

**ОТЗЫВ научного руководителя
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук Калеевой Галины Анатольевны
на тему: «Универсальная эквивалентность линейных групп над
кольцами»
по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика**

Диссертационная работа Калеевой Галины Анатольевны «Универсальная эквивалентность линейных групп над кольцами» посвящена построению критерия универсальной эквивалентности линейных групп над кольцами. Работа выполнена на стыке теории моделей, теории групп, теории колец и линейной алгебры и продолжает классическую линию исследований, восходящую к работам А. И. Мальцева. Выбранная тема представляется мне безусловно актуальной как с точки зрения развития логических методов в алгебре, так и с точки зрения изучения внутреннего строения линейных групп над различными классами колец.

Актуальность исследования определяется тем, что вопрос о том, в какой степени логические свойства линейной группы определяются ее размерностью и базовым кольцом или полем, является одним из естественных и содержательных вопросов современной теории моделей алгебраических структур. Для линейных групп и близких объектов известен целый ряд фундаментальных результатов об изоморфизмах, элементарной эквивалентности и first-order rigidity, однако универсальная эквивалентность является более тонким и самостоятельным объектом исследования. С одной стороны, она слабее элементарной эквивалентности, а с другой стороны, именно она позволяет особенно ясно увидеть, какие свойства структуры уже фиксируются универсальной теорией. Поэтому построение критериев универсальной эквивалентности для естественных классов линейных групп является важной и нетривиальной задачей.

Диссертация Калеевой Г. А. посвящена именно этому кругу вопросов. В работе последовательно развивается мальцевский подход применительно к универсальной теории линейных групп. На момент выполнения диссертации в литературе отсутствовал общий критерий универсальной эквивалентности для полных и специальных линейных групп над полями произвольной характеристики, а также для линейных групп над локальными коммутативными и некоммутативными кольцами с $1/2$. Тем самым диссертация заполняет заметный пробел в данной области.

Цель диссертации сформулирована четко и достигнута в полном объеме. Автор строит критерий универсальной эквивалентности линейных групп, решая при этом три крупные задачи: перенос критериев мальцевского типа на случай универсальной эквивалентности для линейных групп над полями характеристики, отличной от 2; разбор существенно более сложного случая полей характеристики 2; дальнейшее обобщение полученных результатов на локальные ассоциативные кольца — сначала коммутативные, а затем и некоммутативные.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Первая глава носит подготовительный характер и содержит необходимые сведения из теории моделей и теории локальных колец. В ней аккуратно вводятся универсальные и экзистенциальные формулы, понятие универсальной эквивалентности, критерий универсальной эквивалентности через конечные частичные изоморфизмы, а также собраны факты о локальных кольцах, используемые далее. Уже эта глава показывает, что автор свободно владеет как логическим аппаратом, так и современным алгебраическим языком.

Во второй главе исследуются полные и специальные линейные группы над полями. Здесь получен один из основных результатов диссертации: для

бесконечных полей K и L группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$, где $G = GL$ или SL , универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$ и поля K и L универсально эквивалентны. Особо хочу отметить, что автору удалось не просто перенести известные идеи из ситуации элементарной эквивалентности, а действительно адаптировать их к иной логической постановке задачи. В случае характеристики, отличной от 2, ключевую роль играет метод инволюций, тогда как в характеристике 2 стандартная схема уже не работает и требует серьезной модификации.

Именно разбор случая характеристики 2 представляется мне особенно интересной и технически сложной частью работы. Вместо элементов порядка 2 автор использует элементы порядка 3, отдельно исследует случаи наличия и отсутствия в поле корней третьей степени из единицы, выделяет трансвекции и через них кодирует операции сложения и умножения в поле. Этот переход выполнен очень аккуратно и убедительно и свидетельствует о высоком уровне математической культуры автора. В результате получен полный критерий универсальной эквивалентности полных и специальных линейных групп над полями произвольной характеристики.

Третья глава посвящена переходу от полей к локальным коммутативным кольцам с $1/2$. Здесь доказан критерий универсальной эквивалентности для групп $GL_n(R)$ и $SL_n(R)$ при $n \geq 3$: такие группы универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают размерности и универсально эквивалентны сами кольца. В этой части работы особенно хорошо видно, что автор не ограничивается формальными аналогиями с полевым случаем, а проводит действительно содержательный анализ строения инволюций и трансвекций над локальными кольцами. Все переходы тщательно обоснованы, отдельно рассмотрены конечный и бесконечный случаи, показано, каким образом из универсальной эквивалентности групп извлекается информация об универсальной эквивалентности колец.

