

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Макиева Элина Игоревна

**Динамика тел, взаимодействующих с проскальзыванием
и разрушением**

1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Влахова Анастасия Владимировна

Москва – 2026

Оглавление

Введение.....	4
В.1. Общая характеристика работы.....	4
В.2. Краткое содержание работы.....	10
Глава 1. Динамика системы при наличии промежуточной прослойки между контактирующими телами.....	15
1.1. Изменение потенциальной энергии системы при взаимодействии тел через элементы прослойки.....	15
1.2. Постановка задачи.....	22
1.3. Исследование влияния прослойки между взаимодействующими поверхностями тел на динамику системы.....	26
1.4. Динамика железнодорожной колесной пары при наличии промежуточной прослойки между колесами и рельсами.....	47
Глава 2. Динамика элементов промежуточной прослойки между контактирующими телами.....	58
2.1. Описание динамики системы.....	58
2.2. Постановка задачи.....	62
2.3. Случай микропроскальзывания элементов прослойки относительно плиты и скольжения относительно подстилающей поверхности.....	67
2.3.1. Построение асимптотических моделей динамики системы.....	67
2.3.2. Аналитическое исследование сближения элементов прослойки.....	78
2.3.3. Оценка погрешности асимптотических моделей.....	79

2.4. Случай микропроскальзывания элементов прослойки относительно плиты и подстилающей поверхности.....	82
2.4.1. Построение асимптотических моделей динамики системы.....	82
2.4.2. Аналитическое исследование сближения элементов прослойки.....	93
2.4.3. Оценка погрешности асимптотических моделей.....	95
2.5. Численное исследование динамики системы.....	97
Заключение.....	123
Список литературы.....	125

Введение

В.1. Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются задачи моделирования динамики систем с трением, постановка которых учитывает малую деформируемость взаимодействующих тел и возможность их хрупкого разрушения вблизи области контакта. Первая часть работы посвящена внешней задаче – построению и исследованию математических моделей систем, которые содержат тела, взаимодействующие с малыми относительными проскальзываниями через промежуточную прослойку из выколотых при разрушении элементов (эти элементы также могут быть привнесены извне). Вторая часть работы связана с внутренней задачей – изучением движения элементов прослойки между телами. Выбранное направление актуально как для теории, так и для практики. Развитие возможностей эксперимента и подходов к описанию динамики систем с трением и разрушением позволяет обсудить пределы применимости результатов, полученных при помощи формально-аксиоматических методов теоретической механики. Помимо этого проводимые исследования могут оказаться полезными при формировании технологий обработки материалов.

Цели работы состоят в развитии подходов к моделированию динамики систем с проскальзыванием и хрупким разрушением, совершенствовании методов исследования таких систем и применении этих методов для решения классических и новых задач теоретической и прикладной механики.

Для достижения указанных целей необходимо решить следующие **задачи**.

1. Провести анализ предельных переходов к бесконечной жесткости касательных составляющих контактных сил в уравнениях динамики механической системы, которая содержит тела, взаимодействующие с малыми относительными проскальзываниями и хрупким разрушением, вызывающим появление между телами промежуточной прослойки, разделить ситуации, когда предельные модели различаются.

2. Исследовать применимость полученных результатов к задаче о движении железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода при наличии промежуточной прослойки между колесами и рельсами.

3. Построить математические модели динамики элементов промежуточной прослойки между контактирующими телами при различных условиях их трения, провести их аналитическое и численное исследование и сравнить полученные результаты с результатами экспериментов.

Научная новизна и основные результаты. Все результаты диссертации являются новыми. Предложен подход, позволяющий провести математическое моделирование систем с проскальзыванием и разрушением, и получить достаточные условия, при выполнении которых вместо условий непроскальзывания (в рамках аналога «промежуточной» модели закономерной механики) в системе реализуются модифицированные первичные связи Дирака (в рамках модели, где проскальзывания взаимодействующих тел системы сохраняются). Построена модель качения железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода, которая дает возможность оценить влияние промежуточной прослойки между колесами и рельсами на ее поперечную и угловую динамику, а также на эффекты, создаваемые возмущениями. Получены аналитические формулы для описания сближения шаровидных элементов промежуточной прослойки между контактирующими телами при трении, позволяющие получить представление о механизме изменения ее структуры, в ходе которого эти элементы выстраиваются в компактные образования.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты позволяют сформировать рекомендации для использования тех или иных моделей динамики механических систем с проскальзыванием и разрушением и оценить их качественное поведение. В главе 1 определены условия, при выполнении которых от аналога «промежуточной» модели закономерной механики с условиями непроскальзывания взаимодействующих тел

следует перейти к описанию этих систем неклассической моделью с модифицированными первичными связями Дирака, для которой проскальзывания тел сохраняются. Полученные в главе 2 результаты дают представление об изменении структуры промежуточной прослойки между телами при трении, связанном с напряженно-деформированным состоянием в окрестности этих элементов.

Результаты работы могут применяться при чтении спецкурсов по математическому моделированию механических систем, при написании курсовых, дипломных и диссертационных работ, а также при проведении научных исследований в МГУ имени М.В. Ломоносова, НИИ механики МГУ, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН и других научно-исследовательских центрах, занимающихся изучением динамики систем с трением.

Методология и методы исследования. Результаты работы получены с использованием подходов теоретической механики, классических и современных методов моделирования динамики систем с условиями непроскальзывания или первичными связями Дирака в системах с вырожденными лагранжианами, теории систем с трением, методов механики разрушения, подходов фракционного анализа и теории возмущений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предельный переход к бесконечной жесткости касательных составляющих контактных сил может привести уравнения динамики механической системы, которая содержит тела, взаимодействующие с малыми относительными проскальзываниями (в касательном направлении к их поверхностям) и хрупким разрушением, к аналогу «промежуточной» модели вакономной механики с условиями непроскальзывания тел или к (модифицированной) модели с первичными связями Дирака, возникающими из-за вырождения лагранжиана системы, для которой проскальзывания сохраняются.

2. Ситуации, когда реализуется та или иная предельная модель, разделяются после сравнения порядков величин слагаемых в правых и левых частях соотношений между скоростью проскальзывания тел и обобщенными скоростями. Если при движении системы обобщенные скорости существенно превосходят скорость проскальзывания, то возможна реализация условий непроскальзывания. Если порядки малости слагаемых в правых и левых частях указанных соотношений одинаковы за счет того, что часть обобщенных скоростей соизмерима со скоростью проскальзывания, а при части других обобщенных скоростей стоят малые множители, то в системе могут быть реализованы модифицированные первичные связи Дирака, возникающие из-за вырождения лагранжиана системы при переходе к нулевым значениям малых обобщенных скоростей.

3. При движении железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода наличие промежуточной прослойки между колесами и рельсами влияет на быстрый процесс перехода контактных сил (моментов) к значениям вблизи тех, которые уравнивают внешние возмущения (при упрощении смещения колес относительно рельсов через элементы прослойки этот процесс проходит менее интенсивно). Учет микропроскальзываний колес относительно рельсов в рамках подхода Дирака позволяет описать поперечные колебания пары вблизи средней линии пути с нарастающей амплитудой, не учитываемые моделями с условиями непроскальзывания.

4. Формализм Дирака для систем с вырожденными лагранжианами позволяет описывать динамику двух шаровидных элементов промежуточной прослойки между перемещающейся вдоль фиксированного направления жесткой плитой и неподвижной деформируемой подстилающей поверхностью в случаях, когда эти элементы взаимодействуют с плитой в режиме микропроскальзывания, а с подстилающей поверхностью – в режимах микропроскальзывания или скольжения. Построенная модель, имеющая более высокую точность по сравнению с моделью непроскальзывания элементов прослойки относительно плиты, подтверждает экспериментальный факт сближения элементов прослойки и дает аналитические формулы для описания этого процесса.

Достоверность и обоснованность. Результаты работы получены при помощи строгих математических методов и соответствуют результатам других авторов по данной тематике, результатам численного моделирования и данным эксперимента.

Апробация. Результаты работы прошли апробацию на международных научных конференциях:

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 11-25 апреля 2025 г. и 10-25 апреля 2026 г. (каф. прикладной механики и управления).
2. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, 2-5 декабря 2025 г.
3. Международная научная конференция «Асимптотические методы в математической физике» к 100-летию со дня рождения профессора А.Б. Васильевой и 75-летию со дня рождения профессора Н.Н. Нефедова, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 26-27 февраля 2026 г.
4. XVII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Конференция Пятницкого), Москва, Россия, ИПУ РАН, 3-5 июня 2026 г.

Результаты были представлены соискателем на следующих научных семинарах:

1. Научный семинар им. акад. А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению под руководством проф. В.В. Александрова, Ю.В. Болотина, Н.А. Парусникова, кафедра прикладной механики и управления, механико-математический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова (2026).
2. Научный семинар «Математическое моделирование управляемых систем» под руководством проф. В.В. Александрова, Ю.В. Болотина и доц. П.А. Кручинина, кафедра прикладной механики и управления, механико-математический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова (2025, 2026).
3. Научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени проф. В.В. Трофимова под руководством члена-корреспондента РАН, проф. Д.В. Георгиевского, члена-корреспондента РАН, проф. М.В. Шамолина, а также проф. МГТУ им. Баумана С.А. Агафонова (2025).

4. Научный семинар Уральского математического центра УдГУ под руководством проф. РАН И.С. Мамаева и проф. А.А. Килина (2026).

5. Научный семинар «Динамические системы и механика» под руководством проф. П.С. Красильникова и проф. РАН Б.С. Бардина, кафедра 921 «Прикладная математика» НИУ Московского авиационного института (МАИ) (2026).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 3 научных работах, которые опубликованы в рецензируемых журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук [18-20]:

1. *Влахова А.В., Макиева Э.И.* Реализация связей в задачах динамики систем с проскальзыванием и разрушением // Докл. Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2026. Т. 528. № 1. С. 60–74. (Импакт-фактор 0.456 (РИНЦ), EDN: MBXCGL, 1,03 п.л. / авторский вклад определен). DOI: 10.7868/S3034504926010084

2. *Влахова А.В., Макиева Э.И.* Моделирование динамики элементов промежуточного слоя между контактирующими телами // Изв. РАН. МТТ. 2026. № 1. С. 95–123. (Импакт-фактор 1,252 (РИНЦ), EDN: GYFQXH, 1,21 п.л. / авторский вклад определен). DOI: 10.31857/S1026351926010051

3. *Влахова А.В., Макиева Э.И.* Моделирование динамики в промежуточном слое между контактирующими телами // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2026. № 2. С. 46–57. (Импакт-фактор 0.467 (РИНЦ), EDN: DXJHMT, 0,62 п.л. / авторский вклад определен). DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-67-2-6

Личный вклад. Все результаты, выносимые на защиту, получены лично автором. В работах [18-20] научный руководитель участвовал в постановке задач, обсуждении выбора математических методов их решения и интерпретации результатов. Личный вклад автора в работе [18] заключается в анализе характерных значений переменных рассматриваемой системы, получении предельных моделей, формулировке и доказательстве теорем и замечаний. Личный вклад автора в работах [19, 20] состоит в построении уравнений динамики системы, введении малых параметров, формировании приближенных моделей, исследовании их свойств и написании программы численного решения задач.

В.2. Краткое содержание работы

Работа посвящена теоретическим, прикладным и методическим аспектам описания динамики систем, которые содержат тела, взаимодействующие с малыми проскальзываниями и хрупким разрушением приповерхностных слоев вблизи области контакта. Изучаются внешняя и внутренняя задачи, возникающие в связи с этой тематикой.

В первой части работы (глава 1) рассматривается [18, 21] внешняя задача, посвященная динамике системы, тела которой начинают взаимодействовать через промежуточную прослойку из частиц, возникающих при разрушении. Возможно и внесение частиц прослойки, например составляющих абразива, извне. Результаты экспериментов показывают [1, 17, 18, 21], что частицы прослойки – аналоги роликового подшипника - собираются в создаваемых после разрушения трещиноподобных полостях между телами, при этом в подобласти контакта с прослойкой тела смещаются, перекатываясь через ее частицы (будем считать, что они абсолютно твердые [54] и смещаются без проскальзывания). При этом потенциальная энергия системы изменяется: она увеличивается из-за того, что частицы прослойки расклинивают деформируемые части тел и уменьшается из-за того, что смещение тел в касательном направлении (вдоль области контакта) делается проще вследствие перекатывания. В [1, 17], где проводится аналогия между трещиноподобными полостями с частицами прослойки и трещинами, показано, что составляющая, которая определяет увеличение потенциальной энергии, постоянна, а составляющая, которая соответствует ее уменьшению, пропорциональна квадрату относительного проскальзывания тел. Тем самым, лагранжиан системы при учете прослойки дополняется аналогом кинетической энергии «присоединенной массы» в вакуумной механике [3, 27, 42-45]. В работе обсуждаются случаи, когда предельный переход к бесконечной жесткости контактных сил (для разных типов систем с трением он рассматривается в [3, 7, 15, 38, 39, 43-45, 57, 61]) приводит к неклассической системе с условиями непроскальзывания, аналогичной

«промежуточной» модели вакономной механики [3, 43-45] или к (модифицированной) модели с первичными связями Дирака [3, 6, 26, 29-31, 47, 56], возникающими из-за вырождения лагранжиана системы.

Смещение тел через частицы прослойки зависит от структуры размещения этих частиц в области контакта тел. Эксперименты показывают [1, 17-20] три возможности размещения: равномерное с достаточным удалением друг от друга и компактное в форме цепочки или округлых образований, которые образуются в результате смятия и слияния друг с другом нескольких частиц. Реализуется структура размещения частиц прослойки, обеспечивающая минимум потенциальной энергии деформирования тел, вычисляемой как разность слагаемых, одно из которых соответствует возрастанию потенциальной энергии из-за расклинивания, другая – ее уменьшению из-за перекатывания [1, 17-20]. Согласно [1, 17] частицы прослойки между телами сближаются, если в области контакта тел усредненные нормальные напряжения значительно превышают усредненные касательные напряжения, или цепочка образована большим числом элементов прослойки. В обеих указанных ситуациях усредненные нормальные напряжения регулируют процесс формирования структур прослойки.

Разумеется, перечисленные ситуации не исчерпывают все причины изменения этих структур. Для их выяснения, в частности, следует перейти [19, 20, 23, 24] на более мелкий масштабный уровень – от внешней задачи исследования частей области контакта, занятых элементами прослойки, к анализу внутренней задачи взаимодействия находящихся рядом элементов, которое определяется напряженно-деформированным состоянием в их окрестности. Этому аспекту посвящена вторая часть работы (Глава 2), где проводится [19, 20, 53] построение и исследование математических моделей динамики двух элементов прослойки между перемещающейся вдоль фиксированного направления жесткой плитой и неподвижной деформируемой подстилающей поверхностью. Рассматриваются различные режимы взаимодействия элементов прослойки с подстилающей

поверхностью (микропроскальзывание и скольжение); взаимодействие элементов прослойки с плитой считается происходящим в режиме микропроскальзывания. Найдены достаточные условия, которые позволяют моделировать динамику системы при помощи подхода Дирака, разработанного им для систем с вырождением функции Лагранжа. Показано, что эти достаточные условия определяют реализацию условий непроскальзывания элементов прослойки относительно плиты поперек направления ее перемещения. Такой подход позволяет формировать модели более высокой точности по сравнению с моделью, запрещающей проскальзывания элементов прослойки относительно плиты. Установлено, что для рассматриваемых движений системы элементы прослойки сближаются. Получены аналитические формулы, описывающие изменение расстояния между их центрами масс в зависимости от пути, пройденного точкой контакта одного из элементов прослойки с подстилающей поверхностью в направлении смещения плиты (для случая, когда элементы прослойки скользят относительно подстилающей поверхности) или от пути, пройденного плитой либо центром масс одного из элементов в направлении ее смещения (для случая движения элементов прослойки в режиме микропроскальзывания относительно подстилающей поверхности). Рассмотренная задача дает представление о механизме изменения структуры расположения шаровидных элементов прослойки между контактирующими телами при трении, в ходе которого эти элементы выстраиваются в компактные образования.

Исследуемые в работе модели динамики построены с применением подходов разделения движений, которые объединяют методы фракционного анализа [22, 61, 63] и методы теории возмущений [8-10]. Возможность их применения связана (для задач из глав 1 и 2) с малостью скоростей относительного смещения взаимодействующих тел в случае их микропроскальзывания и с малостью части обобщенных скоростей системы, а также (для главы 2) – с малостью масс элементов прослойки по сравнению с массой плиты (с учетом нагрузки) и малостью их размеров.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Первая глава, где изучаются условия реализации связей в системах с проскальзыванием и разрушением взаимодействующих тел, состоит из разделов 1.1–1.4. Разделы 1.1 и 1.2 содержат основные предположения работ [1, 17, 37], позволяющие прийти к исследуемой модели динамики системы, и обзор литературы, связанной с построением «промежуточной» модели вакономной механики, а также с вычислением касательных составляющих контактных сил (сил трения) между взаимодействующими телами и изменения потенциальной энергии при смещении тел через элементы прослойки, переводящего лагранжиан системы в аналог «вакономного» лагранжиана. В разделе 1.3 проводится построение и анализ предельных моделей динамики системы, получаемых при переходе к бесконечной жесткости касательных составляющих контактных сил. В разделе 1.4 модели из раздела 1.3, а также «промежуточная» модель вакономной механики применяются для исследования поперечной динамики колесной пары при наличии промежуточной прослойки между колесами и рельсами (в качестве ее элементов могут выступать продукты разрушения или песок [52]).

Вторая глава, посвященная исследованию закономерностей движения шаровидных твердых элементов промежуточной прослойки между контактирующими телами, обусловленных напряженно-деформированным состоянием в их окрестности, состоит из разделов 2.1–2.5. В качестве примера рассматривались два соседних элемента прослойки. В предположении, что механические свойства контактирующих тел идентичны, а элементы прослойки – одинаковые и находятся в условиях близких силовых воздействий, проводился переход к задаче о динамике двух шариков, расположенных между твердой подвижной плитой (ее движение предполагается поступательным, однонаправленным) и деформируемой неподвижной подстилающей поверхностью. В разделе 2.1 обсуждаются [23, 24] физические причины движения элементов прослойки друг к другу (возникающие между ними силы притяжения обусловлены

несимметричностью областей контакта шариков и подстилающей поверхности) с использованием эффекта преобразованного сухого трения [2]. В разделе 2.2 излагается постановка задачи и дано описание математической модели динамики рассматриваемой в работе системы для более широкого по сравнению с [23, 24] класса движений: предполагается, что взаимодействие элементов прослойки с плитой происходит в режиме микропроскальзывания, а взаимодействие с подстилающей поверхностью – в режиме микропроскальзывания или скольжения. В разделах 2.3 и 2.4 рассматриваются системы с малыми параметрами, которые отражают малость масс и моментов инерции шариков, малость их деформаций в случае микропроскальзывания, малость отношения составляющих скоростей их центров масс поперек и вдоль направления смещения плиты. Невозмущенная (вырожденная) по этим малым параметрам система [8], порядок которой ниже исходной, описывает динамику системы по завершении быстрых процессов, в ходе которых, в частности, составляющие сил взаимодействия шариков с подстилающей поверхностью поперек направления движения плиты уравниваются соответствующими составляющими сил их притяжения друг к другу. При помощи теории А.Н. Тихонова-А.Б. Васильевой [8] найдены условия затухания этих быстрых процессов, обсуждаются возможности реализации условий непроскальзывания шариков относительно плиты и первичных связей Дирака, обусловленных вырождением лагранжиана системы. Условия равновесия сил позволяют получить аналитические формулы для изменения расстояния между центрами шариков. В разделе 2.5 проводится численное моделирование построенных систем уравнений и сравнение его результатов с результатами экспериментов [23, 24].

В заключении перечислены основные выводы работы.

Глава 1. Динамика системы при наличии промежуточной прослойки между контактирующими телами

1.1. Изменение потенциальной энергии системы при взаимодействии тел через элементы прослойки

Приведем предположения [1, 17, 18, 37], которые позволяют получить изучаемую здесь модель динамики. Рассмотрим механическую систему с голономными стационарными идеальными связями, включающую подвижно сопряженную пару тел (кинематическую пару [4]) с одной степенью свободы в относительном движении. При нулевой нагрузке по нормали к направлению смещения тел они контактируют в точке O . После приложения нагрузки тела не изменяют форму, за исключением малой зоны вблизи точки O , где возникает малая деформация тел. Механические свойства тел в этой зоне будем полагать одинаковыми. Тела считаются достаточно жесткими, несогласованной формы [28], тогда ширина области их контакта невелика по сравнению с шириной каждого из тел и радиусами кривизны их поверхностей в окрестности точки O . В теоретической механике часто пренебрегают малыми деформациями тел кинематической пары и переходят к неголономной модели со связью (условием непроскальзывания)

$$v = 0, \quad (1.1)$$

где v – скорость относительного смещения тел, совпадающая со скоростью точки O .

Достаточные условия реализации связи (1.1) определяются [1, 17, 37] при помощи подхода (см. [44, 51, 68], а также обзоры [13, 15, 16]), в рамках которого в задачах, где динамика в области контакта не рассматривается, считают, что тела

При подготовке данного раздела диссертации использована следующая публикация, выполненная автором в соавторстве, в которой, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [18].

соприкасаются в точке O , а распределения касательных и нормальных усилий по области контакта заменяют приложенными в точке O главными векторами (главный момент распределенных усилий обычно принимают равным нулю). Выражения для проекций этих векторов задают, исходя из результатов экспериментов, анализа взаимодействия тел внутри области контакта и качественных соображений. Свойство малой деформируемости тел в касательном направлении определяется моделью касательной составляющей контактной силы (силы трения), которую обычно считают непрерывной функцией v . Предельная при $v \rightarrow 0$ система называется системой со связью (1.1), а условия существования этого предела – условиями реализации связи для принятой модели силы трения.

В работах В.В. Козлова [3, 43-45] на примере механической системы с вязким трением $-\beta v/\varepsilon$ и анизотропным тензором инерции, который можно получить добавлением в ее функцию Лагранжа кинетической энергии «присоединенной массы» $\alpha v^2/(2\varepsilon)$, продемонстрированы [17] возможности построения неклассических моделей со связью (1.1). Здесь α и β – положительные постоянные, параметр ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) задает малость $|v|$ по сравнению с характерными скоростями других составляющих системы (далее это условие будет конкретизировано). Предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, равносильный переходу $v \rightarrow 0$, позволяет [17] построить [3, 43-45] модель движения системы со связью (1.1), определяемую отношением $\mu = \alpha/\beta$. При $\mu = 0$ предельная модель (она называется промежуточной моделью) совпадает [17] с классической неголономной моделью, при $\mu \rightarrow \infty$ – с вакономной моделью, которая исходно была получена В.В. Козловым вариационным методом [3, 42-45]: при записи уравнений динамики системы со связью (1.1) вместо принципа Даламбера-Лагранжа использовался принцип Гамильтона-Остроградского.

Ниже построены модели [18, 21], которые позволяют провести анализ влияния промежуточной прослойки между телами кинематической пары (ее частицы могут образовываться после локального хрупкого разрушения тел или могут быть внесены извне) на динамику рассматриваемой механической системы. Эти модели - неклассическая модель со связью (1.1), аналогичная промежуточной модели

[3, 43-45], а в частном случае совпадающая с ней, и неклассическая модель, отвечающая формализму Дирака [3, 6, 26, 29-31, 47, 56] для систем с первичными связями, которые возникают при вырождении функции Лагранжа системы после пренебрежения малыми обобщенными скоростями - получаются с использованием методов [13-17]. Во втором случае в системе, включающей ряд слагаемых промежуточной модели, условие непроскальзывания (1.1) обычно не реализуется. Случаи реализации указанных связей можно разделить после сравнения составляющих правых и левых частей соотношений между скоростями проскальзывания и обобщенными скоростями.

Масштабы изменения геометрических, силовых и временных параметров рассматриваемой системы существенно различаются между собой [17, 18, 21]. На первом масштабном уровне (макроуровне), определяющем самые медленные движения (разделы 1.2 и 1.3) рассматривается динамика системы в целом и ее составляющих: движения центров масс, движения относительно центров масс и т.д. с заданными силами и моментами. Здесь предполагается, что тела кинематической пары взаимодействуют в точке, а модели, определяющие их взаимодействие друг с другом, строятся по результатам исследования динамики на более мелких масштабных уровнях (микроуровнях), к которым относится контактное взаимодействие тел, определяемое их деформированием в окрестности области контакта, разрушением и трением (второй масштабный уровень более быстрых движений), и динамика частиц прослойки в трещиноподобных полостях области контакта, которая определяет структуру расположения этих частиц, влияющую на условия трения тел (третий масштабный уровень самых быстрых движений). Сильное различие скоростей изменения переменных этих трех масштабных уровней позволяет использовать идеи разделения движений (внешних и внутренних разложений в динамике деформируемого твердого тела), в рамках которых при рассмотрении медленных движений быстрые процессы полагаются законченными, а

при рассмотрении быстрых процессов медленных по отношению к ним переменные считаются постоянными.

Проведем краткое описание быстрых процессов второго и третьего масштабных уровней [1, 17, 18, 21].

Считаем, что радиусы кривизны тел кинематической пары и усредненные нормальные напряжения в области их взаимодействия сильно не изменяются. Рассмотрим систему координат $Oxyz$, где ось Ox направлена вдоль смещения тел кинематической пары, ось Oz – вдоль линии нормальной нагрузки. В области контакта взаимодействие тел определяется законом трения Кулона, тела как целые не скользят друг относительно друга - область их контакта образована зоной проскальзывания, где относительные касательные смещения тел (вдоль оси Ox) отличны от нуля, и зоной сцепления, где указанные смещения равны, и условия движения таковы, что зона сцепления превалирует над зоной проскальзывания [28]. Пренебрежем зоной проскальзывания и предположим, что распределения касательных и нормальных (вдоль оси Oz) напряжений τ и σ в области контакта отвечают условию сцепления: $|\tau| < \kappa\sigma$, (κ – коэффициент трения тел), тогда касательные смещения точек области контакта совпадают друг с другом, и скорости этих точек, равные скорости v точки O , совпадают с разностью скоростей недеформированных контуров тел, которые ограничивают деформируемую окрестность точки O . Применив теорему о сложении скоростей, получаем равенство

$$v = v^e + v^r, \quad (1.2)$$

где v^e и v^r – переносная и относительная составляющие скорости точки O - вместе с системой $Oxyz$ (разность переносных скоростей недеформируемых контуров тел) и относительно этой системы (разность относительных скоростей недеформируемых контуров тел). Согласно условию сцепления получаем

$$|v| \ll |v^e| \sim |v^r|. \quad (1.3)$$

Результаты экспериментов показывают [1, 17-20], что частицы прослойки (ее толщина считается существенно меньшей размеров области контакта тел) заполняют возникающие после разрушения трещиноподобные полости между телами. (Процессы обкатывания частиц прослойки и рельефа поверхностей тел не имеют существенного значения для проводимого в работе анализа и поэтому не принимаются во внимание.) Элементы прослойки - аналоги роликового подшипника, способствуют расклиниванию деформируемых частей тел и упрощают их смещение в касательном направлении из-за возможности перекатывания (предположим, что частицы прослойки абсолютно твердые [54], имеют шаровидную форму и перекатываются без проскальзывания). В результате на части области контакта тел с прослойкой нормальные напряжения увеличиваются, а касательные – уменьшаются по сравнению с соответствующими усредненными напряжениями для исходной системы, отвечающей отсутствию разрушения. Тем самым, потенциальная энергия тел возрастает за счет расклинивания и уменьшается из-за сдвига (перекатывания) частиц прослойки в области взаимодействия тел.

В стационарном режиме существования частиц прослойки изменение потенциальной энергии системы характеризуется структурой расположения этих частиц. Эксперименты показывают три возможных варианта их расположения в области контакта тел кинематической пары [1, 17]: равномерное со значительным удалением друг от друга (рис. 1.1, *а*, слева), а также компактное расположение - цепочка (рис. 1.1, *б*) или округлые образования, возникшие после смятия и слияния частиц (рис. 1.1, *а*, в центре и справа). Реализуется структура расположения частиц прослойки, при которой изменение потенциальной энергии деформирования тел - разность составляющих, одна из которых отвечает ее возрастанию из-за расклинивания деформируемых частей тел, другая – ее уменьшению из-за перекатывания частиц, минимальна. Если энергия совокупности k отдельно расположенных частиц прослойки превосходит их энергию в случае

компактного размещения, то частицы распределяются компактно, если энергия k раздельно расположенных частиц меньше их энергии для компактного размещения, то частицы размещаются раздельно.

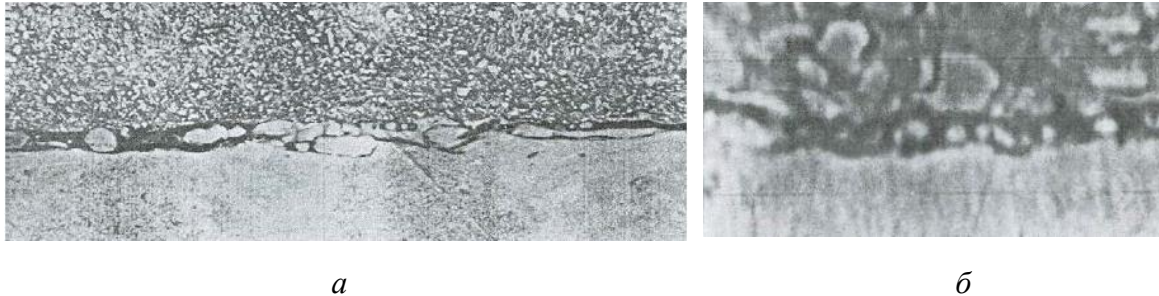


Рис. 1.1. Варианты расположения элементов прослойки вдоль области контакта [1]

Формулы, определяющие изменение потенциальной энергии деформирования тел, можно получить [1, 17-20], если, в рамках подхода [1] провести аналогию между трещиноподобными полостями с частицами прослойки и трещинами нормального отрыва и поперечного сдвига под действием нормальных и касательных напряжений, определяемых структурой расположения этих частиц, а также условиями и свойствами деформирования тел кинематической пары [5, 25, 32, 40, 67], которые предполагаются теми же, что и у полостей. Выводы [1, 17-20] справедливы, если границы трещин плавно смыкаются, соседние трещины не взаимодействуют, длина трещин отрыва и сдвига определяется только условиями нормального отрыва.

Условие сближения элементов прослойки используется в виде [1, 17-20]

$$(W_{\sigma} - W_{\tau})k > W_{\sigma k} - W_{\tau k}, \quad (1.4)$$

где W_{σ} и W_{τ} – энергия деформирования тел, отвечающая расклиниванию и сдвигу соответственно для одиночных частиц прослойки; дополнительный нижний индекс k соответствует энергии трещиноподобных полостей (трещин) с цепочкой k компактно распределенных частиц прослойки.

Собранные в цепочку частицы прослойки сминаются при выполнении аналога неравенства (1.4):

$$W_{\sigma k} - W_{\tau k} > W_{\sigma k}^* - W_{\tau k}^*, \quad (1.5)$$

где верхний индекс * соответствует потенциальной энергии для компактных образований из частиц прослойки, получаемых при их смятии. Если компактные образования целиком заполняют трещиноподобные полости, то эффект уменьшения касательных напряжений в области контакта тел кинематической пары можно не учитывать в силу его малости.

Если ограничиться случаем, когда трещиноподобные полости (трещины) между телами кинематической пары расширяются при хрупком выкалывании частиц тел в их концевых частях и длина каждой из этих полостей значительно больше протяженность области выкалывания, можно изучать [1, 17-20] как упругие [1], так и вязкоупругие [17] материалы взаимодействующих тел. Для вязкоупругих материалов следует предположить [17], что характерные времена расширения трещин и прохождения телами кинематической пары области контакта существенно больше характерных времен вязкого деформирования материалов тел в нормальном направлении и существенно меньше характерного времени их касательной релаксации. Тогда при разрушении процессы релаксации и вязкого деформирования материалов тел в нормальном направлении можно считать полностью завершенными, а в касательном направлении эти процессы, наоборот, практически не успевшими начаться. В рамках указанных предположений материалы тел можно считать упругими с длительным модулем упругости $E_{\infty z}$ в нормальном направлении и мгновенным модулем упругости $E_{1x} \ll E_{\infty z}$ в касательном направлении.

Деформирование в нормальном и касательном направлениях в работе описывается [1, 17-20] моделями Винклера, с модулем упругости E для упругих тел кинематической пары и модулями упругости $E_{\infty z}$ и E_{1x} в нормальном и касательном направлениях соответственно для вязкоупругих тел кинематической пары. Формулы

для слагаемых (1.4), (1.5) и условия выполнения этих неравенств получены в [1, 17]. Ниже приведены те из них, которые нужны для дальнейшего исследования [1, 17-20].

В рамках рассматриваемой постановки задачи частицы прослойки сближаются [1, 17-20] в двух случаях: если усредненные нормальные напряжения значительно больше усредненных касательных напряжений в области контакта тел, или если цепочка образована большим числом частиц прослойки. В обоих случаях усредненные нормальные напряжения играют регуляризующую роль при формировании структур расположения частиц прослойки. Разумеется, перечисленные ситуации не исчерпывают все причины изменения этих структур. Для их выяснения, в частности, следует перейти на более мелкий масштабный уровень – от анализа частей области контакта, занятых элементами прослойки, к анализу взаимодействия находящихся рядом элементов, которое определяется напряженно-деформированным состоянием в их окрестности [19, 20, 23, 24]. Исследование, позволяющее получить представление об этом взаимодействии, проводится в главе 2 [19, 20].

1.2. Постановка задачи

Ограничимся ситуацией, когда потенциальная энергия упругого деформирования тел кинематической пары, которая высвобождается из-за того, что смещение частей области их контакта через элементы прослойки упрощается, принимает максимальные по порядку величины значения (так будет, если частицы расположены раздельно или в виде цепочки), и выясним, какое влияние этот эффект оказывает на динамику рассматриваемой механической системы [17,18, 21].

Поскольку это исследование апеллирует к процессам первого масштабного уровня, будем считать [17,18, 21], что тела кинематической пары взаимодействуют в точке O , где приложены сила трения (сцепления) тел P и нормальная реакция N ,

равные главным векторам касательных и нормальных напряжений по области взаимодействия. Выражение для силы P в области сцепления $|P| < \kappa N$ (κ – коэффициент трения тел) моделируется линейной зависимостью

$$P = -\kappa N \zeta / \varepsilon, \quad \zeta = v/v^r, \quad |\zeta| < \varepsilon \ll 1. \quad (1.6)$$

Такие зависимости получили широкое распространение (см. [13-16, 28, 41, 50, 51, 55, 57, 58, 60-62, 64] и соответствующие списки литературы) при моделировании контакта (в частности, качения) тел с малым относительным смещением их взаимодействующих поверхностей, которое появляется из-за малой упругой или упругопластической касательной деформируемости тел вблизи точки O . В механике деформируемого твердого тела такое относительное смещение называется микропроскальзыванием, в транспортной литературе – уводом или псевдоскольжением. Переменная ζ называется относительным проскальзыванием, параметр ε , который характеризует малость величин скоростей точек области контакта по сравнению с разностью относительных и переносных скоростей движения недеформированных контуров тел (см. (1.3)), в рамках рассматриваемой постановки задачи можно оценить выражением [17]

$$\varepsilon = \frac{2\kappa}{3} \frac{E_{\infty z}}{E_{1x}} \frac{a^2}{R\Delta}. \quad (1.7)$$

Здесь a – характерный размер области контакта, $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \gg a$, где R_1 и R_2 – радиусы кривизны тел в точке O – их относительный радиус кривизны в этой точке, Δ – толщина деформируемых частей тел. Далее при проведении предельного перехода к бесконечной жесткости взаимодействующих тел параметр ε устремляется к нулю.

Лагранжиан системы до разрушения приповерхностных слоев тел кинематической пары имеет вид [17, 18, 21]:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \Pi(\mathbf{q}); \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ – вектор обобщенных координат системы, T и $\mathbf{A}$ – ее кинетическая энергия и соответствующая матрица инерционных сил, Π – потенциальная энергия. Пусть в результате разрушения в области взаимодействия тел возникает p трещиноподобных полостей (трещин) с одиночным элементом прослойки и p_k полостей, в которых находится цепочка k частиц прослойки, тогда потенциальная энергия системы принимает форму [17,18, 21]

$$\Pi_*(\mathbf{q}) = \Pi(\mathbf{q}) + (W_\sigma - W_\tau)p + (W_{\sigma k} - W_{\tau k})p_k. \quad (1.9)$$

Выражениями W_σ , W_τ , $W_{\sigma k}$ и $W_{\tau k}$ из (1.4), для вязкоупругих тел служат [17]:

$$W_\sigma = \frac{1}{2} \pi h^2 E_{\infty z}, \quad W_\tau = \frac{1}{2} \pi h^2 \frac{E_{\infty z}^2}{E_{1x}} \left(\frac{\tau_\infty}{\sigma_\infty} \right)^2 = W_{\tau k}, \quad W_{\sigma k} = \frac{8}{\pi} h^2 E_{\infty z}, \quad (1.10)$$

где h – половина характерного размера элемента прослойки, $\sigma_\infty = N/a$ и $\tau_\infty = P/a$ – усредненные касательные и нормальные напряжения в области взаимодействия тел.

Заменим в (1.8) выражение $\Pi(\mathbf{q})$ формулой (1.9) для $\Pi_*(\mathbf{q})$, опустим постоянные слагаемые $W_\sigma p$ и $W_{\sigma k} p_k$, и, принимая во внимание формулу для W_τ и $W_{\tau k}$, из (1.10), приходим к лагранжиану системы после разрушения [17,18, 21]:

$$L_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\alpha \zeta^2}{2\varepsilon}, \quad \zeta = \frac{v}{v^r}, \quad \alpha = \pi h^2 \frac{E_{\infty z}^2}{E_{1x}} \frac{\kappa^2 (p + p_k)}{\varepsilon}. \quad (1.11)$$

Аналоги (1.10) и (1.11) для упругих тел кинематической пары получаются [1, 17, 18, 21] подстановкой в эти выражения вместо E_{1x} и $E_{\infty z}$ модуля упругости тел E . В случае $v^r = \text{const}$ формула (1.11) совпадает с лагранжианом вакономной модели [3, 42-45], полученной при учете кинетической энергии «присоединенной массы».

Примем

$$v = \mathbf{b}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad v^r = \mathbf{c}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T, \quad \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \quad (1.12)$$

и будем считать, что $\|\mathbf{b}\|$ и $\|\mathbf{c}\|$ принимают конечные значения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Движение рассматриваемой системы после разрушения с учетом выражения для отвечающей P обобщенной силы [13, 15] описывается уравнениями Лагранжа вида [17,18, 21]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{b}P, \quad (1.13)$$

где $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)^T$ – вектор обобщенных сил, отвечающий активным силам и отличным от P силам трения.

Подстановка в (1.13) выражений (1.11) и (1.12) приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T &= \mathbf{Q} - \mathbf{b} \kappa N \frac{\zeta}{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\varepsilon v^r} (\mathbf{b} - \zeta \mathbf{c}) \dot{\zeta} - \frac{\alpha \zeta}{\varepsilon} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right], \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T &= -\frac{1}{v^r} \left[(\text{rot} \mathbf{b} - \zeta \text{rot} \mathbf{c}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{c} \dot{\zeta} + \frac{1}{v^r} (\mathbf{b} - \zeta \mathbf{c}) \dot{v}^r \right], \\ \zeta &= \frac{\mathbf{b}^T \dot{\mathbf{q}}}{v^r}, \quad \dot{\zeta} = \frac{1}{v^r} \left[(\mathbf{b} - \zeta \mathbf{c})^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} - \zeta \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} \right], \\ v^r &= \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{q}}, \quad \dot{v}^r = \mathbf{c}^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}}, \quad \text{rot} = (\partial / \partial \mathbf{q})^T - \partial / \partial \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Начальными условиями для (1.14) служат

$$\mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (1.15)$$

Обозначим

$$T_* = R/V_*, \quad V_* = \max\{|v^e|, |v^r|\} \quad (1.16)$$

характерное время изменения скоростей v^e и v^r , где R определен при записи (1.7), и, как и в [17,18, 21] ограничимся ситуацией, когда отношение

$$\mu = \frac{\alpha}{\kappa N_* V_* T_*} \quad (1.17)$$

характерного значения $\alpha/(V_* T_*)$ составляющих с множителем α , которые появляются в (1.14) при учете потенциальной энергии, высвобождаемой за счет

упрощения сдвига частей области взаимодействия тел через элементы прослойки, к характерному значению $P_* = \kappa N_*$ силы (1.6) их трения, где N_* - характерное значение нормальной реакции, остается конечным при проведении предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$.

