МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Чистяков Иван Александрович

Методы приближённого решения задач управления нелинейными системами за счёт их кусочной линеаризации

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Диссертация подготовлена на кафедре системного анализа
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М.В Ломоносова

Научный руководитель – **Точилин Павел Александрович**
кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты – **Гусев Михаил Иванович**
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, отдел оптимального управления, ведущий научный сотрудник

Селюцкий Юрий Дмитриевич
доктор физико-математических наук, доцент, Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, лаборатория общей механики, ведущий научный сотрудник

Фурсов Андрей Серафимович
доктор физико-математических наук, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления, профессор

Защита диссертации состоится «29» апреля 2026 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.8 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: *Российская Федерация, 119991, Москва, ул. Ленинские горы, д. 1., главное здание МГУ, ауд. 16-10.*

E-mail: ast.diffiety@gmail.com

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3814

Автореферат разослан «___» __________ 2026 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Г.А. Чечкин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Тема диссертационной работы относится к одному из важных направлений в области дифференциальных уравнений — теории оптимального управления. Автором рассматривается задача целевого управления: требуется перевести систему обыкновенных дифференциальных уравнений из известного начального состояния в заданное множество конечных состояний, при наличии ограничений на управляющее воздействие. Особый интерес при этом представляют нелинейные системы, поскольку, с одной стороны, с их помощью описывается большинство исследуемых процессов, а с другой — зачастую для них чрезвычайно сложно получить точное аналитическое решение.

Один из основных вопросов заключается в том, существует ли решение поставленной задачи. Поскольку ответ может оказаться отрицательным, рассматриваются задачи попадания в как можно меньшую окрестность целевого множества. Такая постановка сопряжена с понятиями *множества достижимости* — совокупности всех точек, в которые можно попасть из заданной точки при использовании допустимых управлений, — и *множества разрешимости* (также *попятное множество достижимости*) — совокупности всех начальных точек, при которых поставленная задача управления разрешима. Нахождение этих множеств для нелинейных систем является трудоёмким процессом, в настоящее время точный результат известен лишь для некоторых простых случаев[1]. В диссертационной работе автором исследуются численные методы построения *внутренних оценок множества разрешимости*, т.е. выделяется подмножество множества начальных точек, при которых задача целевого управления гарантированно имеет решение.

При построении траекторий системы могут использоваться различные классы управлений. Например, *программные управления*, когда управляющие функции зависят только от времени. Для их нахождения применяется развитый математический аппарат на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина[2], а итоговые управления вычисляются заранее, до проведения эксперимента. Другим важным классом являются *позиционные управления* (также *управления с обратной связью*), при которых имеется зависимость от дополнительных данных, например, от вектора фазовых координат. Именно они предпочтительны во многих прикладных задачах, поскольку в реальном времени позволяют скомпенсировать негативные эф-

[1] *Пацко В. С.*, *Федотов А. А.* Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 182—197; *Рублёв И. В.* Множество достижимости трёхмерной каскадной системы управления // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 13. С. 1672—1679.

[2] *Ли Э. Б.*, *Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М: Наука, 1972; *Понтрягин Л. С.*, *Болтянский В. Г.*, *Гамкрелидзе Р. В.*, *Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М: Наука, 1983.

фекты от погрешности численных методов, а также от непредвиденных внешних воздействий. Поэтому диссертационная работа сфокусирована на построении позиционных управляющих стратегий. Отметим, что если оставить за скобками возможное наличие неизвестных возмущений, то множества достижимости при использовании указанных классов совпадают.

Для систем с непрерывной динамикой одним из основных способов оценки множеств достижимости (разрешимости) является переход к задаче разрешения соответствующего дифференциального включения. При этом правая часть включения в каждый момент времени может ограничиваться более простым объектом[3]. Кроме того, для дифференциальных включений можно построить сеточную аппроксимацию[4].