В четвертой главе получен, на мой взгляд, наиболее тонкий результат диссертации — критерий универсальной эквивалентности полных линейных групп над некоммутативными локальными кольцами с $1/2$. Здесь возникает новая и естественная особенность: универсальная эквивалентность групп приводит либо к универсальной эквивалентности исходных колец, либо к универсальной эквивалентности одного кольца кольцу с противоположным умножением. Эта альтернатива хорошо согласуется с ранее известными результатами об изоморфизмах линейных групп. Доказательство требует дальнейшего развития метода инволюций и очень аккуратного анализа того, как трансвекции кодируют операции в исходном или противоположном кольце. Работа выполнена на высоком научном уровне.

Научная новизна диссертации не вызывает сомнений. В работе получены новые критерии универсальной эквивалентности для нескольких важных классов линейных групп. Считаю важным специально подчеркнуть, что результаты второй главы были опубликованы в совместной работе с одним из научных руководителей, что прямо и корректно указано в тексте диссертации, тогда как результаты третьей и четвертой глав получены в самостоятельных работах диссертанта. Такое ясное разграничение вклада является существенным достоинством работы и свидетельствует о научной добросовестности автора.

Степень обоснованности положений, выносимых на защиту, научных выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, является высокой. Все утверждения сформулированы строго, доказательства подробны и опираются на надежную математическую базу. В работе ясно обозначены используемые предположения, в частности ограничения на размерность, локальность колец и наличие обратимого элемента $1/2$. Полученные результаты согласуются с известными фактами о строении линейных групп и с классическими результатами мальцевского типа. Достоверность результатов обеспечивается

строгостью доказательств и систематическим использованием критериев универсальной эквивалентности.

Результаты диссертации прошли достаточную апробацию. Они докладывались на международной конференции «Мальцевские чтения» и многократно обсуждались на научном семинаре «Теория моделей». По теме диссертации опубликованы четыре работы, из которых три являются статьями в рецензируемых научных изданиях, а одна — тезисами доклада конференции. Тем самым основные результаты диссертации отражены в публикациях автора в объеме, достаточном для кандидатской диссертации.

За годы работы над диссертацией Калеева Г. А. проявила себя как зрелый, вдумчивый и очень добросовестный исследователь. Мне особенно хотелось бы отметить ее аккуратность в доказательствах, настойчивость в проработке трудных мест и умение последовательно доводить начатую задачу до законченного результата. Она умеет глубоко вникать в сложные тексты, терпеливо разбираться в технических деталях и при этом не терять из виду общую логику исследования. В ходе работы над диссертацией Галина заметно выросла как самостоятельный математик, научилась уверенно сочетать логические и алгебраические методы и показала хорошее понимание места своих результатов в общей картине современной алгебры и теории моделей.

Мне также хотелось бы подчеркнуть ее исследовательскую дисциплину, способность спокойно и последовательно работать над сложной темой в течение длительного времени и готовность возвращаться к трудным вопросам до тех пор, пока они не будут доведены до окончательной ясности. Все это позволяет высоко оценить не только полученные ею результаты, но и ее научный потенциал.

Работа носит теоретический характер, однако ее результаты и методы представляют несомненную ценность для дальнейших исследований в теории моделей алгебраических систем, теории линейных групп и при изучении логических свойств групп над кольцами. Разработанные в диссертации методы могут быть использованы и в дальнейшем — в частности, при изучении более широких классов матричных групп и при построении более общих критериев универсальной эквивалентности.

К замечаниям по рукописи можно отнести наличие отдельных редакционных и оформительских шероховатостей предварительной версии текста. Они касаются некоторых технических помет, местами не до конца заполненных библиографических сведений и отдельных фрагментов, требующих финальной стилистической вычитки. Подчеркну, что эти замечания не затрагивают существа полученных результатов, не ставят под сомнение корректность доказательств и легко устранимы при окончательной подготовке рукописи.

Вместе с тем указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено в соответствии с требованиями, предъявляемыми к диссертациям на соискание ученой степени

кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Считаю, что диссертационная работа Калеевой Галины Анатольевны «Универсальная эквивалентность линейных групп над кольцами» удовлетворяет всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней в МГУ имени М. В. Ломоносова и рекомендую ее к защите в диссертационном совете МГУ 011.4 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Университет имени Бар-Илана (Израиль)
Факультет точных наук, департамент математики
Бунина Елена Игоревна

15 января 2026 г.

Контактные данные:
тел.: +972-53-244-3002, e-mail: elena.bunina@biu.ac.il
Специальность, по которой научным руководителем
защищена диссертация:
01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Адрес места работы:
5210002, Израиль, Рамат Ган, Университет Бар-Илан.
Факультет точных наук, департамент математики.
Тел.: +972-53-244-3002; e-mail: elena.bunina@biu.ac.il.

Подпись профессора Буниной Е. И. удостоверяю:

профессор _____ Гиль Ариэль
декан факультета точных наук
Университета имени Бар-Илана