1.3. Исследование влияния прослойки между взаимодействующими поверхностями тел на динамику системы

Ситуация, когда в (1.14) слагаемые в правой части выражения для переменной ζ существенно больше слагаемых порядка ε в левой части этого выражения, рассмотрен в [17]. Здесь предельная при $\varepsilon \rightarrow 0$ для (1.14) система [17, 18, 21]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T &= \mathbf{Q} - \mathbf{b} \kappa N s - \frac{\alpha}{v^r} \mathbf{b} \dot{s} - \alpha s \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right], \\ 0 &= \mathbf{b}^T \dot{\mathbf{q}}, \quad v^r = \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{q}}, \quad s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta / \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v / (\varepsilon v^r), \\ \mathbf{q}(0) &= \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0, \quad s(0) = \frac{\mathbf{b}^T(\mathbf{q}_0) \dot{\mathbf{q}}_0}{\varepsilon v^r|_{t=0}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

со связью (1.1) – условием непроскальзывания тел кинематической пары – в общем случае отличается от неголономной модели динамики механической системы. При $v^r = \text{const}$, $N = \text{const}$ она совпадает с «промежуточной» моделью движения [3, 43-45], содержащей «неголономные» и «вакономные» составляющие с множителями κN и α . В качестве $\dot{\mathbf{q}}$ и $\dot{\mathbf{q}}_0$, не ограничивая общности, примем векторы из первых $n - 1$ компонент векторов $\dot{\mathbf{q}}$ и $\dot{\mathbf{q}}_0$.

Перейдем к анализу ситуации [18, 21], когда слагаемые правой части выражения для ζ из (1.14) имеют порядок характерного значения ε левой части этого

выражения. Это возможно, если в случае (1.6) компоненты вектора $\mathbf{c}$ конечны при $\varepsilon \rightarrow 0$, а для компонент векторов $\dot{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{b}$ справедливы оценки:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= (\dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2)^T, \quad \mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)^T, \\ \dot{\mathbf{q}}_1 &= (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)^T, \quad \dot{\mathbf{q}}_2 = (\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n)^T, \quad \|\dot{\mathbf{q}}_1\| = O(1), \quad \|\dot{\mathbf{q}}_2\| = O(\varepsilon), \\ \mathbf{b}_1 &= (b_1, \dots, b_m)^T, \quad \mathbf{b}_2 = (b_{m+1}, \dots, b_n)^T, \quad \|\mathbf{b}_1\| = O(\varepsilon), \quad \|\mathbf{b}_2\| = O(1).\end{aligned}\quad (1.19)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ переход от выражения $\zeta = (\mathbf{b}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}_2) / (\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{q}})$ к условию (1.1) непроскальзывания тел кинематической пары $0 = \mathbf{b}^T \dot{\mathbf{q}}$ делается необоснованным. Разбор случаев реализации условий (1.19) для $\alpha = 0$ в разных задачах механики можно найти в [12-16, 22].

Проведем исследование [18, 21] ситуации (1.19) при помощи подходов [13-16]. Разрешив (1.14) относительно обобщенных ускорений, приходим к системе

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{g} + \mathbf{Q} - \mathbf{b} \kappa N \frac{\zeta}{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\varepsilon(v^r)^2} \left((\mathbf{b} - 2\zeta \mathbf{c}) \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} - \zeta (2\mathbf{b} - 3\zeta \mathbf{c}) \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} \right) + \\ &+ \frac{\alpha}{\varepsilon v^r} \zeta (\text{rot} \mathbf{b} - \zeta \text{rot} \mathbf{c}) \dot{\mathbf{q}}, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{A} + \frac{\alpha}{\varepsilon(v^r)^2} (\mathbf{b} \mathbf{b}^T - 2\zeta (\mathbf{b} \mathbf{c}^T + \mathbf{c} \mathbf{b}^T) + 3\zeta^2 \mathbf{c} \mathbf{c}^T), \\ \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= (g_1, \dots, g_n)^T = - \left(\dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\mathbf{A} \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right) \dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \\ \zeta &= \frac{\mathbf{b}^T \dot{\mathbf{q}}}{v^r}, \quad v^r = \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{q}}, \quad \text{rot} = (\partial / \partial \mathbf{q})^T - \partial / \partial \mathbf{q}.\end{aligned}\quad (1.20)$$

Согласно (1.6) и (1.17) при $\varepsilon \rightarrow 0$ слагаемые с множителем ζ/ε принимают конечные значения, слагаемые правых и левых частей уравнений с множителем $\alpha/(\varepsilon(v^r)^2)$, соответствующие выражениям (1.14) для $\alpha \dot{\zeta}/(\varepsilon v^r)$ и $\alpha \zeta \dot{v}^r/(\varepsilon(v^r)^2)$, при

$\varepsilon \rightarrow 0$ являются конечными или малыми. (Так будет как при выполнении, так и при нарушении (1.19).)

Ниже при помощи подходов [13, 15, 16] даны два варианта описания динамики системы (1.14) ((1.20)) при $\varepsilon \rightarrow 0$. В рамках первого варианта строится квазистатическая модель, в которой обобщенные ускорения $\ddot{q}_j$, соответствующие малым обобщенным скоростям $\dot{q}_j$, равны нулю. Второй вариант упрощения системы (1.14) ((1.20)), основанный на использовании подхода Дирака для систем с вырожденными лагранжианами [3, 6, 29-31, 47, 56], дает возможность уточнить квазистатическую модель.

Для удобства дальнейшего изложения разобьем матрицу $\mathbf{A}$ на блоки [13-16, 18, 21]:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}_{\substack{m & n-m \\ n-m}}, \quad \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{12}^T \quad (1.21)$$

и запишем аналогичное разбиение матрицы $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{11} = \mathbf{A}_{11} + \frac{\alpha}{\varepsilon(v^r)^2} (\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T - 2\zeta(\mathbf{b}_1 \mathbf{c}_1^T + \mathbf{c}_1 \mathbf{b}_1^T) + 3\zeta^2 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1^T),$$

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{A}_{12} + \frac{\alpha}{\varepsilon(v^r)^2} (\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2^T - 2\zeta(\mathbf{b}_1 \mathbf{c}_2^T + \mathbf{c}_1 \mathbf{b}_2^T) + 3\zeta^2 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2^T), \quad (1.22)$$

$$\mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{12}^T, \quad \mathbf{M}_{22} = \mathbf{A}_{22} + \frac{\alpha}{\varepsilon(v^r)^2} (\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2^T - 2\zeta(\mathbf{b}_2 \mathbf{c}_2^T + \mathbf{c}_2 \mathbf{b}_2^T) + 3\zeta^2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2^T),$$

а также обратную для (1.22) матрицу, используя формулу Фробениуса (будем считать, что она существует):

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11}^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{M}_{12} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1}) & -\mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12} \mathbf{H}^{-1} \\ -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} & \mathbf{H}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12}.$$

После замены

$$\dot{q}_j = \varepsilon \theta_{j-m} \quad (j = m+1, \dots, n), \quad (1.24)$$

и учета оценок (1.19) система (1.20) принимает сингулярно возмущенную форму:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{v}_1, \quad \dot{\mathbf{q}}_2 = \varepsilon \boldsymbol{\theta}, \quad \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{M}_{11}^{-1} (\mathbf{F}_1 - \mathbf{M}_{12} \mathbf{Z}), \\ \varepsilon \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{Z} = \mathbf{H}^{-1} (-\mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2), \\ \mathbf{F}_1 &= \mathbf{g}_1 + \mathbf{Q}_1 - \mathbf{b}_1 \kappa N \frac{\zeta}{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\varepsilon (v^r)^2} \left((\mathbf{b}_1 - 2\zeta \mathbf{c}_1) \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} - \right. \\ &\quad \left. - \zeta (2\mathbf{b}_1 - 3\zeta \mathbf{c}_1) \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\alpha}{\varepsilon v^r} \zeta ((\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_1 - \zeta (\text{rot} \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}})_1), \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{g}_2 + \mathbf{Q}_2 - \mathbf{b}_2 \kappa N \frac{\zeta}{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\varepsilon (v^r)^2} \left((\mathbf{b}_2 - 2\zeta \mathbf{c}_2) \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} - \right. \\ &\quad \left. - \zeta (2\mathbf{b}_2 - 3\zeta \mathbf{c}_2) \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\alpha}{\varepsilon v^r} \zeta ((\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_2 - \zeta (\text{rot} \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}})_2), \\ \zeta &= \frac{\varepsilon (\mathbf{b}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1 / \varepsilon + \mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\theta})}{v^r}, \quad v^r = \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{c}_2^T \varepsilon \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{n-m})^T, \quad \mathbf{g}_1 = (g_1, \dots, g_m)^T, \quad \mathbf{g}_2 = (g_{m+1}, \dots, g_n)^T,$$

$$\mathbf{Q}_1 = (Q_1, \dots, Q_m)^T, \quad \mathbf{Q}_2 = (Q_{m+1}, \dots, Q_n)^T,$$

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right) \dot{\mathbf{q}}_1 + \varepsilon \dot{\mathbf{q}}_1^T \left(\left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_2} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \mathbf{q}_1} \right)^T \right) \boldsymbol{\theta} + \varepsilon^2 \boldsymbol{\theta}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \mathbf{q}_2} \right) \boldsymbol{\theta},$$

$$(\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_1 = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right) \right) \dot{\mathbf{q}}_1 + \varepsilon \left(\left(\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \mathbf{q}_1} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_2} \right) \right) \boldsymbol{\theta},$$

$$(\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_2 = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_2} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \mathbf{q}_1} \right) \right) \dot{\mathbf{q}}_1 + \varepsilon \left(\left(\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \mathbf{q}_2} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \mathbf{q}_2} \right) \right) \boldsymbol{\theta}.$$

Матрицы $\mathbf{M}_{11}$, $\mathbf{M}_{12}$, $\mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{12}^T$, $\mathbf{M}_{22}$ и $\mathbf{H}$ введены в (1.21), (1.22) и (1.23), выражения $\dot{\mathbf{q}}^T (\partial \mathbf{c} / \partial \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ и $(\text{rot} \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}})_1$, $(\text{rot} \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}})_2$ записываются по аналогии с выражениями (1.25) для $\dot{\mathbf{q}}^T (\partial \mathbf{b} / \partial \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ и $(\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_1$, $(\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_2$ после формальной замены $\mathbf{b}$ на $\mathbf{c}$.

Переменными (1.25) служат компоненты векторов $\mathbf{q}$, $\mathbf{v}_1$ и $\boldsymbol{\theta}$. Согласно (1.6), (1.19) и (1.24) $\|\mathbf{b}_1/\varepsilon\| = O(1)$; для $s = \zeta/\varepsilon$ и $\boldsymbol{\theta}$ должны выполняться ограничения

$$|s| < 1, \quad |\theta_{j-m}| \leq 1 \quad (j = m + 1, \dots, n). \quad (1.26)$$

В силу (1.15) и (1.24) получаем выражения для начальных условий системы (1.25):

$$\mathbf{q}(0, \varepsilon) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{v}_1(0, \varepsilon) = \dot{\mathbf{q}}_1(0, \varepsilon) = \mathbf{v}_{10}, \quad \boldsymbol{\theta}(0, \varepsilon) = \dot{\mathbf{q}}_2(0, \varepsilon)/\varepsilon = \boldsymbol{\theta}_0. \quad (1.27)$$

1. *Квазистатическая система.* При $\varepsilon = 0$ приходим к вырожденной для (1.25), (1.27) (квазистатической) системе:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_{20}, \quad \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{F}_1, \quad -\mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_1 &= \mathbf{g}_1 + \mathbf{Q}_1 + \frac{\alpha s}{v^r} (\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_1, \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{g}_2 + \mathbf{Q}_2 - \mathbf{b}_2 \kappa N s - \frac{\alpha}{\varepsilon (v^r)^2} \mathbf{b}_2 \dot{\mathbf{q}}_1^T \left(\left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right) - 2\varepsilon s \left(\frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right) \right) \dot{\mathbf{q}}_1 + \\ &+ \frac{\alpha s}{v^r} (\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_2, \\ (\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_1 &= \left(\left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right) \right) \dot{\mathbf{q}}_1, \quad (\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_2 = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_2} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \mathbf{q}_1} \right) \right) \dot{\mathbf{q}}_1, \\ s &= \frac{\mathbf{b}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1 / \varepsilon + \mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\theta}}{v^r}, \quad v^r = \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1, \\ \mathbf{M}_{11} &= \mathbf{A}_{11}, \quad \mathbf{M}_{21} = \mathbf{A}_{21} - \frac{2\alpha s}{(v^r)^2} \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_1^T, \quad \mathbf{q}_1(0) = \mathbf{q}_{10}, \quad \mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_{10}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Здесь $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ и $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ находятся при $\varepsilon = 0$; векторы $\mathbf{q}_{10}$ и $\mathbf{q}_{20}$ составлены соответственно, из первых m и последних $n - m$ компонент вектора (1.27) для $\mathbf{q}_0$. В силу (1.28) имеем $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_{20}$. Компоненты вектора $\boldsymbol{\theta}$ быстрых переменных служат решением четвертого (конечного) уравнения:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t), \quad (1.29)$$

после их отыскания $\mathbf{q}_1(t)$ и $\mathbf{v}_1(t)$ находятся путем интегрирования первого и второго дифференциальных уравнений. Как и для системы (1.18), функция s получается переходом $s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta/\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v/(\varepsilon v^r)$.

Проведем оценку близости решений исходной и вырожденной систем (1.25), (1.27) и (1.28) при помощи теории А.Н. Тихонова-А.Б. Васильевой [9, 10, 22, 61]. Будем считать выполненными следующие (достаточные) условия [18].

I. Правые части дифференциальных уравнений (1.25) - аналитические функции всех своих аргументов в области

$$G = \{ \|\mathbf{q}\| \leq a, \|\mathbf{v}_1\| \leq a_1, |\theta_{j-m}| \leq 1 \quad (j = m + 1, \dots, n), 0 \leq t \leq t' \}.$$

II. Конечное (четвертое) уравнение системы (1.28) имеет в области $D = \{ \|\mathbf{q}\| \leq a, \|\mathbf{v}_1\| \leq a_1, 0 \leq t \leq t' \}$ изолированный непрерывный корень (1.29), такой, что компоненты $\theta_{j-m} = \theta_{j-m}^0$ ($j = m + 1, \dots, n$) вектора $\boldsymbol{\theta}^0$ и соответствующие значения s удовлетворяют условиям (1.26); дифференциальные (первое и второе) уравнения системы (1.28) имеют при $0 \leq t \leq t'$ единственное решение $\mathbf{q}_1(t), \mathbf{v}_1(t)$ в области D .

III. Точка покоя $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^0(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t)$ присоединенной системы

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{d\tau} = \mathbf{Z}|_{\varepsilon=0}, \quad \mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_{20})^T, \quad (1.30)$$

где $\mathbf{q}_1, \mathbf{v}_1$ и t - постоянные параметры из G , асимптотически устойчива по первому приближению.

IV. Решение $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\tau)$ системы (1.30), отвечающее начальному условию $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(0) = \boldsymbol{\theta}_0$ и начальным значениям параметров $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_{10}, \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{10}, t = 0$, существует при $\tau \geq 0$ и стремится к точке покоя $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^0(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_{10}, 0)$ при $\tau \rightarrow \infty$; компоненты $\theta_{j-m} = \tilde{\theta}_{j-m}$ ($j = m + 1, \dots, n$) и соответствующие значения s удовлетворяют условиям (1.26).

Теорема 1 [18]. При выполнении условий I–IV для достаточно малых ε решение $\mathbf{q}(t, \varepsilon), \dot{\mathbf{q}}(t, \varepsilon)$ системы (1.14), (1.27) (или, что то же самое, системы (1.25),

(1.27)) и соответствующее решение $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(t)$, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t)$ системы (1.28), а также переменные $\boldsymbol{\theta}(t, \varepsilon)$ и $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{v}}_1, t)$ систем (1.25) и (1.28) удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}(t, \varepsilon) - \bar{\mathbf{q}}(t)\| &= O(\varepsilon), \quad \|\dot{\mathbf{q}}(t, \varepsilon) - \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t)\| = O(\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq t'; \\ \|\boldsymbol{\theta}(t, \varepsilon) - \boldsymbol{\theta}^0(t)\| &= O(\varepsilon), \quad \Delta \leq t \leq t', \quad \Delta = O(-\varepsilon \ln \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Согласно (1.31) при выполнении условий I–IV квазистатическая система (1.28) – предельная для (1.14), (1.27) ((1.25), (1.27)) модель при $\varepsilon \rightarrow 0$ на конечном интервале времени $t \sim 1$. Условие (1.1) непроскальзывания тел кинематической пары при выполнении (1.19) обычно не выполняется (об исключениях сказано ниже).

2. Модель с первичными связями Дирака. При значении

$$\alpha = 0, \quad (1.32)$$

когда эффект упрощения сдвига тел кинематической пары пренебрежимо мал или разрушение их приповерхностных слоев отсутствует, решение системы (1.28) при $\varepsilon \rightarrow 0$ развивается [13, 15, 16] вблизи многообразия, определяемого первичными связями Дирака [3, 6, 29-31, 47, 56]

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}_2 - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}, \quad (1.33)$$

которые появляются между обобщенными координатами $\mathbf{q}$ и импульсами системы (1.25) -

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{A}_{11}\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_{12}\dot{\mathbf{q}}_2, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{A}_{21}\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_{22}\dot{\mathbf{q}}_2 \quad (1.34)$$

- после отбрасывания вектора малых обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}_2$. Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \Phi &= (\Phi_1, \dots, \Phi_{n-m})^T; \quad \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)^T, \quad \mathbf{p}_1 = (p_1, \dots, p_m)^T, \quad \mathbf{p}_2 = (p_{m+1}, \dots, p_n)^T, \\ p_i &= \partial L / \partial \dot{q}_i \quad (i = 1, \dots, n); \end{aligned} \quad (1.35)$$

функция L определена в (1.8); матрицы $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{12}^T$ и $\mathbf{A}_{22}$ – в (1.21).

Замечание 1. Зависимости (1.33) между обобщенными координатами и импульсами могут возникнуть в системе и после пренебрежения малыми инерционными коэффициентами, приводящего к вырождению ее лагранжиана

$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Предположим, что компоненты m - и $(n - m)$ -мерных векторов $\dot{\mathbf{q}}_1$ и $\dot{\mathbf{q}}_2$ принимают соизмеримые конечные значения. Подстановка выражений (1.34) для соответствующих обобщенных импульсов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ в (1.33) дает равенства

$$\mathbf{A}_{21}\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_{22}\dot{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{A}_{11}\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_{12}\dot{\mathbf{q}}_2) = (\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})\dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{0},$$

откуда получаем $\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} = \mathbf{0}$. Тем самым, помимо указанной выше ситуации игнорирования малых обобщенных скоростей, зависимости (1.33) отвечают случаю, когда матрица $\mathbf{A}$ инерционных коэффициентов не потерявшей целостность системы, часть которых принимает малые значения, после пренебрежения ими переходит в симметрическую матрицу ранга $m < n$:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0^T. \quad (1.36)$$

В этом смысле можно говорить об эквивалентности систем с сильным разнесением величин обобщенных скоростей и систем с малой инерционностью, и применять к ним одинаковые подходы.

Обсудим [13-15] простой способ вывода уравнений динамики системы со связями (1.33) в переменных Лагранжа, которые понадобятся далее.

Уравнения Дирака с первичными связями

$$\Phi_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (s = 1, \dots, n - m), \quad (1.37)$$

учитывающие зависимости между вариациями δq_i и δp_j ($i, j = 1, \dots, n$) обобщенных координат, обобщенных импульсов и заданные обобщенные силы $\tilde{\mathbf{Q}} = (\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n)^T$, $\tilde{Q}_i = Q_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, можно, как и в [3, 6, 29-31, 47, 56], получить [13-15] с применением метода неопределенных множителей Лагранжа:

$$\dot{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{p}} \right)^T + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}, \quad \dot{\mathbf{p}} = - \left(\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\mathbf{Q}}. \quad (1.38)$$

Здесь

$$H_0 = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L_0, \quad \mathbf{p} = (\partial L_0 / \partial \dot{\mathbf{q}})^T \quad (1.39)$$

– вырожденная функция Гамильтона системы, отвечающая связям (1.37) (L_0 – соответствующий лагранжиан), $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m})^T$ – вектор неопределенных множителей. Обобщенные силы являются функциями обобщенных скоростей, следовательно, λ_s могут входить во второе уравнение системы (1.38) и в качестве аргументов компонент вектора $\tilde{\mathbf{Q}}$ [13-15]. Они находятся при помощи условий

$$\dot{\Phi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} \right) \dot{\mathbf{p}} = 0 \quad (1.40)$$

совместности системы (1.38) со связями (1.37), называемых [56] условиями сохранения связей (1.37) на траекториях системы, в которые вместо $\dot{\mathbf{q}}$ и $\dot{\mathbf{p}}$ подставляются соответствующие правые части уравнений (1.38). Эти условия, записанные в переменных Лагранжа – соотношения между обобщенными координатами и скоростями, не содержащие обобщенных ускорений системы, называются [56] уравнениями лагранжевых связей [18, 21]. Современному анализу теории Дирака и ее роли в геометрии и гамильтоновой механике посвящены работы [3, 6, 26, 27, 47]. Несмотря на вырожденность лагранжиана системы, в (1.37), (1.38) и (1.40) можно перейти от гамильтоновых к лагранжевым переменным, воспользовавшись алгоритмом [3, 56].

Второе уравнение (1.38) с учетом выражения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}}, \quad (1.41)$$

которое получается после дифференцирования (1.37) по $\mathbf{q}$, дает уравнение [13-15]

$$\dot{\mathbf{p}} = - \left(\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \lambda + \tilde{\mathbf{Q}}.$$

Учитывая выражение для $(\partial \Phi / \partial \mathbf{p})^T \lambda$ из (1.38) и (1.39), приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}} &= -\left(\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{q}}\right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \left(\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{p}}\right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{Q}} = -\left(\frac{dH_0}{d\mathbf{q}}\right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{Q}} = \\
&= -\left(\frac{d}{d\mathbf{q}}(\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L_0)\right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{Q}} = \left(\frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{q}}\right)^T + \tilde{\mathbf{Q}},
\end{aligned}$$

откуда вытекают искомые уравнения в переменных Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \tilde{\mathbf{Q}}, \quad (1.42)$$

аналогичные уравнениям динамики систем без вырождения лагранжиана. Таким образом, лагранжиан для модели Дирака со связями (1.37) общего вида находится при помощи обычного преобразования Лежандра.

Подставив (1.41) в (1.40) и учитывая выражение для обобщенных импульсов из (1.39), имеем:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi} &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} \right) \left(\dot{\mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} \right) \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{q}} \right) = \\
&= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \quad (1.43)$$

После исключения в (1.43) выражения $\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{q}}$ при помощи (1.42), приходим к уравнению лагранжевых связей.

В рассматриваемом случае (1.32) первичных связей (1.33) выражение для функции Лагранжа L_0 из (1.39), вычисляемое при помощи матрицы $\mathbf{A}_0$ из (1.36), имеет вид

$$L_0 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}_0 \dot{\mathbf{q}} - \Pi(\mathbf{q}), \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2)^T, \quad (1.44)$$

где $\Pi(\mathbf{q})$ – потенциальная энергия системы. Уравнениями (1.42) для функции (1.44) служат:

$$\mathbf{A}_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_{12}\ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{A}_{21}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{F}_2. \quad (1.45)$$

Выражения для $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ задаются отвечающими (1.32) формулами (1.25), где

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)^T = - \left(\dot{\mathbf{A}}_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\mathbf{A}_0 \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right) \dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T. \quad (1.46)$$

Уравнения (1.45) нетрудно записать в эквивалентной форме:

$$\mathbf{A}_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_{12}\ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{F}_1, \quad -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}, \quad (1.47)$$

где второе уравнение служит [18] уравнением лагранжевых связей – условием (1.40) сохранения первичных связей (1.33) на траекториях системы в переменных Лагранжа. К нему нетрудно прийти и при помощи (1.43), умножив вектор $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)^T$ правых частей (1.45) на построенную в соответствии с (1.33) матрицу

$$(\partial \Phi / \partial \mathbf{p}) = (-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} + \mathbf{E}),$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица порядка $n - m$.

При $\alpha \neq 0$ элементы матрицы $\mathbf{M}$ из (1.20) – функции $\mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{q}}$, поскольку зависят от ζ и v^r . Ниже будет показано, что приближенное решение рассматриваемой системы дается аналогом (1.33), (1.34), (1.47) – системой

$$\mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{M}_{12}\ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{F}_1, \quad -\mathbf{M}_{21}\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}, \quad (1.48)$$

которую можно построить с использованием обозначений (1.22) и (1.25) для модифицированных первичных связей

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}_2 - \mathbf{M}_{21}\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}, \quad (1.49)$$

если считать ζ и v^r (формально) параметрами. Переменные системы (1.48) – компоненты векторов $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1$ – можно найти при помощи следующего алгоритма [18].

Так как правая часть второго уравнения модифицированной модели Дирака (1.48) отличается от правой части четвертого уравнения системы (1.28), в силу

условий теоремы 1 разрешимого относительно компонент вектора $\theta = \dot{\mathbf{q}}_2/\varepsilon$, членами $O(\varepsilon)$, второе уравнение (1.48) позволяет найти переменные $\dot{\mathbf{q}}_2$ как функции переменных $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1$. При помощи выражения (1.29) для θ^0 выражение для корня второго уравнения (1.48) относительно θ и выражение для $\dot{\mathbf{q}}_2$ можно записать в виде

$$\theta = \theta^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1, t, \varepsilon) = \theta^0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1, t) + O(\varepsilon), \quad \dot{\mathbf{q}}_2 = \varepsilon \theta^* = \dot{\mathbf{q}}_2^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1, t, \varepsilon), \quad (1.50)$$

Далее находится решение $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(t, \varepsilon), \dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(t, \varepsilon)$ системы первого уравнения (1.48) и второго равенства (1.50). Поскольку в рамках построенной системы $\mathbf{q}_2$ медленно изменяется во времени ($\mathbf{q}_2 \neq \mathbf{q}_{20}$), ее порядок $n + m$ превышает порядок $2m$ квазистатической системы (1.28), но остается меньше порядка $2n$ исходной системы (1.25), (1.27).

Погрешность модели (1.48) по отношению к решению исходной системы (1.25), (1.27) при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяется начальными условиями, выбираемыми для первой модели.

Теорема 2 [18]. При выполнении условий I–IV теоремы 1 для достаточно малых ε решение $\mathbf{q}(t, \varepsilon), \dot{\mathbf{q}}(t, \varepsilon)$ системы (1.14), (1.27) (или, что то же самое, системы (1.25), (1.27)) и решение $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(t, \varepsilon), \dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(t, \varepsilon)$ системы (1.48) с начальными условиями

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}(0, \varepsilon) &= \mathbf{q}_0, \quad \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(0, \varepsilon) = \dot{\mathbf{q}}_{10} + \varepsilon \dot{\mathbf{q}}_1^{(1)}, \\ \dot{\mathbf{q}}_1^{(1)} &= \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_0) \int_0^\infty \left((\mathbf{F}_1 - \mathbf{M}_{12} \mathbf{Z}) \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_1=\dot{\mathbf{q}}_{10}, \\ \theta=\theta^0(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0)+\tilde{\theta}, \\ t=0, \varepsilon=0}} - \mathbf{F}_1 \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_1=\dot{\mathbf{q}}_{10}, \\ \theta=\theta^0(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0), \\ t=0, \varepsilon=0}} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (1.51)$$

где $\tilde{\theta}(\tau)$ – решение уравнения

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\tau} = \mathbf{Z} \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_1=\dot{\mathbf{q}}_{10}, \\ \theta=\theta^0(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0)+\tilde{\theta}, \\ t=0, \varepsilon=0}}, \quad \tilde{\theta}(0) = \theta_0 - \theta^0(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0), \quad (1.52)$$

($\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10} = \mathbf{v}_{10} = \dot{\mathbf{q}}_1(0, \varepsilon)$, θ_0 и $\theta^0(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t)$ определены в (1.27) и (1.29)), а также функция $\dot{\mathbf{q}}_2^*(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1, t, \varepsilon)$ из (1.50) удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{q}(t, \varepsilon) - \bar{\mathbf{q}}(t, \varepsilon)\| &= O(\varepsilon^2), \quad 0 \leq t \leq t'; \\
\|\dot{\mathbf{q}}_1(t, \varepsilon) - \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(t, \varepsilon)\| &= O(\varepsilon^2), \quad \|\dot{\mathbf{q}}_2(t, \varepsilon) - \dot{\mathbf{q}}_2^*\| = O(\varepsilon^2), \\
\Delta \leq t \leq t', \quad \Delta &= O(-\varepsilon \ln \varepsilon).
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Решение $\bar{\mathbf{q}}(t, \varepsilon)$, $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(t, \varepsilon)$ системы (1.48) с начальными условиями

$$\mathbf{q}(0, \varepsilon) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}_1(0, \varepsilon) = \dot{\mathbf{q}}_{10} \tag{1.54}$$

и отвечающая ему функция $\dot{\mathbf{q}}_2^*(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1, t, \varepsilon)$ удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{q}_1(t, \varepsilon) - \bar{\mathbf{q}}_1(t, \varepsilon)\| &= O(\varepsilon), \quad \|\dot{\mathbf{q}}_1(t, \varepsilon) - \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon), \\
\|\mathbf{q}_2(t, \varepsilon) - \bar{\mathbf{q}}_2(t, \varepsilon)\| &= O(\varepsilon^2), \quad 0 \leq t \leq t'; \\
\|\dot{\mathbf{q}}_2(t, \varepsilon) - \dot{\mathbf{q}}_2^*\| &= O(\varepsilon^2), \quad \Delta \leq t \leq t', \quad \Delta = O(-\varepsilon \ln \varepsilon).
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Доказательство. Используем методику [11, 15], использующую асимптотические разложения [9, 10, 22, 61] и позволяющую строить приближенные модели сингулярно возмущенных систем, справедливые вне пограничного слоя, без перехода к итерациям по малому параметру.

Запишем [11, 15] сингулярно возмущенную по малому параметру ε систему уравнений общего вида [9, 10, 22, 61]:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \varepsilon), \quad \mathbf{y}(0, \varepsilon) = \mathbf{y}_0, \\
\varepsilon \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \varepsilon), \quad \mathbf{z}(0, \varepsilon) = \mathbf{z}_0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,
\end{aligned} \tag{1.56}$$

где $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ и $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ — l и s -мерные векторы медленных и быстрых переменных и правых частей соответственно. Условия А.Б. Васильевой, определяющие возможность формирования асимптотического разложения [9, 10, 22, 61] решения $\mathbf{y}(t, \varepsilon)$, $\mathbf{z}(t, \varepsilon)$ системы (1.56) в виде ряда по целым степеням ε , полагаются выполненными.

Запишем систему, которая, как и вырожденная по ε система для (1.56), состоит из дифференциального и конечного уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \varepsilon), \quad \mathbf{y}(0, \varepsilon) = \mathbf{y}_0 + \varepsilon \mathbf{y}^{(1)}, \\
0 &= \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \varepsilon) - \varepsilon \dot{\boldsymbol{\phi}}(\mathbf{y}, t), \\
\mathbf{y}^{(1)} &= \int_0^\infty \left(\mathbf{Y}(\mathbf{y}_0, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{y}_0, 0) + \tilde{\mathbf{z}}, 0, 0) - \mathbf{Y}(\mathbf{y}_0, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{y}_0, 0), 0, 0) \right) d\tau.
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Здесь $\mathbf{y}$ – вектор переменных; $\mathbf{z}^0 = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{y}, t)$ – корень конечного уравнения $\mathbf{0} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}^0, t, 0)$, который считается изолированным; $\tilde{\mathbf{z}}(\tau)$ – решение уравнения

$$\frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{d\tau} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}_0, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{y}_0, 0) + \tilde{\mathbf{z}}, 0, 0), \quad \tilde{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{z}_0 - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{y}_0, 0), \tag{1.58}$$

описывающего [18] динамику быстрых переменных $\mathbf{z}$ системы (1.56) внутри пограничного слоя $0 \leq t \leq \Delta$, $\Delta = O(-\varepsilon \ln \varepsilon)$, в нулевом по ε приближении. Для решения системы (1.57), (1.58) нужно определить корень $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{y}, t, \varepsilon)$ второго (конечного) уравнения, который затем подставляется в правую часть первого уравнения.

Показано [11, 15], что внепогранслоиная часть разложения А.Б. Васильевой по малому параметру ε , построенного для решения системы (1.56), совпадает с разложением Пуанкаре решения $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}(t, \varepsilon)$, $\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}}(t, \varepsilon)$ регулярно возмущенной системы (1.57), (1.58) вплоть до членов первого порядка малости включительно и при достаточно малых ε имеем:

$$\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\| = O(\varepsilon^2), \quad \|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}\| = O(\varepsilon^2), \quad \Delta \leq t \leq t' \sim 1. \tag{1.59}$$

В случае, когда правая часть (1.56) для некоторой компоненты y_k вектора $\mathbf{y}$ содержит множитель ε или не включает компоненты вектора $\mathbf{z}$, переменная y_k не имеет пограничного слоя как для нулевого, так и для первого по ε приближений, и для y_k и отвечающей ей компоненты $\bar{y}_k$ вектора $\bar{\mathbf{y}}$ системы (1.57), (1.58) оценка $|y_k - \bar{y}_k| = O(\varepsilon^2)$ справедлива на отрезке $0 \leq t \leq t'$, включающем начальный момент времени.

Запишем модель (1.57) для системы (1.25). Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{v}_1)^T, \quad \mathbf{z} = \boldsymbol{\theta}, \\ \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \varepsilon) &= (\mathbf{v}_1, \varepsilon \boldsymbol{\theta}, \mathbf{M}_{11}^{-1}(\mathbf{F}_1 - \mathbf{M}_{12} \mathbf{Z}))^T, \end{aligned} \quad (1.60)$$

выражение $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \varepsilon)$ задано правой частью четвертого уравнения (1.25), функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}, t)$ отвечает функция $\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t, 0) = \boldsymbol{\theta}^0(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t)$, определяемая первым выражением (1.50). Условия I–IV теоремы 1 позволяют строить для (1.25) асимптотическое разложение А.Б. Васильевой [9, 10, 22, 61] по целым степеням малого параметра ε . Дальнейшие рассуждения проводятся по аналогии с [15].

Заменим выражение для $\mathbf{Z}$ в правой части дифференциального уравнения для медленной переменной $\mathbf{v}_1$ отвечающей (1.57) системы выражением

$$\varepsilon \dot{\boldsymbol{\phi}} = \dot{\mathbf{q}}_2^*(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t, 0) = \varepsilon \boldsymbol{\theta}^0(\mathbf{q}, \mathbf{v}_1, t). \quad (1.61)$$

Поскольку формулы (1.50) и (1.61) для $\dot{\mathbf{q}}_2$ и $\varepsilon \dot{\boldsymbol{\phi}}$ различны, векторное дифференциальное уравнение полученной системы после перехода к уравнению второго порядка совпадает с первым уравнением (1.48) с точностью до членов порядка ε^2 в его правых частях. Конечное (второе) уравнение аналога системы (1.57) благодаря присутствию $\varepsilon \dot{\boldsymbol{\phi}}$ отличается от конечного (второго) уравнения (1.48) малыми слагаемыми порядка ε . Из (1.51), (1.57), (1.58), (1.60) вытекают равенства $\mathbf{q}_1^{(1)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q}_2^{(1)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1^{(1)} = \dot{\mathbf{q}}_1^{(1)}$, откуда получаем $\bar{\mathbf{q}}(0, \varepsilon) = \mathbf{q}_0$, $\bar{\mathbf{v}}_1(0, \varepsilon) = \dot{\mathbf{q}}_{10} + \varepsilon \dot{\mathbf{q}}_1^{(1)}$ – начальные условия системы вида (1.57), построенной для (1.25), даются формулами (1.51). В силу теоремы Пуанкаре о представлении решения регулярно возмущенной системы в виде сходящегося ряда по малому параметру [22, 61] различие решений указанных систем на конечном интервале времени $0 \leq t \leq t'$ – величина $O(\varepsilon^2)$ по переменным $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{v}_1$ и величина $O(\varepsilon)$ по переменной $\boldsymbol{\theta}$.

Согласно (1.60) правая часть соответствующего уравнения (1.25) для $\mathbf{q}_1$ не содержит компонент вектора быстрых переменных $\boldsymbol{\theta}$, а правая часть соответствующего уравнения (1.25) для $\mathbf{q}_2$ кратна ε , следовательно [18], $\mathbf{q}_1$ и $\boldsymbol{\theta}$ не

имеют пограничного слоя, и решения системы (1.25) и ее модели в форме (1.57) по переменным $\mathbf{q}$ различаются членами $O(\varepsilon^2)$ на отрезке $0 \leq t \leq t'$. Для $\mathbf{v}_1$ оценка $O(\varepsilon^2)$ справедлива на отрезке $\Delta \leq t \leq t'$ – вне пограничного слоя. Различие переменных $\dot{\mathbf{q}}_2(t, \varepsilon) = \varepsilon \boldsymbol{\theta}$ и $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_2(t, \varepsilon) = \varepsilon \bar{\boldsymbol{\theta}}$, которые находятся, соответственно, из системы (1.25) и ее модели вида (1.57), оценивается путем умножения на ε оценки рассогласования между соответствующими быстрыми переменными $\boldsymbol{\theta}$ и корнем $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ конечного уравнения. Тем самым, при выборе начальных условий (1.51) погрешность решения (1.48) по $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}_1$ совпадает с погрешностью модели (1.57) системы (1.25), а по $\dot{\mathbf{q}}_2$ – имеет порядок ε при $0 \leq t \leq \Delta$ и ε^2 при $\Delta \leq t \leq t'$. Доказательство первой части теоремы 2 закончено.

Утверждение второй части теоремы 2 справедливо, поскольку разложения Пуанкаре и А.Б. Васильевой для решений системы (1.48) с начальными условиями (1.54) и системы (1.25), по $\mathbf{q}_1$, $\dot{\mathbf{q}}_1$ совпадают только для нулевого приближения по ε , а по $\mathbf{q}_2$ – как для нулевого, так и для первого приближений. Следовательно, при выборе начальных условий (1.54) для решения (1.48) верны оценки (1.55).

Замечание 2 [18]. В силу (1.50) оценки (1.53), (1.55), определяющие различие $\dot{\mathbf{q}}_2$ и $\dot{\mathbf{q}}_2^*$ не изменятся при выборе

$$\dot{\mathbf{q}}_2^* = \dot{\mathbf{q}}_2^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1, t, 0) = \varepsilon \boldsymbol{\theta}^0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1, t).$$

В силу указанной особенности переменных $\mathbf{q}_2$ замена уравнения $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_{20}$ из (1.28) дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{q}}_2 = \varepsilon \boldsymbol{\theta}^0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1, t), \quad \mathbf{q}_2(0, \varepsilon) = \mathbf{q}_{20}, \quad (1.62)$$

в правых частях которого и правых частях остальных уравнений (1.28) можно принять $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_{20}$, позволяет отыскивать переменные $\mathbf{q}_2(t, \varepsilon)$ из (1.14), (1.27) или из (1.25), (1.27) с погрешностью порядка ε^2 на отрезке $0 \leq t \leq t'$.