Чтобы понизить вычислительную сложность, предложены методы, позволяющие представить множества достижимости с помощью множеств более простой формы. В частности, в работах А.Б. Куржанского[5] применительно к линейным системам был использован аппарат *эллипсоидального исчисления*, в рамках которого точное множество достижимости (разрешимости) представимо в виде объединения или пересечения, вообще говоря, бесконечного числа эллипсоидов. Выбирая конечное подмножество таких эллипсоидов можно добиться произвольной точности как внутренних, так и внешних оценок. Предприняты попытки использовать этот подход и для нелинейных систем[6].

Другой класс алгоритмов основан на использовании метода динамического программирования, разработанного Р. Беллманом[7]. Этот подход заключается во введении вспомогательного объекта — функции цены, которая вычисляется как оптимальное значение соответствующего задаче функционала для каждой позиции системы. Позиция определяется таким образом, что функция цены удовлетворяет *принципу оптималь-*

[3] *Greenstreet M. R.*, *Mitchell I.* Reachability Analysis Using Polygonal Projections // Hybrid Systems: Computation and Control / ed. by F. W. Vaandrager, J. H. van Schuppen. Springer Berlin Heidelberg, 1999. P. 103–116; *Shafa T.*, *Ornik M.* Reachability of Nonlinear Systems With Unknown Dynamics // IEEE Transactions on Automatic Control. 2023. Vol. 68, no. 4. P. 2407–2414.

[4] *Ушаков В. Н.*, *Хрипунов А. П.* О приближённом построении интегральных воронок дифференциальных включений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1994. Т. 34, № 7. С. 965—977; *Незнахин А. А.*, *Ушаков В. Н.* Сеточный метод приближённого построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41, № 6. С. 895—908.

[5] *Kurzhanski A. B.*, *Valyi. I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Birkhäuser, 1997; *Kurzhanski A. B.*, *Varaiya P.* On Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Part I: External appoximations // Optimization Methods and Software. 2002. Vol. 17, no. 2. P. 177–206.

[6] *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988; *Филиппова Т. Ф.* Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 223—232.

[7] *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.

ности в форме полугруппового свойства, и обычно представляет собой пару объектов: момент времени и фазовые координаты системы. В таком случае функция цены является решением дифференциального уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ) в частных производных. При этом функция цены применяется для получения позиционных синтез-управлений, а множество уровня функции цены в задаче целевого управления совпадает со множеством разрешимости.

Отметим, что функция цены может оказаться негладкой, в таком случае она удовлетворяет уравнению ГЯБ лишь в точках дифференцируемости. Возникает необходимость применения обобщённых *вязкостных*[8] или *минимаксных*[9] решений, которые могут быть найдены различными способами. В работах Н.Н. Субботиной[10] решения ищутся с использованием формул *метода характеристик*. Исследовано применение разностных схем и аппроксимирующих операторов[11] для уравнения ГЯБ. В случае уравнений эйконального типа для построения вязкостного решения используется *метод быстрого марша*[12].

Поскольку поиск решения уравнения ГЯБ также является трудоёмким процессом, можно перейти к задаче построения оценок функции цены. При рассмотрении полиномиальных систем такое построение осуществимо на основе задач выпуклого программирования[13], а в более общем случае допустимо воспользоваться *принципом сравнения*, который был предложен А.Б. Куржанским[14]. Он позволяет сконструировать верхние и нижние оценки функции цены путём оценивания гамильтониана в уравнении

---

[8] *Crandall M. G.*, *Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Transactions of American Mathematical Society. 1983. Vol. 277. P. 1–41.

[9] *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.

[10] *Субботина Н. Н.* Метод характеристик Коши и обобщённые решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана // Доклады Академии наук. 1991. Т. 320, № 3. С. 556—561; *Субботина Н. Н.*, *Токманцев Т. Б.* Классические характеристики уравнения Беллмана в конструкциях сеточного оптимального синтеза // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2010. Т. 271. С. 259—277.

