω_j и Ω_{j+1} , $j = 1, \dots, k-1$. Здесь и далее показатель преломления для области Ω_j обозначается через n_j . Определим функцию $\Xi(x, y, v_x, v_y)$ по формуле:

$$\Xi(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \Lambda(x, y, v_x, v_y) n_1^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1; \\ \Lambda(x, y, v_x, v_y) n_p^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j (n_j^2 - n_{j+1}^2), & \text{если } (x, y) \in \Omega_p \text{ для } 1 < p \leq k. \end{cases}$$

Функция $\Xi(x, y, v_x, v_y)$ является константой на траекториях бильярда с косинусным законом преломления (*).

Два возможных варианта таких разбиений показаны на рис. 3.4 и 3.5. Возникает **задача А**: описать слоение изоэнергитического многообразия на поверхности уровня первого интеграла Ξ для случаев, показанных на рис. 3.4 и 3.5. В следующей главе подробно рассматривается случай двух областей, разделенных одним софокусным эллипсом (см. рис. 3.4 при $k = 2$). Динамика этой системы и перестройки поверхностей постоянного значения интеграла Ξ уже в этом случае очень нетривиальны.

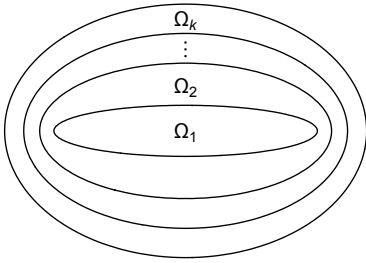


Рисунок 3.4 — Взаимное расположение областей $\Omega_1, \dots, \Omega_k$.

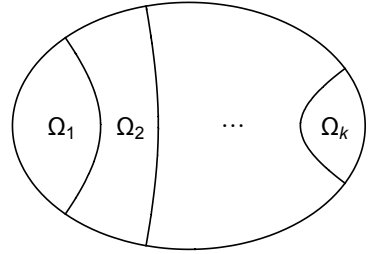


Рисунок 3.5 — Взаимное расположение областей $\Omega_1, \dots, \Omega_k$.

Случай пересекающихся квадратик оказывается гораздо сложнее. Каждой точке A пересечения разделяющих среды квадратик требуется поставить в соответствие коэффициент γ_A , имеющий смысл *коэффициента ветвления*. Величина γ_A явно зависит от параметров пересекающихся в точке A квадратик и параметров n_j примыкающих областей Ω_j .

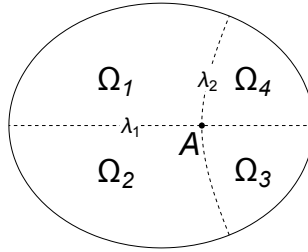


Рисунок 3.6 — Взаимное расположение областей $\Omega_1, \dots, \Omega_4$.

К примеру, для области с изображенным на рис. 3.6 разбиением введем коэффициент γ_A в точке A , имеющий смысл коэффициента ветвления, по формуле

$$\gamma_A = (\lambda_1 - \lambda_2)(n_1^2 - n_2^2 + n_3^2 - n_4^2).$$

Определим вспомогательную функцию $\tilde{\Xi}(x, y, v_x, v_y)$

$$\tilde{\Xi}(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_1^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1 \\ \Lambda(x, y, v_x, v_y)n_p^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{\sigma(j)}(n_j^2 - n_{j+1}^2), & \text{если } (x, y) \in \Omega_p \text{ для } 1 < p \leq 4, \end{cases}$$

где $\sigma(j)$ – номер квадратки, разделяющей Ω_j и Ω_{j+1} . Неформально говоря, величина $\tilde{\Xi}$ почти подходит на роль дополнительного интеграла, но имеет

разрыв на дуге, разделяющей области Ω_1 и Ω_4 . Можно проверить, что на любой бильярдной траектории, пересекающей эту дугу, функция $\tilde{\Xi}$ испытывает один и тот же скачок, равный $\pm\gamma_A$. Поэтому мы определим *первый интеграл* $\Xi(x, y, v_x, v_y)$ со значениями в $S^1 = \mathbb{R}/\gamma_A\mathbb{Z}$ по формуле

$$\Xi(x, y, v_x, v_y) = \tilde{\Xi}(x, y, v_x, v_y) \pmod{\gamma_A}.$$

Эта величина на траекториях бильярда сохраняется. Аналогичный подход справедлив и в других случаях единственной точки пересечения квадрик, на которых происходит преломление по правилу (*).