Замечание 3. При

$$\mathbf{v}^r = \text{const} \quad (1.63)$$

уравнения динамики системы получатся, если в (1.14) принять $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ везде, за исключением выражения для v^r , которое теперь имеет вид (1.63):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T &= \mathbf{Q} - \mathbf{b} \kappa N \frac{\zeta}{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\varepsilon v^r} \mathbf{b} \dot{\zeta} + \frac{\alpha \zeta}{\varepsilon v^r} \text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}}, \\ \zeta &= \frac{\mathbf{b}^T \dot{\mathbf{q}}}{v^r}, \quad \dot{\zeta} = \frac{1}{v^r} \left[\mathbf{b}^T \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right], \quad \text{rot} = (\partial/\partial \mathbf{q})^T - \partial/\partial \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Аналог системы (1.25) для (1.64) записывается в форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= \mathbf{v}_1, \quad \dot{\mathbf{q}}_2 = \varepsilon \boldsymbol{\theta}, \quad \dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{M}_{11}^{-1} (\mathbf{F}_1 - \mathbf{M}_{12} \mathbf{Z}), \\ \varepsilon \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{Z} = \mathbf{H}^{-1} (-\mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2), \\ \mathbf{F}_1 &= \mathbf{g}_1 + \mathbf{Q}_1 - \mathbf{b}_1 \kappa N \frac{\zeta}{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\varepsilon (v^r)^2} \mathbf{b}_1 \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\alpha}{\varepsilon v^r} \zeta (\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_1, \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{g}_2 + \mathbf{Q}_2 - \mathbf{b}_2 \kappa N \frac{\zeta}{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\varepsilon (v^r)^2} \mathbf{b}_2 \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\alpha}{\varepsilon v^r} \zeta (\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_2, \\ \zeta &= \frac{\varepsilon (\mathbf{b}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1 / \varepsilon + \mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\theta})}{v^r}, \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{n-m})^T, \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{A}_{11} + \frac{\alpha}{\varepsilon (v^r)^2} \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T, \quad \mathbf{M}_{12} = \mathbf{A}_{12} + \frac{\alpha}{\varepsilon (v^r)^2} \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2^T,$$

$$\mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{12}^T, \quad \mathbf{M}_{22} = \mathbf{A}_{22} + \frac{\alpha}{\varepsilon (v^r)^2} \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2^T, \quad \mathbf{H} = \mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12},$$

где $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\dot{\mathbf{q}}^T (\partial \mathbf{b} / \partial \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$, $(\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_1$, $(\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_2$ остаются прежними. Здесь, в отличие от общего случая (1.22), матрица $\mathbf{M}$ является функцией только обобщенных координат $\mathbf{q}$ и на основании (1.19) имеем

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{A}_{11} + O(\varepsilon^2), \quad \mathbf{M}_{12} = \mathbf{A}_{12} + O(\varepsilon). \quad (1.66)$$

Следовательно, (1.48) для первичных связей Дирака (1.49) на уровне точности, гарантируемом теоремой 2, можно заменить системой (1.47) для первичных связей (1.33), соответствующих отсутствию разрушения тел кинематической пары, причем согласно (1.65) можно принять:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 &= \mathbf{g}_1 + \mathbf{Q}_1 - \mathbf{b}_1 \kappa N \frac{\zeta}{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\varepsilon(v^r)^2} \mathbf{b}_1 \dot{\mathbf{q}}_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right) \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{\alpha}{\varepsilon v^r} \zeta (\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_1, \\
\mathbf{F}_2 &= \mathbf{g}_2 + \mathbf{Q}_2 - \mathbf{b}_2 \kappa N \frac{\zeta}{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\varepsilon(v^r)^2} \mathbf{b}_2 \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\alpha}{\varepsilon v^r} \zeta (\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_2, \\
(\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_1 &= \left(\left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right) \right) \dot{\mathbf{q}}_1, \quad (\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_2 = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_2} \right)^T - \left(\frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \mathbf{q}_1} \right) \right) \dot{\mathbf{q}}_1.
\end{aligned} \tag{1.67}$$

Выражения для $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ вычисляются из (1.46).

При выполнении условий $\partial \mathbf{b}_1 / \partial \mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$ или $\|\partial \mathbf{b}_1 / \partial \mathbf{q}_1\| = O(\varepsilon)$ функция $\mathbf{F}_1|_{\varepsilon=0}$ не зависит от ζ , и, тем самым, следовательно, от компонент вектора $\boldsymbol{\theta}$ (при условии, что $\mathbf{Q}_1|_{\varepsilon=0}$ не зависит от $\boldsymbol{\theta}$). С учетом (1.52) и (1.66) выражение (1.51) для $\dot{\mathbf{q}}_1(0, \varepsilon)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(1)} &= -\mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_0) \mathbf{A}_{12}(\mathbf{q}_0) \int_0^\infty \mathbf{Z} \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_1=\dot{\mathbf{q}}_{10}, \\ \boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0)+\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \\ t=0, \varepsilon=0}} d\tau = \\
&= -\mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_0) \mathbf{A}_{12}(\mathbf{q}_0) \int_{\boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0, 0)}^0 d\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_0) \mathbf{A}_{12}(\mathbf{q}_0) (\boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta}^*(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0, 0)),
\end{aligned}$$

откуда следует явное выражение

$$\dot{\mathbf{q}}_1(0, \varepsilon) = \dot{\mathbf{q}}_{10} + \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_0) \mathbf{A}_{12}(\mathbf{q}_0) (\dot{\mathbf{q}}_{20} - \dot{\mathbf{q}}_2^*(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0, 0)). \tag{1.68}$$

Замечание 4. При значениях

$$\mu = O(\varepsilon), \tag{1.69}$$

где μ определен в (1.17), квазистатическая система (1.28) не дает возможности оценить влияние разрушения тел кинематической пары на динамику системы. Для случая одномерного вектора $\mathbf{b}_2 = b_2 \neq 0$ теорема 1 позволяет расширить подходы к реализации голономных связей, основанные на введении «жестких» сил упругого или вязкоупругого взаимодействия или гироскопических сил [3, 46, 48, 59, 61, 70], поскольку в данном случае решение $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ квазистатической системы (1.28) совместно с множителем λ отвечают уравнениям движения

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ b_2 \end{pmatrix} \lambda, \quad 0 = b_2 \dot{q}_2.$$

Уравнение кинематической связи равносильно уравнению $q_2 = q_{20}$ голономной связи, а множителем служит $P = -\kappa N s$, тем самым, P можно рассматривать как реакцию голономной связи.

В случае (1.69) верны оценки (1.66), то есть, как и для (1.63), вместо системы (1.48) с первичными связями (1.49) на указанном в теореме 2 уровне точности можно рассматривать систему (1.47) со связями (1.33), отвечающими отсутствию разрушения тел кинематической пары, где в силу (1.25)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{g}_1 + \mathbf{Q}_1 - \mathbf{b}_1 \kappa N \frac{\zeta}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon v^r} \zeta (\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_1, \\ \mathbf{F}_2 &= \mathbf{g}_2 + \mathbf{Q}_2 - \mathbf{b}_2 \kappa N \frac{\zeta}{\varepsilon} - \frac{\alpha}{\varepsilon (v^r)^2} \mathbf{b}_2 \dot{\mathbf{q}}_1^T \left(\left(\frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right) - 2\zeta \left(\frac{\partial \mathbf{c}_1}{\partial \mathbf{q}_1} \right) \right) \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{\alpha}{\varepsilon v^r} \zeta (\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_2, \\ \zeta &= \frac{\varepsilon (\mathbf{b}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1 / \varepsilon + \mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\theta})}{v^r}, \quad v^r = \mathbf{c}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{c}_2^T \varepsilon \boldsymbol{\theta}, \end{aligned}$$

$(\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_1$ и $(\text{rot} \mathbf{b} \dot{\mathbf{q}})_2$ вычисляются из (1.67). Как и для (1.63), при $\mathbf{Q}_1|_{\varepsilon=0}$ не зависящем от переменных $\boldsymbol{\theta}$, выражение $\mathbf{F}_1|_{\varepsilon=0}$ также не зависит от этих переменных, и $\dot{\mathbf{q}}_1(0, \varepsilon)$ совпадает с (1.68).

В [17] получены условия, при выполнении которых параметры ε и μ из (1.6) и (1.17) удовлетворяют одному из неравенств

$$\varepsilon \ll \mu \ll 1, \quad \mu \sim 1. \quad (1.70)$$

При реализации первого неравенства (1.70) входящие в (1.14) слагаемые с множителем α малы по сравнению со слагаемым, определяющим силу трения тел кинематической пары, но их отношение по величине значительно больше величин $O(\varepsilon)$, в пренебрежении которыми получены система (1.18) и квазистатическая система (1.28). Это неравенство справедливо, если

$$\varepsilon\sqrt{\varepsilon v} \ll \frac{h}{\sqrt{aR}} \ll \varepsilon v, \quad v = \sqrt{\frac{2}{\pi(p + p_k)}} \frac{E_{1x}}{\kappa E_{\infty z}}. \quad (1.71)$$

Второе неравенство (1.70) дает равный вклад указанных слагаемых в систему (1.14).

Оно верно в случае

$$h/\sqrt{aR} \sim \varepsilon v. \quad (1.72)$$

Условие (1.69), которое обсуждалось в замечании 4, выполняется в случае

$$h/\sqrt{aR} \sim \varepsilon\sqrt{\varepsilon v} \quad (1.73)$$

Для

$$\varepsilon \sim 10^{-2}-10^{-3}, \quad E_{1x}/E_{\infty z} \sim 10^{-3}-10^{-4}, \quad a \sim 1-5 \text{ мм}, \quad a/R \sim 10^{-3}$$

неравенства (1.71) верны при $10^{-5}-10^{-7}$ мм $\ll h \ll 10^{-4}-10^{-6}$ мм, условие (1.72) – для значений $h \sim 10^{-4}-10^{-6}$ мм, условие (1.73) – при $h \sim 10^{-5}-10^{-7}$ мм. Эксперименты [1] показывают, что полученные ограничения для h могут быть реализованы в практических задачах.

Полученные результаты дают обоснование для применения модифицированного подхода Дирака в ситуациях, когда движение системы, которая включает тела, контактирующие (с малыми проскальзываниями) через элементы прослойки, происходит так, что часть обобщенных скоростей малы, а слагаемые правых и левых частей соотношений между скоростями проскальзывания и обобщенными скоростями имеют одинаковые порядки малости. Поскольку в общем случае многообразие, определяемое условиями непроскальзывания, и многообразие лагранжевых связей, отвечающее первичным связям Дирака, не совпадают, при моделировании динамики системы в случае (1.19) проскальзывания тел, несмотря на их малость, следует учитывать.

Исключение представляет ситуация, когда для $\dot{\mathbf{q}}_2^*$ из (1.50) справедливо равенство $0 = \mathbf{b}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}_2^*$. Для случая (1.32) оно выполнено, например [15], в задаче о качении железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода при

отсутствии внешних возмущений [12, 14, 50, 55, 61] (при учете внешних возмущений последнее равенство уже не верно). Однако уже для двухосной железнодорожной тележки с жестко заделанными осями колесных пар условия непроскальзывания колес относительно рельсов дают (даже без учета возмущений) [13, 15] переопределенную систему уравнений, которая имеет только тривиальное решение [55, 61], и, следовательно, не позволяет описать поперечные колебания около средней линии пути. Поскольку при движении в зоне свободного хода поперечная и угловая скорости корпуса железнодорожных экипажей малы, для описания их динамики в условиях микропроскальзывания колес относительно рельсов можно применять [12, 14] подход Дирака, позволяющий учитывать малые проскальзывания колес. Моделирование динамики железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода с учетом промежуточной прослойки между колесами и рельсами проведено в следующем разделе.

Замечание 5. Согласно [9] требование I аналитичности правых частей (1.25) в теоремах 1 и 2 можно заменить требованием существования в области G непрерывных частных производных правых частей (1.25) по всем аргументам до второго порядка включительно (для теоремы 1) и до третьего порядка включительно (для теоремы 2).

Замечание 6. Интервал времени, на котором квазистатическая система (1.28) или модифицированная модель Дирака (1.48) остаются асимптотическими моделями исходной системы, можно расширить от конечного, определяемого условиями А.Н. Тихонова-А.Б. Васильевой, до асимптотически большого вида $0 \leq t \leq t'/\varepsilon^\beta$, где $\beta > 0$ - постоянная [49].

Замечание 7. Полученные результаты можно применить и к механическим системам с несколькими кинематическими парами, имеющими одну степень свободы в относительном движении, в каждой из которых происходит микропроскальзывание взаимодействующих тел в области контакта. Ситуации,

когда решение системы при $\varepsilon \rightarrow 0$ развивается либо вблизи решения неклассической модели вида (1.18) с дополнительными слагаемыми, учитывающими изменение потенциальной энергии при смещении взаимодействующих тел через элементы прослойки, и условиями непроскальзывания, либо вблизи решения модифицированной модели Дирака (1.48), в рамках которой проскальзывания тел сохраняются, можно разделить с применением методов [13, 15, 16].

Замечание 8. Как и для ситуации (1.32), анализ которой проводился в [15], разработанные здесь подходы, позволяющие строить системы вида (1.18), (1.48), можно применять и к системам, где взаимодействующие тела имеют не одну, а две относительные степени свободы. Здесь следует ограничиться случаем, когда угловая скорость относительного верчения [2, 33-36, 66] тел небольшая и зависимости отношений продольных и поперечных составляющих силы трения тел в области контакта к произведению коэффициента трения на нормальную реакцию близки к линейным. Поскольку при моделировании качения тел пренебрежение верчением как правило приводит к некорректной по Адамару постановке задач [2, 35, 36], при решении практических задач следует оценить его влияние на характеристики контакта тел.

1.4. Динамика железнодорожной колесной пары при наличии промежуточной прослойки между колесами и рельсами

Рассмотрим качение железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода – промежуточном зазоре между гребнями колес и боковыми гранями рельсов, контакт которых считается отсутствующим. Путь считается горизонтальным и прямолинейным. В зоне свободного хода поверхностями катания колес служат конические поверхности с малым углом конусности γ . Колесная пара и путь

предполагаются симметричными относительно продольной плоскости, их отрыва друг от друга не происходит. Ограничимся случаем, когда колеса не теряют сцепление с рельсами, то есть взаимодействуют с малыми смещениями, но без скольжения. Пренебрегая малыми изменениями высоты центра масс пары, будем считать ее движение плоским. Поскольку в зоне свободного хода амплитуды ее поперечных и угловых движений невелики, будут малыми и угловые скорости вращения колес относительно рельсов в областях контакта. В связи с этим динамику пары можно описывать при помощи разработанных выше подходов для кинематических пар с одной относительной степенью свободы.

Свяжем с рельсовым путем неподвижную правую систему координат $Ox_0y_0z_0$ с осями Ox_0 и Oz_0 , направленными по средней линии пути и вертикально вверх, а с колесной парой – подвижную правую систему координат $Sxyz$ с началом в ее центре масс S и осями Sx и Sy , которые направлены вперед по ходу движения и влево по оси собственного вращения пары (рис. 1.2). В качестве обобщенных координат, определяющих положение колесной пары, выберем координаты X, Y точки S в системе $Ox_0y_0z_0$ и углы φ и Ψ ее поворота вокруг осей Sy и Sz соответственно (в задачах динамики железнодорожного транспорта угол курса Ψ называют углом виляния).

Для описания контакта колес с рельсами будем использовать модель Картера [14, 41, 50, 55, 58, 61] (аналог модели (1.6)):

$$\begin{aligned} P_{xr} &= -\kappa_{xr} N_r \zeta_{xr} / \varepsilon, \quad P_{yr} = -\kappa_{yr} N_r \zeta_{yr} / \varepsilon, \\ \zeta_{xr} &= U_{xr} / V, \quad \zeta_{yr} = U_{yr} / V, \quad \zeta_{xr}^2 + \zeta_{yr}^2 < \varepsilon^2 \quad (r=1, 2). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Здесь P_{xr}, P_{yr} и N_r – проекции касательной и нормальной составляющих сил в точках контакта O_r на оси $O_r x_r, O_r y_r$ и $O_r z_r$ трехгранников $O_r x_r y_r z_r$ с осями $O_r x_r$ и $O_r y_r$, направленными вперед по ходу движения оси r -го колеса и перпендикулярно его продольной плоскости, и осью $O_r z_r$, направленной по нормали к соприкасающимся

поверхностям колес и рельсов; U_{xr} и U_{yr} - соответствующие проекции абсолютных скоростей точек O_r ; $V = \dot{X}$ – путевая скорость колесной пары (точкой обозначено дифференцирование по времени T); ζ_{xr} и ζ_{yr} – относительные проскальзывания колес и рельсов в продольном и поперечном направлениях; K_{xr} , K_{yr} – соответствующие коэффициенты кулонова трения. Как и в (1.6), параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ характеризует свойство малой упругой или упругопластической касательной деформируемости контактирующих поверхностей колеса и рельса при качении. Для железнодорожных колес в эксплуатационных условиях ε имеет порядок 10^{-2} - 10^{-3} .

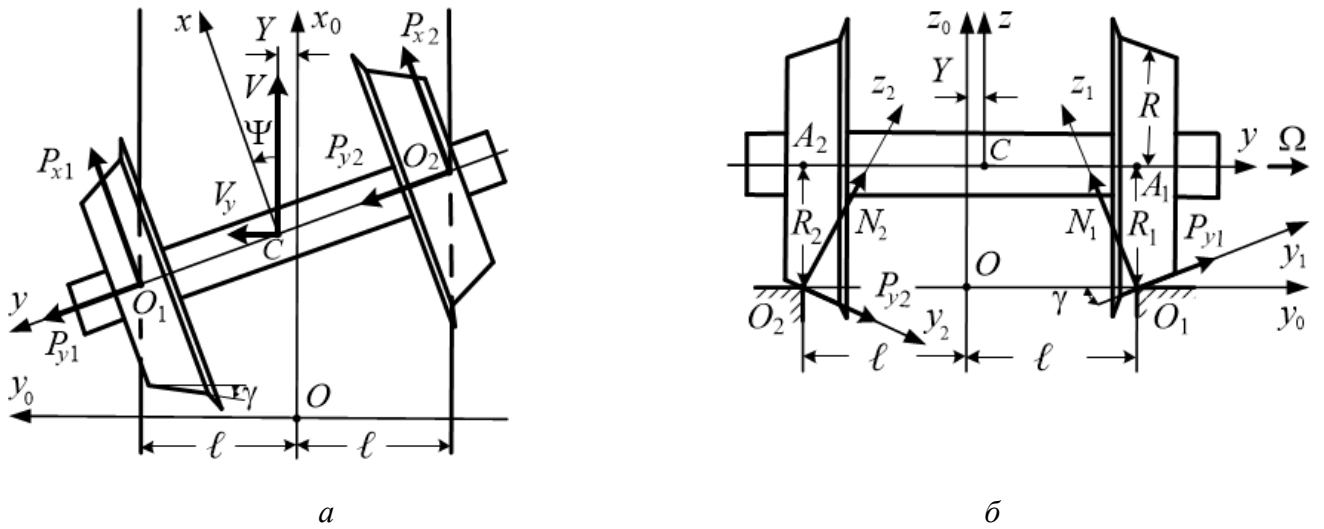


Рис. 1.2. Железнодорожная колесная пара: вид сверху (а) и спереди по ходу движения (б)

Изучая установившиеся движения колесной пары, примем традиционные предположения [14, 41, 50, 55, 61, 69] о постоянстве ее путевой скорости и угловой скорости осевого вращения:

$$\dot{X} = V = \text{const}, \quad \dot{\phi} = \Omega = V/R, \quad (1.75)$$

где R – радиус качения колес в невозмущенном движении, отвечающего совпадению продольных плоскостей симметрии пары и пути. Подходы к обоснованию этих предположений при помощи методов фракционного анализа можно найти в [58]. Будем считать [41, 50, 61] нормальные реакции постоянными: $N_r = Mg/2$, где M –

масса колесной пары, g – ускорение свободного падения, и для простоты примем $K_{xr} = K_{yr} = K$.

Рассматривая взаимодействие колес и рельсов через элементы прослойки (ими могут быть, в том числе, частицы песка [52], который насыпают на рельсы, чтобы предотвратить скольжение колес), ограничимся малыми значениями (1.69): $\mu = O(\varepsilon)$, где μ определено правой частью (1.17) для $V_* = V$, $N_* = Mg$, выражение T_* будет введено ниже. В рамках сделанного предположения можно использовать оценки [14, 61]

$$|Y|/\ell \sim |\Psi| \sim \gamma \sim |U_{xr}|/V \sim |U_{yr}|/V \sim |V_y|/V \sim |\ell\Omega_z|/V \sim \varepsilon, \quad (1.76)$$

справедливые для динамики пары без потери сцепления колес с рельсами в отсутствие прослойки, где 2ℓ – ширина рельсового пути; $\dot{Y} = V_y$, $\dot{\Psi} = \Omega_z$. Далее все необходимые уравнения и выражения, как и в [14, 61], выписываются в линейном приближении по Y , Ψ , V_y , Ω_z и γ .

Выражениями для U_{xr} и U_{yr} служат:

$$U_{x1} = -U_{x2} = -(\ell\Omega_z + V\gamma Y/R), \quad U_{y1} = U_{y2} = V_y - V\Psi. \quad (1.77)$$

Кинетическая энергия колесной пары (в рамках сделанных предположений ее можно рассматривать как функцию Лагранжа) составляется по аналогии с (1.11):

$$L_\alpha = MV^2/2 + I\Omega^2/2 + MV_y^2/2 + I_z\Omega_z^2/2 + \alpha(\zeta_{x1}^2 + \zeta_{y1}^2)/(2\varepsilon), \quad (1.78)$$

где M , I и I_z – масса пары и ее моменты инерции относительно осей Cy и Cz , коэффициент α , отвечающий потенциальной энергии, которая высвобождается при смещении контактирующих поверхностей колес и рельсов через элементы прослойки, для простоты считается одинаковым для обоих направлений $O_r x_r$ или $O_r y_r$.

Аналоги уравнений (1.14) динамики пары имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{Y} &= V_y, \quad \dot{\Psi} = \Omega_z, \\
M\dot{V}_y &= -P_{y1} + P_{y2} + F_y - \frac{\alpha}{\varepsilon V} \dot{\zeta}_{y1} - \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon R} \zeta_{x1}, \\
I_z \dot{\Omega}_z &= -P_{x1} \ell + P_{x2} \ell + M_z + \frac{\alpha \ell}{\varepsilon V} \dot{\zeta}_{x1} - \frac{\alpha}{\varepsilon} \zeta_{y1},
\end{aligned} \tag{1.79}$$

где проекции возмущающих сил и моментов F_y и M_z далее будут полагаться зависящими только от времени гладкими функциями: $F_y = F_y(T)$, $M_z = M_z(T)$. При построении системы (1.79), отвечающей движению пары в зоне свободного хода с малыми поперечными и угловыми скоростями (кроме угловой скорости осевого вращения) и малыми областями контакта колес с рельсами, угловые скорости и моменты трения верчения вдоль нормалей к соприкасающимся поверхностям колес и рельсов не принимались во внимание (см. [2, 28, 33-36]). Влияние верчения на динамику колесной пары (без учета промежуточной прослойки) рассмотрено в [65] с использованием теории [2]. При $\alpha = 0$ уравнения (1.79) совпадают с построенными в [14, 61].

Соответствующими (1.79) уравнениями (1.20), составленными с учетом (1.74) и (1.77), служат

$$\begin{aligned}
\dot{Y} &= V_y, \quad \dot{\Psi} = \Omega_z, \\
\left(M + \frac{\alpha}{\varepsilon V^2} \right) \dot{V}_y &= -\frac{\kappa M g}{\varepsilon V} (V_y - V\Psi) + F_y + \frac{\alpha}{\varepsilon V} \Omega_z + \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon V R} \left(\ell \Omega_z + \frac{V\gamma}{R} Y \right), \\
\left(I_z + \frac{\alpha \ell^2}{\varepsilon V^2} \right) \dot{\Omega}_z &= -\frac{\kappa M g \ell}{\varepsilon V} \left(\ell \Omega_z + \frac{V\gamma}{R} Y \right) + M_z - \frac{\alpha \ell \gamma}{\varepsilon V R} V_y - \frac{\alpha}{\varepsilon V} (V_y - V\Psi).
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Перейдем в (1.77), (1.80) к безразмерным аналогам [22, 61] переменных и времени, отвечающим рассматриваемому классу движений колесной пары:

$$t = \omega_0 T, \quad y = Y/Y_*, \quad \psi = \Psi/\varepsilon, \quad v_y = V_y/\varepsilon V, \quad \omega_z = \Omega_z/\Omega_{z*}, \quad u_{xr} = U_{xr}/\varepsilon V, \quad u_{yr} = U_{yr}/\varepsilon V$$

($r = 1, 2$), $f_y = F_y/(\kappa M g)$, $m_z = M_z/(\kappa M g \ell \eta)$. Здесь $Y_* = \varepsilon V/\omega_0$, $\ell \Omega_{z*} = V\gamma Y_*/R$,

$\eta = \sqrt{\gamma \ell / R}$; $\omega_0 = V \sqrt{\gamma / R \ell}$ – частота «кинематических виляний» - гармонических колебаний проекции точки C на плоскость Ox_0y_0 вблизи средней линии пути, которая находится из уравнений $U_{xr} = 0$, $U_{yr} = 0$ качения пары без проскальзывания колес относительно рельсов (см. (1.77)). Согласно экспериментам [41, 50, 55, 69], при отсутствии внешних возмущений уравнениями «кинематических виляний» можно пользоваться для проведения грубых оценок свойств поперечного движения пары в зоне свободного хода. Характерное время «кинематических виляний» $T_* = T_0 = 1/\omega_0$ далее будет применяться при записи выражения для μ в левой части (1.17).

Проведенный анализ позволяет получить оценку $T_1 = \varepsilon MV / (\kappa Mg) = \varepsilon V / (\kappa g)$ характерного времени изменения переменных V_y и Ω_z , которое при выполнении (1.69) соизмеримо с характерным временем, определяющим изменение скоростей точек O_r ($r = 1, 2$) под действием контактных сил (1.74). В силу малости ε динамика колесной пары развивается в сильно разнесенных временных масштабах: $T_1 \ll T_0$. Далее рассматриваются возмущения $F_y = F_y(T)$ и $M_z = M_z(T)$, изменяющиеся медленно, на временах $T \gtrsim T_0$.

Безразмерным аналогом (1.80) служит система

$$\begin{aligned} y' &= v_y, \quad \psi' = \omega_z, \\ \varepsilon(\chi + \tilde{\alpha})v_y' &= -(v_y - \psi) + f_y + \varepsilon\tilde{\alpha}\omega_z + \varepsilon\tilde{\alpha}\eta^2(\omega_z + y), \\ \varepsilon(\rho_z^2\chi + \tilde{\alpha})\omega_z' &= -(\omega_z + y) + m_z - \varepsilon\tilde{\alpha}v_y - \varepsilon\tilde{\alpha}(v_y - \psi)/\eta^2, \end{aligned} \quad (1.81)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по t ; $\rho_z^2 = I_z / M\ell^2$, $\chi = T_1 / (\varepsilon T_0)$, $\tilde{\alpha} = \mu / \varepsilon$. Для числовых значений параметров колесной пары [50] справедливы оценки $\eta \sim 0,3$, $\rho_z^2 \sim 1$, $\chi \sim 1$, и, в силу предположения (1.69), $\tilde{\alpha} \sim 1$. В отличие от (1.25) и (1.65) правые части первых двух уравнений не содержат множитель ε , поскольку здесь

согласно (1.76) соизмеримость характерных значений слагаемых в правых и левых частях (1.77) обеспечивается за счет малости обобщенных координат Y и Ψ .

Безразмерные аналоги (1.77) и неравенств (1.74), определяющих область допустимых значений переменных системы (1.81), принимают вид

$$u_{x1} = -u_{x2} = -\eta(\omega_z + y), \quad u_{y1} = u_{y2} = v_y - \psi, \quad u_{xr}^2 + u_{yr}^2 < 1 \quad (r = 1, 2). \quad (1.82)$$

Далее ε рассматривается в качестве малого параметра, другие параметры считаются конечными при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При $\varepsilon = 0$ система (1.81) принимает вид

$$\begin{aligned} y' &= v_y, \quad \psi' = \omega_z, \\ 0 &= -(v_y - \psi) + f_y, \quad 0 = -(\omega_z + y) + m_z, \end{aligned} \quad (1.83)$$

выражения и неравенства (1.82) остаются без изменения. Конечные уравнения (1.83) совпадают с условиями непроскальзывания колес пары относительно рельсов только в ситуации $f_y = 0, m_z = 0$ отсутствия внешних возмущений.

Замечание 9. Отвечающая отсутствию внешних возмущений «промежуточная» модель (1.18) динамики колесной пары (ее нетрудно формально получить из (1.79) с учетом (1.74) и (1.77), если не принимать во внимание малость характерных значений каждого из слагаемых в правых частях выражений (1.77)):

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= V_y, \quad \dot{\Psi} = \Omega_z, \\ M\dot{V}_y &= -\kappa M g s_{y1} - \frac{\alpha}{V} \dot{s}_{y1} - \frac{\alpha\gamma}{R} s_{x1}, \\ I_z \dot{\Omega}_z &= \kappa M g \ell s_{x1} + \frac{\alpha \ell}{V} \dot{s}_{x1} - \alpha s_{y1}, \quad V_y - V\Psi = 0, \quad \ell \Omega_z + \frac{V\gamma}{R} Y = 0, \\ Y(0) &= Y_0, \quad \Psi(0) = \Psi_0, \\ s_{x1}(0) &= \frac{\zeta_{x1}(0)}{\varepsilon} = \frac{V_{y0} - V\Psi_0}{\varepsilon V}, \quad s_{y1}(0) = \frac{\zeta_{y1}(0)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon V} \left(\ell \Omega_{z0} + \frac{V\gamma}{R} Y_0 \right), \end{aligned}$$

где $Y_0, \Psi_0, V_{y0}, \Omega_{z0}$ – начальные условия для соответствующих переменных системы (1.80), моделирует быстрый (на временах порядка μT_0) процесс изменения реакций

κMgs_{x1} и κMgs_{y1} от начальных значений до значений в ε -окрестности реакций связей для классической неголономной модели.

Основным требованием, которое в рамках теории А.Н. Тихонова-А.Б. Васильевой [9, 10, 22, 61] обеспечивает притяжение траектории исходной системы (1.81) к многообразию, на котором происходят медленные движения в силу невозмущенной – вырожденной – системы (1.83) (это многообразие задается конечными уравнениями (1.83)) при $\varepsilon \rightarrow 0$, служит затухание быстрых движений, описываемых присоединенной системой

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{v}_y}{d\tau} &= \frac{1}{\chi + \tilde{\alpha}} \left(-(\tilde{v}_y - \psi) + f_y(t) \right), \\ \frac{d\tilde{\omega}_z}{d\tau} &= \frac{1}{(\rho_z^2 \chi + \tilde{\alpha})} \left(-(\tilde{\omega}_z + y) + m_z(t) \right).\end{aligned}\tag{1.84}$$

Эта система получается, если перейти в (1.81) к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$ и, далее, принять $\varepsilon = 0$ (интервалу $\tau \sim 1$ отвечает интервал размерного времени $T \sim T_1$). Медленные переменные y, ψ и медленное время t считаются постоянными. Система (1.84) образована двумя независимыми линейными неоднородными уравнениями первого порядка. Выражения для координат их точек покоя с точностью до формальной замены $\tilde{v}_y = v_y$ и $\tilde{\omega}_z = \omega_z$ совпадают с соответствующими корнями

$$v_y = \psi + f_y(t), \quad \omega_z = -y + m_z(t)\tag{1.85}$$

конечных уравнений (1.83). Асимптотическая устойчивость точек покоя, в рассматриваемом случае гарантирующая неограниченную область их влияния, проверяется без труда. В случае $f_y^2 + \eta^2 m_z^2 < 1$, обеспечивающем выполнение неравенств (1.82), решение системы (1.81) представимо в виде асимптотических разложений А.Б. Васильевой [9, 10, 22, 61] по целым степеням малого параметра ε . Тем самым, решения систем (1.81) и (1.83) при $\varepsilon \rightarrow 0$ различаются величинами $O(\varepsilon)$

на интервале $t \sim 1$ (для быстрых переменных v_y и ω_z оценка $O(\varepsilon)$ справедлива вне пограничного слоя ширины $O(-\varepsilon \ln \varepsilon)$).

В силу (1.75) и (1.76) справедливы неравенства $|V_y| \ll V$, $|\Omega_z| \ll \Omega$. При переходе к нулевым значениям обобщенных скоростей V_y и Ω_z , малость которых характеризуется параметром ε , лагранжиан (1.78) вырождается, в силу условия (1.69) переходя в постоянную на фазовом пространстве функцию $L_0 = (MV^2 + I\Omega^2)/2$ (см. (1.75)), и в системе возникают первичные связи Дирака:

$$\Phi_1 = p_y = \partial L / \partial V_y = 0, \quad \Phi_2 = p_\Psi = \partial L / \partial \Omega_z = 0. \quad (1.86)$$

(То же самое, разумеется, можно получить из (1.33) и (1.81) (см. замечание 4)).

Решение уравнений динамики колесной пары со связями (1.86), которые в соответствии с (1.42) получаются из (1.81) после отбрасывания левых частей двух последних уравнений, при $\varepsilon \rightarrow 0$ развивается вблизи решения системы (1.83). Третье и четвертое конечные уравнения этой системы с погрешностью $O(\varepsilon)$ представляют собой уравнения лагранжевых связей, отвечающих условиям $\dot{\Phi}_1 = 0$, $\dot{\Phi}_2 = 0$.

Собственные колебания в силу (1.83) являются гармоническими, их частота $\omega_0 = 1$ совпадает с безразмерным аналогом частоты ω_0 «кинематических влияний». В данном случае из-за отсутствия множителя ε в правых частях двух первых уравнений (1.81) модель с первичными связями (1.86) не является более точной по сравнению с системой (1.83) и, следовательно, не позволяет корректно оценить влияние промежуточной прослойки между колесами и рельсами на динамику пары. Такую оценку можно получить при помощи системы (1.57), (1.58), которая проще исходной системы, и, в отличие от последней не является сингулярной возмущенной. Система (1.57), (1.58) уточняет правые части уравнений лагранжевых связей и выражения для начальных условий по медленным переменным дополнительными слагаемыми порядка ε . Здесь

$$\mathbf{y} = (y, \psi)^T, \quad \mathbf{z} = (v_y, \omega_z)^T, \quad \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \varepsilon) = \mathbf{z},$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \left(-(v_y - \psi) + f_y + \varepsilon \tilde{\alpha} \omega_z + \varepsilon \tilde{\alpha} \eta^2 (\omega_z + y) \right) / (\chi + \tilde{\alpha}) \\ \left(-(\omega_z + y) + m_z - \varepsilon \tilde{\alpha} v_y - \varepsilon \tilde{\alpha} (v_y - \psi) / \eta^2 \right) / (\rho_z^2 \chi + \tilde{\alpha}) \end{pmatrix},$$

и, в соответствии с (1.84), $\Phi(\mathbf{y}, t) = (\psi + f_y, -y + m_z)^T$.

Система (1.58) получается из (1.84) после отбрасывания в правых частях всех постоянных и добавления начальных условий $\tilde{v}_y(0) = v_{y0} - \psi_0 - f_y(0)$, $\tilde{\omega}_z(0) = \omega_{z0} + y_0 - m_z(0)$, где y_0 , ψ_0 , v_{y0} и ω_{z0} (безразмерные аналоги Y_0 , Ψ_0 , V_{y0} и Ω_{z0}) – начальные условия для соответствующих переменных исходной системы (1.81).

Таким образом, искомая система имеет вид

$$\begin{aligned} y' &= v_y, \quad \psi' = \omega_z, \\ 0 &= -(v_y - \psi) + f_y + \varepsilon \tilde{\alpha} \omega_z + \varepsilon \tilde{\alpha} \eta^2 (\omega_z + y) - \varepsilon (\chi + \tilde{\alpha}) (\omega_z + f_y'), \\ 0 &= -(\omega_z + y) + m_z - \varepsilon \tilde{\alpha} v_y - \varepsilon \tilde{\alpha} (v_y - \psi) / \eta + \varepsilon (\rho_z^2 \chi + \tilde{\alpha}) (v_y - m_z'), \\ y(0, \varepsilon) &= y_0 + \varepsilon (\chi + \tilde{\alpha}) (v_{y0} - \psi_0 - f_y(0)), \\ \psi(0, \varepsilon) &= \psi_0 + \varepsilon (\rho_z^2 \chi + \tilde{\alpha}) (\omega_{z0} + y_0 - m_z(0)). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Область допустимого использования системы (1.87) определяется формулами (1.82). Различие решениями систем (1.81) и (1.87) при $\varepsilon \rightarrow 0$ является величиной $O(\varepsilon^2)$ на интервале $t \sim 1$ вне пограничного слоя.

Дифференциальные уравнения системы (1.87) на уровне точности $O(\varepsilon)$ можно привести к виду

$$\begin{aligned} y' &= \varepsilon \chi y + \psi + f_y - \varepsilon (\chi + \tilde{\alpha}) f_y' - \varepsilon (\chi - \tilde{\alpha} \eta^2) m_z, \\ \psi' &= -y + \varepsilon \rho_z^2 \chi \psi + m_z - \varepsilon (\rho_z^2 \chi + \tilde{\alpha}) m_z' + \varepsilon (\rho_z^2 \chi - \tilde{\alpha} / \eta^2) f_y. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Характеристическое уравнение однородной части системы (1.88) –

$$\lambda^2 - \varepsilon \chi (1 + \rho_z^2) \lambda + 1 = 0$$

– имеет два корня с положительной вещественной частью порядка ε , которая увеличивается при возрастании скорости V путевого движения пары (см. выражение для χ из (1.81)). Тем самым, модель (1.88) описывает «извилистое движение» [62] колесной пары – ее поперечные колебания около средней линии пути с возрастающей амплитудой. (Увеличение амплитуды имеет место в пределах зоны свободного хода, на ее границе колебания колесной пары сдерживаются ребрами колес.) Как следует из (1.88) и выражений (1.87) для начальных условий $y(0, \varepsilon)$ и $\psi(0, \varepsilon)$, в случае (1.69) на уровне точности $O(\varepsilon)$ наличие промежуточной прослойки влияет на сдвиг начальных условий по медленным переменным, определяемый скоростью затухания быстрых переменных ν_y и ω_z внутри пограничного слоя (с увеличением $\tilde{\alpha}$ она уменьшается в силу (1.84)) и эффекты, которые приносят в систему возмущающие воздействия.

Глава 2. Динамика элементов промежуточной прослойки между контактирующими телами

2.1. Описание динамики системы

В этой главе продолжают исследования [23, 24] закономерностей движения элементов промежуточной прослойки, возникающей между телами, контактное взаимодействие которых сопровождается хрупким разрушением их поверхностей. Возможно также внесение элементов прослойки, например, частиц абразива, извне. Движение элементов прослойки, вызывающее изменение ее структуры, изменяет интенсивность воздействия прослойки на тела и тем самым влияет на процессы их изнашивания. В частности, изучение механизмов изменения структуры прослойки может оказаться полезным для формирования технологий полирования материалов. Как было указано в разделе 1.1, элементы прослойки считаются абсолютно твердыми, а ее толщина - существенно меньшей характерных размеров области контакта тел. Эксперименты [1] показывают три возможных случая распределения элементов прослойки вдоль области контакта (рис. 1.1) – равномерное на существенном расстоянии друг от друга, либо компактное - в виде цепочки соприкасающихся элементов, а также в виде округлых образований (блоков), образовавшихся после соединения и смятия многих элементов.

В рамках (внешней) задачи исследования части области контакта с трещиноподобными полостями реализуется вариант распределения элементов прослойки, для которого потенциальная энергия деформируемых частей тел вблизи области контакта минимальна. Если суммарная энергия группы отдельно распределенных элементов прослойки больше их энергии для варианта компактного размещения, то элементы прослойки распределяются внутри трещиноподобной полости компактно, в противном случае – отдельно. Элементы прослойки начнут

При подготовке данного раздела диссертации использованы следующие публикации, выполненные автором в соавторстве, в которых, согласно Положению о присуждении ученых степеней в МГУ, отражены основные результаты, положения и выводы исследования: [19, 20].

сминаться, когда потенциальная энергия образованных ими блоков станет меньше потенциальной энергии собранных в цепочку элементов.

Изменение потенциальной энергии не исчерпывает все причины изменения структуры прослойки. Для их выяснения следует перейти к внутренней задаче, на более мелкий (четвертый) масштабный уровень – от анализа частей области контакта тел, занятых элементами прослойки, к анализу взаимодействия находящихся рядом элементов, которое определяется напряженно-деформированным состоянием в их окрестности. Если предположить, что механические свойства контактирующих тел идентичны, а элементы прослойки – одинаковые и находятся в условиях близких силовых воздействий, то от рассматриваемой задачи можно перейти к задаче о динамике элементов прослойки между твердой плитой и деформируемой подстилающей поверхностью.

В работах [23, 24], где проводилось аналитическое и экспериментальное исследование этой задачи, рассматривалось движение двух шаровидных элементов (или двух блоков элементов) прослойки, позволяющее получить начальное представление о возможности возникновения внутри прослойки компактных образований. Частицы прослойки, расположенные в фиксированном промежутке между телами – твердой горизонтальной плитой под действием нормальной нагрузки $2\mathbf{P}$, и упругой неподвижной горизонтальной подстилающей поверхностью, моделируются твердыми шариками, центры которых находятся на расстоянии L друг от друга ($L \geq 2R$, где R – радиус шариков). Из-за наличия нормальных нагрузок $\mathbf{P}$ шарики вдавливаются в подстилающую поверхность и начинают взаимодействовать с малыми силами $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$, которые равны по величине и направлены навстречу друг другу: $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Они возникают в результате несимметричности областей контакта шариков и подстилающей поверхности – поля вертикальных смещений точек подстилающей поверхности из-за действия на нее обоих шариков накладываются друг на друга, и области контакта перекашиваются во внешнюю сторону шариков (рис. 2.1). Показано [23, 24], что $|\mathbf{F}_{12}|$ и $|\mathbf{F}_{21}|$ обратно пропорциональны квадрату расстояния L между центрами шариков. При

статической нагрузке наличие этих сил обычно не приводит к движению шариков. Однако эксперименты показывают, что при поступательном перемещении плиты шарики начинают смещаться не только в ее сторону, но и навстречу друг другу вдоль линии их центров. Темп сближения шариков не зависит от направления перемещения плиты, а скорость сближения возрастает по мере сокращения расстояния между шариками вплоть до значения $L = 2R$, при котором происходит их соприкосновение.