[11] *Crandall M. G.*, *Lions P.-L.* Two Approximations of Solutions of Hamilton–Jacobi Equations // Mathematics of Computation. 1984. Vol. 43, no. 67. P. 1–19; *Тарасьев А. М.*, *Успенский А. А.*, *Ушаков В. Н.* Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщённых решений уравнения Гамильтона–Якоби // Известия РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 173—185.

[12] *Sethian A.*, *Vladimirsky A.* Ordered upwind methods for static Hamilton–Jacobi equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2001. Vol. 41, no. 1. P. 325–363; *Cristiani E.* A Fast Marching Method for Hamilton-Jacobi Equations Modeling Monotone Front Propagations // Journal of Scientific Computing. 2009. Vol. 39. P. 189–205.

[13] *Xue B.*, *Fränzle M.*, *Zhan N.* Inner-Approximating Reachable Sets for Polynomial Systems with Time-Varying Uncertainties // IEEE Transactions on Automatic Control. 2019. Vol. 65, no. 4. P. 1468–1483.

[14] *Куржанский А. Б.* Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона–Якоби в теории управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 173—183.

Гамильтона–Якоби–Беллмана. Сам принцип сравнения не даёт конкретного алгоритма построения оценок, однако разработаны подходы для его применения к различным классам задач. В частности, в работах М.И. Гусева[15] рассмотрены системы с нелинейными перекрёстными связями, а также системы, где можно выделить линейную часть. Как следствие, даже при достаточно общей постановке задачи можно строить гарантированные оценки за счёт линеаризации правых частей дифференциальных уравнений. П.А. Точилин[16] развил этот метод путём перехода к вспомогательной задаче для кусочно-линейной системы с помехой.

При использовании принципа сравнения удобно искать функцию цены как приближённое решение уравнения ГЯБ в некотором параметрически заданном классе функций. К примеру, если исходная нелинейная система аппроксимируется кусочно-аффинной на множестве симплексов в фазовом пространстве, то представляется разумным определить функцию цены как кусочно-аффинную на этом же множестве симплексов. Точность метода может быть повышена, если рассматривать функции цены более сложной структуры. Например, в работах П.А. Точилина и К.С. Маянцева[17] предприняты попытки обобщить подход на случай кусочно-квадратичных функций цены. В диссертационной работе автором предлагается дальнейшее развитие этой идеи.

В последнее время также распространяются методы, базирующиеся на алгоритмах машинного обучения. Приближённое решение уравнения ГЯБ, из которого впоследствии выводится синтез-управление, может рассматриваться в классе нейросетевых моделей[18]. В виде нейронной сети представима и сама управляющая стратегия[19], при этом на практике активно применяется обучение с подкреплением[20]. Однако отметим, что перечисленные методы требуют большой объём вычислительных ресурсов, а для полу-

[15] *Гусев М. И.* Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 82—94; *Гусев М. И.* Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39—51.

[16] *Tochilin P. A.* Piecewise affine feedback control for approximate solution of the target control problem // IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53, no. 2. P. 6127–6132; *Точилин П. А.* О построении кусочно-аффинной функции цены в задаче оптимального управления на бесконечном отрезке времени // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1. С. 223—238,

[17] *Mayantsev K. S.*, *Tochilin P. A.* The Feedback Control Problem for Switched System with Uncertainties // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, no. 1. P. 2187–2192; *Маянцев К. С.*, *Точилин П. А.* Об одном методе построения кусочно-квадратичных функций цены для задачи управления системой с переключениями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 11. С. 1497—1507.

[18] *Cheng T.*, *Lewis F. L.*, *Abu–Khalaf M.* Fixed-Final-Time-Constrained Optimal Control of Nonlinear Systems Using Neural Network HJB Approach // IEEE Transactions on Neural Networks. 2007. Vol. 18, no. 6. P. 1725–1737.