Если границы раздела областей пересекаются по двум и более точкам, то имеет место общая закономерность: *Для каждой точки пересечения $A_i, i = 1, \dots, t$, определен коэффициент γ_{A_i} . Дополнительный интеграл $\Xi(x, y, v_x, v_y)$ принимает значения в $\mathbb{R}/(\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z})$. Если γ_{A_i} соизмеримы, т. е. всевозможные дроби $\frac{\gamma_{A_i}}{\gamma_{A_j}}$ — рациональные числа (или бесконечность), то $\mathbb{R}/(\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z}) = S^1$. Если же среди γ_{A_i} есть пара с иррациональным отношением $\frac{\gamma_{A_i}}{\gamma_{A_j}}$, то подгруппа $\gamma_{A_1}\mathbb{Z} + \dots + \gamma_{A_m}\mathbb{Z}$ всюду плотна в \mathbb{R} . В этом случае дополнительный интеграл $\Xi(x, y, v_x, v_y)$ корректно определен, но использовать его для топологического анализа структуры траекторий представляется весьма затруднительным.*

Четвертая глава посвящена рассмотрению задачи А: описать сложение изоэнергетического многообразия на поверхности уровня первого интеграла Ξ для подчиняющейся закону (*) бильярдной системы в области $\Omega = \Omega_{in} \cup \Omega_{out}$ (см. рис. 4.1).

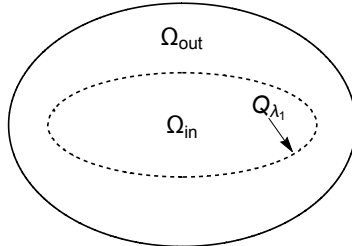


Рисунок 4.1 — Область Ω для задачи А.

Для этой системы отрезки произвольной траектории, лежащие в области Ω_{in} , касаются квадрики с параметром $\alpha_{in} \in (\lambda_1, a^2)$, а ее отрезки, лежащие в Ω_{out} — вообще говоря, другой квадрики с параметром $\alpha_{out} \in (0, a^2)$. При этом параметры связаны соотношением $(\alpha_{out} - \lambda_1)n_{out}^2 = (\alpha_{in} - \lambda_1)n_{in}^2$. Это тождество позволяет построить отображение $\alpha : \Xi \mapsto L \in \mathbb{R}^2$ — на прямую в плоскости с декартовыми координатами $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$.

А именно, для фиксированных $\lambda_1, n_{in}, n_{out}$ точка $\alpha(\Xi)$ лежит на прямой L , которая в декартовых координатах $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$ задается уравнением

$$\alpha_{out} = \alpha_{in} \left(\frac{n_{in}}{n_{out}} \right)^2 + \lambda_1 \frac{n_{out}^2 - n_{in}^2}{n_{out}^2}. \quad (4.2)$$

Отметим, что прямая L проходит через точку $(\alpha_{in}, \alpha_{out}) = (\lambda_1, \lambda_1)$. Мы введем структурную диаграмму критических значений первого интеграла Ξ .

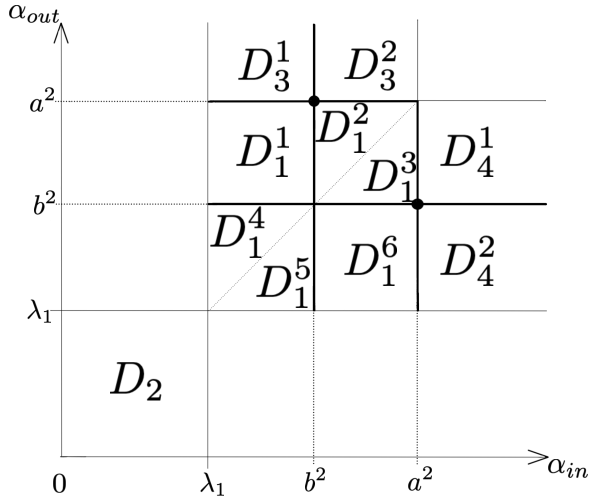


Рисунок 4.4 — Подразбиение областей D_1, \dots, D_4 .