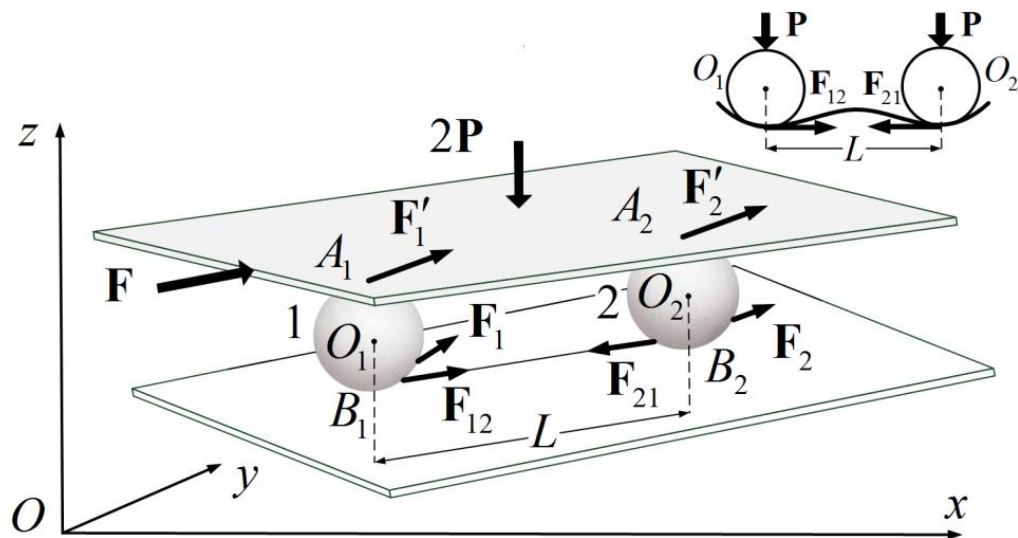


Рис. 2.1. Модель взаимодействия тел и элементов прослойки

На качественном уровне движение изначально покоящихся шариков навстречу друг другу можно объяснить, для простоты ограничившись случаем, когда линия O_1O_2 , соединяющая их центры, ортогональна направлению смещения плиты (рис. 2.2). Силу трения между i -м шариком и подстилающей поверхностью можно представить в виде $\mathbf{F}_i = \mathbf{G}_i + \mathbf{Q}_i$ ($i = 1, 2$), где составляющие $\mathbf{G}_i$ и $\mathbf{Q}_i$ направлены вдоль линии O_1O_2 и ортогонально ей соответственно, причем, согласно неравенству $|\mathbf{F}_i| \leq k|\mathbf{P}|$ (k – коэффициент трения между шариком и подстилающей поверхностью), величина составляющей $\mathbf{G}_i$ меньше силы трения покоя – своего максимального значения $k|\mathbf{P}| = |\mathbf{F}_{12}| = |\mathbf{F}_{21}|$, отвечающего случаю $\mathbf{Q}_i = \mathbf{0}$ неподвижной плиты. Тем

самым, шарики начинают сближаться вдоль линии O_1O_2 . Увеличение сил Q_i приводит к уменьшению сил G_i и возрастанию темпа сближения.

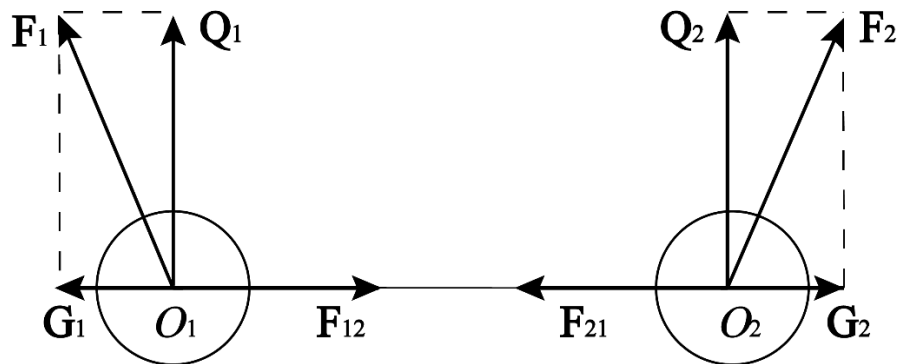


Рис. 2.2. Силы, действующие на шарики вдоль подстилающей поверхности (вид сверху)

В [23, 24] сближение шариков объясняется в рамках эффекта преобразованного трения [2], согласно которому, при движении тела под действием некоторой силы в режиме трения по поверхности появление дополнительной силы другого направления (в частности, силы взаимодействия шариков из-за перекоса областей их контакта с подстилающей поверхностью) приводит к перемещению тела и в направлении этой силы, как бы мала она ни была. Согласно экспериментам скорость сближения шариков мала по сравнению со скоростью смещения плиты, поэтому составляющие сил сухого трения между шариками и подстилающей поверхностью вдоль линии их центров заменялись силами вязкого трения, и, затем, рассматривалось уравнение равновесия этих сил и сил взаимодействия шариков. Свойства контакта шариков с плитой не принимались во внимание. Эксперименты показали, что этот подход, разработанный для случая, когда линия центров шариков ортогональна направлению смещения плиты, можно перенести и на случаи произвольного расположения шариков.

В настоящей работе контакт шариков с плитой описывается моделью микропроскальзывания, контакт шариков с подстилающей поверхностью — классической моделью сухого трения Кулона или моделью микропроскальзывания.

Движение полученной системы исследуется при помощи подходов фракционного анализа [22, 61] и теории сингулярных возмущений [8, 15], позволяющих применять методы малого параметра для построения предельных моделей динамики и проводить оценку их погрешности и пределов применимости. Путем предельного перехода к нулевым значениям ускорений точек контакта шариков и плиты и нулевым значениям составляющих ускорений центров шариков в направлении линии их центров построены модели, которые позволяют изучить возможность реализации условий непроскальзывания шариков относительно плиты и построить аналитические формулы, описывающие изменение расстояния между центрами шариков. Проведено численное моделирование динамики системы при различных конфигурациях взаимного расположения шариков для случая, когда плита совершает возвратно-поступательное движение под действием заданной периодической по времени силы, и сравнение полученных результатов с аналитическими и экспериментальными результатами [23, 24].

2.2. Постановка задачи

Рассматривается следующая модель динамики системы. В фиксированном промежутке между неподвижной горизонтальной подстилающей поверхностью и подвижной горизонтальной плитой находятся два жестких шарика 1 и 2 (элементы прослойки) массы m и радиуса R (рис. 2.1). К плите, которая считается достаточно жесткой по сравнению с подстилающей поверхностью, приложена постоянная нормальная нагрузка $2P$, под действием которой шарики вдавливаются в подстилающую поверхность (далее для простоты в нее включается сила тяжести шариков и плиты), и сила F заданного направления по касательной к ее плоскости.

В рамках теории качения (см. [51, 68] и обзоры [13, 15, 16]) контакт шариков с плитой и подстилающей поверхностью предполагается точечным: шарики

взаимодействуют с плитой в точках A_1 и A_2 и с подстилающей поверхностью в точках B_1 и B_2 . Вдоль линии O_1O_2 центров O_1 и O_2 шариков 1 и 2 на них в точках B_1 и B_2 действуют силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$, обусловленные несимметричностью областей их контакта с подстилающей поверхностью, эти силы равны по величине и направлены навстречу друг другу.

Введем неподвижную ортогональную систему координат $Oxyz$, ось Oy которой направлена вдоль линии смещения плиты, ось Oz - против действия нормальной нагрузки $2\mathbf{P}$ (рис. 2.3). Положение рассматриваемой системы зададим следующими обобщенными координатами: Y – смещение плиты вдоль оси Oy , X_i и Y_i - смещение i -го шарика ($i = 1, 2$) вдоль осей Ox и Oy соответственно, Φ_{x_i} и Φ_{y_i} – его углы поворота вокруг осей O_ix_i и O_iy_i подвижной системы координат $O_ix_iy_iz_i$, которые проходят через точку O_i параллельно осям Ox и Oy .

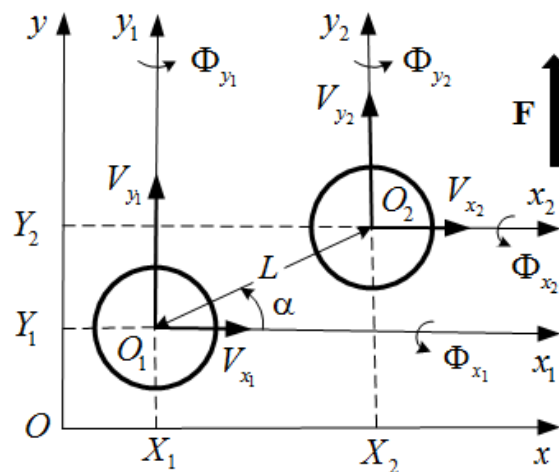


Рис. 2.3. Взаимодействие тел и элементов прослойки. Вид со стороны оси Oz

Динамика системы описывается уравнениями изменения количества движения плиты в проекциях на оси Ox и Oy , уравнениями изменения количества движения и кинетического момента i -го шарика в проекциях на оси O_ix_i и O_iy_i ($i = 1, 2$) и необходимыми кинематическими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\dot{Y} &= V_y, \quad \dot{X}_i = V_{x_i}, \quad \dot{Y}_i = V_{y_i}, \quad \dot{\Phi}_{x_i} = \Omega_{x_i}, \quad \dot{\Phi}_{y_i} = \Omega_{y_i} \quad (i=1, 2), \\
0 &= -F'_{x_1} - F'_{x_2}, \quad M\dot{V}_y = F - F'_{y_1} - F'_{y_2}, \\
m\dot{V}_{x_1} &= F_{x_1} + F'_{x_1} + F_{12} \cos \alpha, \quad m\dot{V}_{x_2} = F_{x_2} + F'_{x_2} - F_{12} \cos \alpha, \\
m\dot{V}_{y_1} &= F_{y_1} + F'_{y_1} + F_{12} \sin \alpha, \quad m\dot{V}_{y_2} = F_{y_2} + F'_{y_2} - F_{12} \sin \alpha, \\
I\dot{\Omega}_{x_1} &= F_{y_1} R - F'_{y_1} R + F_{12} R \sin \alpha, \quad I\dot{\Omega}_{x_2} = F_{y_2} R - F'_{y_2} R - F_{12} R \sin \alpha, \\
I\dot{\Omega}_{y_1} &= -F_{x_1} R + F'_{x_1} R - F_{12} R \cos \alpha, \quad I\dot{\Omega}_{y_2} = -F_{x_2} R + F'_{x_2} R + F_{12} R \cos \alpha, \\
\cos \alpha &= (X_2 - X_1)/L, \quad \sin \alpha = (Y_2 - Y_1)/L, \quad L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени T ; M – масса плиты при учете нормальной нагрузки; α – угол между линией O_1O_2 центров шариков и осью Ox ; $I = 2mR^2/5$ – момент инерции шариков; F'_{x_i} , F'_{y_i} и F_{x_i} , F_{y_i} ($i = 1, 2$) – проекции касательных составляющих $\mathbf{F}'_i$ и $\mathbf{F}_i$ сил взаимодействия шариков с плитой (в точках A_i) и с подстилающей поверхностью (в точках B_i) соответственно, F – проекция силы $\mathbf{F}$. Расстояние L между центрами O_1 и O_2 шариков должно удовлетворять неравенству

$$L \geq 2R. \tag{2.2}$$

Масса шарика считается существенно меньшей массы плиты:

$$m \ll M. \tag{2.3}$$

Выражением для проекции F_{12} силы $\mathbf{F}_{12}$ служит [23, 24]

$$F_{12} = a/L^2, \quad a = (1 - \nu^2)P^2/(\pi E) > 0, \tag{2.4}$$

где E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона подстилающей поверхности, $P = |\mathbf{P}|$ – нормальная реакция.

При моделировании микропроскальзывания шариков относительно плиты проекции F'_{x_i} , F'_{y_i} ($i = 1, 2$) задаются формулами [15, 64]

$$F'_{x_i} = -kP \frac{V_{A_i x}}{\varepsilon_1 \sqrt{V_{x_i}^2 + V_{y_i}^2}}, \quad F'_{y_i} = -kP \frac{V_{A_i y}}{\varepsilon_1 \sqrt{V_{x_i}^2 + V_{y_i}^2}}, \quad 0 < \varepsilon_1 \ll 1, \tag{2.5}$$

которые можно использовать при $|\mathbf{V}_{A_i}| < \varepsilon_1 |\mathbf{V}_i|$, где $\mathbf{V}_{A_i}$ – скорости точек A_i , определяемые своими проекциями $V_{A_i x}$ и $V_{A_i y}$ на оси $O_i x_i$ и $O_i y_i$ (или, что то же самое, на оси Ox и Oy), $\mathbf{V}_i$ – скорости центров O_i шариков. Через k' обозначен коэффициент трения между шариками и плитой, параметр ε_1 определяет свойство малой упругой или упругопластической касательной деформируемости плиты вблизи точек A_i . Неравенства, задающие область корректного применения формул (2.5), можно переписать в эквивалентной форме:

$$F_{x_i}'^2 + F_{y_i}'^2 < (k'P)^2 \quad (i=1, 2). \quad (2.6)$$

При моделировании микропроскальзывания шариков относительно подстилающей поверхности выражения для проекций F_{x_i} , F_{y_i} ($i=1, 2$) определим аналогично (2.5):

$$F_{x_i} = -kP \frac{V_{B_i x}}{\varepsilon_2 \sqrt{V_{x_i}^2 + V_{y_i}^2}}, \quad F_{y_i} = -kP \frac{V_{B_i y}}{\varepsilon_2 \sqrt{V_{x_i}^2 + V_{y_i}^2}}, \quad 0 < \varepsilon_2 \ll 1, \quad (2.7)$$

где $V_{B_i x}$ и $V_{B_i y}$ – проекции скоростей $\mathbf{V}_{B_i}$ точек B_i , на оси $O_i x_i$ и $O_i y_i$, k – коэффициент трения между шариками и подстилающей поверхностью. Формулы (2.7) справедливы для $|\mathbf{V}_{B_i}| < \varepsilon_2 |\mathbf{V}_i|$; параметр ε_2 характеризует свойство малой касательной деформируемости подстилающей поверхности вблизи точек B_i . Аналогии (2.6) записываются в форме

$$F_{x_i}^2 + F_{y_i}^2 < (kP)^2 \quad (i=1, 2). \quad (2.8)$$

Выражения (2.5) и (2.7) для $V_{A_i x}$, $V_{A_i y}$ и $V_{B_i x}$, $V_{B_i y}$ имеют вид

$$\begin{aligned} V_{A_i x} &= V_{x_i} + \Omega_{y_i} R, & V_{A_i y} &= V_{y_i} - \Omega_{x_i} R - V_y, \\ V_{B_i x} &= V_{x_i} - \Omega_{y_i} R, & V_{B_i y} &= V_{y_i} + \Omega_{x_i} R. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку плита гораздо жестче подстилающей поверхности, примем

$$\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2. \quad (2.10)$$

При моделировании скольжения шариков относительно подстилающей поверхности проекции F_{x_i} , F_{y_i} ($i = 1, 2$) зададим при помощи закона трения Кулона:

$$F_{x_i} = -kP \frac{V_{B_i x}}{\sqrt{V_{B_i x}^2 + V_{B_i y}^2}}, \quad F_{y_i} = -kP \frac{V_{B_i y}}{\sqrt{V_{B_i x}^2 + V_{B_i y}^2}}, \quad (2.11)$$

Для (2.11), в отличие от (2.8), имеет место равенство

$$F_{x_i}^2 + F_{y_i}^2 = (kP)^2 \quad (i = 1, 2). \quad (2.12)$$

Будем считать коэффициенты трения k и k' величинами одного порядка и для упрощения исследования положим

$$k = k'. \quad (2.13)$$

Ограничиваясь случаем, когда скорости смещения центров O_i шариков вдоль оси Ox по величине существенно меньше скорости их смещения вдоль оси Oy , будем далее рассматривать отрезок $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Тем самым для режима микропроскальзывания шариков относительно плиты (в точках A_i) имеем

$$|V_{x_i}| \sim |\Omega_{y_i} R| \ll |V_{y_i}| \sim |\Omega_{x_i} R| \sim |V_y| \quad (i = 1, 2). \quad (2.14)$$

При исследовании движения шариков с микропроскальзыванием в точках B_i с учетом (2.10) и (2.14) будем использовать оценки

$$|V_{A_i x}| \ll |V_{A_i y}| \sim \varepsilon_1 |V_y| \ll |V_{B_i x}| \sim |V_{B_i y}| \sim \varepsilon_2 |V_y| \ll |V_y| \quad (i = 1, 2). \quad (2.15)$$

Рассмотрим случай, когда характерные значения скоростей точек B_i контакта шариков и подстилающей поверхности соизмеримы с характерными значениями скоростей их центров O_i в направлении, ортогональном движению плиты:

$$\varepsilon \sim |V_{x_i} / V_y| \sim \varepsilon_2 \quad (i = 1, 2). \quad (2.16)$$

Будем изучать случай движения шариков в режиме скольжения в точках B_i , предполагая

$$\varepsilon_1 \ll \varepsilon, \quad (2.17)$$

тогда скорости точек A_i их контакта с плитой существенно меньше скоростей точек O_i в направлении Ox , и можно воспользоваться отвечающими (2.14) и (2.17) оценками

$$|V_{A_ix}| \sim |V_{A_iy}| \sim \varepsilon_1 |V_y| \ll |V_{B_ix}| \sim |V_{x_i}| \sim \varepsilon |V_y| \ll |V_{B_iy}| \sim |V_y| \quad (i=1, 2). \quad (2.18)$$

2.3. Случай микропроскальзывания элементов прослойки относительно плиты и скольжения относительно подстилающей поверхности

2.3.1. Построение асимптотических моделей динамики системы

Рассмотрим движение системы, отвечающее предположениям [23, 24]. В случае (2.3), (2.13), (2.14), (2.17), (2.18) оно развивается в четырех сильно разнесенных временных масштабах, оценками которых служат

$$T_{V_{A_ix}} \sim T_{V_{A_iy}} \ll T_{V_{x_i}} \ll T_{V_{y_i}} \ll T_{V_y} \quad (i=1, 2). \quad (2.19)$$

Здесь $T_{V_{A_ix}} = mV_{A_ix}^* / kP$ и $T_{V_{A_iy}} = mV_{A_iy}^* / kP$; $T_{V_{x_i}} = mV_{x_i}^* / kP$; $T_{V_{y_i}} = mV_{y_i}^* / kP$; $T_{V_y} = MV_{y^*} / kP$ – постоянные времени изменения переменных V_{A_ix} и V_{A_iy} ; V_{x_i} , Ω_{y_i} и V_{B_ix} ; V_{y_i} , Ω_{x_i} и V_{B_iy} ; V_y соответственно под действием касательных составляющих контактных сил; нижним индексом * обозначены характерные значения переменных.

В соответствии с подходами фракционного анализа [15, 22, 62] для приведения системы (2.1), (2.2)–(2.6), (2.9), (2.11) к сингулярно возмущенному виду заменим набор ее динамических переменных $V_y, V_{x_i}, V_{y_i}, \Omega_{x_i}, \Omega_{y_i}$ ($i=1, 2$) набором $V_y, V_{x_i}, V_{y_i}, V_{A_ix}, V_{A_iy}$, содержащим быстрые (изменяющиеся на временах $T \sim T_{V_{A_ix}} \sim T_{V_{A_iy}}$ из (2.19)) переменные V_{A_ix} и V_{A_iy} , которые, в соответствии с (2.5),

входят в уравнения с «большим» по величине коэффициентом $1/\varepsilon_1$. Системой в новых переменных служит

$$\begin{aligned}
\dot{Y} &= V_y, \quad \dot{X}_i = V_{x_i}, \quad \dot{Y}_i = V_{y_i}, \quad \dot{\Phi}_{x_i} = \Omega_{x_i}, \quad \dot{\Phi}_{y_i} = \Omega_{y_i} \quad (i=1, 2), \\
0 &= -F'_{x_1} - F'_{x_2}, \quad M\dot{V}_y = F - F'_{y_1} - F'_{y_2}, \\
m\dot{V}_{x_1} &= F_{x_1} + F'_{x_1} + F_{12} \cos \alpha, \quad m\dot{V}_{x_2} = F_{x_2} + F'_{x_2} - F_{12} \cos \alpha, \\
m\dot{V}_{y_1} &= F_{y_1} + F'_{y_1} + F_{12} \sin \alpha, \quad m\dot{V}_{y_2} = F_{y_2} + F'_{y_2} - F_{12} \sin \alpha, \\
m\dot{V}_{A_1x} &= c_2(F_{x_1} + F_{12} \cos \alpha) + c_1F'_{x_1}, \\
m\dot{V}_{A_2x} &= c_2(F_{x_2} - F_{12} \cos \alpha) + c_1F'_{x_2}, \\
m\dot{V}_{A_1y} &= c_2(F_{y_1} + F_{12} \sin \alpha) + c_1F'_{y_1} - m(F - F'_{y_1} - F'_{y_2})/M, \\
m\dot{V}_{A_2y} &= c_2(F_{y_2} - F_{12} \sin \alpha) + c_1F'_{y_2} - m(F - F'_{y_1} - F'_{y_2})/M, \\
\cos \alpha &= (X_2 - X_1)/L, \quad \sin \alpha = (Y_2 - Y_1)/L, \quad L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}, \\
c_1 &= (I + mR^2)/I, \quad c_2 = (I - mR^2)/I.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Выражения F_{12} , F'_{x_i} , F'_{y_i} , F_{x_i} , F_{y_i} ($i = 1, 2$) даются формулами (2.4), (2.5) и (2.11).

В соответствии с (2.9) исключаемые из системы динамические переменные Ω_{x_i} , Ω_{y_i} и переменные V_{B_1x} , V_{B_1y} из (2.11) связаны с переменными нового набора соотношениями

$$\begin{aligned}
\Omega_{x_i} &= (V_{y_i} - V_y - V_{A_1y})/R, \quad \Omega_{y_i} = (V_{A_1x} - V_{x_i})/R, \\
V_{B_1x} &= 2V_{x_i} - V_{A_1x}, \quad V_{B_1y} = 2V_{y_i} - V_y - V_{A_1y}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Далее будет удобно рассматривать уравнение изменения расстояния между центрами O_1 и O_2 шариков и уравнение изменения угла между линией O_1O_2 центров шариков и осью Ox , которые вытекают из (2.1):

$$\dot{L} = (V_{x_2} - V_{x_1}) \cos \alpha + (V_{y_2} - V_{y_1}) \sin \alpha, \quad (\sin \alpha)' = (V_{y_2} - V_{y_1} - \dot{L} \sin \alpha)/L. \tag{2.22}$$

Для нормализации полученной системы на изучаемом классе движения заменим переменные и время соответствующими безразмерными аналогами:

$$\begin{aligned}
T &= T_* t, \quad X_i = X_{i*} x_i, \quad Y_i = Y_{i*} y_i, \quad Y = Y_* y, \quad L = L_* l, \quad \Phi_{x_i} = \Phi_{x_i*} \phi_{x_i}, \quad \Phi_{y_i} = \Phi_{y_i*} \phi_{y_i}, \\
V_{x_i} &= V_{x_i*} v_{x_i}, \quad V_{y_i} = V_{y_i*} v_{y_i}, \quad V_y = V_{y*} v_y, \quad \Omega_{x_i} = \Omega_{x_i*} \omega_{x_i}, \quad \Omega_{y_i} = \Omega_{y_i*} \omega_{y_i}, \\
V_{A_{ix}} &= V_{A_{ix}*} v_{A_{ix}}, \quad V_{A_{iy}} = V_{A_{iy}*} v_{A_{iy}}, \quad V_{B_{ix}} = V_{B_{ix}*} v_{B_{ix}}, \quad V_{B_{iy}} = V_{B_{iy}*} v_{B_{iy}}, \quad F = F_* f, \\
F_{12} &= F_{12*} f_{12}, \quad F'_{x_i} = F'_{x_i*} f'_{x_i}, \quad F'_{y_i} = F'_{y_i*} f'_{y_i}, \quad F_{x_i} = F_{x_i*} f_{x_i}, \quad F_{y_i} = F_{y_i*} f_{y_i} \quad (i=1, 2).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Как и ранее, нижним индексом * обозначены характерные значения рассматриваемых величин. Положим

$$\begin{aligned}
X_{i*} &= Y_{i*} = Y_* = L_*, \quad \Phi_{x_i*} = \Phi_{y_i*} = L_* / R, \\
V_{x_i*} &= \Omega_{y_i*} R = \varepsilon V_{y*}, \quad V_{y_i*} = \Omega_{x_i*} R = V_{y*}, \quad V_{y*} = Y_* / T_{V_y}, \\
V_{A_{ix}*} &= V_{A_{iy}*} = \varepsilon_1 V_{y*}, \quad V_{B_{ix}*} = \Omega_{y_i*} R = V_{x_i*} = \varepsilon V_{y*}, \quad V_{B_{iy}*} = \Omega_{x_i*} R = V_{y_i*} = V_{y*}, \\
F_{12*} &= a / L_*^2 = F_* = F'_{x_i*} = F'_{y_i*} = F_{x_i*} = F_{y_i*} = kP.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Изучая характерные времена изменения скорости плиты, примем $T_* = T_{V_y}$.

Будем рассматривать отношения

$$\frac{T_{V_{y_i}}}{T_{V_y}} = \frac{m}{M} = \mu, \quad \frac{T_{V_{x_i}}}{T_{V_y}} = \frac{V_{x_i*}}{V_{y*}} \mu = \varepsilon \mu, \quad \frac{T_{V_{A_{ix}}}}{T_{V_y}} = \frac{T_{V_{A_{iy}}}}{T_{V_y}} = \frac{V_{A_{ix}*}}{V_{y*}} \mu = \frac{V_{A_{iy}*}}{V_{y*}} \mu = \varepsilon_1 \mu \tag{2.25}$$

в качестве малых параметров, которые далее устремим к нулю. После нормализации получаем сингулярно возмущенную систему уравнений с иерархической структурой малых параметров [8, 15] $0 < \varepsilon_1 \mu \ll \varepsilon \mu \ll \mu \ll 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= v_y, \quad \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon v_{x_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_{y_i}, \quad \frac{d\phi_{x_i}}{dt} = \omega_{x_i}, \quad \frac{d\phi_{y_i}}{dt} = \varepsilon \omega_{y_i} \quad (i=1, 2), \\
0 &= -f'_{x_1} - f'_{x_2}, \quad \frac{dv_y}{dt} = f - f'_{y_1} - f'_{y_2}, \\
\mu \frac{dv_{y_1}}{dt} &= f_{y_1} + f'_{y_1} + f_{12} \sin \alpha, \quad \mu \frac{dv_{y_2}}{dt} = f_{y_2} + f'_{y_2} - f_{12} \sin \alpha, \\
\varepsilon \mu \frac{dv_{x_1}}{dt} &= f_{x_1} + f'_{x_1} + f_{12} \cos \alpha, \quad \varepsilon \mu \frac{dv_{x_2}}{dt} = f_{x_2} + f'_{x_2} - f_{12} \cos \alpha, \\
\varepsilon_1 \mu \frac{dv_{A_{ix}}}{dt} &= c_2 (f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha) + c_1 f'_{x_1}, \quad \varepsilon_1 \mu \frac{dv_{A_{ix}}}{dt} = c_2 (f_{x_2} - f_{12} \cos \alpha) + c_1 f'_{x_2},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\varepsilon_1 \mu \frac{dv_{A_1 y}}{dt} = c_2(f_{y_1} + f_{12} \sin \alpha) + c_1 f'_{y_1} - \mu(f - f'_{y_1} - f'_{y_2}),$$

$$\varepsilon_1 \mu \frac{dv_{A_2 y}}{dt} = c_2(f_{y_2} - f_{12} \sin \alpha) + c_1 f'_{y_2} - \mu(f - f'_{y_1} - f'_{y_2}),$$

$$\cos \alpha = (x_2 - x_1)/l, \quad \sin \alpha = (y_2 - y_1)/l, \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$f_{x_i} = -\frac{\varepsilon v_{B_i x}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{B_i x}^2 + v_{B_i y}^2}}, \quad f_{y_i} = -\frac{v_{B_i y}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{B_i x}^2 + v_{B_i y}^2}}, \quad (2.27)$$

$$f'_{x_i} = -\frac{v_{A_i x}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}}, \quad f'_{y_i} = -\frac{v_{A_i y}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}} \quad (i=1, 2), \quad f_{12} = \frac{1}{l^2},$$

$$\begin{aligned} \omega_{x_i} &= v_{y_i} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_i y}, & \omega_{y_i} &= \varepsilon_1 v_{A_i x} / \varepsilon - v_{x_i}, \\ v_{B_i x} &= 2v_{x_i} - \varepsilon_1 v_{A_i x} / \varepsilon, & v_{B_i y} &= 2v_{y_i} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_i y}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Уравнения (2.22) принимают вид

$$\frac{dl}{dt} = \varepsilon(v_{x_2} - v_{x_1}) \cos \alpha + (v_{y_2} - v_{y_1}) \sin \alpha, \quad \frac{d(\sin \alpha)}{dt} = \frac{1}{l}(v_{y_2} - v_{y_1} - \frac{dl}{dt} \sin \alpha). \quad (2.29)$$

Неравенства (2.2), (2.6), определяющие область допустимых значений переменных системы, записываются в форме:

$$l \geq 2r, \quad r = R\sqrt{kP/a}, \quad f'^2_{x_i} + f'^2_{y_i} < 1 \quad (i=1, 2). \quad (2.30)$$

Полагая $\varepsilon_1 \mu = 0$ и считая, что другие параметры при $\varepsilon_1 \mu \rightarrow 0$ принимают конечные значения, составим невозмущенную (вырожденную) для (2.26)–(2.28) систему первой очереди, получаемую заменой дифференциальных уравнений (2.26), описывающих изменение $v_{A_i x}$ и $v_{A_i y}$, конечными уравнениями

$$\begin{aligned} 0 &= c_2(f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha) + c_1 f'_{x_1}, & 0 &= c_2(f_{x_2} - f_{12} \cos \alpha) + c_1 f'_{x_2}, \\ 0 &= c_2(f_{y_1} + f_{12} \sin \alpha) + c_1 f'_{y_1} - \mu(f - f'_{y_1} - f'_{y_2}), \\ 0 &= c_2(f_{y_2} - f_{12} \sin \alpha) + c_1 f'_{y_2} - \mu(f - f'_{y_1} - f'_{y_2}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Остальные уравнения системы и выражения (2.27), (2.28) остаются прежними.

Отбрасывание малого параметра $\varepsilon_1 \mu$ отвечает пренебрежению ускорениями точек A_i , то есть наложению первичных связей Дирака вида (1.33):

$$p_{x_i} + (mR/I)p_{\Phi y_i} = 0, \quad p_{y_i} - (mR/I)p_{\Phi x_i} - (m/M)p_y = 0 \quad (i=1, 2) \quad (2.32)$$

где $p_{x_i} = mV_{x_i}$, $p_{y_i} = mV_{y_i}$, $p_y = MV_y$, $p_{\Phi x_i} = I\Omega_{x_i}$, $p_{\Phi y_i} = I\Omega_{y_i}$ – ее обобщенные импульсы. Размерные аналоги (2.31) являются соответствующими уравнениями лагранжевых связей – условиями сохранения связей (2.32) на траекториях системы, которые задаются вторым уравнением (1.47). Они (без учета выражений (2.5) для F'_{x_i} и F'_{y_i}) совпадают с уравнениями для отыскания реакций F'_{x_i} и F'_{y_i} неголономной модели с условиями непроскальзывания шариков относительно плиты в точках A_i (см. (2.9)):

$$0 = V_{x_i} + \Omega_{y_i} R, \quad 0 = V_{y_i} - \Omega_{x_i} R - V_y \quad (i=1, 2). \quad (2.33)$$

Однако для построенной системы скорости точек A_i заранее не принимаются равными нулю, то есть (2.33) заранее не считаются выполненными. Проведем ее исследование.

Складывая первое и второе уравнения (2.31) и используя уравнение (2.26)

$$f'_{x_1} = -f'_{x_2}, \quad (2.34)$$

приходим к условию

$$f_{x_1} = -f_{x_2}. \quad (2.35)$$

Из уравнений (2.26), описывающих изменение переменных v_{x_i} , с учетом (2.34) и (2.35) получает $dv_{x_1} + dv_{x_2} = 0$, откуда в случае $v_{x_1}(0) = -v_{x_2}(0)$ (так будет, например, если шарики в начальный момент времени находятся в покое) будем иметь

$$v_{x_1} = -v_{x_2}. \quad (2.36)$$

В [23, 24] условия (2.35) и (2.36) принимались в качестве исходного предположения. Из (2.36) и второго уравнения (2.26) следует равенство

$$x_2 + x_1 = x_2(0) + x_1(0), \quad (2.37)$$

согласно которому в ходе движения системы абсцисса центра отрезка O_1O_2 в системе Oxy остается неизменной.

Из первых двух уравнений (2.31) и условий (2.34), (2.35) следует

$$f'_{x_1} = -f'_{x_2} = -c_2(f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha) / c_1. \quad (2.38)$$

В соответствии с (2.35) из уравнений $f'^2_{x_i} + f'^2_{y_i} = 1$ ($i = 1, 2$) – безразмерных аналогов уравнений (2.12) – получаем

$$|f_{y_1}| = |f_{y_2}|. \quad (2.39)$$

Из выражений (2.27) для f_{x_i} и условий (2.35) имеем $\operatorname{sgn} v_{B_1x} = -\operatorname{sgn} v_{B_2x}$, и, следовательно,

$$-v_{B_1x} / v_{B_2x} = |v_{B_1y} / v_{B_2y}|. \quad (2.40)$$

Согласно двум последним уравнениям (2.31) справедливы равенства

$$\begin{aligned} c_2(f_{y_1} + f_{y_2}) + (c_1 + 2\mu)(f'_{y_1} + f'_{y_2}) - 2\mu f &= 0, \\ c_2(f_{y_1} - f_{y_2} + 2f_{12} \sin \alpha) + c_1(f'_{y_1} - f'_{y_2}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Рассмотрим возможные варианты раскрытия модулей в (2.39), начав со случая

$$f_{y_1} = -f_{y_2}. \quad (2.42)$$

Из (2.41), (2.42) получаем равенство $f'_{y_1} + f'_{y_2} = 2\mu f / (c_1 + 2\mu)$, подставив которое в уравнения (2.26), описывающие изменение переменных v_y , v_{y_1} и v_{y_2} , приходим к уравнениям

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{c_1}{c_1 + 2\mu} f, \quad \frac{dv_{y_1}}{dt} + \frac{dv_{y_2}}{dt} = \frac{2f}{c_1 + 2\mu}.$$

Тем самым, получаем $dv_{y_1} + dv_{y_2} = 2dv_y / c_1$, откуда при $v_{y_1}(0) + v_{y_2}(0) = 2v_y(0) / c_1$ (это верно, например, если шарики и плита начинают движение из состояния покоя), имеем $v_{y_1} + v_{y_2} = 2v_y / c_1$. Отсюда с учетом обозначений (2.20) для c_1 и c_2 и равенства

$v_{B_1y} + v_{B_2y} = 2(v_{y_1} + v_{y_2} - v_y) - \varepsilon_1(v_{A_1y} + v_{A_2y})$, вытекающего из выражений (2.28) для v_{B_1y} , получаем

$$v_{B_1y} + v_{B_2y} = 2c_2 v_y / c_1 - \varepsilon_1(v_{A_1y} + v_{A_2y}). \quad (2.43)$$

Из формул (2.28) для v_{B_1x} и (2.36) имеем

$$-\frac{v_{B_1x}}{v_{B_2x}} = \frac{2v_{x_1} - \varepsilon_1 v_{A_1x} / \varepsilon}{2v_{x_1} + \varepsilon_1 v_{A_2x} / \varepsilon} = 1 + O(\varepsilon_1 / \varepsilon),$$

следовательно, равенство (2.40) при условии $\operatorname{sgn} v_{B_1y} = -\operatorname{sgn} v_{B_2y}$, получаемом из (2.42) и выражений (2.27) для f_{y_i} , принимает вид $v_{B_1y} = -v_{B_2y} + O(\varepsilon_1 / \varepsilon)$. С учетом (2.43) отсюда следует равенство $v_y = O(\varepsilon_1 + \varepsilon_1 / \varepsilon)$, противоречащее условию конечности значений v_y . Тем самым случай (2.42) не реализуется.

Для второго случая раскрытия модулей в (2.39) имеем

$$f_{y_1} = f_{y_2}. \quad (2.44)$$

Из (2.41) и (2.44) получаем

$$\begin{aligned} f'_{y_1} &= (-c_2 f_{y_1} + \mu f) / (c_1 + 2\mu) - c_2 f_{12} \sin \alpha / c_1, \\ f'_{y_2} &= (-c_2 f_{y_1} + \mu f) / (c_1 + 2\mu) + c_2 f_{12} \sin \alpha / c_1. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Из (2.27) и (2.38) с учетом (2.36) следуют равенства

$$\begin{aligned} \frac{v_{A_1x}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}} &= \frac{c_2}{c_1} \left(-\varepsilon v_{B_1x} / \sqrt{\varepsilon^2 v_{B_1x}^2 + v_{B_1y}^2} + f_{12} \cos \alpha \right), \\ \frac{v_{A_2x}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_2}^2}} &= -\frac{c_2}{c_1} \left(-\varepsilon v_{B_1x} / \sqrt{\varepsilon^2 v_{B_1x}^2 + v_{B_1y}^2} + f_{12} \cos \alpha \right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

откуда после подстановки выражений (2.28) для v_{B_1x} и v_{B_1y} получаем приближенные выражения:

$$\begin{aligned} v_{A_1x} &= \frac{c_2}{c_1} |v_{y_1}| (-2\varepsilon v_{x_1} / |v_{B_1y}| + f_{12} \cos \alpha) + O(\varepsilon_1 + \varepsilon^2), \\ v_{A_2x} &= -\frac{c_2}{c_1} |v_{y_2}| (-2\varepsilon v_{x_1} / |v_{B_1y}| + f_{12} \cos \alpha) + O(\varepsilon_1 + \varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.47)$$

где на выбранном уровне точности можно принять $v_{B_1y} = 2v_{y_1} - v_y$.

Из (2.27), (2.36) и (2.45) вытекают приближенные выражения

$$\begin{aligned} v_{A_1y} &= -\frac{|v_{y_1}|}{c_1 + 2\mu} \left(c_2 \operatorname{sgn} v_{B_1y} + \mu f \right) + \frac{c_2}{c_1} |v_{y_1}| f_{12} \sin \alpha + O(\varepsilon^2), \\ v_{A_2y} &= -\frac{|v_{y_2}|}{c_1 + 2\mu} \left(c_2 \operatorname{sgn} v_{B_1y} + \mu f \right) - \frac{c_2}{c_1} |v_{y_2}| f_{12} \sin \alpha + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.48)$$

где согласно (2.28) $\operatorname{sgn} v_{B_1y} = \operatorname{sgn}(2v_{y_1} - v_y)$.

С учетом (2.34)–(2.36), (2.38), (2.44), (2.45), (2.47), (2.48) уравнения вырожденной системы первой очереди записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v_y, \quad \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon v_{x_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_{y_i}, \quad \frac{d\varphi_{x_i}}{dt} = \omega_{x_i}, \quad \frac{d\varphi_{y_i}}{dt} = \varepsilon \omega_{y_i} \quad (i=1, 2), \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{2c_2 f_{y_1} + c_1 f}{c_1 + 2\mu}, \quad \mu \frac{dv_{y_1}}{dt} = \left(1 - \frac{c_2}{c_1 + 2\mu}\right) f_{y_1} + \frac{\mu f}{c_1 + 2\mu} + \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) f_{12} \sin \alpha, \\ \mu \frac{dv_{y_2}}{dt} &= \left(1 - \frac{c_2}{c_1 + 2\mu}\right) f_{y_1} + \frac{\mu f}{c_1 + 2\mu} - \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) f_{12} \sin \alpha, \\ \varepsilon \mu \frac{dv_{x_1}}{dt} &= \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) (f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha), \quad v_{x_2} = -v_{x_1}, \\ \cos \alpha &= (x_2 - x_1)/l, \quad \sin \alpha = (y_2 - y_1)/l, \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ f_{x_1} &= -f_{x_2} = -\frac{\varepsilon v_{B_1x}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{B_1x}^2 + v_{B_1y}^2}}, \quad f_{y_1} = f_{y_2} = -\frac{v_{B_1y}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{B_1x}^2 + v_{B_1y}^2}}, \quad f_{12} = \frac{1}{l^2}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Выражения f'_{x_i} , f'_{y_i} , v_{A_1x} и v_{A_1y} ($i=1, 2$) вычисляются из (2.38), (2.45), (2.47) и (2.48), выражения (2.28) остаются прежними. Согласно формулам для v_{A_1x} и v_{A_1y} , выражения для f_{x_1} и f_{y_1} , используемые в динамических уравнениях (2.49), записаны с погрешностью $O(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon^2)$ и $O(\varepsilon_1 \varepsilon^2)$ соответственно, выражения ω_{x_i} и v_{B_1y} – с погрешностью $O(\varepsilon_1 \varepsilon^2)$, выражения ω_{y_i} и v_{B_1x} – с погрешностью

$O(\varepsilon_1^2/\varepsilon + \varepsilon_1\varepsilon)$. Область изменения переменных системы (2.49) определяется неравенствами (2.30).