[19] *Sánchez–Sánchez C.*, *Izzo D.*, *Hennes D.* Learning the optimal state-feedback using deep networks // 2016 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence. 2016. P. 1–8.

[20] *Саттон Р. С.*, *Барто Э. Г.* Обучение с подкреплением. М.: ДМК пресс, 2020.

ченных решений сложно вывести какие-либо гарантированные результаты. Тем не менее, в диссертационной работе показано, что, имея произвольную наперёд заданную позиционную стратегию управления, с использованием принципа сравнения также можно построить гарантированные оценки множества разрешимости, равно как и априорную погрешность попадания траектории системы, замкнутой выбранным управлением, в целевое множество.

Целью работы является разработка численных методов для построения подмножеств множеств разрешимости (гарантированных внутренних оценок), а также решение задачи синтеза управлений для определённых классов нелинейных систем.

Методы исследования. Описанный в диссертационной работе подход в первую очередь основан на методах динамического программирования, в частности на принципе сравнения. Для перехода к вспомогательной задаче для кусочно-аффинной системы с помехой используются алгоритмы триангуляции пространства и линеаризации нелинейных систем. Построение решения связано с методами выпуклого анализа, алгоритмами численного интегрирования и различными методами оптимизации, в том числе рассматриваются задачи квадратичного программирования и алгоритмы на графах. Доказательство корректности полученного решения опирается на теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и теорию дифференциальных включений. Применительно к задаче нахождения управляющей стратегии затрагиваются методы машинного обучения.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Предложенные алгоритмы на основе вычисления кусочно-квадратичных верхних оценок функции цены, заданных на совокупности симплексов в фазовом пространстве, позволяют получить внутренние аппроксимации множеств разрешимости для нелинейных систем дифференциальных уравнений, аффинных по управляющему параметру.
2. Предложенный алгоритм на основе вычисления кусочно-кубических оценок функции цены, заданных на совокупности множеств, разделённых набором параллельных гиперплоскостей, позволяет построить внутренние аппроксимации множеств разрешимости для систем дифференциальных уравнений, имеющих нелинейность по единственной координате.
3. Непрерывные и разрывные позиционные управления на основе полученных оценок функции цены переводят систему в окрестность целевого множества с гарантированной априорной оценкой погрешности.
4. Указанные априорные оценки погрешности попадания траектории в целевое множество являются гарантированными при использовании

кусочно-аффинной аппроксимации произвольной непрерывной позиционной стратегии управления.

Научная новизна работы. Полученные автором результаты являются новыми. Диссертационная работа продолжает исследования[16] построения гарантированных оценок множеств разрешимости на основе методов динамического программирования и перехода к вспомогательной задаче для кусочно-аффинной системы с помехой, однако применяемый подход усовершенствован за счёт вывода кусочно-заданных оценок функции цены с бóльшим числом неизвестных параметров. Новизна работы проявляется в следующих результатах:

1. В случае кусочно-аффинной аппроксимации системы на совокупности параллельных гиперполос автором расширен класс рассматриваемых нелинейных систем, поскольку предложенный численный метод не требует выполнения условий односторонней проницаемости либо непрерывного сопряжения[17] на смежных границах гиперполос.
2. Представленные алгоритмы позволяют получить более точные верхние оценки функции цены (как следствие, и более точные точные внутренние оценки множеств разрешимости) посредством поиска приближённых решений в более широких классах функций.
3. Показано, что возникающие подзадачи для поиска управлений и устранения разрывов кусочно-заданных функций допускают эффективные численные решения путём их сведения к задачам выпуклого программирования.
4. Впервые предложено применять указанный подход для гарантированного оценивания функционала качества при использовании внешних алгоритмов управления. Разработан метод построения оценок функции цены на основе результатов обучения с подкреплением.