Анализ слоения на поверхности уровня интеграла Ξ проходит по следующей схеме. Сначала фиксируются параметры $\lambda_1, n_{in}, n_{out}$. Они определяют прямую L , при этом значение интеграла Ξ однозначно определяет точку на этой прямой. Прямая L пересекает некоторые области, изображенные на рис. 4.4. Разбиение на рисунке связано с различными типами траекторий (например, возможны траектории, для которых не определен α_{in} или α_{out}). Структура слоения определяется тем, как прямая L пересекает изображенные области. При этом нерегулярные значения интеграла Ξ соответствуют точкам пересечения прямой L с координатными линиями $\alpha_{in}, \alpha_{out} = b^2, a^2$. В главе доказана следующая теорема:

Теорема 10. *Областям D_i^j в плоскости $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$ соответствуют следующие поверхности $\Xi = \text{const}$*

D_1^1	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} \in (b^2, a^2)$	сфера с 5 ручками;
D_1^2	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} \in (\alpha_{in}, a^2)$	сфера с 5 ручками;
D_1^3	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} \in (b^2, \alpha_{in})$	сфера с 5 ручками;
D_1^4	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} \in (\alpha_{in}, b^2)$	2 дизъюнктивных тора;
D_1^5	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} \in (\lambda_1, \alpha_{in})$	2 дизъюнктивных тора;
D_1^6	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} \in (\lambda_1, b^2)$	сфера с 5 ручками;
D_2	$(\alpha_{out} \in (0, \lambda_1), \alpha_{in} < \lambda_1)$ или $(\alpha_{in} \in (0, \lambda_1), \alpha_{out} < \lambda_1)$	2 дизъюнктивных тора;
D_3^1	$\alpha_{in} \in (\lambda_1, b^2), \alpha_{out} > a^2$	2 дизъюнктивных тора;
D_3^2	$\alpha_{in} \in (b^2, a^2), \alpha_{out} > a^2$	1 тор;
D_4^1	$\alpha_{in} > a^2, \alpha_{out} \in (b^2, a^2)$	2 дизъюнктивных тора;
D_4^2	$\alpha_{in} > a^2, \alpha_{out} \in (\lambda_1, b^2)$	2 дизъюнктивных тора;

В завершение приведены особые поверхности, соответствующие пересечению прямой L и выделенных на рис. 4.4 сегментов координатных линий $\alpha_{in}, \alpha_{out} = b^2, a^2$. Приведенные 13 бифуркаций включают в себя «двойные перестройки», соответствующие пересечению прямой L с точками (b^2, a^2) и (a^2, b^2) . Для нетривиальных особых поверхностей приведены иллюстрации.

Пятая глава посвящена рассмотрению задачи Б: описать слоения изоэнергитического многообразия на поверхности уровня первого интеграла Ξ для подчиняющейся закону (*) бильярдной системы в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (см. рис. 5.1). Показатели преломлений n_1 для Ω_1 и n_2 для Ω_2 предполагаем фиксированными. Для этой системы в качестве постоянной

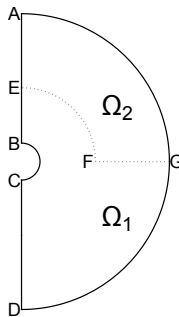


Рисунок 5.1 — Область Ω представляет собой объединение 2 областей.