Уравнения (2.29) после учета (2.36) принимают вид

$$\frac{dl}{dt} = -2\varepsilon v_{x_1} \cos \alpha + (v_{y_2} - v_{y_1}) \sin \alpha, \quad \frac{d(\sin \alpha)}{dt} = \frac{1}{l}(v_{y_2} - v_{y_1} - \frac{dl}{dt} \sin \alpha). \quad (2.50)$$

Приняв в (2.49) $\varepsilon\mu = 0$ и полагая, что остальные параметры при $\varepsilon\mu \rightarrow 0$ принимают конечные значения, получим вырожденную для (2.26)–(2.28) систему второй очереди, к которой можно прийти заменой дифференциального уравнения, описывающего изменение переменной v_{x_1} , соответствующим конечным уравнением $0 = f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha$, которое согласно (2.35) эквивалентно уравнениям

$$0 = f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha, \quad 0 = f_{x_2} - f_{12} \cos \alpha, \quad (2.51)$$

а остальные уравнения и выражения (2.49) оставить прежними.

Из (2.38) и (2.51) следует

$$f'_{x_i} = 0 \quad (i=1, 2). \quad (2.52)$$

Из (2.51) и выражения (2.49) для f_{x_1} имеем

$$-\varepsilon v_{B_1x} / \sqrt{\varepsilon^2 v_{B_1x}^2 + v_{B_1y}^2} + f_{12} \cos \alpha = 0, \quad (2.53)$$

откуда, принимая во внимание (2.47) (напомним, что эти выражения следовали из (2.46)) приходим уравнениям, запрещающим проскальзывания шариков относительно плиты в направлении Ox :

$$v_{A_ix} = 0 \quad (i=1, 2). \quad (2.54)$$

(Последние нетрудно легко получить и при помощи выражений (2.27) для f'_{x_i} и уравнений (2.52).)

Из (2.54) и выражений (2.28) для ω_{y_i} и v_{B_ix} следует

$$\omega_{y_i} = -v_{x_i}, \quad v_{B_ix} = 2v_{x_i} \quad (i=1, 2). \quad (2.55)$$

Из (2.40), второго равенства (2.55) и равенства $\text{sgn } v_{B_1y} = \text{sgn } v_{B_2y}$, вытекающего из (2.44) и выражений (2.27) для f_{y_i} , получаем

$$v_{B_1y} = v_{B_2y}. \quad (2.56)$$

Подстановка второго равенства (2.55) в (2.53) с учетом выражения (2.49) для f_{12} (и совпадения знаков v_{B_1x} , v_{x_1} и $\cos\alpha$) дает

$$v_{x_1} = |v_{B_1y}| \cos\alpha / (2\varepsilon\sqrt{l^4 - \cos^2\alpha}). \quad (2.57)$$

В соответствии с (2.54)–(2.57) вырожденную систему второй очереди можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v_y, \quad \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon v_{x_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_{y_i}, \quad \frac{d\varphi_{x_i}}{dt} = \omega_{x_i}, \quad \frac{d\varphi_{y_i}}{dt} = \varepsilon \omega_{y_i} \quad (i=1, 2), \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{2c_2 f_{y_1} + c_1 f}{c_1 + 2\mu}, \quad \mu \frac{dv_{y_1}}{dt} = (1 - \frac{c_2}{c_1 + 2\mu}) f_{y_1} + \frac{\mu f}{c_1 + 2\mu} + (1 - \frac{c_2}{c_1}) f_{12} \sin\alpha, \\ \mu \frac{dv_{y_2}}{dt} &= (1 - \frac{c_2}{c_1 + 2\mu}) f_{y_1} + \frac{\mu f}{c_1 + 2\mu} - (1 - \frac{c_2}{c_1}) f_{12} \sin\alpha, \\ v_{x_1} &= -v_{x_2} = |v_{B_1y}| \cos\alpha / (2\varepsilon\sqrt{l^4 - \cos^2\alpha}), \\ \cos\alpha &= (x_2 - x_1)/l, \quad \sin\alpha = (y_2 - y_1)/l, \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ f_{x_1} &= -f_{x_2} = -f_{12} \cos\alpha, \quad f_{y_1} = f_{y_2} = -\frac{v_{B_1y}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{B_1x}^2 + v_{B_1y}^2}}, \quad f_{12} = \frac{1}{l^2}, \\ f'_{x_i} &= 0, \quad f'_{y_1} = \frac{1}{(c_1 + 2\mu)} (-c_2 f_{y_1} + \mu f) - \frac{c_2}{c_1} f_{12} \sin\alpha, \\ f'_{y_2} &= \frac{1}{(c_1 + 2\mu)} (-c_2 f_{y_1} + \mu f) + \frac{c_2}{c_1} f_{12} \sin\alpha, \\ \omega_{x_i} &= v_{y_i} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_1y}, \quad \omega_{y_1} = -\omega_{y_2} = -v_{x_1}, \\ v_{B_1x} &= -v_{B_2x} = 2v_{x_1}, \quad v_{B_1y} = v_{B_2y} = 2v_{y_1} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_1y}, \quad v_{A_1x} = 0, \end{aligned} \quad (2.58)$$

где v_{A_1y} и v_{A_2y} находятся из (2.48).

Отбрасывание малого параметра ε , отвечающее пренебрежению составляющими ускорений точек O_i в направлении оси Ox , эквивалентно наложению в дополнение к (2.32) первичных связей вида (1.33):

$$p_{x_i} = 0 \quad (i=1, 2). \quad (2.59)$$

После перехода к размерным переменным уравнения (2.51) совпадают с соответствующими уравнениями лагранжевых связей, определяемыми вторым уравнением (1.47) – условиями сохранения первичных связей Дирака (2.59) на траекториях рассматриваемой системы. Набор связей (2.32), (2.59) эквивалентен связям

$$p_{x_i} = 0, \quad p_{\Phi_{y_i}} = 0, \quad p_{y_i} - (mR/I)p_{\Phi_{x_i}} - (m/M)p_y = 0 \quad (i=1, 2). \quad (2.60)$$

Тем самым, размерный аналог двукратно вырожденной системы (2.58) получается двумя способами. В рамках первого способа нужно пренебречь ускорениями точек A_i контакта шариков с плитой. В рамках второго – пренебречь составляющими ускорений точек A_i вдоль оси Oy и угловыми ускорениями шариков вокруг оси Oy , и, затем, - составляющими ускорений центров O_i шариков в направлении оси Ox . Соответствующие лагранжевы связи в обоих случаях совпадают с размерными аналогами (2.31) и (2.51).

В соответствии с (2.54) при наложении первичных связей (2.32), (2.59) (либо (2.60)) также реализуются неголономные (кинематические) связи, запрещающие проскальзывание шариков относительно плиты в направлении оси Ox (см. (2.33)):

$$0 = V_{x_i} - \Omega_{y_i} R \quad (i=1, 2). \quad (2.61)$$

Согласно (2.52) их реакции F'_{x_i} равны нулю. Так как $v_{A,y}, v_{B,x}, v_{B,y} \neq 0 \quad (i=1, 2)$, в рамках построенной модели шарики проскальзывают относительно подстилающей поверхности, а также относительно плиты в направлении Oy .

Неравенства (2.30) для (2.58) принимают форму

$$l \geq 2r, \quad r = 2R\sqrt{kP/a}, \quad |f'_{y_i}| < 1 \quad (i=1, 2). \quad (2.62)$$

2.3.2. Аналитическое исследование сближения элементов прослойки

Обсудим, как изменяются расстояние l между центрами O_1 и O_2 шариков и угол α между линией O_1O_2 и осью Ox (рис. 2.3). Из выражения (2.58) для v_{B_iy} получаем равенство $v_{y_2} - v_{y_1} = \varepsilon_1(v_{A_2y} - v_{A_1y})/2$, подставив которое вместе с выражением для v_{x_1} в (2.50) и принимая во внимание следующую из (2.53) оценку

$$f_{12} = 1/l^2 = O(\varepsilon) \quad (2.63)$$

имеем

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{|2v_{y_1} - v_y| \cos^2 \alpha}{l^2} + O(\varepsilon_1 + \varepsilon^2), \quad \frac{d(\sin \alpha)}{dt} = -\frac{dl}{dt} \frac{\sin \alpha}{l} + O(\varepsilon_1). \quad (2.64)$$

В силу отрицательности правой части первого уравнения расстояние между центрами шариков убывает. Так как правая и левая части второго уравнения (2.64) имеют одинаковые знаки, угол α увеличивается. Пренебрегая этом уравнении членами $O(\varepsilon_1)$, исключив время, проведя интегрирование полученного уравнения с разделяющимися переменными и учитывая формулу (2.58) для $\sin \alpha$, получаем

$$\sin \alpha = c/l, \quad c = l(0) \sin \alpha(0) = y_2(0) - y_1(0). \quad (2.65)$$

Подстановка приближенного равенства (2.65) в первое уравнение (2.64) после отбрасывания слагаемых $O(\varepsilon_1 + \varepsilon^2)$ дает уравнение

$$\frac{dl}{dt} = -|2v_{y_1} - v_y| \frac{l^2 - c^2}{l^4},$$

откуда, учитывая первое и третье уравнения (2.58) и исключив время, имеем

$$\frac{dl}{d(2y_1 - y)} = -\operatorname{sgn}(2y_1 - y) \frac{l^2 - c^2}{l^4}. \quad (2.66)$$

Проинтегрировав это уравнение с разделяющимися переменными для начальных условий $y_1(0) = y(0)/2$, получаем

$$\frac{l^3}{3} - \frac{l^3(0)}{3} + c^2(l - l(0)) + \frac{c^3}{2} \ln \left| \frac{(l - c)(l(0) + c)}{(l + c)(l(0) - c)} \right| = -|2y_1 - y|. \quad (2.67)$$

Согласно (2.23) и (2.24) размерным аналогом (2.67) служит формула

$$\frac{L^3}{3} - \frac{L^3(0)}{3} + C^2(L - L(0)) + \frac{C^3}{2} \ln \left| \frac{(L - C)(L(0) + C)}{(L + C)(L(0) - C)} \right| = -\frac{a}{kP} |2Y_1 - Y|, \quad (2.68)$$

$$C = Y_2(0) - Y_1(0).$$

Поскольку $l \sim l(0)$, для случая $\alpha(0) = O(\sqrt{\varepsilon})$ из (2.63) и (2.65) получаем $c = O(\varepsilon)$, следовательно, вместо (2.67) и (2.68) на принятом уровне точности можно использовать формулу $l = (l^3(0) - 3|2y_1 - y|)^{1/3}$ и ее размерный аналог

$$L = \left(L^3(0) - \frac{3a}{kP} |2Y_1 - Y| \right)^{1/3}. \quad (2.69)$$

В [23, 24], где рассматривался случай $\alpha = 0$, взаимодействие шариков с плитой не принималось во внимание, а их контакт с подстилающей поверхностью описывался при помощи модели преобразованного сухого трения, получена (в обозначениях настоящей работы) следующая формула для сближения центров шариков:

$$L = \left(L^3(0) - \frac{3a}{kP} |Y| \right)^{1/3}. \quad (2.70)$$

В отличие от (2.70), в (2.69) вместо $|Y|$ входит $|2Y_1 - Y|$ (согласно первому и третьему уравнениям (2.58), а также формулам для v_{B_1y} и v_{B_2y} , последнее выражение служит приближенным значением пути, пройденного точками контакта шариков и подстилающей поверхности в направлении оси Oy). Пределы применимости формул (2.68) и (2.69) исследуются в разделе 2.5 при помощи численного анализа и сравнения полученных результатов с результатами экспериментов [23, 24].

2.3.3. Оценка погрешности асимптотических моделей

Покажем, что системы (2.49) и (2.58) можно рассматривать в качестве приближенных моделей динамики исходной системы (2.26)–(2.28) и определим их погрешность и пределы применимости. Достаточные условия близости решений этих систем при $\varepsilon_1 \mu \rightarrow 0$, $\varepsilon \mu \rightarrow 0$ можно получить, воспользовавшись теорией

А.Н. Тихонова-А.Б. Васильевой [8, 15]. В системах с иерархической структурой малых параметров требуется проверка корректности последовательных вырождений по каждому из них. Проведенный в разделе 2.3.1 анализ показывает, что условия гладкости правых частей системы (2.26)–(2.28) и существования изолированных корней конечных уравнений (2.31) и (2.51), получаемых при последовательном отбрасывании малых параметров $\varepsilon_1\mu$ и $\varepsilon\mu$, справедливы.

Поскольку быстрые переменные системы (2.26)–(2.28) изменяются в двух существенно различных временных масштабах, согласно [8, 15] для близости траектории исходной системы к многообразию, на котором происходят медленные движения двукратно вырожденной системы, требуется анализ асимптотической устойчивости по первому приближению и области влияния точек покоя присоединенных систем, которые описывают эволюцию быстрых переменных v_{A_1x}, v_{A_1y} первой очереди и v_{xi} второй очереди ($i = 1, 2$). (Этот анализ условия затухания быстрых движений проводится по аналогии с проведенным в разделе 1.4 исследованием для железнодорожной колесной пары, динамические уравнения которой содержат один малый параметр.)

Заменив в (2.26)–(2.28) исходное медленное время t быстрым временем $\tau_1 = t/\varepsilon_1\mu$ и приняв далее слагаемые порядка $\varepsilon_1\mu$ равными нулю, приходим к присоединенной системе первой очереди:

$$\begin{aligned}\frac{dv_{A_1x}}{d\tau_1} &= -c_1 v_{A_1x} / \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} + O(\varepsilon_1) + \dots, \\ \frac{dv_{A_2x}}{d\tau_1} &= -c_1 v_{A_2x} / \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2} + O(\varepsilon_1) + \dots, \\ \frac{dv_{A_1y}}{d\tau_1} &= -c_1 v_{A_1y} / \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} + O(\mu + \varepsilon_1) + \dots, \\ \frac{dv_{A_2y}}{d\tau_1} &= -c_1 v_{A_2y} / \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2} + O(\mu + \varepsilon_1) + \dots, \\ v_{x_i}, v_{y_i} &= \text{const.}\end{aligned}\tag{2.71}$$

Здесь введены обозначения $O(\varepsilon_1)$ и $O(\mu + \varepsilon_1)$ для функций переменных v_{A_x} и v_{A_y} ($i = 1, 2$) порядка ε_1 и $\mu + \varepsilon_1$ соответственно; многоточиям отвечают постоянные слагаемые – функции медленных по сравнению с v_{A_x} , v_{A_y} переменных системы (2.26)–(2.28) и времени. Размерный аналог системы (2.71) служит моделью движения шариков на временах $T \sim T_{V_{A_i}}$ из (2.19) и (2.25).

Поскольку два последних уравнения (2.71) можно считать несвязанными друг с другом из-за малости параметра μ , будем изучать каждое из линейных уравнений (2.71) по отдельности. Постоянные множители при v_{A_x} и v_{A_y} ($i = 1, 2$) в правых частях каждого из уравнений отрицательны, следовательно, положения равновесия этих уравнений, определяемые выражениями (2.47), (2.48), асимптотически устойчивы и имеют неограниченную (в пределах допустимых значений) область влияния.

Проводя в (2.26)–(2.28) замену $\tau_2 = t/\varepsilon\mu$ и далее приравнивая слагаемые порядка $\varepsilon\mu$ нулю, приходим к присоединенной системе второй очереди:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{x_1}}{d\tau_2} &= -\frac{2\varepsilon v_{x_1}}{\sqrt{(2\varepsilon v_{x_1})^2 + (2v_{y_1} - v_y + \varepsilon_1 v_{A_y})^2}} + \dots, \\ \frac{dv_{x_2}}{d\tau_2} &= -\frac{2\varepsilon v_{x_2}}{\sqrt{(2\varepsilon v_{x_2})^2 + (2v_{y_2} - v_y + \varepsilon_1 v_{A_y})^2}} + \dots, \\ v_y, v_{y_i} &= \text{const}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

где, как и в (2.71), многоточиями обозначены постоянные слагаемые, являющиеся функциями медленных по отношению к v_{x_i} переменных системы (2.26)–(2.28). Размерный аналог системы (2.72) можно использовать в качестве модели движения шариков на временах $T \sim T_{V_{B_x}} \sim T_{V_{x_i}}$ из (2.19) и (2.25).

Уравнения (2.72) не связаны друг с другом. Из-за малости параметров ε_1 и ε^2 и отрицательности множителя при первом слагаемом в каждом из этих уравнений их решения при $\tau_2 \rightarrow \infty$ монотонно стремятся к определяемым выражениями (2.57) точкам покоя. Для $v_{Biy} \neq 0$ они асимптотически устойчивы по первому приближению.

В силу выполнения условий А.Н. Тихонова-А.Б. Васильевой [8, 15], решения вырожденных систем (2.49) и (2.58) первой и второй очереди служат приближениями для решения исходной системы (2.26)–(2.28) погрешности $O(\varepsilon\mu)$ и $O(\varepsilon\mu + \varepsilon_1/\varepsilon)$ соответственно на конечном интервале времени $t \sim 1$ (для быстрых переменных v_{Aix} , v_{Aiy} , v_{xi} ($i = 1, 2$)) эти оценки верны за пределами пограничного слоя $0 \leq t \leq \delta$ малой ширины $\delta = O(-\varepsilon\mu \ln(\varepsilon\mu + \varepsilon_1/\varepsilon))$.

2.4. Случай микропроскальзывания элементов прослойки относительно плиты и подстилающей поверхности

2.4.1. Построение асимптотических моделей динамики системы

В соответствии с (2.3), (2.13)–(2.16) движение рассматриваемой системы происходит в пяти сильно разнесенных масштабах времени

$$T_{V_{Aix}} \ll T_{V_{Aiy}} \ll T_{V_{xi}} \ll T_{V_{yi}} \ll T_{V_y} \quad (i=1, 2), \quad (2.73)$$

где определенные при записи (2.19) выражения $T_{V_{Aix}}$ и $T_{V_{Aiy}}$; $T_{V_{xi}}$; $T_{V_{yi}}$; T_{V_y} – постоянные времени изменения переменных V_{Aix} и V_{Aiy} ; V_{xi} , Ω_{yi} , V_{Bix} и V_{Biy} ; V_{yi} и Ω_{xi} ; V_y соответственно.

Как и в разделе 2.3.1, перейдем от (2.1), (2.2)–(2.9) к системе (2.20), (2.21), включающей быстрые переменные $V_{A_i x}$ и $V_{A_i y}$ (F_{x_i} и F_{y_i} ($i = 1, 2$) теперь задаются формулами (2.7)). Добавим к полученной системе уравнения (2.22) нормализуем ее уравнения на рассматриваемом классе движения, проводя замену переменных и времени соответствующими безразмерными аналогами (2.23). Примем $V_{A_i x^*} = \varepsilon_3 V_{A_i y^*}$, $V_{B_i x^*} = V_{B_i y^*} = \varepsilon_2 V_{y^*}$, а остальные характерные значения оставим теми же, что и в (2.24). Положим $T_* = T_{V_y}$ и выберем в качестве малых параметров, которые далее будут устремлены к нулю, первые два отношения (2.25), а также отношения

$$\frac{T_{V_{A_i y}}}{T_{V_y}} = \frac{V_{A_i y^*}}{V_{y^*}} \mu = \varepsilon_1 \mu, \quad \frac{T_{V_{A_i x}}}{T_{V_y}} = \frac{V_{A_i x^*}}{V_{y^*}} \mu = \frac{\varepsilon_3 V_{A_i y^*}}{V_{y^*}} \mu = \varepsilon_3 \varepsilon_1 \mu. \quad (2.74)$$

Нормализация переводит рассматриваемую систему в сингулярно возмущенную систему с иерархической структурой малых параметров [8, 15] $0 < \varepsilon_3 \varepsilon_1 \mu \ll \varepsilon_1 \mu \ll \varepsilon \mu \ll \mu \ll 1$, $0 < \varepsilon \sim \varepsilon_2 \ll 1$, которая получается из (2.26)–(2.28) заменой $v_{A_i x}$ на $\varepsilon_3 v_{A_i y}$; $\varepsilon v_{B_i x}$ на $\varepsilon_2 v_{B_i y}$; $v_{B_i y}$ на $\varepsilon_2 v_{y}$ и изменением выражений для f_{x_i} и f_{y_i} соответствующими нормализованными аналогами (2.7):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v_y, \quad \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon v_{x_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_{y_i}, \quad \frac{d\phi_{x_i}}{dt} = \omega_{x_i}, \quad \frac{d\phi_{y_i}}{dt} = \varepsilon \omega_{y_i} \quad (i=1, 2), \\ 0 &= -f'_{x_1} - f'_{x_2}, \quad \frac{dv_y}{dt} = f - f'_{y_1} - f'_{y_2}, \\ \mu \frac{dv_{y_1}}{dt} &= f_{y_1} + f'_{y_1} + f_{12} \sin \alpha, \quad \mu \frac{dv_{y_2}}{dt} = f_{y_2} + f'_{y_2} - f_{12} \sin \alpha, \\ \varepsilon \mu \frac{dv_{x_1}}{dt} &= f_{x_1} + f'_{x_1} + f_{12} \cos \alpha, \quad \varepsilon \mu \frac{dv_{x_2}}{dt} = f_{x_2} + f'_{x_2} - f_{12} \cos \alpha, \\ \varepsilon_1 \mu \frac{dv_{A_1 y}}{dt} &= c_2 (f_{y_1} + f_{12} \sin \alpha) + c_1 f'_{y_1} - \mu (f - f'_{y_1} - f'_{y_2}), \\ \varepsilon_1 \mu \frac{dv_{A_2 y}}{dt} &= c_2 (f_{y_2} - f_{12} \sin \alpha) + c_1 f'_{y_2} - \mu (f - f'_{y_1} - f'_{y_2}), \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\varepsilon_3 \varepsilon_1 \mu \frac{dv_{A_1 x}}{dt} = c_2 (f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha) + c_1 f'_{x_1}, \quad \varepsilon_3 \varepsilon_1 \mu \frac{dv_{A_2 x}}{dt} = c_2 (f_{x_2} - f_{12} \cos \alpha) + c_1 f'_{x_2},$$

$$\cos \alpha = (x_2 - x_1) / l, \quad \sin \alpha = (y_2 - y_1) / l, \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$f_{x_i} = -\frac{v_{B_i x}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}}, \quad f_{y_i} = -\frac{v_{B_i y}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}},$$

$$f'_{x_i} = -\frac{\varepsilon_3 v_{A_i x}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}}, \quad f'_{y_i} = -\frac{v_{A_i y}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}}, \quad f_{12} = \frac{1}{l^2},$$

$$\omega_{x_i} = v_{y_i} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_i y}, \quad \omega_{y_i} = \varepsilon_3 \varepsilon_1 v_{A_i x} / \varepsilon - v_{x_i},$$

$$v_{B_i x} = (2\varepsilon v_{x_i} - \varepsilon_3 \varepsilon_1 v_{A_i x}) / \varepsilon_2, \quad v_{B_i y} = (2v_{y_i} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_i y}) / \varepsilon_2.$$

Безразмерные аналоги уравнений (2.22) совпадают с (2.29), неравенства (2.2), (2.6) и (2.8), задающие область допустимых значений переменных системы, принимают вид

$$l \geq 2r, \quad r = R\sqrt{kP/a}, \quad f_{x_i}^2 + f_{y_i}^2 < 1, \quad f_{x_i}^2 + f_{y_i}^2 < 1 \quad (i=1, 2) \quad (2.78)$$

Полагая в (2.75)–(2.77) $\varepsilon_3 \varepsilon_1 \mu = 0$ и считая остальные параметры конечными при $\varepsilon_3 \varepsilon_1 \mu \rightarrow 0$, приходим к вырожденной системе первой очереди, в рамках которой следует заменить дифференциальные уравнения изменения переменных $v_{A_i x}$ из (2.75) конечными уравнениями, совпадающими с двумя первыми уравнениями (2.31):

$$0 = c_2 (f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha) + c_1 f'_{x_1}, \quad 0 = c_2 (f_{x_2} - f_{12} \cos \alpha) + c_1 f'_{x_2}, \quad (2.79)$$

а остальные уравнения и выражения (2.76), (2.77) оставить прежними.

Перейдем к анализу построенной системы. Также, как и в разделе 2.3.1, нетрудно показать, что при $v_{x_1}(0) = -v_{x_2}(0)$ справедливы условия (2.34)–(2.36):

$$f'_{x_1} = -f'_{x_2}, \quad f_{x_1} = -f_{x_2}, \quad v_{x_1} = -v_{x_2}. \quad (2.80)$$

Из выражений (2.76) для f_{x_i} и f'_{x_i} и выражений (2.77) для $v_{B_i x}$ имеем

$$f_{x_i} = -\frac{2\varepsilon v_{x_i}}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2}} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} f'_{x_i} \quad (i=1, 2), \quad (2.81)$$

откуда с учетом первых двух условий (2.80) вытекает уравнение

$$\frac{v_{x_1}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}} + \frac{v_{x_2}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2}} = 0,$$

в соответствии с которым и последним условием (2.80) получаем

$$|v_{y_1}| = |v_{y_2}|. \quad (2.82)$$

Из первого и третьего условий (2.80), выражений (2.76) для f'_{x_i} и (2.82) следует равенство

$$v_{A_1x} = -v_{A_2x}, \quad (2.83)$$

согласно которому из выражений (2.77) для v_{B_ix} , ω_{y_i} и последнего условия (2.80) имеем

$$v_{B_1x} = -v_{B_2x}, \quad \omega_{y_1} = -\omega_{y_2}. \quad (2.84)$$

Конечные уравнения (2.79) с учетом первого и второго условий (2.80) дают

$$f'_{x_1} = -f'_{x_2} = -c_2(f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha) / c_1, \quad (2.85)$$

откуда при помощи (2.81), выражений (2.76) для f'_{x_i} и (2.83) получаем

$$v_{A_1x} = -v_{A_2x} = \frac{c_2 \varepsilon_2}{\varepsilon_3(\varepsilon_2 c_1 - \varepsilon_1 c_2)} \left(-2\varepsilon v_{x_1} / \varepsilon_2 + f_{12} \cos \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} \right). \quad (2.86)$$

Рассмотрим возможные варианты раскрытия модулей в (2.82). Для $v_{y_1} = -v_{y_2}$ из выражений (2.77) для v_{B_iy} получаем $2v_y = -\varepsilon_1(v_{A_1y} + v_{A_2y}) - \varepsilon_2(v_{B_1y} + v_{B_2y})$, и, следовательно, $v_y = O(\varepsilon_2)$. Однако на изучаемом классе движения переменная v_y принимает конечные значения. Таким образом, этот вариант не реализуется.

Вторым вариантом раскрытия модулей в (2.82) служит

$$v_{y_1} = v_{y_2}. \quad (2.87)$$

Из уравнений изменения v_{y_1} и v_{y_2} системы (2.75) в случае (2.87) имеем

$$f_{y_1} - f_{y_2} + 2f_{12} \sin \alpha + f'_{y_1} - f'_{y_2} = 0. \quad (2.88)$$

Равенства (2.87) и (2.88) позволяют получить зависимости между f'_{y_1} и f'_{y_2} , f_{y_1} и f_{y_2} , $v_{A,y}$ и $v_{A_2,y}$, $v_{B,y}$ и $v_{B_2,y}$, ω_{x_1} и ω_{x_2} . Из (2.76), (2.77), третьего условия (2.80) и (2.87) вытекают равенства

$$f_{y_i} = -\frac{2v_{y_1} - v_y}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} f'_{y_i} \quad (i=1, 2), \quad (2.89)$$

в соответствии с которыми

$$f_{y_1} - f_{y_2} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} (f'_{y_1} - f'_{y_2}) \quad (i=1, 2). \quad (2.90)$$

Из (2.88) и (2.90) получаем

$$f'_{y_1} - f'_{y_2} = -\frac{2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha, \quad f_{y_1} - f_{y_2} = \frac{2\varepsilon_1 / \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha. \quad (2.91)$$

Из (2.91), третьего условия (2.80), (2.87), выражений (2.76) для f'_{y_i} и f_{y_i} и формул (2.77) для ω_{x_i} имеем

$$\begin{aligned} v_{A,y} - v_{A_2,y} &= \frac{2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}, \\ v_{B,y} - v_{B_2,y} &= -\frac{2\varepsilon_1 / \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}, \\ \omega_{x_1} - \omega_{x_2} &= -\frac{2\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Согласно третьему условию (2.80) и (2.87) уравнения (2.29) принимают форму

$$\frac{dl}{dt} = -2\varepsilon v_{x_1} \cos \alpha, \quad \frac{d(\sin \alpha)}{dt} = -\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \sin \alpha. \quad (2.93)$$

Из второго уравнения (2.93) после исключения времени и интегрирования следует формула (2.65), в соответствии с которой и вытекающим из третьего условия (2.80) равенством (2.37) для рассматриваемого движения системы проекция отрезка O_1O_2 на ось ординат системы Oxy и абсцисса его центра не изменяются.

С учетом полученных результатов (2.65), (2.80), (2.83)–(2.87), (2.91), (2.92) вырожденную систему первой очереди можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= v_y, \quad \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon v_{x_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_{y_i}, \quad \frac{d\varphi_{x_i}}{dt} = \omega_{x_i}, \quad \frac{d\varphi_{y_i}}{dt} = \varepsilon \omega_{y_i} \quad (i=1, 2), \\
\frac{dv_y}{dt} &= f - f'_{y_1} - f'_{y_2}, \quad \mu \frac{dv_{y_1}}{dt} = f_{y_1} + f'_{y_1} + f_{12} \sin \alpha, \quad v_{y_2} = v_{y_1}, \\
\varepsilon \mu \frac{dv_{x_1}}{dt} &= (1 - c_2 / c_1)(f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha), \quad v_{x_2} = -v_{x_1}, \\
\varepsilon_1 \mu \frac{dv_{A_1 y}}{dt} &= c_2(f_{y_1} + f_{12} \sin \alpha) + c_1 f'_{y_1} - \mu(f - f'_{y_1} - f'_{y_2}),
\end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\cos \alpha = (x_2 - x_1) / l, \quad \sin \alpha = c / l, \quad c = y_2(0) - y_1(0), \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + c^2},$$

$$\begin{aligned}
f_{x_1} &= -f_{x_2} = -\frac{v_{B_1 x}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}}, \quad f_{y_1} = -\frac{v_{B_1 y}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}}, \quad f_{12} = 1/l^2, \\
f_{y_2} &= f_{y_1} - \frac{2\varepsilon_1 / \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha, \quad f'_{x_1} = -f'_{x_2} = -c_2(f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha) / c_1,
\end{aligned} \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}
f'_{y_1} &= -\frac{v_{A_1 y}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}}, \quad f'_{y_2} = f'_{y_1} + \frac{2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha, \\
\omega_{x_1} &= v_{y_1} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_1 y}, \quad \omega_{x_2} = \omega_{x_1} + \frac{2\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}, \\
\omega_{y_1} &= -\omega_{y_2} = \varepsilon_1 \varepsilon_3 v_{A_1 x} / \varepsilon - v_{x_1}, \quad v_{B_1 x} = -v_{B_2 x} = (2\varepsilon v_{x_1} - \varepsilon_1 \varepsilon_3 v_{A_1 x}) / \varepsilon_2, \\
v_{B_1 y} &= (2v_{y_1} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_1 y}) / \varepsilon_2, \quad v_{B_2 y} = v_{B_1 y} + \frac{2\varepsilon_1 / \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}, \\
v_{A_1 x} &= -v_{A_2 x} = \frac{c_2 \varepsilon_2}{\varepsilon_3 (\varepsilon_2 c_1 - \varepsilon_1 c_2)} \left(-\frac{2\varepsilon v_{x_1}}{\varepsilon_2} + f_{12} \cos \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} \right), \\
v_{A_2 y} &= v_{A_1 y} - \frac{2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Полагая в (2.94)–(2.96) $\varepsilon_1 \mu = 0$ и считая, что другие параметры принимают конечные значения при $\varepsilon_1 \mu \rightarrow 0$, получим вырожденную для (2.75)–(2.77) систему второй очереди, к которой можно прийти, заменив в (2.94) дифференциальное уравнение для переменной $v_{A_1 y}$ конечным уравнением

$$0 = c_2(f_{y_1} + f_{12} \sin \alpha) + c_1 f'_{y_1} - \mu(f - f'_{y_1} - f'_{y_2}), \quad (2.97)$$

и оставив остальные уравнения и выражения (2.95), (2.96) прежними.

Уравнение (2.97) с учетом выражения (2.95) для f'_{y_2} дает

$$f'_{y_1} = \frac{1}{c_1 + 2\mu} \left(-c_2(f_{y_1} + f_{12} \sin \alpha) + \mu \left(f - \frac{2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \right) \right), \quad (2.98)$$

откуда при помощи (2.89) и выражения (2.95) для f'_{y_1} получаем

$$\begin{aligned} v_{A_{1y}} = & -\frac{1}{c_1 + 2\mu - c_2 \varepsilon_1 / \varepsilon_2} \left(c_2(2v_{y_1} - v_y) / \varepsilon_2 - \right. \\ & \left. - \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} \left((c_2 + \frac{2\mu}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2}) f_{12} \sin \alpha - \mu f \right) \right). \end{aligned} \quad (2.99)$$

В соответствии с (2.98) и (2.99) уравнения вырожденной системы второй очереди (2.94)–(2.96) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v_y, \quad \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon v_{x_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_{y_i}, \quad \frac{d\varphi_{x_i}}{dt} = \omega_{x_i}, \quad \frac{d\varphi_{y_i}}{dt} = \varepsilon \omega_{y_i} \quad (i = 1, 2), \\ \frac{dv_y}{dt} &= f - 2f'_{y_1} - \frac{2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha, \\ \mu \frac{dv_{y_1}}{dt} &= f_{y_1} + f'_{y_1} + f_{12} \sin \alpha, \quad v_{y_2} = v_{y_1}, \\ \varepsilon \mu \frac{dv_{x_1}}{dt} &= (1 - c_2 / c_1)(f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha), \quad v_{x_2} = -v_{x_1}, \\ \cos \alpha &= (x_2 - x_1) / l, \quad \sin \alpha = c / l, \\ c &= y_2(0) - y_1(0), \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2(0) - y_1(0))^2}, \\ f_{x_1} = -f_{x_2} &= -\frac{v_{B_1x}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}}, \quad f_{y_1} = -\frac{v_{B_1y}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}}, \quad f_{12} = 1 / l^2, \\ f_{y_2} &= f_{y_1} - \frac{2\varepsilon_1 / \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha, \quad f'_{x_1} = -f'_{x_2} = -\frac{c_2}{c_1} (f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha), \\ f'_{y_1} &= \frac{1}{c_1 + 2\mu} \left(-c_2(f_{y_1} + f_{12} \sin \alpha) + \mu \left(f - \frac{2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \right) \right), \\ f'_{y_2} &= f'_{y_1} + \frac{2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned}
\omega_{x_1} &= v_{y_1} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_{1y}}, \quad \omega_{x_2} = \omega_{x_1} + \frac{2\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}, \\
\omega_{y_1} &= -\omega_{y_2} = \varepsilon_1 \varepsilon_3 v_{A_{1x}} / \varepsilon - v_{x_1}, \quad v_{B_{1x}} = -v_{B_{2x}} = (2\varepsilon v_{x_1} - \varepsilon_1 \varepsilon_3 v_{A_{1x}}) / \varepsilon_2, \\
v_{B_{1y}} &= (2v_{y_1} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_{1y}}) / \varepsilon_2, \quad v_{B_{2y}} = v_{B_{1y}} + \frac{2\varepsilon_1 / \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}, \\
v_{A_{1x}} &= -v_{A_{2x}} = \frac{c_2 \varepsilon_2}{\varepsilon_3 (\varepsilon_2 c_1 - \varepsilon_1 c_2)} \left(-2\varepsilon v_{x_1} / \varepsilon_2 + f_{12} \cos \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} \right), \\
v_{A_{1y}} &= -\frac{1}{c_1 + 2\mu - c_2 \varepsilon_1 / \varepsilon_2} \left(\frac{c_2 (2v_{y_1} - v_y)}{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} \left(\frac{c_2 + 2\mu}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha - \mu f \right) \right), \\
v_{A_{2y}} &= v_{A_{1y}} - \frac{2}{1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}.
\end{aligned}$$

Область изменения переменных системы (2.100) определяется неравенствами (2.78).

Приняв, далее, $\varepsilon\mu = 0$ и считая остальные параметры вырожденной системы второй очереди конечными при $\varepsilon\mu \rightarrow 0$, получаем вырожденную для (2.75)–(2.77) систему третьей очереди. К ней можно прийти, если формально заменить дифференциальное уравнение изменения переменной v_{x_1} конечным уравнением $0 = f_{x_1} + f_{12} \cos \alpha$ (на основании последнего условия (2.80) оно эквивалентно двум уравнениям (2.51)), а остальные уравнения и выражения оставить прежними.

Из (2.51) и выражений (2.95), (2.96) для f_{x_1} и $v_{B_{1x}}$ следуют равенства

$$v_{B_{1x}} = -v_{B_{2x}} = (2\varepsilon v_{x_1} - \varepsilon_3 \varepsilon_1 v_{A_{1x}}) / \varepsilon_2 = f_{12} \cos \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}, \quad (2.101)$$

откуда с учетом выражения (2.96) для $v_{A_{1x}}$ приходим к условию (2.54) непроскальзывания шариков относительно плиты в направлении оси Ox (его можно получить и при помощи (2.51) и выражений для f'_{x_i} из (2.76) и (2.95)).

Из (2.54) и выражений (2.96) для ω_{y_i} имеем

$$\omega_{y_i} = -v_{x_i} \quad (i=1, 2). \quad (2.102)$$

Подставив (2.54) и выражение (2.95) для f_{12} в (2.101), получаем

$$v_{B_1x} = 2\varepsilon v_{x_1} / \varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} \cos \alpha / l^2. \quad (2.103)$$

Следовательно,

$$v_{x_1} = \varepsilon_2 |v_{y_1}| \cos \alpha / (2\varepsilon \sqrt{l^4 - (\varepsilon_2 / 2)^2 \cos^2 \alpha}). \quad (2.104)$$

В соответствии с (2.54) и (2.102)–(2.104) вырожденную систему третьей очереди можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v_y, \quad \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon v_{x_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_{y_i}, \quad \frac{d\varphi_{x_i}}{dt} = \omega_{x_i}, \quad \frac{d\varphi_{y_i}}{dt} = \varepsilon \omega_{y_i} \quad (i=1, 2), \\ \frac{dv_y}{dt} &= f - 2f'_{y_1} - \frac{2}{1-\varepsilon_1/\varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha, \quad \mu \frac{dv_{y_1}}{dt} = f_{y_1} + f'_{y_1} + f_{12} \sin \alpha, \quad v_{y_2} = v_{y_1}, \\ \cos \alpha &= (x_2 - x_1) / l, \quad \sin \alpha = c / l, \quad c = y_2(0) - y_1(0), \quad l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + c^2}, \\ v_{x_1} &= \varepsilon_2 |v_{y_1}| \cos \alpha / (2\varepsilon \sqrt{l^4 - (\varepsilon_2 / 2)^2 \cos^2 \alpha}), \quad v_{x_2} = -v_{x_1}, \\ f_{x_1} &= -f_{x_2} = -f_{12} \cos \alpha, \quad f_{y_1} = -\frac{v_{B_1y}}{\sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}}, \quad f_{12} = 1 / l^2, \\ f_{y_2} &= f_{y_1} - \frac{2\varepsilon_1 / \varepsilon_2}{1-\varepsilon_1/\varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha, \quad f'_{x_i} = 0, \\ f'_{y_1} &= \frac{1}{c_1 + 2\mu} (-c_2 (f_{y_1} + f_{12} \sin \alpha) + \mu (f - \frac{2}{1-\varepsilon_1/\varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha)), \\ f'_{y_2} &= f'_{y_1} + \frac{2}{1-\varepsilon_1/\varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha, \\ \omega_{x_1} &= v_{y_1} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_1y}, \quad \omega_{x_2} = \omega_{x_1} + \frac{2\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1/\varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}, \\ \omega_{y_1} &= -\omega_{y_2} = -v_{x_1}, \quad v_{B_1x} = -v_{B_2x} = 2\varepsilon v_{x_1} / \varepsilon_2, \quad v_{B_1y} = (2v_{y_1} - v_y - \varepsilon_1 v_{A_1y}) / \varepsilon_2, \\ v_{B_2y} &= v_{B_1y} + \frac{2\varepsilon_1 / \varepsilon_2}{1-\varepsilon_1/\varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}, \quad v_{A_1x} = 0, \\ v_{A_1y} &= -\frac{1}{c_1 + 2\mu - c_2 \varepsilon_1 / \varepsilon_2} \left(\frac{c_2}{\varepsilon_2} (2v_{y_1} - v_y) - \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} ((c_2 + \frac{2\mu}{1-\varepsilon_1/\varepsilon_2}) f_{12} \sin \alpha - \mu f) \right), \\ v_{A_2y} &= v_{A_1y} - \frac{2}{1-\varepsilon_1/\varepsilon_2} f_{12} \sin \alpha \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Пренебрежение малым параметром $\varepsilon_3 \varepsilon_1 \mu$, то есть составляющими ускорений точек A_i в направлении Ox – отвечает возникновению первичных связей Дирака, описываемых первым уравнением (2.32) для $i = 1, 2$. Пренебрежение малым параметром $\varepsilon_1 \mu$, то есть составляющей ускорения одной из точек A_i ($1 \leq i \leq 2$) в направлении оси Oy , соответствует наложению первичной связи, описываемой вторым уравнением (2.32) для указанного значения i . Отбрасывание $\varepsilon \mu$ – пренебрежение ускорениями центров масс O_i шариков в направлении оси Ox – отвечает добавлению к перечисленным связям первичных связей (2.59). Полученный набор связей эквивалентен совокупности первых двух связей (2.60) для $i = 1, 2$ и последней связи (2.60) для $1 \leq i \leq 2$. Тем самым, к размерному аналогу трехкратно вырожденной системы (2.105) можно прийти двумя способами. В рамках первого способа нужно пренебречь составляющими ускорений точек A_i контакта шариков с плитой в направлении оси Ox и составляющей ускорения одной из точек A_i в направлении оси Oy . Второй способ – отбрасывание составляющей ускорения одной из точек A_i в направлении Oy и угловых ускорений шариков вокруг оси Oy , и, далее, составляющих ускорений центров масс O_i шариков в направлении оси Ox . Соответствующими лагранжевыми связями для обоих способов являются размерные аналоги уравнений (2.79), (2.97) и (2.51). Согласно (2.105) при наложении указанных первичных связей здесь, как и в разделе 2, реализуются и неголономные (кинематические) связи (2.61) с равными нулю реакциями F'_{x_i} . Поскольку $v_{A_y}, v_{B_x}, v_{B_y} \neq 0$ ($i = 1, 2$), условия непроскальзывания шариков относительно плиты в направлении Oy и условия непроскальзывания относительно подстилающей поверхности в рамках построенной модели не выполняются.

