

Отзыв научного руководителя на диссертационную работу
Солонкова Александра Алексеевича
«Свободные универсальные алгебры
с непрерывными и отдельно непрерывными операциями»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Напомним, что n -арной операцией на множестве A называется произвольное отображение $A^n \rightarrow A$. Универсальной алгеброй называется непустое множество A вместе с любым набором заданных на нем операций произвольных арностей. Диссертация посвящена топологическим и квазитопологическим универсальным алгебрам, т.е. универсальным алгебрам, снабженным топологией, относительно которой все операции на алгебре непрерывны или, соответственно, отдельно непрерывны.

Теория топологических алгебр берет свое начало в 1950-х годах работах А.И. Мальцева, который ввел само понятие топологической алгебры и получил первые фундаментальные результаты. С тех пор теория топологических алгебр плодотворно развивалась многими авторами, однако систематических исследований до сих пор не проводилось, хотя топологические алгебры играют фундаментальную роль в самых разных областях математики — функциональном анализе (который занимается исследованием топологических векторных пространств), геометрии и топологии (где важнейшую роль играют топологические группы преобразований), теории дифференциальных уравнений и т.д. Диссертация представляет собой существенный вклад в теорию топологических универсальных алгебр хотя бы потому, что в ней содержится их систематическое исследование.

В 1954 году Мальцев охарактеризовал универсальные алгебры, в которых все конгруэнции перестановочны, в терминах специальной тернарной операции, которая сейчас известна как операция Мальцева или мальцевский терм. Это открытие произвело настоящую революцию в теории универсальных алгебр. Как выяснилось, в теории универсальных топологических алгебр операция Мальцева тоже играет основополагающую роль. Отдельная глава диссертации посвящена топологическим мальцевским алгебрам. В частности, явно описано строение и топология абсолютно свободной топологической алгебры произвольной сигнатуры, а также впервые аккуратно доказано существование и описаны свойства свободной мальцевской алгебры произвольного топологического пространства. Особо следует отметить явное описание структуры свободной мальцевской алгебры, подобное описанию структуры свободной топологической группы как множества несократимых слов; до сих пор такого описания не было, хотя нужда в нем была и оно позволяет получать важные результаты, некоторые из которых представлены в диссертации.

Следует отметить также главу, посвященную свободным булевым группам кружевных пространств. Кружевные топологические пространства были введены Седером в 1961 году и представляют собой обобщение метрических пространств, для которого остается верной знаменитая теорема Дугунджи о существовании

непрерывного оператора продолжения непрерывных отображений в локально выпуклые пространства. Класс кружевных пространств значительно шире класса метризуемых пространств. Он включает в себя многие неметризуемые ЛВП, естественно возникающие в функциональном анализе; по этой причине он находит многочисленные применения в топологии, функциональном анализе и теории дифференциальных уравнений. Известно, что свободная абелева топологическая группа кружевного пространства является кружевной, однако распространить этот результат на свободные топологические алгебры (в частности, группы) в других многообразиях топологических алгебр до сих пор не удавалось. В диссертации доказана очень трудная теорема, частично восполняющая этот пробел.

Последние две главы диссертации посвящены квазитопологическим алгебрам, т.е. универсальным алгебрам, снабженным топологией, относительно которой все операции раздельно непрерывны. В последние годы интерес к таким алгебрам резко возрос, поскольку выяснилось, что их свойства во многих отношениях естественнее свойств топологических алгебр, однако до сих пор были получены лишь некоторые результаты. В диссертации содержится систематическое исследование таких алгебр и их многообразий. В частности, доказано существование свободных квазитопологических алгебр и явно описано их строение и топология (в случае топологических алгебр такое описание возможно лишь для абсолютно свободных алгебр). Получены основополагающие результаты о свободных квазитопологических алгебрах произвольных и тихоновских топологических пространств. В частности, доказано, что квазитопологические алгебры можно факторизовать, т.е. факторалгебра квазитопологической алгебры с факторной топологией является квазитопологической алгеброй (в случае топологических алгебр это не так), и что подалгебра свободной мальцевской алгебры $M(X)$ тихоновского пространства X , порожденная его замкнутым подпространством Y , является свободной мальцевской алгеброй пространства Y (в случае топологических алгебр эта теорема тоже неверна).

Результаты диссертации представляют собой полное и завершенное решение поставленных перед диссертантом актуальных задач общей топологии и топологической алгебры. Диссертация содержит также исследования по универсальной алгебре, интересные сами по себе и имеющие широкие перспективы. Я считаю, что А.А. Солонков проделал большую, очень важную и полезную работу. Диссертация хорошо и аккуратно оформлена, все утверждения четко сформулированы и снабжены полными и правильными доказательствами. Работа демонстрирует высокую математическую культуру, широкие познания и большой творческий потенциал автора.

В целом работа А.А. Солонкова имеет большое теоретическое и практическое значение и является серьезным вкладом в общую топологию и топологическую алгебру. Его диссертация представляет собой законченное научное исследование. Все включенные в нее результаты получены автором самостоятельно и прошли всестороннюю квалифицированную апробацию, опубликованы в ведущих научных журналах.

Основные результаты диссертации А.А. Солонкова изложены в четырех статьях в рецензируемых научных изданиях, определенных п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете

имени М.В. Ломоносова. Представленные публикации полно и правильно отражают результаты выполненных исследований. На протяжении обучения в аспирантуре А.А. Солонков неоднократно принимал участие в международных математических конференциях и выступал на научных семинарах с высокопрофессиональными докладами об основных результатах диссертации.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Считаю, что диссертация А.А. Солонкова полностью соответствует критериям, установленным в «Положении о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова», и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ.011.4 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей топологии и геометрии
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Сипачева Ольга Викторовна

05.06.2025

Подпись О.В. Сипачевой, профессора кафедры общей топологии и геометрии
механико-математического факультета ФГБОУ ВО Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова, удостоверяю:

Декан механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова,
член-корреспондент РАН А.И. Шафаревич

05.06.2025