движения, сохраняющейся в областях Ω_1 и Ω_2 до пересечения дуг EF или

FG рассматривается величина $\rho^2 = \frac{(xv_y - yv_x)^2}{v_x^2 + v_y^2}$. При этом на двух границах раздела сред EF и FG параметр каустики ρ^2 преобразуется по-разному:

Утверждение 10. *Имеют место следующие соотношения для параметров ρ_1, ρ_2 в точке преломления:*

$$(\rho_1^2 - r_1^2)n_1^2 = (\rho_2^2 - r_1^2)n_2^2 \quad \text{при } (x, y) \in EF, \quad (5.1)$$

$$\rho_1^2 n_1^2 = \rho_2^2 n_2^2 \quad \text{при } (x, y) \in FG. \quad (5.2)$$

Разобьем бильярдную траекторию в точках пересечения дуги EF на фрагменты $T_k, k \geq 1$. Каждый фрагмент бильярдной траектории T_k образует ломаную кривую в $\Omega \setminus EF$, где $EF \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Введем на $\Omega \setminus EF$ функцию $\Xi(x, y, v_x, v_y)$ по формуле

$$\Xi(x, y, v_x, v_y) = \begin{cases} \rho^2(x, y, v_x, v_y)n_1^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_1 \\ \rho^2(x, y, v_x, v_y)n_2^2, & \text{если } (x, y) \in \Omega_2. \end{cases} \quad (5.3)$$

Эта функция постоянна в каждой точке фрагмента бильярдной траектории T_k , но на разных фрагментах значения могут различаться.

Направления роста и убывания интеграла Ξ можно проиллюстрировать на примере рис. 5.2 и 5.3.

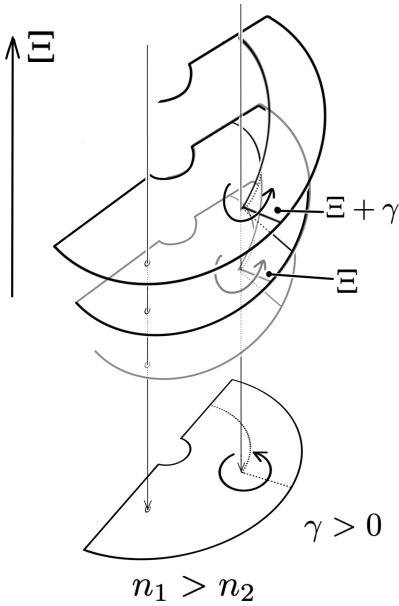
Рассмотрим значения интеграла Ξ для двух последовательных фрагментов T_k, T_{k+1} . Выясним, как они связаны, или, что то же самое, как меняется интеграл Ξ при преломлении на дуге EF .

Утверждение 11. *Значения Ξ_k и Ξ_{k+1} интеграла Ξ , соответствующие фрагментам траектории T_k и T_{k+1} , различаются на величину $r_1^2(n_1^2 - n_2^2)$.*

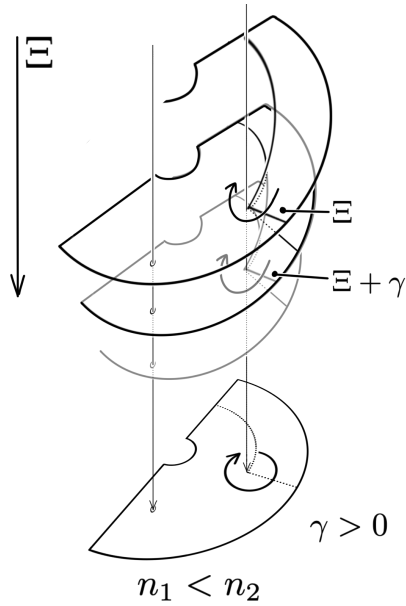
Значению интеграла Ξ поставим в соответствие точку плоскости \mathbb{R}^2 по формуле

$$\Xi \mapsto P(\Xi) = (\rho_1^2, \rho_2^2) = \left(\frac{\Xi}{n_1^2}, \frac{\Xi}{n_2^2} \right). \quad (5.4)$$

Тогда для фиксированных параметров n_1, n_2 отображением P значения величины Ξ отображаются на прямую $L \subset \mathbb{R}^2$. Параметризуем прямую $L : \xi \mapsto P(\xi) = (\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)$. На ней можно выделить точку L_1 , которая разделяет прямую на две части относительно параметра ξ на прямой L на две части: $\{\xi < L_1\}$ и $\{\xi > L_1\}$. Объединяя эти части по всевозможным прямым L , получим области в \mathbb{R}^2 , изображенные на рис. 5.4. При этом показано, что эти множества являются непересекающимися в смысле бильярдных траекторий: если траектория пересекает EF хотя бы однажды, тогда точки, соответствующие фрагментам T_k такой траектории, находятся только на части прямой L , попадающей внутрь области



$n_1 > n_2$



$n_1 < n_2$

Рисунок 5.2 — Направление роста Ξ при $n_1 > n_2$.