Область изменения переменных системы (2.105) определяется неравенствами (2.78), которые записываются в форме

$$l \geq 2r, \quad |f'_{y_i}| < 1, \quad \cos^2 \alpha / l^4 + f_{y_i}^2 < 1 \quad (i = 1, 2). \quad (2.106)$$

Замечание 1. Как правило [15], при проведении предельных переходов в уравнениях систем, движущихся в режиме микропроскальзывания, не принимают во внимание возможную иерархию составляющих скоростей точек контакта взаимодействующих поверхностей вдоль основного движения и ортогонального ему вида $|V_{A_x}| \ll |V_{A_y}|$ (см. (2.15)). Именно так были построены приближенные модели динамики в разделе 2.3.1. Для рассматриваемого в этом разделе движения указанную иерархию необходимо учитывать. Действительно, если, как и в (2.24), принять $V_{A_x^*} = V_{A_y^*} = \varepsilon_1 V_{y^*}$, то дифференциальные уравнения соответствующей сингулярно возмущенной системы, которая получается из (2.75)–(2.77) после формальной замены $\varepsilon_3 = 1$, совпадают с (2.26). Отбрасывание малого параметра $\varepsilon_1 \mu$ дает систему с конечными уравнениями (2.31), отвечающую пренебрежению ускорениями точек A_i ($i = 1, 2$). По аналогии с тем, как это делалось при исследовании вырожденной для (2.75)–(2.77) по $\varepsilon_3 \varepsilon_1 \mu$ системы, ее анализ приводит к третьему условию (2.80), условию (2.87) и уравнению (2.88). В то же время из третьего и четвертого конечных уравнений (2.31) следует уравнение $c_2(f_{y_1} - f_{y_2} + 2f_{12} \sin \alpha) + c_1(f'_{y_1} - f'_{y_2}) = 0$, которое с учетом (2.88) и неравенства $c_2 \neq c_1$ (см. (2.20)) дает условие

$$f'_{y_1} = f'_{y_2}, \quad (2.107)$$

откуда при помощи выражений (2.76) для f'_{y_i} , третьего условия (2.80) и (2.87) вытекает равенство $v_{A_1y} = v_{A_2y}$. Учитывая в нем выражения (2.77) для v_{B_1y} и (2.87), имеем $2v_{y_1} - \varepsilon_1 v_{A_1y} - \varepsilon_2 v_{B_1y} - 2v_{y_2} + \varepsilon_1 v_{A_2y} + \varepsilon_2 v_{B_2y} = -\varepsilon_2 v_{B_1y} + \varepsilon_2 v_{B_2y} = 0$, то есть $v_{B_1y} = v_{B_2y}$. Подстановка последнего равенства вместе с третьим условием (2.80) и (2.87) в выражения (2.76) для f_{y_i} дает $f_{y_1} = f_{y_2}$, тогда из (2.88) и (2.107) получаем $f_{12} \sin \alpha = 0$ или $\alpha = 0$ – линия O_1O_2 центров шариков должна быть расположена ортогонально оси Oy смещения плиты. Таким образом, указанный подход пригоден

для описания динамики системы только при малых значениях $\alpha = O(\varepsilon_1\mu)$. Подход из раздела 2.4, учитывающий существенное различие (2.15) диапазонов изменения составляющих V_{A_x} и V_{A_y} скоростей точек A_i , вдоль осей Ox и Oy , дает возможность рассматривать уравнения вырожденных систем первой, второй и третьей очереди для более широкого диапазона значений угла α .

2.4.2. Аналитическое исследование сближения элементов прослойки

Первое уравнение (2.93) позволяет проследить, как изменяется расстояние l между центрами шариков. Подставив в него выражение (2.105) для v_{x_1} , получаем

$$\frac{dl}{dt} = -\varepsilon_2 |v_{y_1}| \cos^2 \alpha / \sqrt{l^4 - (\varepsilon_2/2)^2 \cos^2 \alpha}. \quad (2.108)$$

Поскольку правая часть (2.108) отрицательна, расстояние между шариками, как и в случае, рассмотренном в разделе 2.3.2, убывает. Тем самым, в соответствии с формулой (2.105) для $\sin \alpha$, угол α увеличивается. Учет этой формулы и третьего уравнения (2.105) после исключения времени и отбрасывания в знаменателе слагаемых $O(\varepsilon_2/2)^2$ приводит (2.108) к уравнению с разделяющимися переменными вида (2.66):

$$\frac{dl}{dy_1} = -\varepsilon_2 \operatorname{sgn}(dy_1) \frac{l^2 - c^2}{l^4}, \quad (2.109)$$

интегрирование которого для $y_1(0) = 0$ дает аналог формулы (2.67) для рассматриваемого случая движения системы:

$$\frac{l^3}{3} - \frac{l^3(0)}{3} + c^2(l - l(0)) + \frac{c^3}{2} \ln \left| \frac{(l - c)(l(0) + c)}{(l + c)(l(0) - c)} \right| = -\varepsilon_2 |y_1|. \quad (2.110)$$

После перехода в (2.110) к размерным переменным получаем формулу вида (2.68):

$$\frac{L^3}{3} - \frac{L^3(0)}{3} + C^2(L - L(0)) + \frac{C^3}{2} \ln \left| \frac{(L - C)(L(0) + C)}{(L + C)(L(0) - C)} \right| = -\varepsilon_2 \frac{a}{kP} |Y_1|, \quad (2.111)$$

$$C = Y_2(0) - Y_1(0).$$

Поскольку $l \sim l(0)$, для $\alpha(0) = O(\sqrt{\varepsilon_2})$ из формулы (2.105) для $\sin \alpha$ следует $c = O(\sqrt{\varepsilon_2})$. Уравнение (2.109) в пренебрежении слагаемыми $O(\varepsilon_2^2)$ принимает вид $dl/dy_1 = -\varepsilon_2 \operatorname{sgn}(dy_1)/l^2$, откуда после интегрирования получаем формулу

$$l = (l^3(0) - 3\varepsilon_2 |y_1|)^{1/3}, \quad (2.112)$$

размерным аналогом которой служит

$$L = \left(L^3(0) - \varepsilon_2 \frac{3a}{kP} |Y_1| \right)^{1/3}. \quad (2.113)$$

Численное исследование работоспособности формул (2.111) и (2.113) для исследования сближения шариков проводится в разделе 2.5.

Замечание 2. Из выражения (2.105) для $v_{B,y}$ следует равенство $v_{y_1} = v_y + O(\varepsilon_2)$, откуда при $y_1(0) = y(0)/2$ получаем $y_1 = y/2 + O(\varepsilon_2)$. Тем самым, в формулах (2.110), (2.112) и их размерных аналогах (2.111), (2.113) переменную y_1 и ее размерный аналог Y_1 без потери точности можно заменить переменными $y/2$ и $Y/2$ соответственно. Таким образом, согласно (2.70) и (2.113), при взаимодействии шариков с плитой и подстилающей поверхностью с микропроскальзыванием расстояние между их центрами уменьшается в $\varepsilon_2/2$ раза медленнее, чем в аналитической формуле [23, 24].

В соответствии с (2.108) в области возрастания $|v_y|$ скорость сближения шариков увеличивается по мере сокращения расстояния между ними.

В ходе уменьшения расстояния между шариками третье неравенство (2.106) может нарушиться, и рассматриваемый в этом разделе режим динамики системы с микропроскальзыванием в точках A_i и B_i сменится обсуждаемым в разделе 2.3 режимом скольжения в нижних точках B_i . При этом от системы (2.1), (2.2)–(2.9) следует перейти к системе (2.1), (2.2)–(2.6), (2.9), (2.11).

2.4.3. Оценка погрешности асимптотических моделей

Покажем, что системы (2.94)–(2.96), (2.100) и (2.105) можно рассматривать в качестве приближенных моделей динамики исходной системы (2.75)–(2.77) и определим их погрешность и пределы применимости. Воспользуемся теорией Тихонова-Васильевой [8, 15], позволяющей сформулировать достаточные условия близости решений этих систем при $\varepsilon_3\varepsilon_1\mu \rightarrow 0$, $\varepsilon_1\mu \rightarrow 0$, $\varepsilon\mu \rightarrow 0$.

По аналогии с тем, как это делалось в разделе 2.3.3, исследуем асимптотическую устойчивость по первому приближению и протяженность области влияния точек покоя присоединенных систем, описывающих изменение сильно разнесенных по скоростям быстрых переменных v_{A_x} , v_{A_y} и v_{x_i} первой, второй и третьей очередей ($i = 1, 2$) соответственно. Перейдем в (2.75)–(2.77) к быстрому времени $\tau_1 = t / \varepsilon_3\varepsilon_1\mu$ и, приравняв нулю слагаемые порядка $\varepsilon_3\varepsilon_1\mu$, получим присоединенную систему первой очереди:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{A_x}}{d\tau_1} &= -c_1 v_{A_x} / \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} + O(\varepsilon_1 / \varepsilon_2) + \dots, \\ \frac{dv_{A_2x}}{d\tau_1} &= -c_1 v_{A_2x} / \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2} + O(\varepsilon_1 / \varepsilon_2) + \dots, \\ v_{x_i}, v_{y_i} &= \text{const.} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Здесь $O(\varepsilon_1/\varepsilon_2)$ – функции переменных v_{A_x} ($i = 1, 2$), имеющие порядок $\varepsilon_1/\varepsilon_2$; многоточиями обозначены постоянные слагаемые – функции медленных по сравнению с v_{A_x} переменных системы (2.75)–(2.77). Размерный аналог системы (2.114) служит моделью движения шариков на временах $T \sim T_{V_{A_x}}$ из (2.73) и (2.74).

Каждое из линейных уравнений (2.114) можно рассматривать независимо от остальных. В силу отрицательности постоянных множителей при v_{A_x} ($i = 1, 2$) положения равновесия этих уравнений, определяемые выражениями (2.86), являются

асимптотически устойчивыми и имеют неограниченную (в пределах области допустимых значений) область влияния.

Переходя в (2.75)–(2.77) к быстрому времени $\tau_2 = t/\varepsilon_1\mu$ и далее приравнявая слагаемые порядка $\varepsilon_1\mu$ нулю, получаем присоединенную систему второй очереди

$$\begin{aligned}\frac{dv_{A_{1y}}}{d\tau_2} &= -c_1 v_{A_{1y}} / \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} + O(\mu + \varepsilon_1/\varepsilon_2) + \dots, \\ \frac{dv_{A_{2y}}}{d\tau_2} &= -c_1 v_{A_{2y}} / \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2} + O(\mu + \varepsilon_1/\varepsilon_2) + \dots, \\ v_{x_i}, v_{y_i} &= \text{const},\end{aligned}\tag{2.115}$$

где $O(\mu + \varepsilon_1/\varepsilon_2)$ – функции переменных $v_{A_{iy}}$ ($i = 1, 2$), имеющие порядок $\mu + \varepsilon_1/\varepsilon_2$; многоточия обозначают постоянные функции медленных по сравнению с $v_{A_{iy}}$ переменных системы (2.75)–(2.77) и времени t . Размерный аналог системы (2.115) описывает движение шариков на временах $T \sim T_{v_{A_{iy}}}$ из (2.73) и (2.74).

Уравнения (2.115) можно считать несвязанными друг с другом из-за малости параметра μ . В силу отрицательности постоянных множителей при $v_{A_{iy}}$ ($i = 1, 2$) положения равновесия этих уравнений, определяемые из (2.92) и (2.99), имеют неограниченную (в пределах области допустимых значений) область влияния.

Проводя в (2.75)–(2.77) замену $\tau_3 = t/\varepsilon\mu$ и далее приравнявая слагаемые порядка $\varepsilon\mu$ нулю, приходим к присоединенной системе третьей очереди:

$$\begin{aligned}\frac{dv_{x_1}}{d\tau_3} &= -\frac{2\varepsilon v_{x_1}}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}} + \dots, \\ \frac{dv_{x_2}}{d\tau_3} &= -\frac{2\varepsilon v_{x_2}}{\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon^2 v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2}} + \dots, \\ v_{y_i} &= \text{const}.\end{aligned}\tag{2.116}$$

Как и ранее, здесь многоточиями обозначены постоянные для (2.116) функции медленных по сравнению с v_{x_i} переменных системы (2.75)–(2.77). Размерный аналог

системы (2.116) служит моделью движения шариков на временах $T \sim T_{V_{B_i}} \sim T_{V_{x_i}}$ из (2.73) и (2.74).

Уравнения (2.116) не связаны друг с другом. В силу малости параметра ε^2 и отрицательности множителя при первом слагаемом в каждом из этих уравнений их решения при $\tau_3 \rightarrow \infty$ монотонно стремятся к определяемым выражениями (2.104) точкам покоя. Для значений $v_{yi} \neq 0$ точки покоя присоединенной системы асимптотически устойчивы по первому приближению.

В силу выполнения условий А.Н. Тихонова-А.Б. Васильевой [8, 15], решения вырожденных систем (2.94)–(2.96), (2.100) и (2.105) первой, второй и третьей очереди являются приближениями для решения исходной системы (2.75)–(2.77) погрешности $O(\varepsilon_1\mu)$, $O(\varepsilon_1\mu + \varepsilon_3)$ и $O(\varepsilon_1\mu + \varepsilon_3 + \varepsilon_1/\varepsilon)$ соответственно на конечном интервале времени $t \sim 1$ (для быстрых переменных v_{Aix} , v_{Aiy} , v_{xi} ($i = 1, 2$)) эти оценки верны за пределами пограничного слоя $0 \leq t \leq \delta$ малой ширины $\delta = O(-\varepsilon_1\mu \ln(\varepsilon_1\mu + \varepsilon_3 + \varepsilon_1/\varepsilon))$.

2.5. Численное исследование динамики системы

В экспериментах [23, 24] в фиксированном промежутке между жесткой подвижной пластиной из ПММА (оргстекла) и упругой податливой подложкой, содержащей нижний поролоновый слой и верхний слой из губчатой резины, располагались одинаковые стальные шарики. Пластина, приводила шарики в движение, совершая возвратно-поступательные колебания. Изучался процесс относительного смещения шариков из исходно разделенного состояния. В настоящей работе исходная система (2.1), (2.2)–(2.6), (2.9), (2.11) (в безразмерном виде – система (2.26)–(2.28)) для режима движения из раздела 2.3 или (2.1), (2.2)–(2.9) (в безразмерном виде – система (2.75)–(2.77)) для режима движения из раздела 2.4 и

соответствующие размерные аналоги ее асимптотических моделей: вырожденных систем (2.49) и (2.58) первой и второй очереди из раздела 2.3 или вырожденной системы (2.94)–(2.96) первой очереди, вырожденной системы (2.100) второй очереди и вырожденной системы (2.105) третьей очереди из раздела 2.4 изучались при значениях параметров этих экспериментов: $M = 2.085$ кг, $P = 9$ Н, $m = 0.0167$ кг, $R = 0.008$ м, $E = 57.4$ кПа, $\nu = -0.957$, $k = 0.12$, $\varepsilon_1 = 0.01$, $\varepsilon_2 = \varepsilon = 0.1$. Пластина двигалась вдоль оси Oy с амплитудой 0.05 м и частотой 1 Гц, начальные значения скоростей $V_y, V_{x_i}, V_{y_i}, V_{A_x}, V_{A_y}$ принимались равными 0 м/с. Численное интегрирование прекращалось при нарушении одного из неравенств (2.2), (2.6) для режима движения из раздела 2.3 или (2.2), (2.6), (2.8) для режима движения из раздела 2.4.

Начнем со случая микропроскальзывания шариков относительно пластины и скольжения относительно подложки, отвечающего предположениям [23, 24]. На рис. 2.4 показаны результаты экспериментальных исследований сближения шариков [23, 24], которые проводились для начальных значений $\alpha(0) = 0$ ($\square$), $\alpha(0) = \pi/4$ ($\circ$) и $\alpha(0) = \pi/2$ ($\times$), и соответствующие численные зависимости расстояния L между центрами шариков от пути Y , пройденного пластиной (все величины указаны в системе СИ). Сплошные кривые построены для решений исходной системы (2.1), (2.2)–(2.6), (2.9), (2.11), описывающей случай микропроскальзывания шариков относительно пластины и скольжения относительно подложки (раздел 2.3), для начальных значений $\alpha(0) = 0, \pi/4$ и $\pi/2$, пунктирные кривые – для соответствующих решений размерного аналога вырожденной системы (2.49) первой очереди. Для заданных выше параметров системы изменение расстояния между центрами шариков близко к результатам экспериментов при всех начальных значениях угла α .

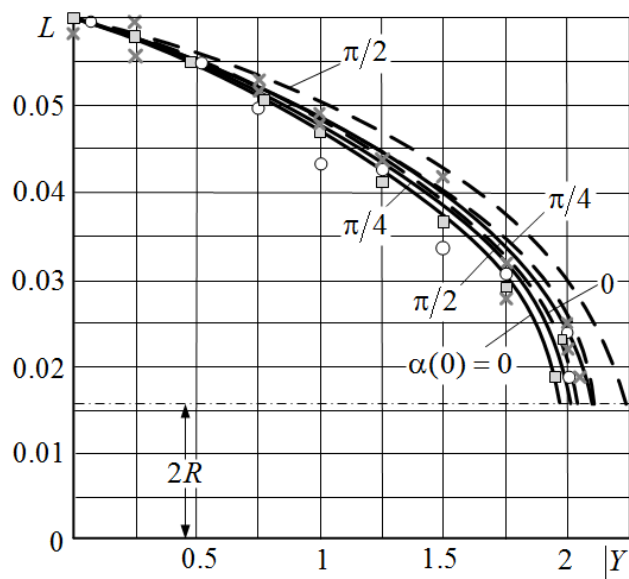


Рис. 2.4. Зависимости расстояния L между центрами шариков от пути $|Y|$, пройденного пластиной, для системы (2.49), сравнение с результатами экспериментов [23, 24]

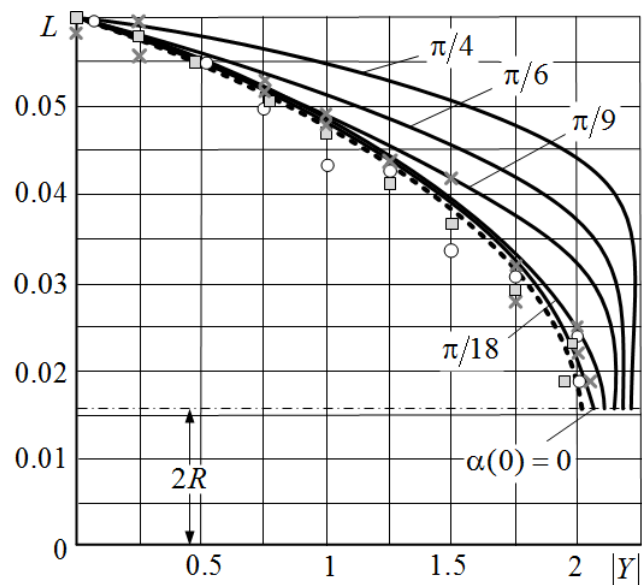


Рис. 2.5. Зависимости расстояния L между центрами шариков от пути $|Y|$, пройденного пластиной, для системы (2.58), сравнение с результатами экспериментов [23, 24]

На рис. 2.5 представлены те же, что на рис. 2.4, экспериментальные данные [23, 24] и аналитические зависимости $L(Y)$, отвечающие вырожденной системе (2.58) второй очереди. Сплошные кривые соответствуют формуле (2.69) (для $\alpha(0) = 0$) и формуле (2.68) (для $\alpha(0) = \pi/18, \pi/9, \pi/6$ и $\pi/4$), пунктирная кривая – полученной в [23, 24] аналитической формуле (2.70). При небольших значениях $\alpha(0)$ аналитические зависимости хорошо описывают результаты экспериментов [23, 24]. Расчеты показали, что рассогласование между значениями $|Y|$ и $|2Y_1 - Y|$ (см., например, рис. 2.14, 2.24, 2.34 ниже) не превышает 5-10%, поэтому кривые, построенные для формул (2.69) и (2.70), близки друг к другу. При возрастании $\alpha(0)$ аналитические кривые для формулы (2.68) качественно повторяют результаты эксперимента, но, в отличие от показанных на рис. 2.4 пунктирных кривых для (2.49), теряют точность описания. Причины этого состоят в том, что система (2.49) построена в рамках общего предположения о малости скоростей точек контакта шариков с пластиной, а система (2.58) – в рамках предположения о малых значениях

отношения составляющих скоростей центров масс шариков ортогонально направлению движения пластины и вдоль него, справедливого для небольших α .

Приведем ряд графиков изменения переменных и определяемых ими функций для рассматриваемой механической системы, позволяющих обсудить корректность проведенного в разделах 2.3 или 2.4 асимптотического анализа. Здесь и далее кривые 1 отвечают размерным аналогам исходной системы (2.26)–(2.28) или (2.75)–(2.77); кривые 2 – размерным аналогам моделей (2.49) или (2.94)–(2.96), кривые 3 – размерным аналогам моделей (2.58) или (2.100) для режимов движения из раздела 2.3 или раздела 2.4 соответственно, и 4 – размерному аналогу модели (2.105) из раздела 2.4 (как и выше, все величины указаны в системе СИ).

На рис. 2.6- 2.34 показаны результаты численного анализа для случая микропроскальзывания шариков относительно пластины и скольжения относительно подложки, отвечающие трем рассмотренным в экспериментах [23, 24] ситуациям начального расположения шариков: $\alpha(0) = 0, \pi/4$ и $\pi/2$.

1) Случай $\alpha(0) = 0$

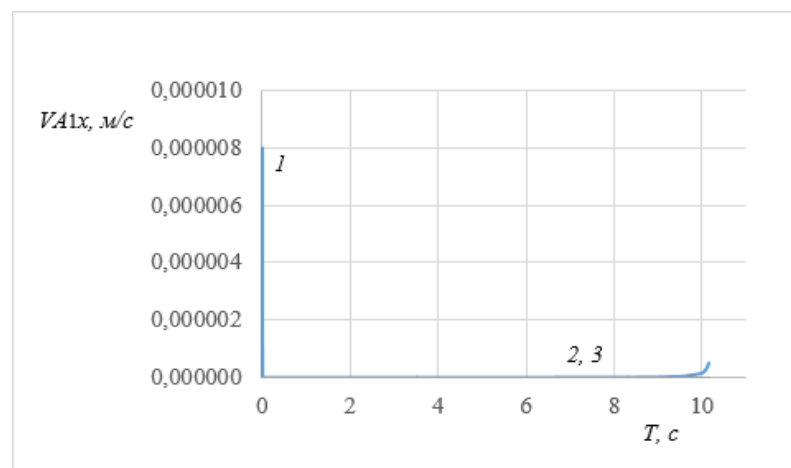


Рис. 2.6. Зависимость составляющей V_{A1x} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Ox от времени T

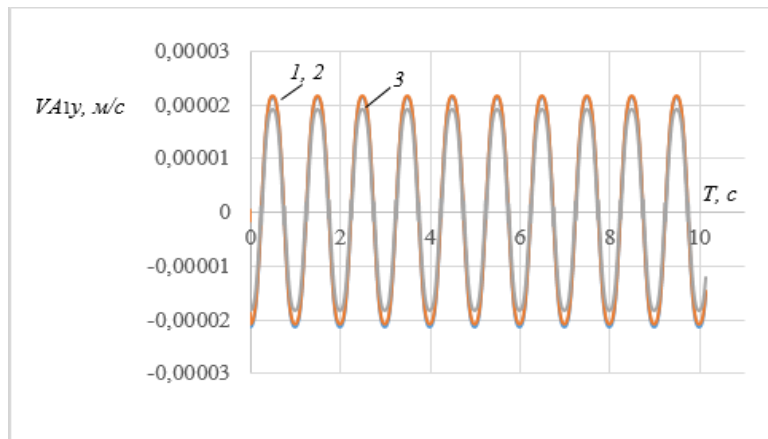


Рис. 2.7. Зависимость составляющей V_{A1y} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Oy от времени T

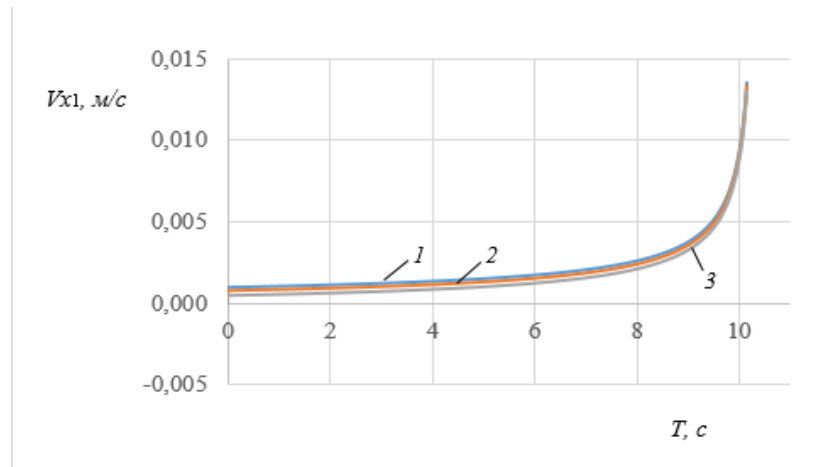


Рис. 2.8. Зависимость составляющей V_{x1} скорости центра O_1 1-го шарика в направлении оси Ox от времени T

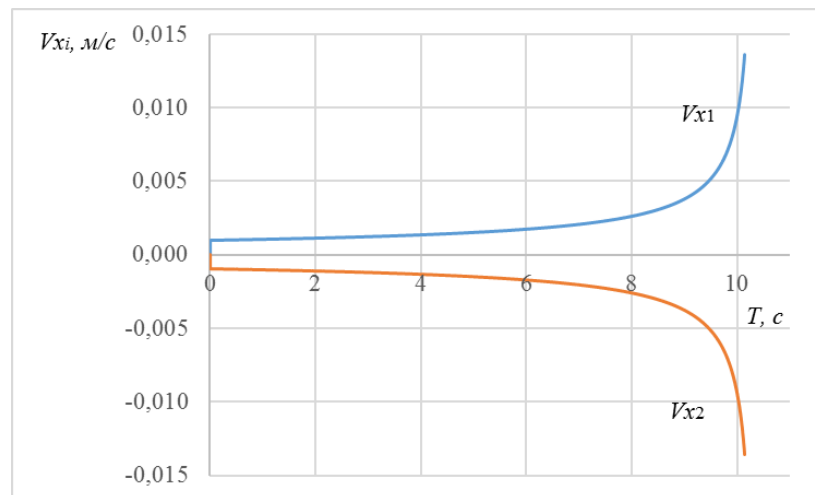


Рис. 2.9. Зависимости составляющих V_{xi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

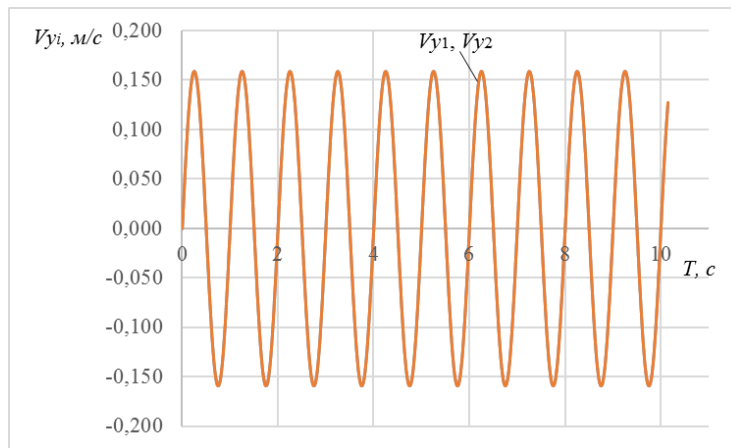


Рис. 2.10. Зависимости составляющих V_{yi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Oy от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

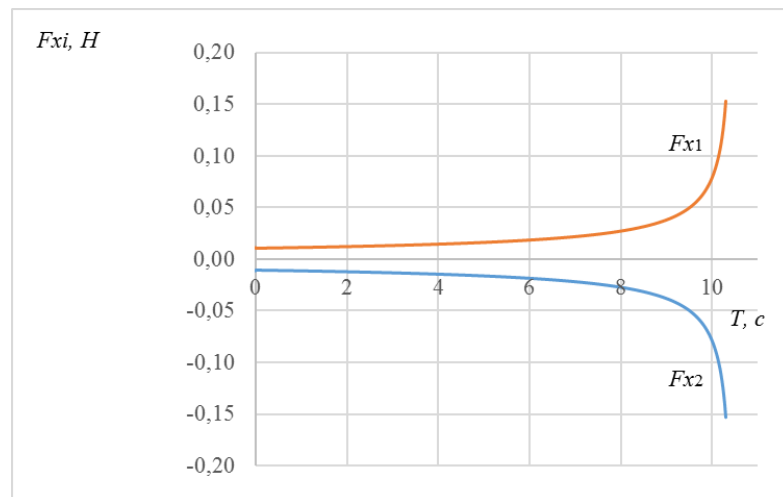


Рис. 2.11. Зависимости составляющих F_{xi} ($i = 1, 2$) сил взаимодействия шариков с подложкой в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

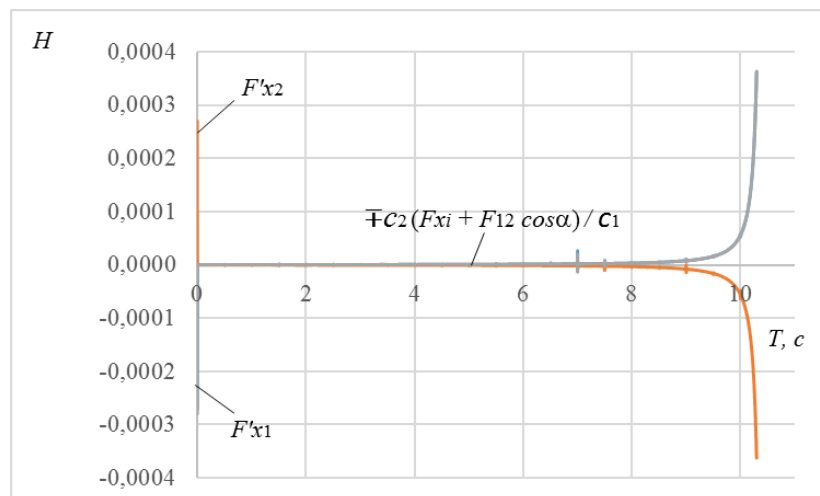


Рис. 2.12. Зависимости составляющих сил F'_{xi} ($i = 1, 2$) взаимодействия шариков с пластиной в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

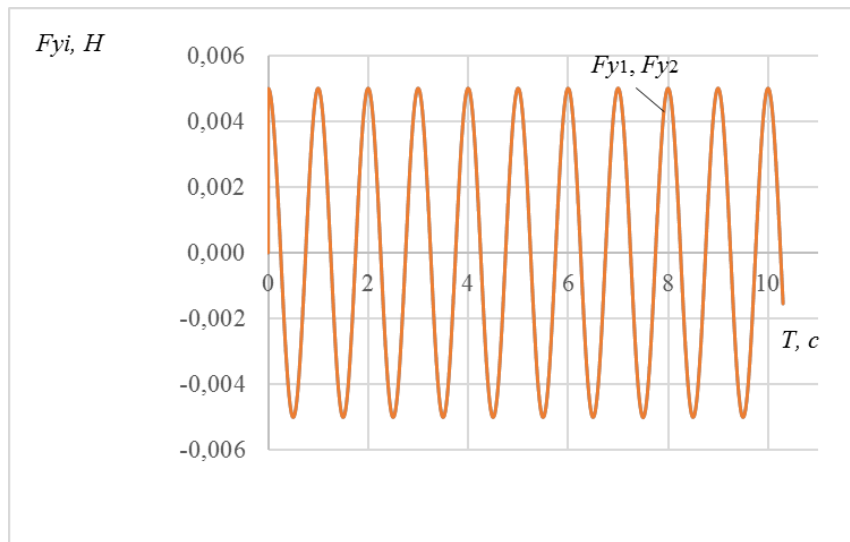


Рис. 2.13. Зависимости составляющих F_{yi} ($i = 1, 2$) сил взаимодействия шариков с подложкой в направлении оси Oy от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

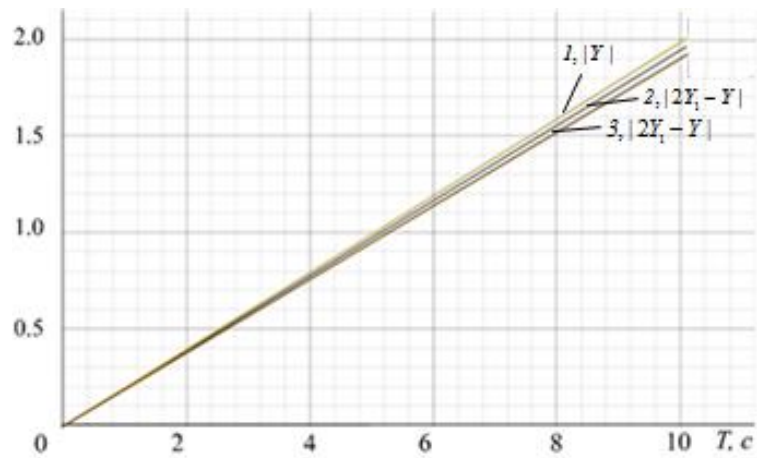


Рис. 2.14. Зависимость пути, пройденного пластиной, и приближенного значения пути, пройденного точкой B_1 контакта 1-го шарика и подложки в направлении оси Oy , от времени T

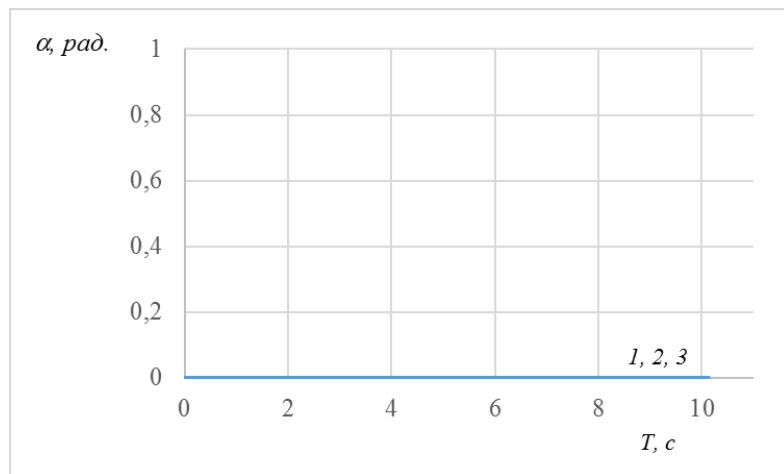


Рис. 2.15. Зависимость угла α от времени T

2) Случай $\alpha(0) = \pi/4$

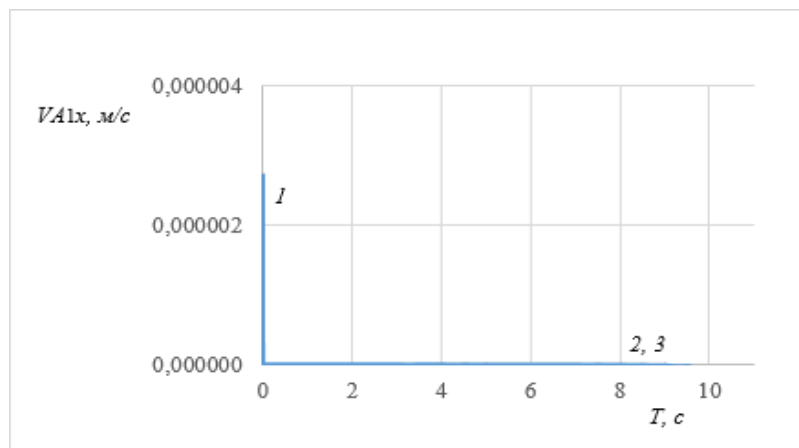


Рис. 2.16. Зависимость составляющей V_{A1x} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Ox от времени T

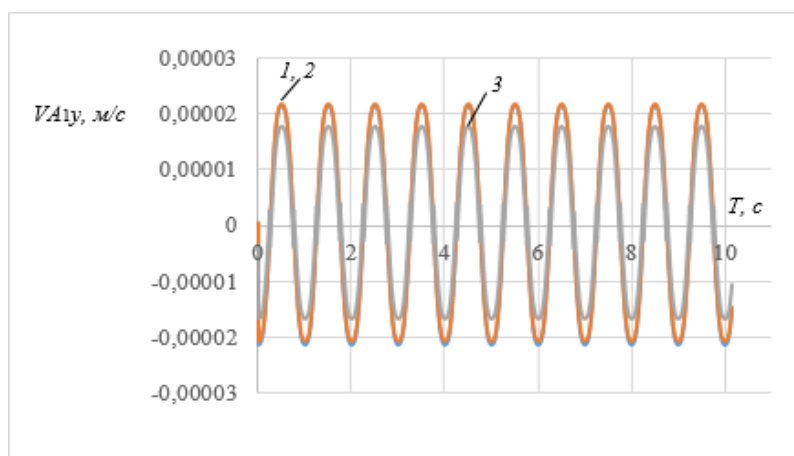


Рис. 2.17. Зависимость составляющей V_{A1y} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Oy от времени T

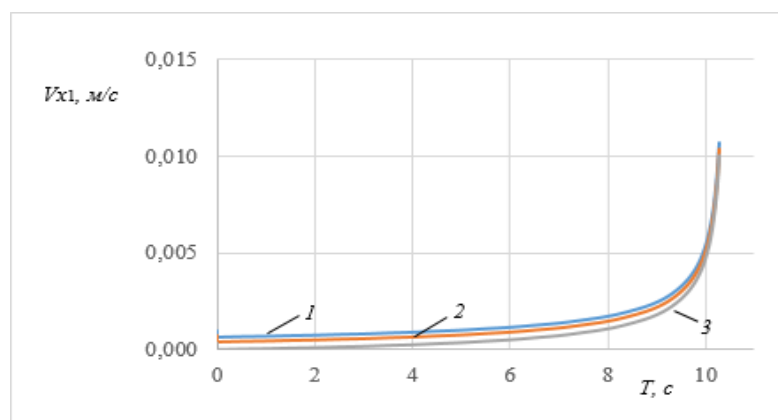


Рис. 2.18. Зависимость составляющей V_{x1} скорости центра O_1 1-го шарика в направлении оси Ox от времени T