Степень достоверности. Достоверность результатов подтверждена строгими математическими доказательствами, а также численными экспериментами. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет, в основном, теоретический характер: показано, что приведённые в диссертационной работе формулы применимы к задачам целевого управления для широкого класса нелинейных систем. Эти результаты представляют интерес для дальнейших исследований. В частности, интересует возможность дальнейшего обобщения методов на случай произвольных полиномиальных кусочно-заданных функций цены, а также стоит вопрос о разработке алгоритмов с использованием параллельных вычислений, поскольку некоторые возникающие задачи оптимизации возможно решать независимо друг от друга. В таком случае развитые автором методы смогут быть полезны при решении сложных практических задач в таких прикладных областях, как управление механическими системами, автоматизация транспортных средств, математическое моделирование экономических и биологических процессов и др. В то же время для задач небольшой размерности описанные в диссертационной работе алгоритмы могут применяться уже сейчас, что демонстрируется приведёнными примерами вычислений.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях:

1. Ежегодная научная конференция "Тихоновские чтения" (Москва, МГУ, факультет ВМК, 28 октября – 1 ноября 2019 г.);
2. Ежегодная научная конференция "Ломоносовские чтения", секция вычислительной математики и кибернетики (Москва, МГУ, факультет ВМК, 21 октября – 2 ноября 2020 г.);
3. III Международный семинар "Теория управления и теория обобщённых решений уравнений Гамильтона–Якоби (CGS'2020)", посвящённый 75-летию академика А.И. Субботина (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 26–31 октября 2020 г.);
4. Ежегодная научная конференция "Ломоносовские чтения", секция вычислительной математики и кибернетики (Москва, МГУ, факультет ВМК, 20–29 апреля 2021 г.);
5. Ежегодная научная конференция "Ломоносовские чтения", секция вычислительной математики и кибернетики (Москва, МГУ, факультет ВМК, 14–22 апреля 2022 г.);
6. Международная научная конференция "Теория оптимального управления и приложения (OCTA 2022)" (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 27 июня – 1 июля 2022 г.);
7. Ежегодная научная конференция "Тихоновские чтения" (Москва, МГУ, факультет ВМК, 29 октября – 3 ноября 2023 г.);
8. LIV Международная научная конференция аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость" (Петергоф, СПбГУ, факультет ПМ-ПУ, 3–7 апреля 2023 г.);
9. Международная конференция "Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG2024)", посвящённая 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 9–13 сентября 2024 г.).

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 6 работах, которые опубликованы в центральных рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

Результаты [5; 6; 2—4] были подготовлены совместно с научным руководителем П.А. Точилиным. Работа [1] выполнена автором полностью самостоятельно.

В работах [2—4] П.А. Точилиным были предложены классы функций, в которых следует искать оценки функции цены на основе принципа сравнения, а также разработан метод кусочной линеаризации системы уравнений на совокупности симплексов. Автором диссертационной работы выведены формулы для внутренних оценок множеств разрешимости и доказаны соответствующие теоремы; предложены численные методы для реализации этих формул в форме алгоритма и далее компьютерной программы.

В публикациях [5; 6] основные теоретические результаты получены П.А. Точилиным, однако автором диссертационной работы разработаны численные методы и рассмотрено их применение к решению конкретных задач управления для модельных систем.

Соответствие паспорту научной специальности. Тема диссертации соответствуют паспорту специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки) по направлению исследований: “15. Теория управления дифференциальными уравнениями и системами: вопросы управляемости, наблюдаемости, задачи стабилизации посредством управления с обратной связью”.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации составляет 106 страниц, включая 15 рисунков. Библиография включает 131 наименование, в том числе публикации автора.

Основное содержание работы

Введение содержит реферативное описание имеющихся результатов по теме диссертации, позволяющих получить представление об истории развития и текущем состоянии исследуемой области. Сформулирована цель диссертационной работы и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая и практическая значимость предложенных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава диссертации посвящена поиску приближённого решения задачи целевого управления для класса систем, в которых нелинейные члены могут зависеть только от одной фиксированной компоненты фазового вектора. Такая особенность позволяет достаточно просто вычислить кусочно-аффинную аппроксимацию системы, построение которой является одной из ключевых особенностей всего разрабатываемого подхода.