Рисунок 5.3 — Направление роста Ξ при $n_1 < n_2$.

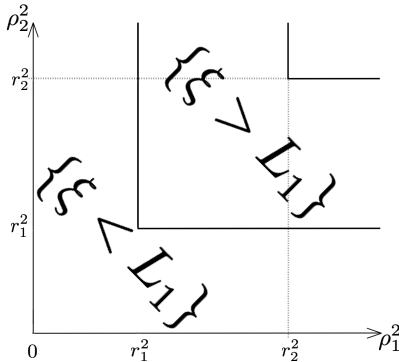


Рисунок 5.4 — Области $\{\xi < L_1\}$ и $\{\xi > L_1\}$.

$\{\xi < L_1\}$, изображенной на рис. 5.4. Эти области рассматриваются отдельно в соответствующих разделах главы.

Для области $\{\xi < L_1\}$, соответствующей «ветвящемуся интегралу», получена бифуркационная диаграмма (см. рис. 5.7), на которой фрагмент $L \cap \{\xi < L_1\}$ выглядит как горизонтальная прямая. При этом для любой фиксированной тройки параметров (r_1, n_1, n_2) точки $P(\Xi_m)$ и $P(\Xi_{m+1})$,

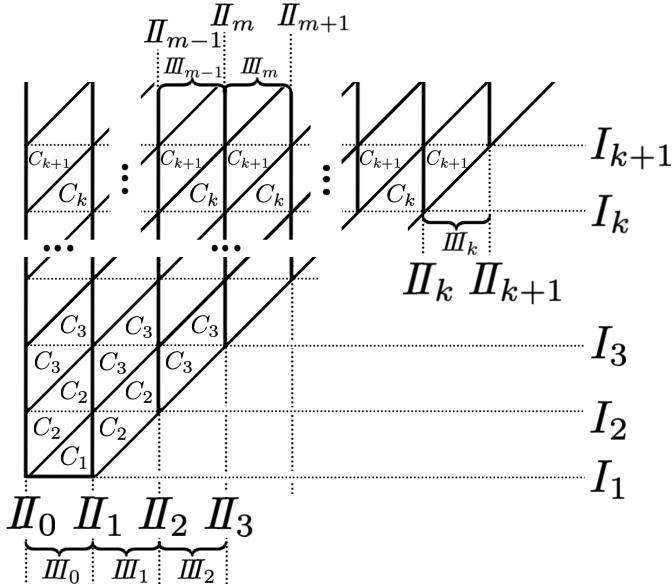


Рисунок 5.7

соответствующие двум последовательным фрагментам бильярдной траектории T_m и T_{m+1} , соединяются вектором $(1, 0)$. Структура слоения определяется тем, как прямая $L \cap \{\xi < L_1\}$ пересекает области, обозначенные $C_k, k \geq 1$ на рис. 5.7. При этом в склейке регулярных поверхностей участвуют все C_m одного и того же индекса m , лежащие на одной горизонтали. Нерегулярным поверхностям соответствуют точки пересечения прямой $L \cap \{\xi < L_1\}$ с прямыми одного из трех семейств, отмеченных римскими цифрами.

Приводится классификация заметаемых областей для фрагментов бильярдных траекторий T_m в зависимости от расположения соответствующей точки $P(\Xi_m)$ на диаграмме (см. рис. 5.9). Для неособых поверхностей доказаны следующие теоремы:

Теорема 11. Пусть $n_1^2 < n_2^2$. В области $\{\xi < L_1\}$ поверхности S_Ξ являются сферами с $2m$ ручками, если $P(\Xi) \in C_m$ и сферами с $2m - 1$ ручками, если $P(\Xi) \in C'_m$ и $m \leq \left\lfloor \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right\rfloor$.