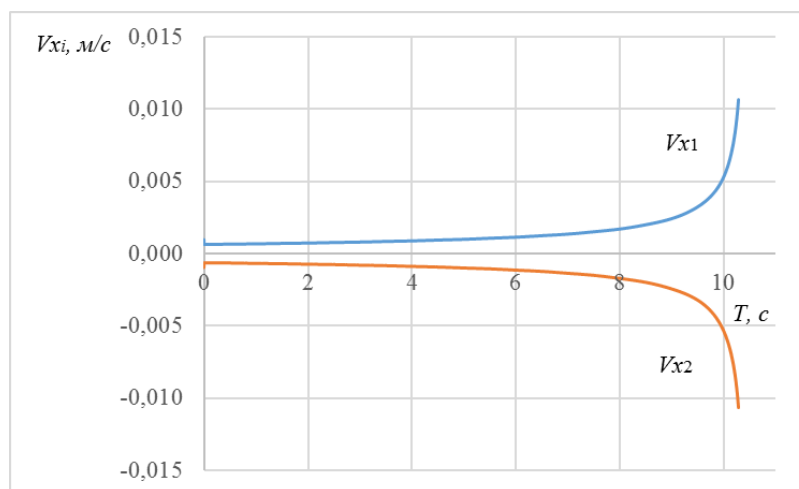


Рис. 2.19. Зависимости составляющих V_{xi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

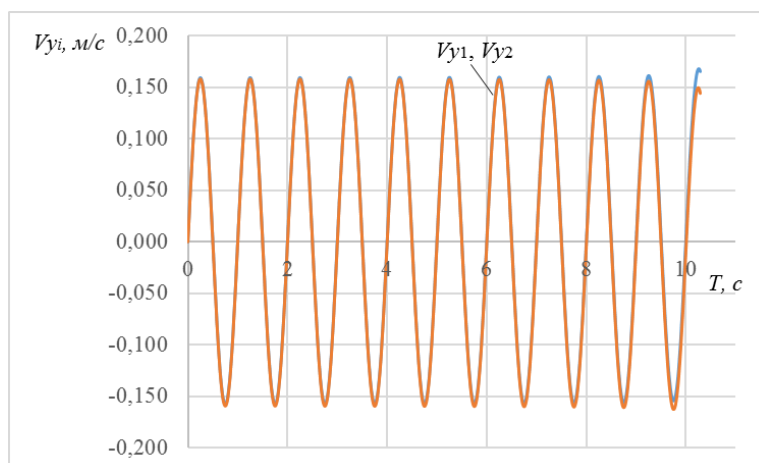


Рис. 2.20. Зависимости составляющих V_{yi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Oy от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

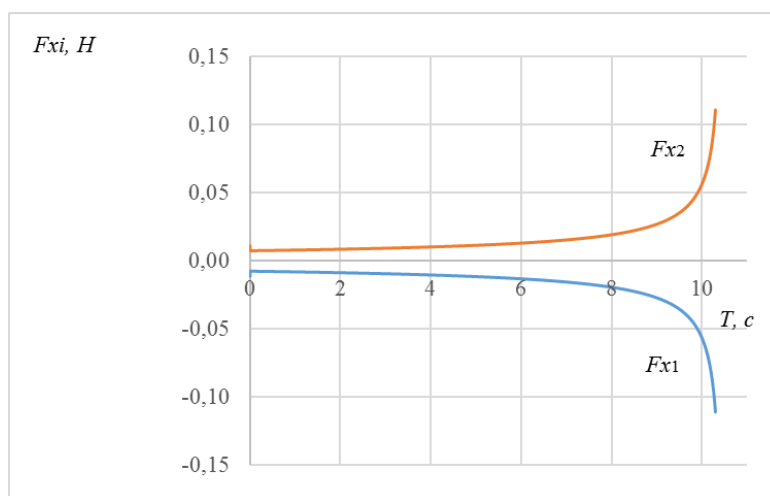


Рис. 2.21. Зависимости составляющих F_{xi} ($i = 1, 2$) сил взаимодействия шариков с подложкой в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

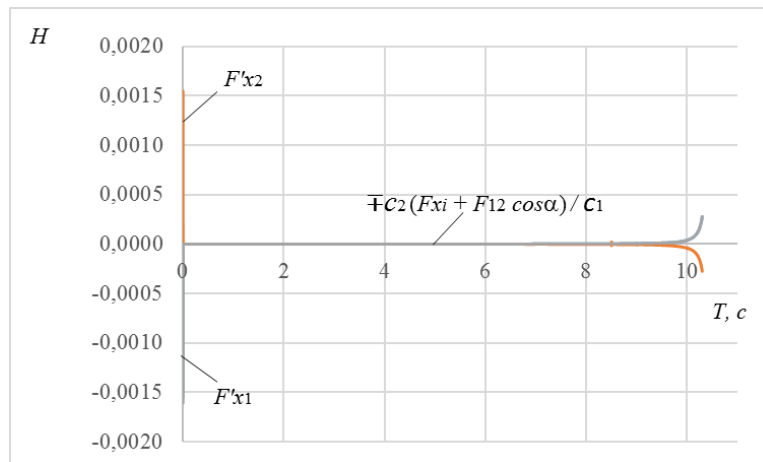


Рис. 2.22. Зависимости составляющих сил F'_{xi} ($i = 1, 2$) взаимодействия шариков с пластиной в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

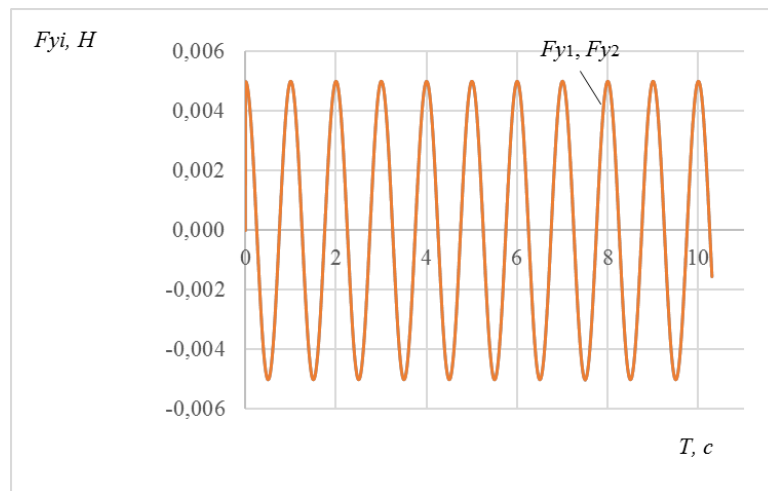


Рис. 2.23. Зависимости составляющих F_{yi} ($i = 1, 2$) сил взаимодействия шариков с подложкой в направлении оси Oy от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

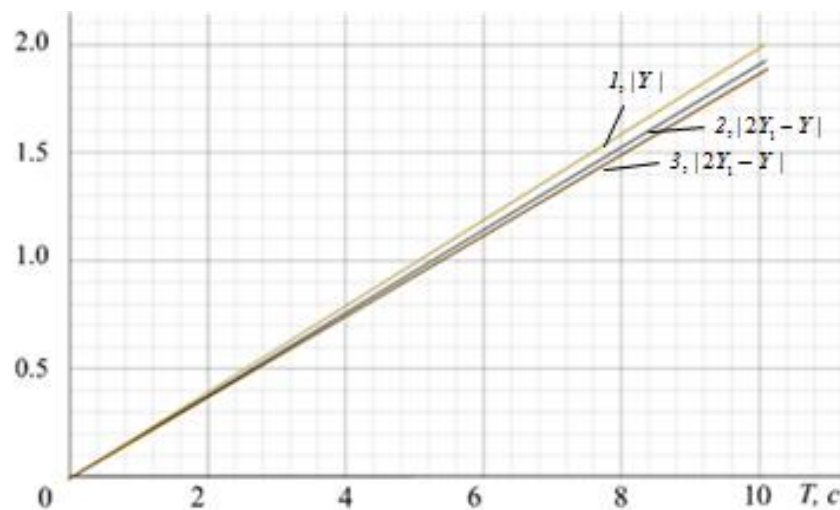


Рис. 2.24. Зависимость пути, пройденного пластиной, и приближенного значения пути, пройденного точкой B_1 контакта 1-го шарика и подложки в направлении оси Oy , от времени T

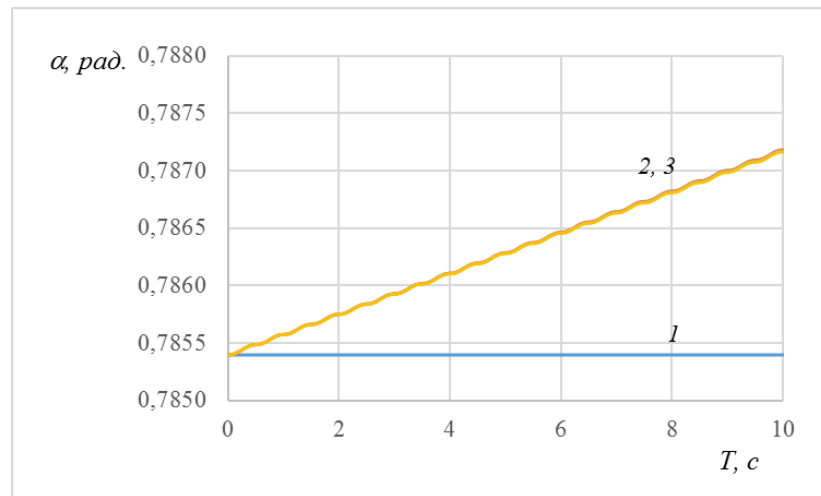


Рис. 2.25. Зависимость угла α от времени T

3) Случай $\alpha(0) = \pi/2$

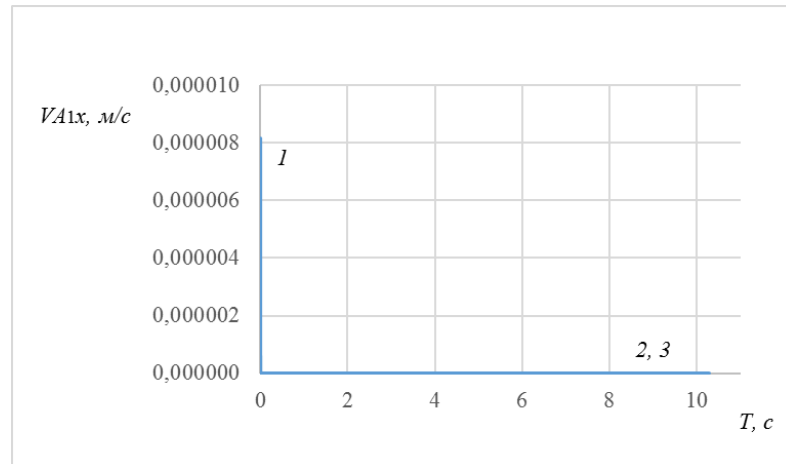


Рис. 2.26. Зависимость составляющей V_{A1x} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Ox от времени T

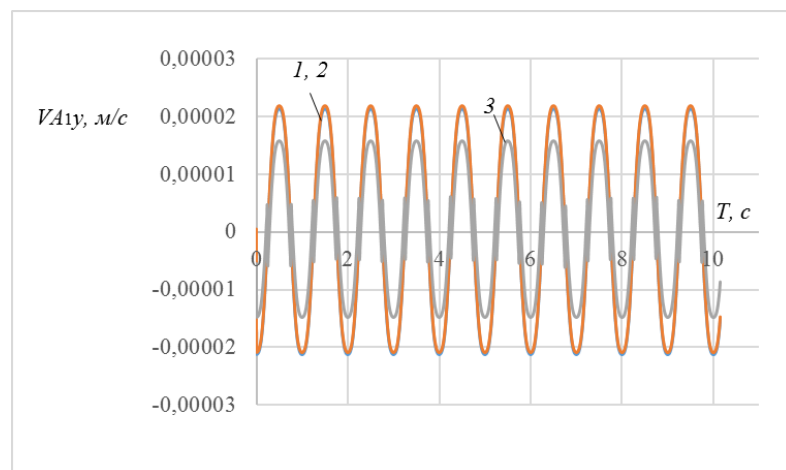


Рис. 2.27. Зависимость составляющей V_{A1y} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Oy от времени T

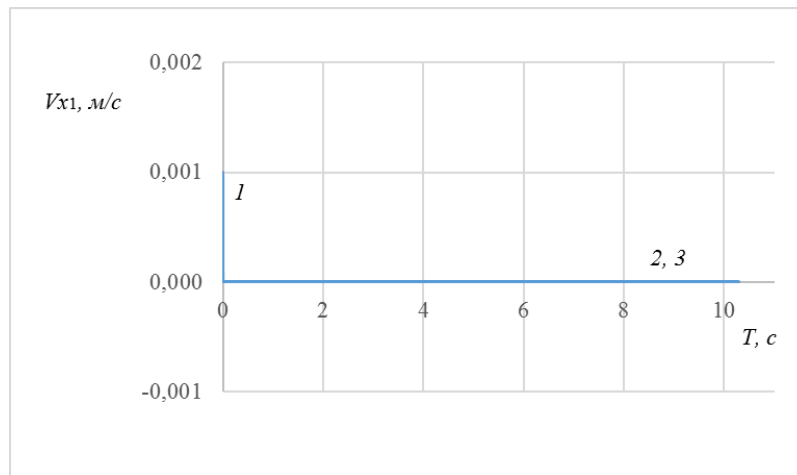


Рис. 2.28. Зависимость составляющей V_{x1} скорости центра O_1 1-го шарика в направлении оси Ox от времени T

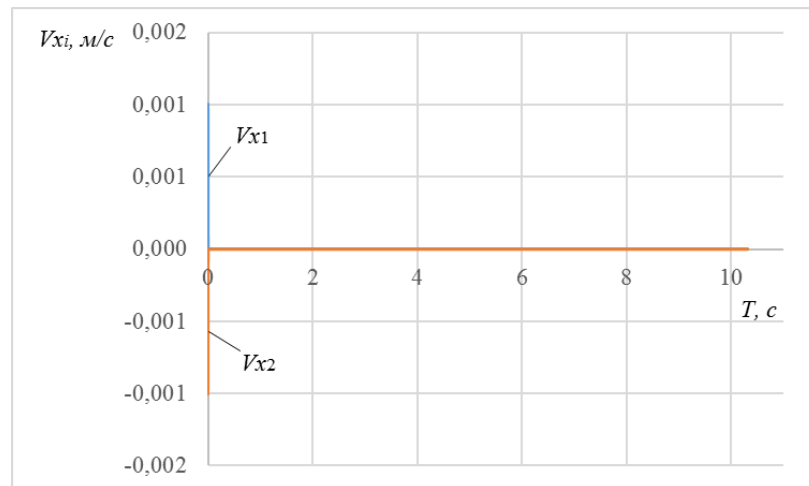


Рис. 2.29. Зависимости составляющих V_{xi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

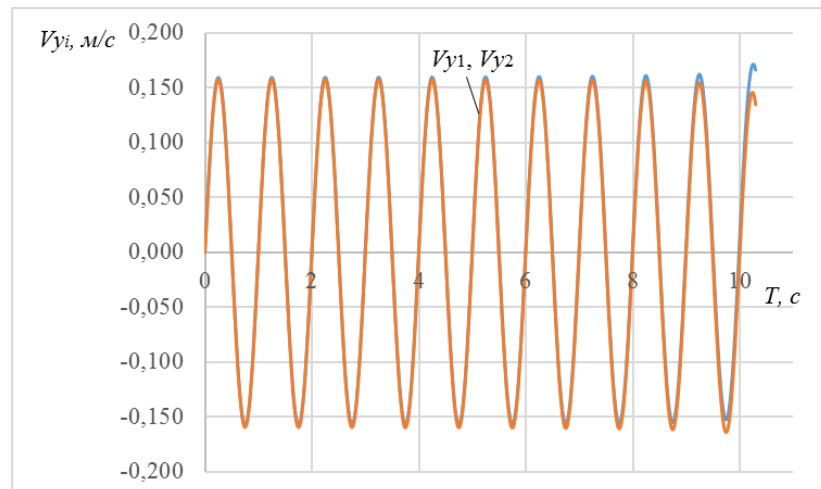


Рис. 2.30. Зависимости составляющих V_{yi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Oy от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

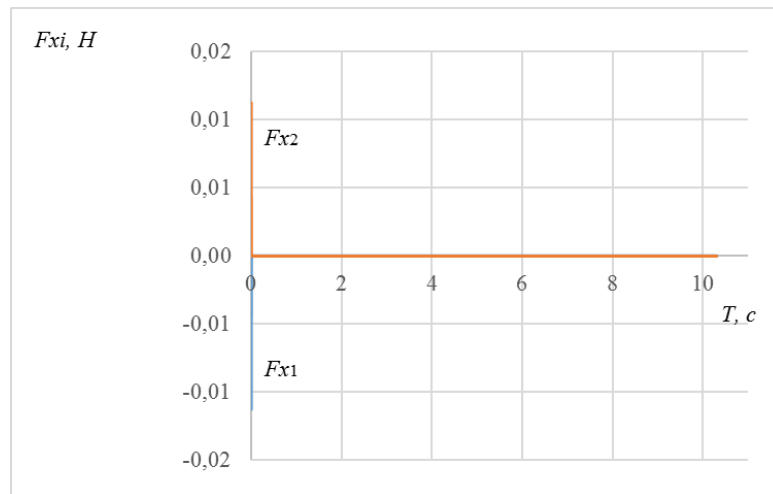


Рис. 2.31. Зависимости составляющих F_{xi} ($i = 1, 2$) сил взаимодействия шариков с подложкой в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

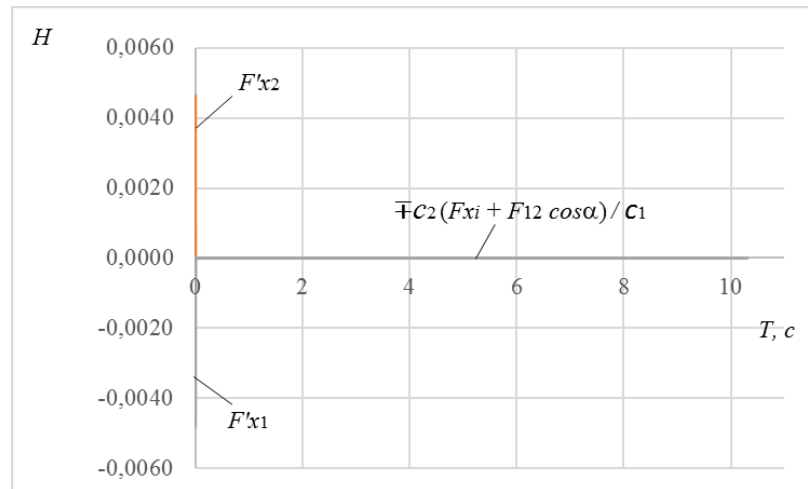


Рис. 2.32. Зависимости составляющих сил F'_{xi} ($i = 1, 2$) взаимодействия шариков с пластиной в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

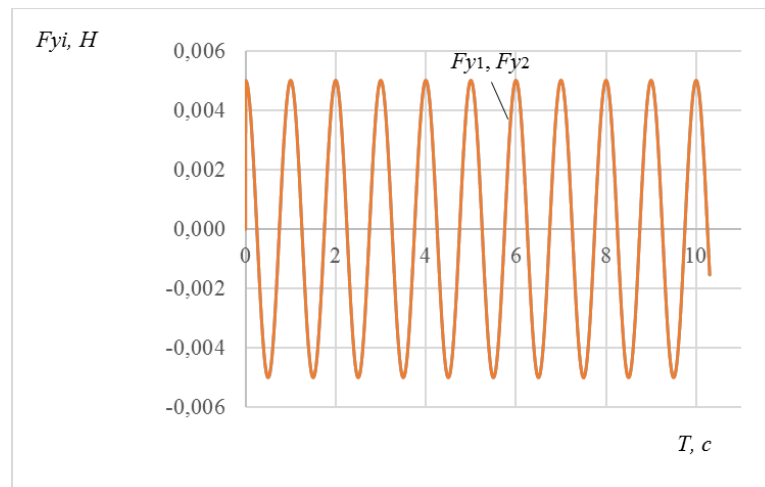


Рис. 2.33. Зависимости составляющих F_{yi} ($i = 1, 2$) сил взаимодействия шариков с подложкой в направлении оси Oy от времени T для исходной системы (2.26)–(2.28)

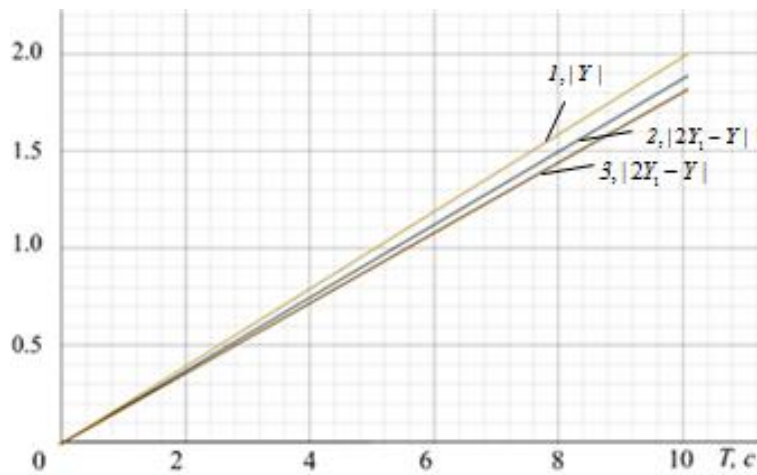


Рис. 2.34. Зависимость пути, пройденного пластиной, и приближенного значения пути, пройденного точкой B_1 контакта 1-го шарика и подложки в направлении оси Oy , от времени T

Графики демонстрируют корректность предположений (2.14), (2.18) и показывают, что асимптотические формулы (2.35), (2.36), (2.38), (2.44), (2.51), (2.52), (2.54) отвечают теоретическим оценкам точности из раздела 2.3.3 и для конечных значений малых параметров.

Для ситуации микропроскальзывания шариков относительно пластины и подложки в начальный момент времени полагалось $L = 0.1$ м. На рис. 2.35- 2.67 показаны графики для трех вариантов начального расположения шариков: $\alpha(0) = 0$, $\pi/6$, $\pi/4$ (для описания случая $\alpha = \pi/2$ предельные модели (2.94)–(2.96), (2.100) и (2.105) неприменимы (см. (2.108)).

1) Случай $\alpha(0) = 0$

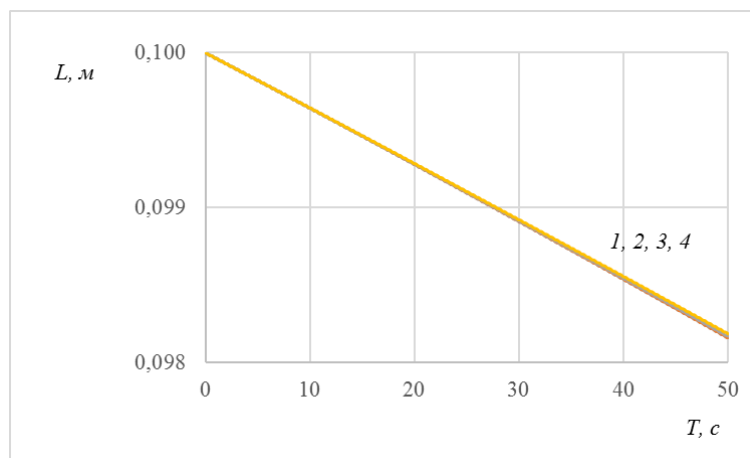


Рис. 2.35. Зависимость расстояния L между центрами шариков от времени T

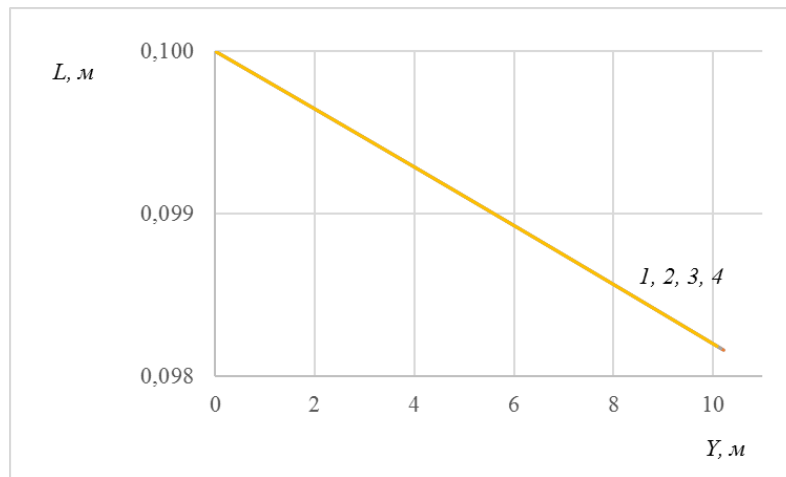


Рис. 2.36. Зависимость расстояния L между центрами шариков от пути Y , пройденного пластиной

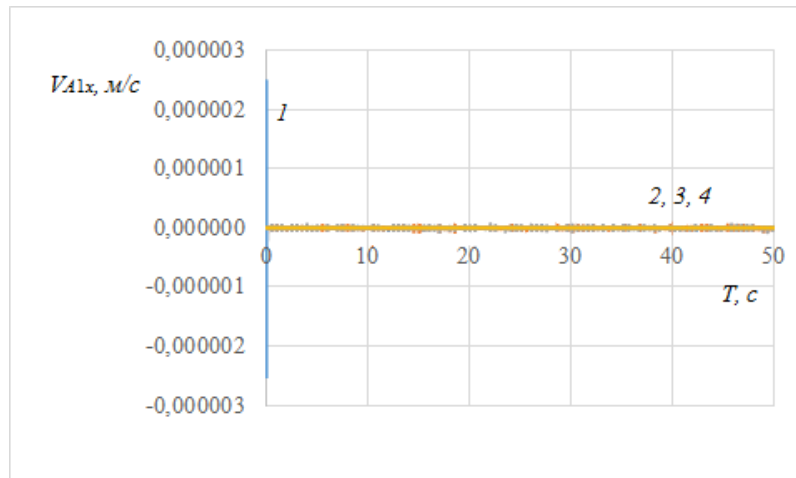


Рис. 2.37. Зависимость составляющей V_{A1x} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Ox от времени T

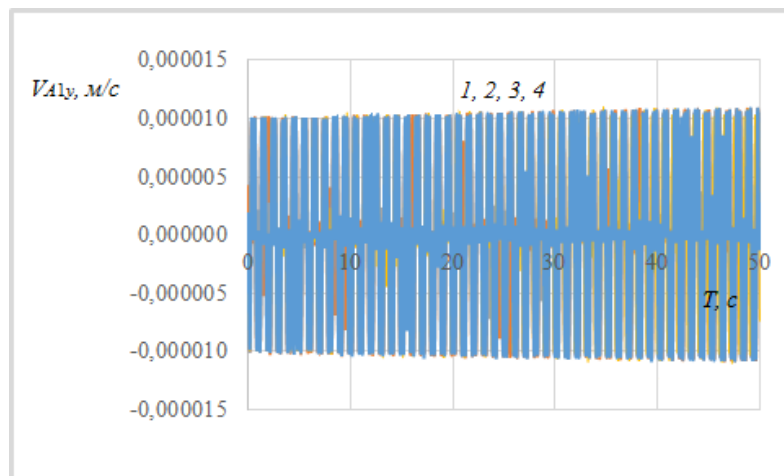


Рис. 2.38. Зависимость составляющей V_{A1y} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Oy от времени T

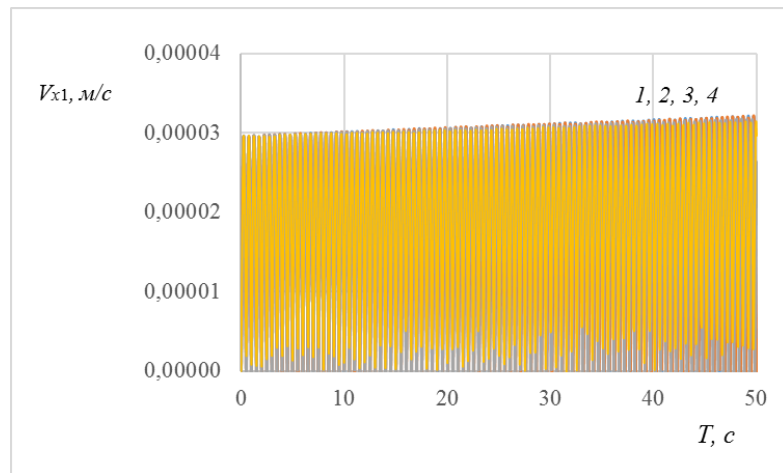


Рис. 2.39. Зависимость составляющей V_{x1} скорости центра O_1 1-го шарика в направлении оси Ox от времени T

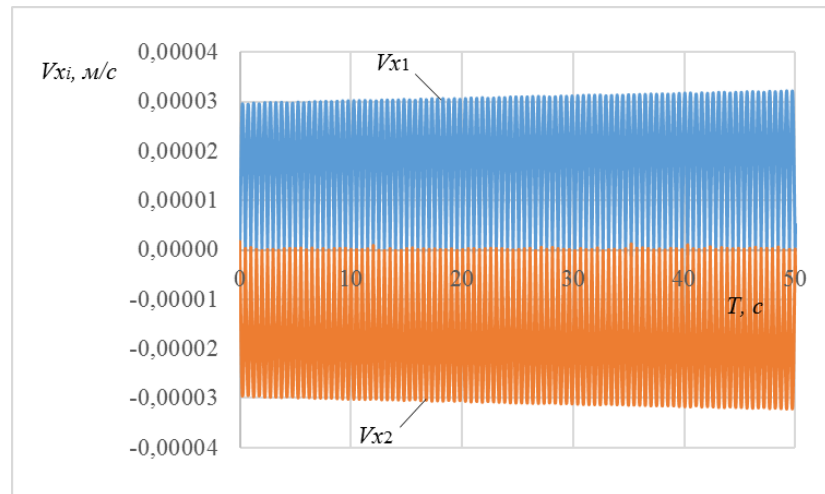


Рис. 2.40. Зависимости составляющих V_{xi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

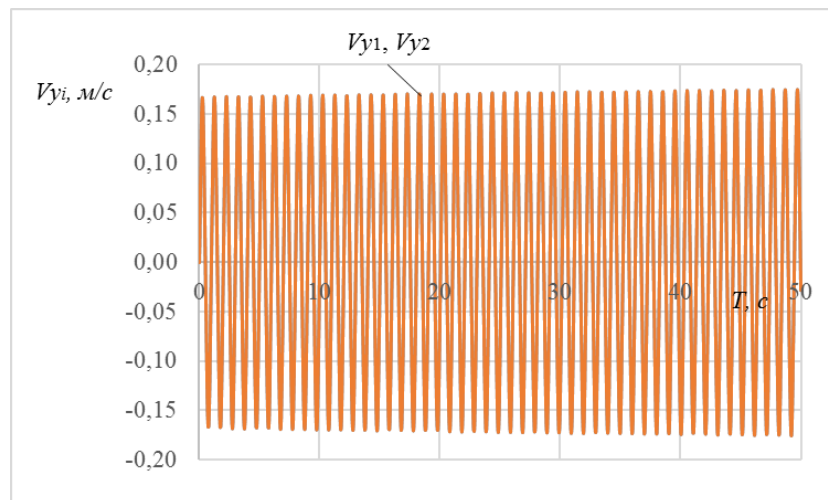


Рис. 2.41. Зависимости составляющих V_{yi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Oy от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

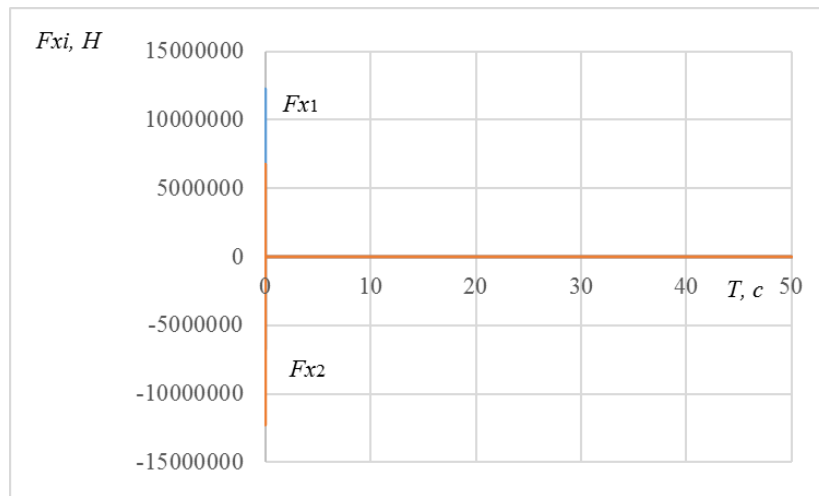


Рис. 2.42. Зависимости составляющих F_{xi} ($i = 1, 2$) сил взаимодействия шариков с подложкой в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

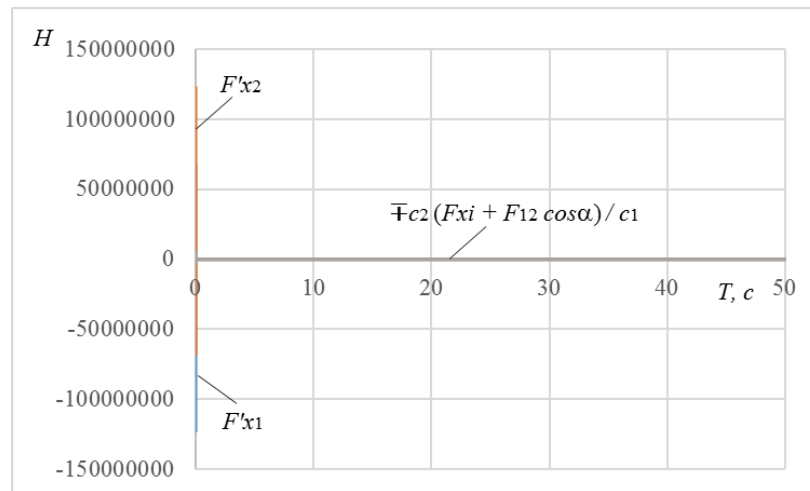


Рис. 2.43. Зависимости составляющих сил F'_{xi} ($i = 1, 2$) взаимодействия шариков с пластиной в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

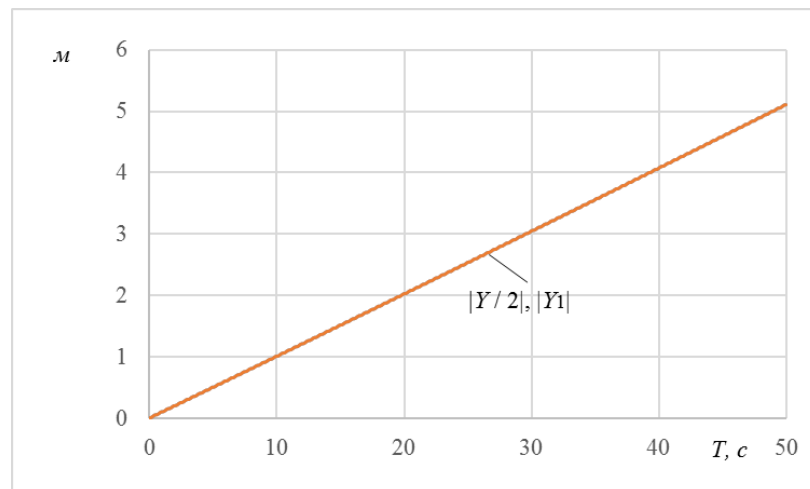


Рис. 2.44. Зависимость половины пути, пройденного пластиной и пути, пройденного центром O_1 1-го шарика в направлении оси Oy , от времени T

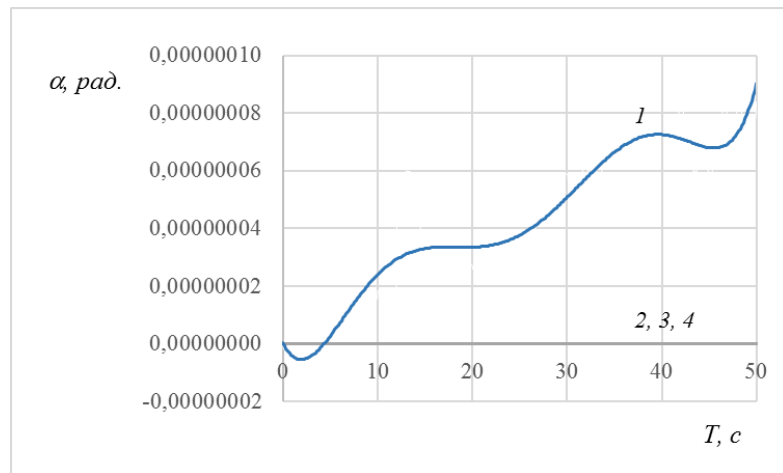


Рис. 2.45. Зависимость угла α от времени T

2) Случай $\alpha(0) = \pi/6$

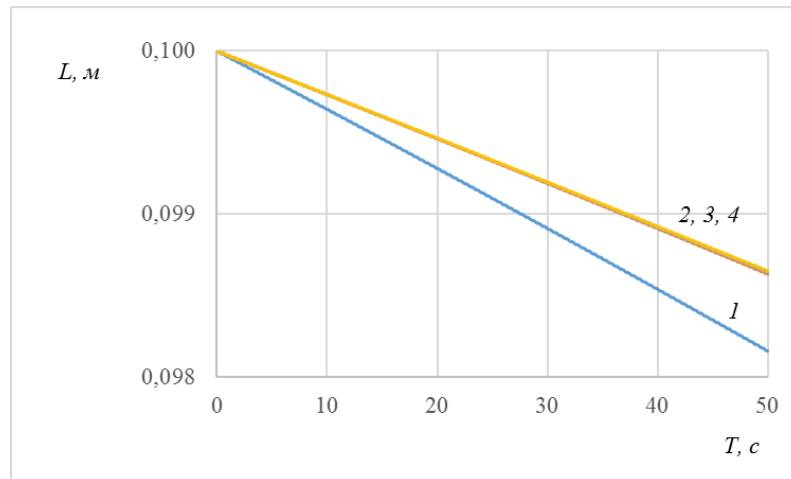


Рис. 2.46. Зависимость расстояния L между центрами шариков от времени T

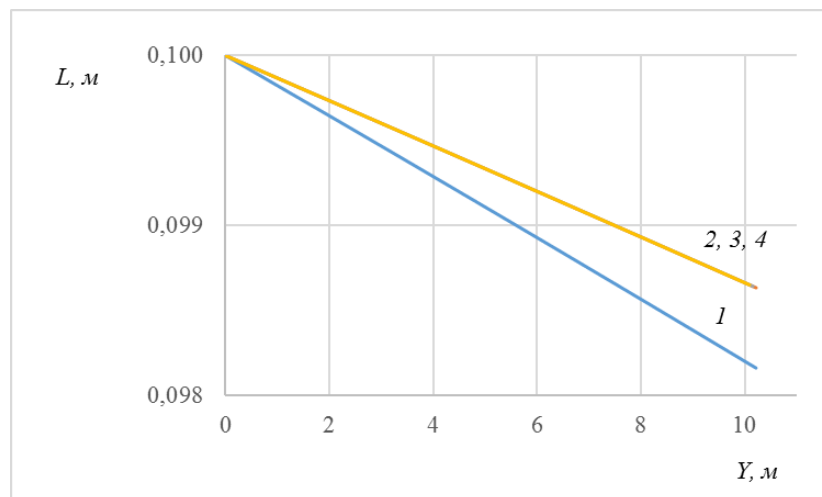


Рис. 2.47. Зависимость расстояния L между центрами шариков от пути Y , пройденного пластиной

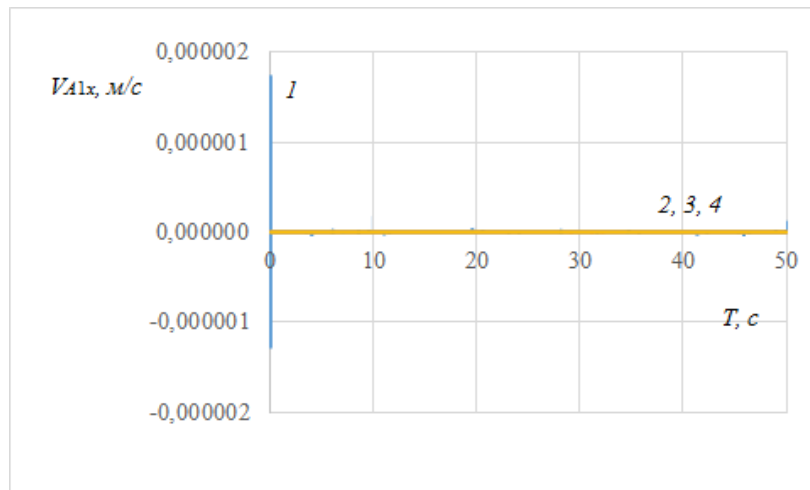


Рис. 2.48. Зависимость составляющей V_{A1x} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Ox от времени T

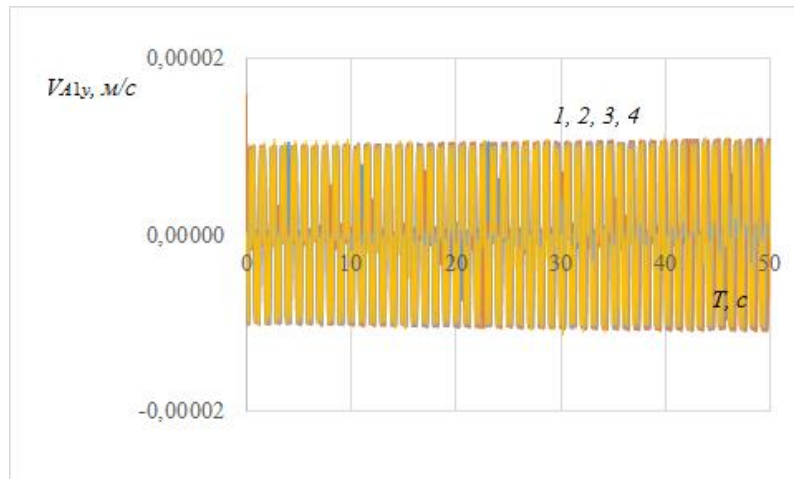


Рис. 2.49. Зависимость составляющей V_{A1y} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Oy от времени T

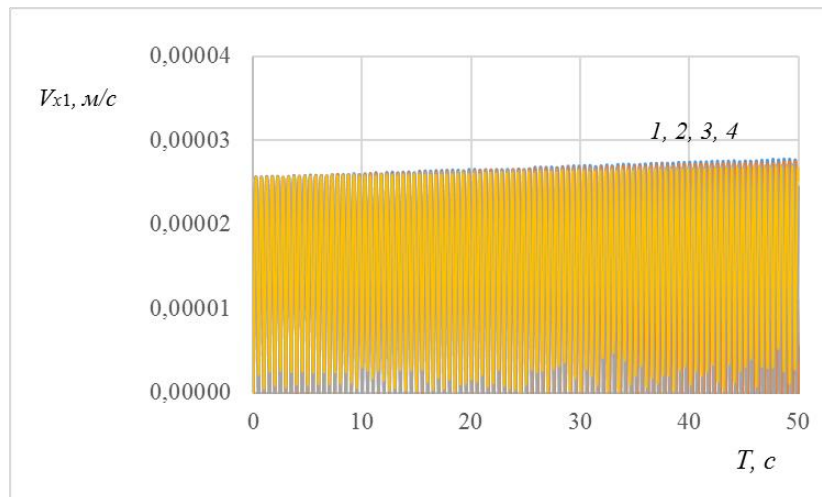


Рис. 2.50. Зависимость составляющей V_{x1} скорости центра O_1 1-го шарика в направлении оси Ox от времени T

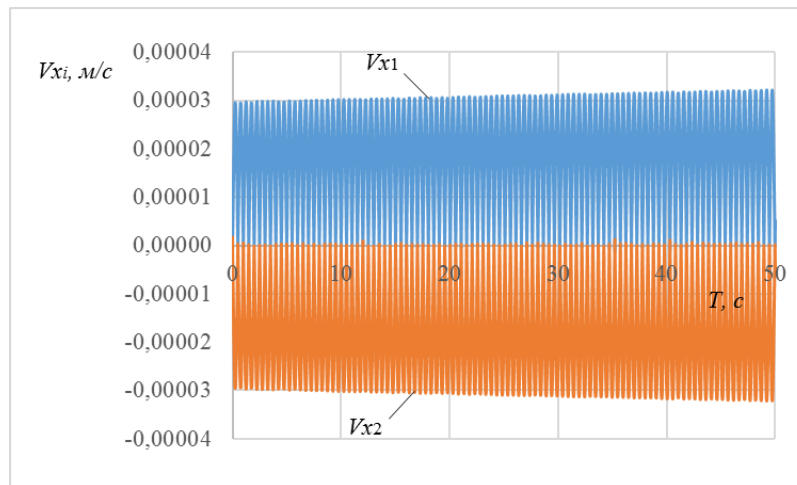


Рис. 2.51. Зависимости составляющих V_{xi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

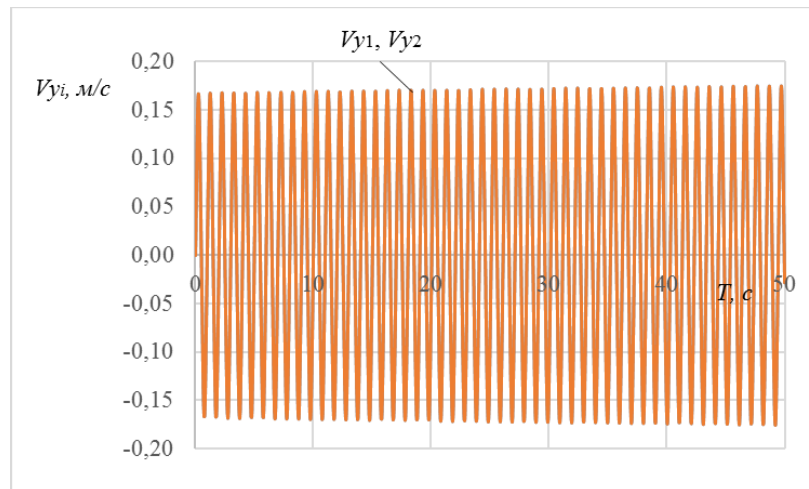


Рис. 2.52. Зависимости составляющих V_{yi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Oy от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

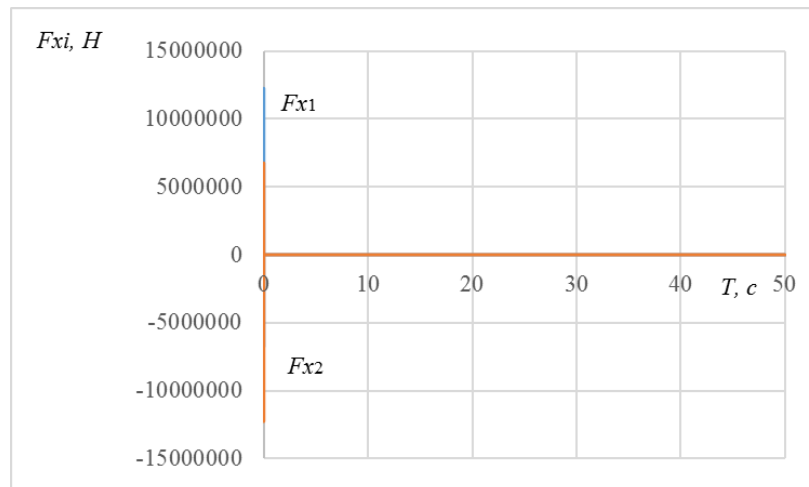


Рис. 2.53. Зависимости составляющих F_{xi} ($i = 1, 2$) сил взаимодействия шариков с подложкой в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

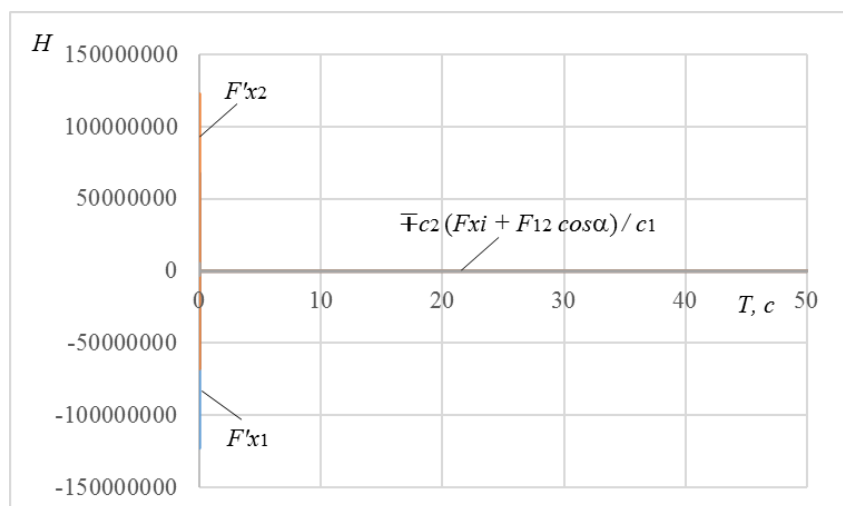


Рис. 2.54. Зависимости составляющих сил F'_{xi} ($i = 1, 2$) взаимодействия шариков с пластиной в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

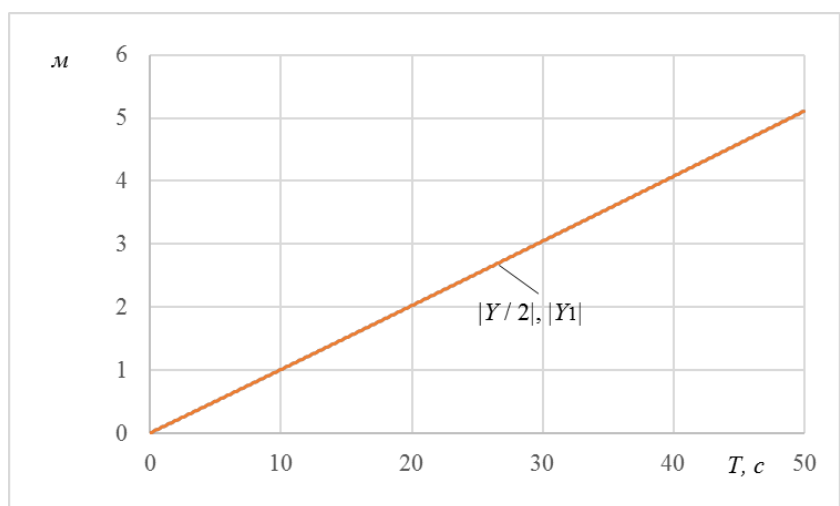


Рис. 2.55. Зависимость половины пути, пройденного пластиной и пути, пройденного центром O_1 1-го шарика в направлении оси Oy , от времени T

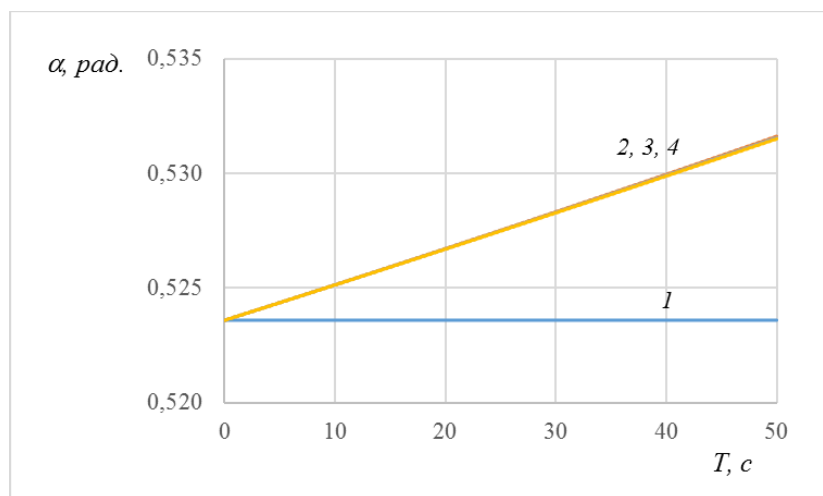


Рис. 2.56. Зависимость угла α от времени T

3) Случай $\alpha(0) = \pi/4$

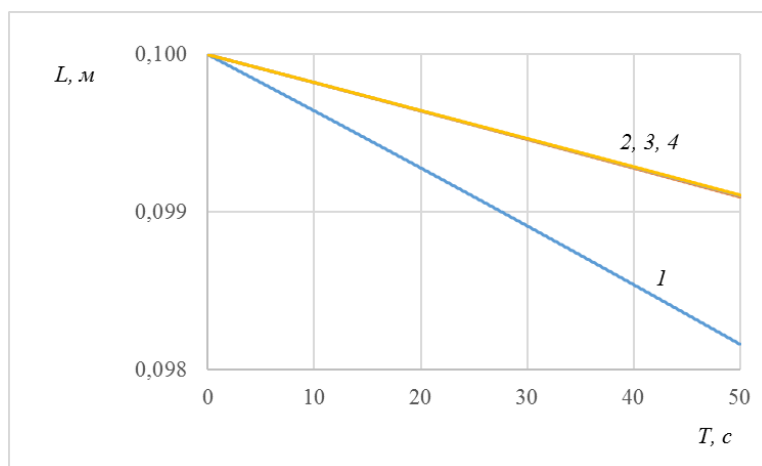


Рис. 2.57. Зависимость расстояния L между центрами шариков от времени T

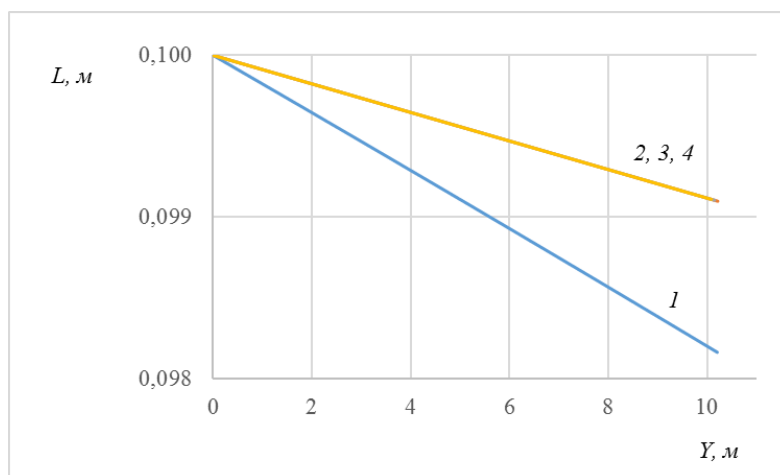


Рис. 2.58. Зависимость расстояния L между центрами шариков от пути Y , пройденного пластиной

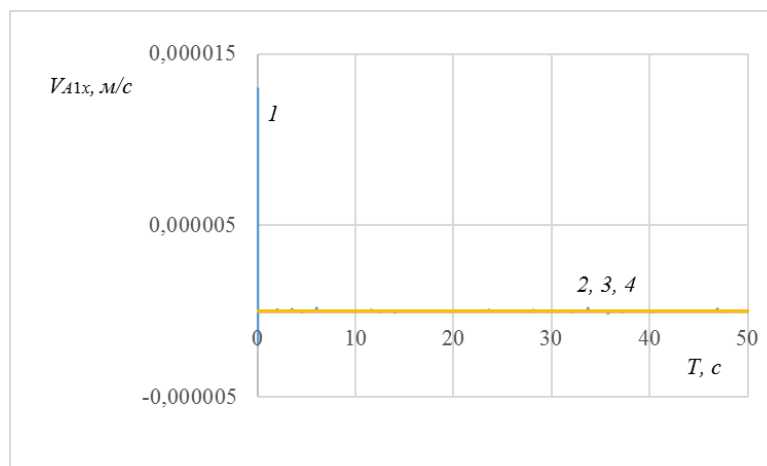


Рис. 2.59. Зависимость составляющей V_{A1x} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Ox от времени T

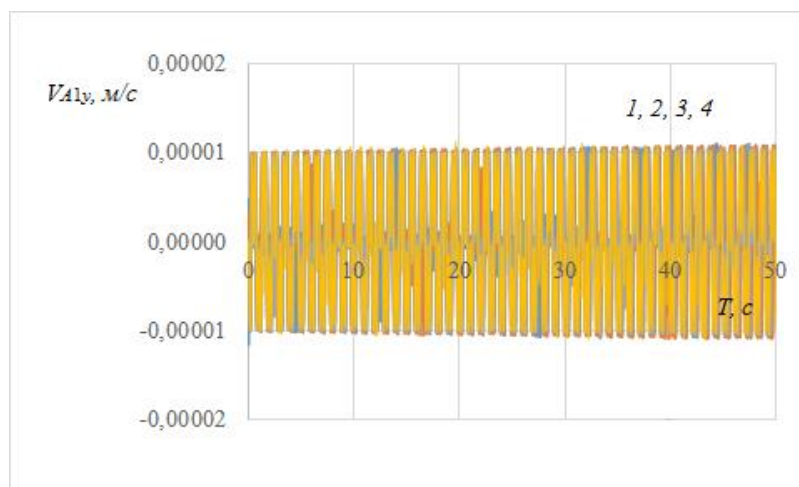


Рис. 2.60. Зависимость составляющей V_{A1y} скорости точки A_1 контакта 1-го шарика с пластиной вдоль оси Oy от времени T

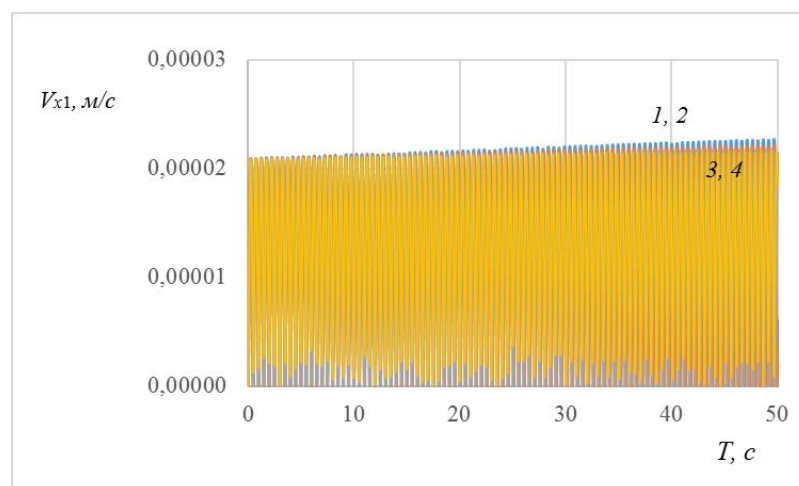


Рис. 2.61. Зависимость составляющей V_{x1} скорости центра O_1 1-го шарика в направлении оси Ox от времени T

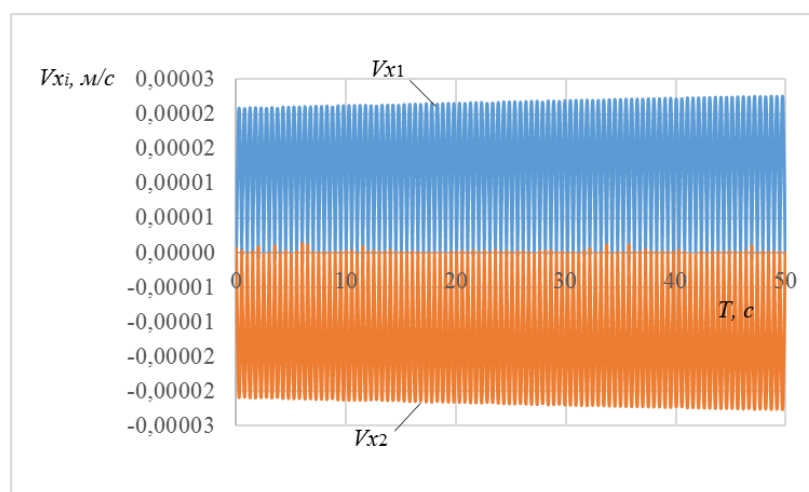


Рис. 2.62. Зависимости составляющих V_{xi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

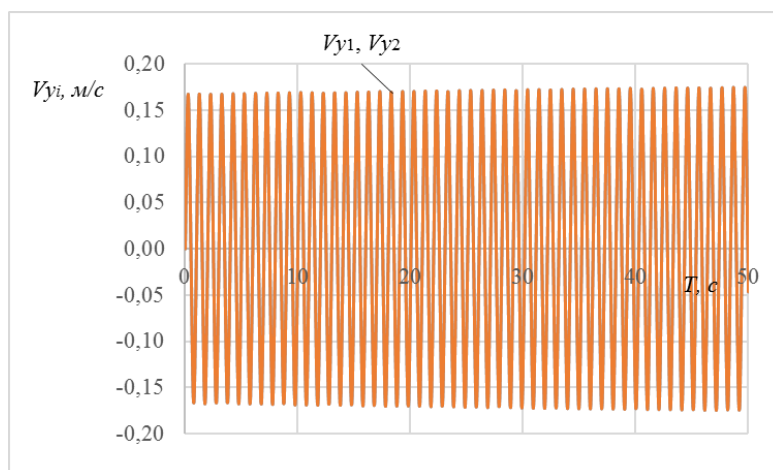


Рис. 2.63. Зависимости составляющих V_{yi} скоростей центров O_i шариков ($i = 1, 2$) в направлении оси Oy от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

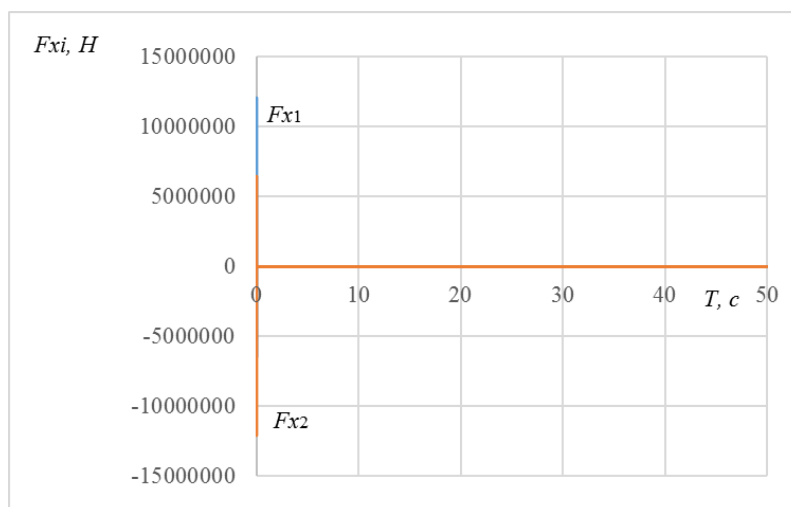


Рис. 2.64. Зависимости составляющих F_{xi} ($i = 1, 2$) сил взаимодействия шариков с подложкой в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

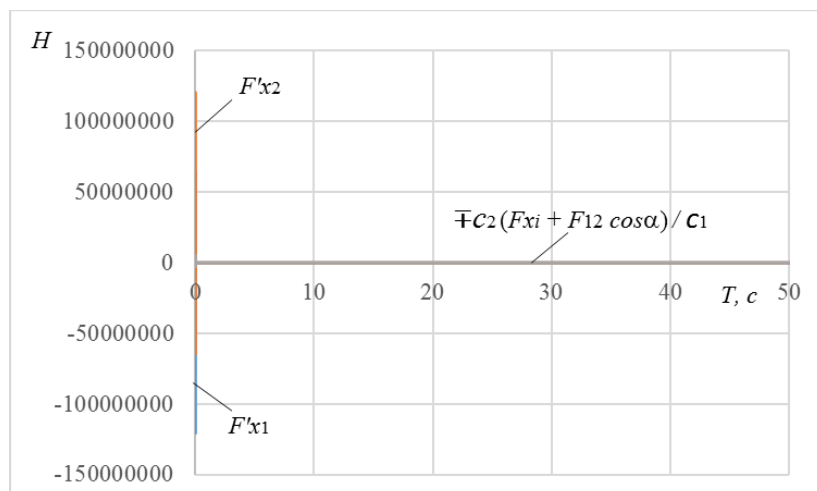


Рис. 2.65. Зависимости составляющих сил F'_{xi} ($i = 1, 2$) взаимодействия шариков с пластиной в направлении оси Ox от времени T для исходной системы (2.75)–(2.77)

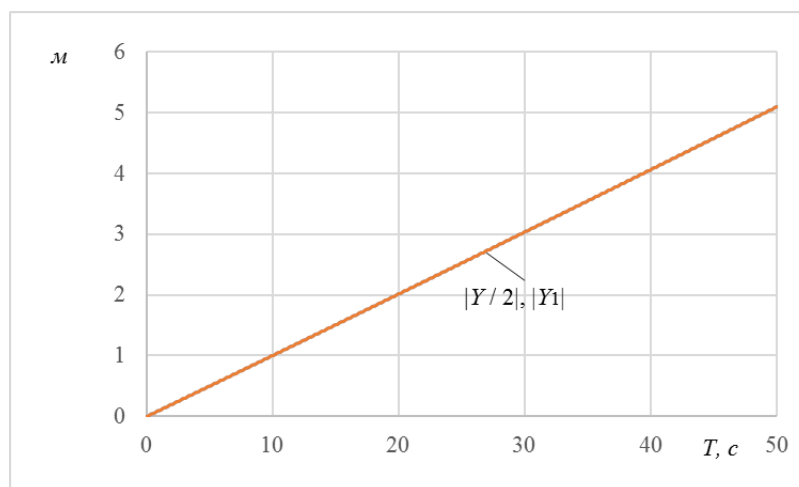


Рис. 2.66. Зависимость половины пути, пройденного пластиной и пути, пройденного центром O_1 1-го шарика в направлении оси Oy , от времени T

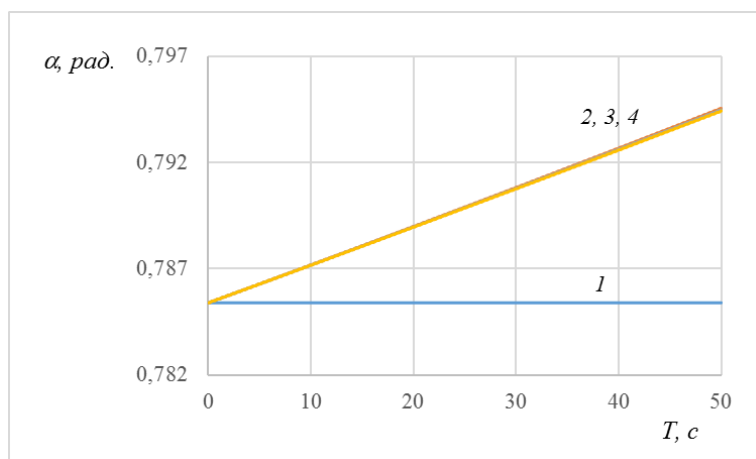


Рис. 2.67. Зависимость угла α от времени T

Приведенные графики демонстрируют корректность предположений (2.14), (2.15) и показывают, что асимптотические формулы (2.51), (2.52), (2.54), (2.80), (2.85), (2.87), отвечают теоретическим оценкам точности из раздела 2.4.3 и для конечных значений малых параметров.

Анализ рис. 2.35, 2.36, 2.46, 2.47 и 2.57, 2.58 показывает, что расстояние между центрами шариков практически не зависит от их взаимной ориентации (угла α). Тот же вывод был сделан в [23, 24], где взаимодействие шариков с подстилающей поверхностью описывалось при помощи закона преобразованного сухого трения. Из рис. 2.45, 2.56 и 2.67 видно, что угол α для вырожденных систем первой, второй и третьей очереди увеличивается по мере сокращения расстояния

между центрами шариков, что соответствует формуле (2.105) для $\sin\alpha$. Согласно рис. 2.39, 2.50, 2.61 при увеличении угла α время, в течение которого различия решений исходной системы (2.75)–(2.77) и вырожденных систем (2.94)–(2.96), (2.100) и (2.105) первой, второй и третьей очереди удовлетворяет полученным оценкам, уменьшается. Аналогичные выводы относительно исходной системы (2.26)–(2.28) и вырожденных систем (2.49) и (2.58) первой и второй очереди можно сделать и для рассмотренного выше случая скольжения шариков в точках B_i из раздела 2.3.

Расчеты (рис. 2.44, 2.55, 2.66) показывают, что рассогласование между $|Y/2|$ и $|Y_1|$ не превышает $O(\epsilon_2)$. Это соответствует выводу, сделанному в замечании 2 раздела 2.4.

Численное моделирование позволяет увидеть справедливость сделанного в разделе 2.4.2 вывода о том, что в области возрастания $|V_y|$ скорость сближения шариков увеличивается по мере сокращения расстояния между ними (на рис. 2.68 в качестве примера представлен фрагмент рис. 2.35 в увеличенном масштабе).

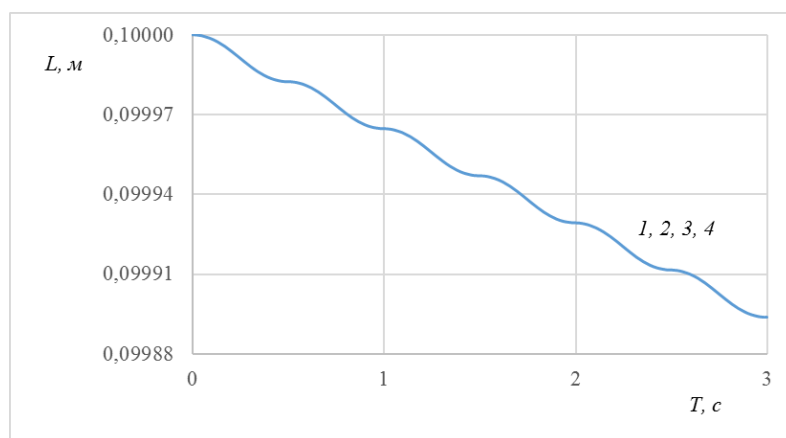


Рис. 2.68. Зависимость расстояния L между шариками от времени T (фрагмент рис. 2.35)

Заключение

В работе с использованием аналитических подходов изучались внешняя и внутренняя по отношению друг к другу задачи динамики, постановка которых учитывает деформируемость взаимодействующих тел при их трении. В первой части работы в рамках исследования внешней задачи предложен подход, позволяющий учесть возможность хрупкого разрушения тел при трении (в касательном направлении к поверхностям тел) и получить достаточные условия реализации в таких системах условий непроскальзывания тел или модифицированных первичных связей Дирака. Изучалась возможность использования разработанного подхода при моделировании динамики железнодорожной колесной пары. Вторая часть работы связана с внутренней задачей – исследованием поведения элементов промежуточной прослойки, возникшей в результате хрупкого разрушения приповерхностных слоев трущихся тел или привнесенных извне. Начальное представление об этом процессе можно получить, рассматривая движение двух соседних элементов прослойки, которое моделируется в рамках задачи динамики абсолютно твердых шариков между перемещающейся вдоль фиксированного направления жесткой плитой и неподвижной подстилающей поверхностью. Рассматривались различные условия взаимодействия шариков с подстилающей поверхностью (микропроскальзывание и скольжение); взаимодействие шариков с плитой считалось происходящим в режиме микропроскальзывания. Несмотря на теоретический характер работы, ее результаты приводят к ряду практических рекомендаций для построения математических моделей динамики систем с трением.

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Предложены методы построения математических моделей динамики систем, которые содержат тела, взаимодействующие с малыми относительными проскальзываниями и хрупким разрушением, путем предельного перехода к бесконечной жесткости касательных составляющих контактных сил (по направлению проскальзывания тел). Разделены случаи, когда предельный переход приводит систему к аналогу «промежуточной» модели вакономной механики или к (модифицированной) модели с первичными связями Дирака, возникающими из-за вырождения лагранжиана системы, в рамках которой проскальзывания тел

сохраняются. Для второго случая определено рассогласование решений исходной и предельной систем.

2. Показано, что при движении железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода наличие промежуточной прослойки между колесами и рельсами определяет быстрый процесс перехода контактных сил (моментов) к значениям вблизи тех, которые уравнивают внешние возмущения (при упрощении смещения колес относительно рельсов через элементы прослойки этот процесс является менее интенсивным). Учет микропроскальзываний колес относительно рельсов в рамках подхода Дирака позволяет описать поперечные колебания пары вблизи средней линии пути с нарастающей амплитудой, не учитываемые моделями с условиями непроскальзывания.

3. Найдены достаточные условия, которые позволяют пренебречь ускорениями точек контакта элементов прослойки с плитой и составляющими ускорений центров масс элементов прослойки в направлении, ортогональном ее смещению, то есть дают возможность моделировать динамику системы в рамках формализма Дирака для систем с вырожденными лагранжианами. Показано, что эти достаточные условия служат условиями реализации связей, запрещающих проскальзывания элементов прослойки относительно плиты в направлении, ортогональном ее смещению. Такой подход позволяет формировать модели более высокой точности по сравнению с моделью, запрещающей проскальзывание элементов прослойки относительно плиты.

4. Установлено, что для рассматриваемых условий движения системы элементы прослойки сближаются. Получены аналитические формулы, описывающие изменение расстояния между их центрами масс в зависимости от пути, пройденного плитой или центром масс одного из элементов в направлении ее смещения (для случая движения элементов прослойки в режиме микропроскальзывания относительно подстилающей поверхности) или от пути, пройденного точкой контакта элемента прослойки с подстилающей поверхностью в направлении смещения плиты (для случая, когда элементы прослойки скользят относительно подстилающей поверхности).

Список литературы

1. *Алексеев Н.М., Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М.* Некоторые применения механики разрушения к моделированию контактного взаимодействия в трибологии // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 134–143.
2. *Андронов В.В., Журавлев В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.–Ижевск: ИКИ, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 184 с.
3. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2009. 416 с.
4. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988. 640 с.
5. *Баренблатт Г.И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
6. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Скобки Дирака в геометрии и механике // В кн. Дирак П. Лекции по квантовой механике. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1998. С. 108–143.
7. *Бренделев В.Н.* О реализации связей в неголономной механике // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 481–487.
8. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Ж. выч. матем. и мат. физ. 1963. Т. 3. № 4. С. 611–642.
9. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
10. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 280 с.
11. *Влахова А.В.* О безытерационных приближениях по малому параметру // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2003. № 5. С. 29–37.
12. *Влахова А.В.* Моделирование движения железнодорожного экипажа при вкатывании гребня колеса на рельс с использованием подхода Дирака // Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 2. С. 67–71.

13. *Влахова А.В.* О реализации связей в динамике систем с качением // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 371–385.
14. *Влахова А.В.* О «неголономных движениях» гироскопических и колесных систем // Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 5. С. 66–72.
15. *Влахова А.В.* Математические модели движения колесных аппаратов. М.–Ижевск: АНО ИКИ. 2014. 148 с.
16. *Влахова А.В.* Динамика систем с качением и гироскопических систем с малыми обобщенными скоростями и реализация связей // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 6. С. 790–807.
17. *Влахова А.В.* О влиянии разрушения на динамику механических систем // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 734–758.
18. *Влахова А.В., Макиева Э.И.* Реализация связей в задачах динамики систем с проскальзыванием и разрушением // Докл. Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2026. Т. 528. № 1. С. 60–74.
19. *Влахова А.В., Макиева Э.И.* Моделирование динамики элементов промежуточного слоя между контактирующими телами // Изв. РАН. МТТ. 2026. № 1. С. 95–123.
20. *Влахова А.В., Макиева Э.И.* Моделирование динамики в промежуточном слое между контактирующими телами // Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2026. № 2. С. 46–57.
21. *Влахова А.В., Макиева Э.И.* Сингулярно возмущенные задачи динамики систем с проскальзыванием и разрушением // Международная конференция «Асимптотические методы в математической физике» (Москва, 26–27 февраля 2026 г.): М.: Физический ф-т МГУ. С. 34–37. [Электронный ресурс]. 2026. Режим доступа: <https://www.hse.ru/data/2026/02/26/169110613/asymptotic-methods-2026-v4-b.pdf> (дата обращения: 18.05.2026)
22. *Влахова А.В., Мартыненко Ю.Г., Новожиллов И.В.* Колебания и фракционный анализ. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2020. 412 с.

23. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Механизм движений в среде промежуточного слоя между контактирующими телами // Письма о материалах. 2015. Т. 5. № 4. С. 414–419.
24. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Моделирование механизма движений в промежуточном слое между контактирующими телами при сдвиге со сжатием // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 3. С. 55–70.
25. Гудьер Дж. Математическая теория равновесных трещин // В сб. Разрушение. Т. 11. М.: Мир, 1975. С. 13-82.
26. Дерябин М.В. О гамильтоновом формализме Дирака и реализации связей малыми массами // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 41–45.
27. Дерябин М.В. О движении твердого тела в идеальной жидкости и реализации связей присоединенными массами // Успехи механики. 2004. Т. 2. № 3.
28. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с. = Johnson K.L. Contact Mechanics. N.Y. ets.: Cambrige: Univ. Press, 1985
29. Дирак П. Обобщенная гамильтонова динамика // Вариационные принципы механики / Под ред. Л.С. Полак. М.: Физматгиз, 1959. С. 705–724.
30. Дирак П. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979. 480 с.
31. Дирак П.А. Собрание научных трудов. Т. III. Квантовая теория (научные статьи 1948-1984 гг.) / Под общ. ред. А.Д. Суханова. М.: Физматлит, 2004. 720 с.
32. Ентов В.М., Салганик Р.Л. Трещина Прандтля в вязко-упругом теле. Стационарное распространение трещины // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 6. С. 41–60.
33. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
34. Журавлев В.Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 81–88.
35. Журавлев В.Ф. Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 3–9.

36. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И.В. Мещерского: Системы с качением. Неголономные связи. М.: ЛИБРОКОМ, 2013. 192 с.
37. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. 360 с. Т. 2. Механика упругих и абсолютно твердых тел. М.: Наука, 1986. 416 с.
38. Калинин В.В., Новожилов И.В. О необходимых и достаточных условиях реализуемости неголономных связей силами кулонова трения // АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 15–19.
39. Карапетян А.В. О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42–51.
40. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
41. Коган А.Я. Динамика пути и его взаимодействие с подвижным составом. М.: Транспорт, 1997. 326 с.
42. Козлов В.В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями // I. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1982. № 3. С. 92–100. II. Там же. 1982. № 4. С. 70–76. III. Там же. 1983. № 3. С. 102–111. IV. Там же. 1987. № 5. С. 76–83. V. Там же. 1988. № 6. С. 51–54.
43. Козлов В.В. Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550–554.
44. Козлов В.В. Конструктивный подход к обоснованию динамики систем со связями (к 200-летию Аналитической механики Ж.Л. Лагранжа) // Сб. научно-методических статей. М.: Изд-во МГУ, 1990. Вып. 20. С. 8–15.
45. Козлов В.В. К вопросу о реализации связей в динамике // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 692–698.
46. Козлов В.В. Динамика систем с большими гироскопическими силами и реализация связей // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 3. С. 307–315.
47. Козлов В.В. К обобщенной гамильтоновой динамике Дирака // УМН. 2024. Т. 79. Вып. 4 (478). С. 95–130.

48. Козлов В.В., Нейштадт А.И. О реализации голономных связей // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 858–861.
49. Кузьмина Р.П. Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2003. 336 с.
50. Лазарян В.А. Динамика транспортных средств: Избр. тр. Киев: Наук.думка, 1985. 528 с.
51. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 272 с.
52. Лужнов Ю.М. Сцепление колес с рельсами (природа и закономерности). М.: Интекст, 2003. 144 с.
53. Макиева Э.И. Моделирование движений в промежуточном слое между контактирующими телами // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2025» [Электронный ресурс]. 2025. Режим доступа: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2025/data/38057/187852_uid337489_report.pdf (дата обращения: 18.05.2026)
54. Марченко Е.А. О природе разрушения поверхности металлов при трении. М.: Наука, 1979. 120 с.
55. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
56. Нестеренко В.В., Червяков А.М. Сингулярные лагранжианы. Классическая динамика и квантование. Препринт ОИЯИ Р2-86-323. Дубна, 1986. 101 с.
57. Новожилов И.В. Условия застоя в системах с кулоновым трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 1. С. 8–14.
58. Новожилов И.В. Разделение движений рельсового экипажа // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 1. С. 55–59.
59. Новожилов И.В. Предельная модель системы с упругими элементами большой жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 24–27.
60. Новожилов И.В. Модель движения деформируемого колеса // Изв. АН. МТТ. 1995. № 6. С. 19–26.

61. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995. 224 с.
62. *Новожилов И.В.* Качение колеса // Изв. АН. МТТ. 1998. № 4. С. 50–55.
63. *Новожилов И.В.* Методы формирования приближенных математических моделей движения // Фундамен. и прикл. Математика. 2005. Т. 11. Вып. 7. С. 5–9.
64. *Новожилов И.В., Кручинин П.А., Магомедов М.Х.* Контактные силы взаимодействия колеса с опорной поверхностью // Сб. научно-методических статей. М.: Изд-во МГУ, 2000. Вып. 23. С. 86–95.
65. *Розенблат Г.М.* Об устойчивости движения железнодорожной колесной пары // Докл. РАН. 2012. Т. 442. № 5. С. 623–627.
66. *Самсонов В.А.* О трении при скольжении и верчении тела // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1981. № 2. С. 76–78.
67. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. 5-е изд., испр. М.: Наука, 1994. Т. 1. 528 с.; Т. 2. 560 с.
68. *Фуфаев Н.А.* Об идеализации поверхности соприкосновения в виде точечного контакта в задачах качения // ПММ. 1966. Т. 39. Вып. 1. С. 67–72.
69. *Харрис У.Дж., Захаров С.М., Ландгрэн Дж., Турне Х, Эберсен В.* Обобщение передового опыта тяжеловесного движения: вопросы взаимодействия колеса и рельса / Пер. с англ. М.: Интекст, 2002. 408 с.
70. *Черноусько Ф.Л.* Динамика систем с упругими элементами большой жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 101–113.