Теорема 12. Пусть $n_1^2 > n_2^2$. В области $\{\xi < L_1\}$ поверхности S_Ξ являются сферами с $2m + 1$ ручками, если $P(\Xi) \in C_m$ и сферами с $2m$ ручками, если $P(\Xi) \in C'_m$ и $m \leq \left\lfloor \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right\rfloor$.

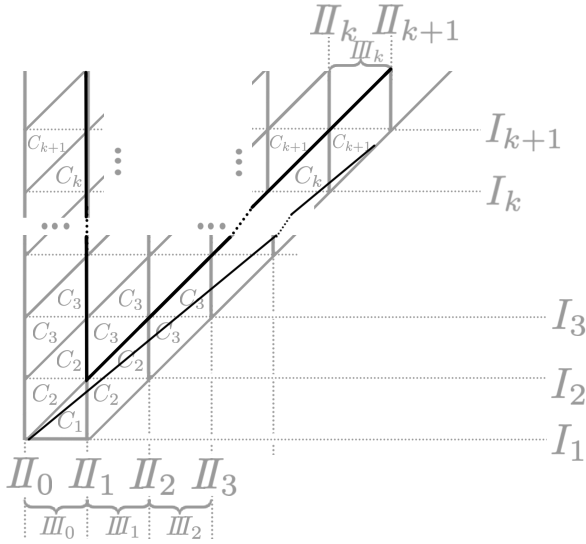


Рисунок 5.9 — Прямая, соответствующая прямой $\rho_1^2 = r_2^2$.

Случай $\{\xi > L_1\}$ существенно проще предыдущего, поскольку в этом случае дополнительный интеграл Ξ однозначен: бильярдные траектории лежат на поверхностях уровня дополнительного интеграла $\Xi = \text{const}$. Структура слоения определяется тем, как прямая $L \cap \{\xi > L_1\}$ пересекает четыре области, изображенные на рис. 5.28. Доказано следующее:

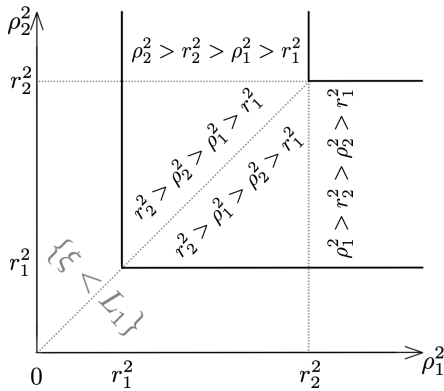


Рисунок 5.28 — Разбиение области $\{\xi > L_1\}$.

Теорема 13. *Поверхность уровня $\Xi = \text{const}$ является*

$$\begin{array}{ll}
 \text{сферой с двумя ручками для случаев} & \text{тором для случаев} \\
 r_2^2 > \rho_1^2 > \rho_2^2 > r_1^2 & \rho_2^2 > r_2^2 > \rho_1^2 > r_1^2 \\
 r_2^2 > \rho_2^2 > \rho_1^2 > r_1^2 & \rho_1^2 > r_2^2 > \rho_2^2 > r_1^2
 \end{array}$$

В завершение главы приводятся описания особых поверхностей для случаев $\{\xi < L_1\}$ и $\{\xi > L_1\}$ с иллюстрациями для ключевых перестроек.

Заключение

В диссертации были получены новые важные результаты о квантовых и модифицированных классических бильярдах на софокусных столах.

Автором исследовано асимптотическое поведение уровней энергии свободной квантовой частицы в двух областях, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса, которые при стремлении фокального расстояния к нулю принимают форму кругового сектора. Полученные аналитические выражения справедливы при стремлении фокального расстояния к нулю с точностью до второго порядка включительно, при этом коэффициент при нулевом порядке совпадает с энергетическим спектром свободной частицы в круговом секторе. Заметим, что предложенная в диссертации автором техника может быть продолжена на еще более высокие порядки. Ожидается, что для коэффициентов таким образом могут быть получены аналитические выражения в терминах специальных функций. Автором также вычислен спектр наблюдаемой, соответствующей дополнительному интегралу классической системы.

Также в работе доказана интегрируемость классического бильярда на софокусных столах, разделенных софокусными квадрами на области, заполненные изотропными средами с различными показателями 'оптической плотности' в предположении, что на границе раздела сред выполняется косинусный закон преломления. Приведена явная формула дополнительного интеграла. Отметим, что в зависимости от параметров 'оптических плотностей' изотропных сред и параметров разделяющих их квадрик, дополнительный интеграл может принимать значения не только в вещественной прямой, но и, к примеру, в окружности. В общем случае в каждой точке пересечения софокусных квадрак дополнительный интеграл имеет по одной точке ветвления.

Автором исследованы и описаны слоения изоэнергетического многообразия на поверхности постоянного уровня дополнительного интеграла для двух таких систем. А именно, в четвертой и пятой главах рассмотрены два показательных примера: в одном случае дополнительный интеграл не имеет ветвления, а во втором — имеет одну точку ветвления. В работе приведено описание поверхностей регулярного значения дополнительного интеграла, а также их бифуркации для обоих примеров. Оказалось, что

в рассматриваемых системах помимо торов возникают также поверхности более высокого рода с проколами. Получено описание особых поверхностей, соответствующих одновременным разным бифуркациям в разных областях бильярдного стола. Приведена техника построения бифуркационных диаграмм, которые одновременно учитывают все возможные значения ‘оптических параметров’ областей, в том числе для случая интеграла, имеющего одну точку ветвления.

Результаты диссертации могут быть полезны специалистам по теории интегрируемых систем, классической механике и математической физике.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Ф. Ю. Попеленскому за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе на всех этапах её подготовки. Автор благодарит заведующего кафедрой дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ А. Т. Фоменко и весь коллектив кафедры за вдохновляющую, доброжелательную атмосферу и поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук

1. *М. А. Никулин*. Спектр оператора Шрёдингера в накрытии эллиптического кольца / М. А. Никулин // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2023. — № 5. — С. 22–32. — EDN: FONQIF
Импакт фактор 0.2 (JIF), объем 0.625 п.л.
Перевод: *Nikulin M. A.* Spectrum of the Schrödinger operator in an elliptical ring cover // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2023. — Vol. 78, №5 — pp. 230–243. — EDN: JDTKZE
Импакт фактор 0.2 (JIF), объем 0.812 п.л.
2. *Nikulin, M. A.* Asymptotic behaviour of energy levels of a quantum free particle in an elliptical sector / M. A. Nikulin, T. Y. Popelensky, A. I. Shafarevich // Physica Scripta. — 2024. — Vol. 99, № 1. — P. 015207. — EDN: CALAWQ
Импакт фактор 2.6 (JIF), объем 0.813 п.л.
М.А. Никулиным доказаны теоремы 1, 2 и 3. Общая доля диссертанта составляет 80%.

3. *М. А. Никулин. Эллиптический бильярд с косинусным законом преломления на софокусных квадриках / М. А. Никулин // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2025. — № 2. — С. 16–23. — EDN: WBVJCF*
Импакт фактор 0.2 (JIF), объем 0.438 п.л.;
Перевод: *Nikulin M. A. An elliptic billiard with the cosine law of refraction at confocal quadrics // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2025. — Vol. 80, №2 — pp. 97–105. — EDN: SITVSK*
Импакт фактор 0.2 (JIF), объем 0.5 п.л.
4. *М. А. Никулин. Поверхности уровня интеграла для системы бильярд с косинусным преломлением / М. А. Никулин, Ф. Ю. Попеленский // Математический сборник. — 2025. — Т. 216, № 10. — С. 101–158. — EDN: ANZYFI*
Импакт фактор 0.8 (JIF), объем 3.562 п.л.
Перевод: *Nikulin M.A., Popelenskii F.Yu. Level surfaces of the first integral for a billiard system with cosine refraction // Sbornik: Mathematics. — 2025. — Vol. 216, №10 — pp. 1428–1482. — EDN: AKYXVW*
Импакт фактор 0.8 (JIF), объем 3.375 п.л.
М.А. Никулиным были получены результаты разделов 2 и 3. Общая доля диссертанта составляет 88%.

Никулин Михаил Александрович

Некоторые свойства квантовых и классических бильярдов на софокусных столах

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____.____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____