В разделе 1.1 представлены математические постановки решаемых задач разрешимости и синтеза управлений. На фиксированном и конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$ при $x \in \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}$ — компактное множество, рассматривается нелинейная управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \hat{A}(t)g(x_1) + B(t)u + f(t), \tag{1}$$

где вектор $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_{n_x}(t))^T \in \mathbb{R}^{n_x}$ — состояние системы в момент времени $t \in [t_0, t_1]$, вектор $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ — позиционное управление, а отображение $g(x_1) = (g_1(x_1), \ldots, g_r(x_1))^T$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция со значениями в $\mathbb{R}^r$, зависящая от единственной координаты $x_1 = x_1(t)$. Матрицы коэффициентов системы $A(t)$, $\hat{A}(t)$, $B(t)$, $f(t)$ соответствующих размерностей также считаются известными. Будем полагать, что функция $g(x_1)$ такова, что любое решение системы (1) существует на всём отрезке $[t_0, t_1]$. При этом искомые управления в каждый момент времени должны удовлетворять геометрическим ограничениям, которые в данной главе представлены эллипсоидами:

$$u \in \mathcal{P}(t) = \mathcal{E}(p(t), P(t)), \quad p(t) \in \mathbb{R}^{n_u}, \quad P(t) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad P(t) = P^T(t) > 0.$$

В задаче разрешимости требуется построить множество $\mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1)$, $\mu \geqslant 0$, состоящее из таких и только таких стартовых точек, что запущенные из них в момент времени t траектории системы (1) при выполнении вышеуказанных ограничений на управление могут оказаться в μ-окрестности заданного компактного множества $\mathcal{X}_1$ в конечный момент времени t_1. В связанной с этим задаче синтеза требуется найти позиционную управляющую стратегию, которая гарантированно переводит нелинейную систему из заданной точки множества $\mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ в μ-окрестность целевого множества $\mathcal{X}_1$. Такой задаче сопоставляется функционал

$$J[u(\cdot)] = \phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1; t_0, x^0)|_{u(\cdot)}) \to \inf, \tag{2}$$

где $x(\cdot; t_0, x^0)|_{u(\cdot)}$ — траектория системы, замкнутой позиционным управлением $u(\cdot)$, выпущенная в момент времени t_0 из точки x^0; функция $\phi_{\mathcal{X}_1} : \Omega \to \mathbb{R}$ является аналогом расстояния от заданной точки до множества $\mathcal{X}_1$ и подобрана так, что её множество нулевого подуровня совпадает с целевым множеством: $\mathcal{X}_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leqslant 0\}$.

В работе также рассматриваются многозначные управления $u(t, x) \subseteq \mathcal{P}$, в связи с чем в функционале (2) появляется максимум от функции $\phi_{\mathcal{X}_1}$ по всевозможным однозначным управляющим стратегиям из соответствующего пучка. Таким образом, полученные результаты будут соответствовать принципу гарантированного оценивания.

Раздел 1.2 посвящён разбиению рассматриваемого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}$ на смежные области с помощью конечного числа параллельных гиперплоскостей, а также построению кусочно-аффинной аппроксимации нелинейной системы (1) на совокупности полученных множеств $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$. Такая аппроксимация позволяет перейти к задаче управления для системы с автономными переключениями[21], состоящей из набора N линейных подси-

[21] *Куржанский А. Б., Точилин П. А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1523—1533; *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Birkhäuser, 2003.

стем, каждая из которых задаётся совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A^{(i)}(t)x + B(t)u + f^{(i)}(t) + \hat{A}(t)v, \quad x \in \Omega^{(i)}, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3}$$

Особенностью уравнения (3) является наличие величины $v \in \mathbb{R}^r$, связанной с погрешностью локальной линеаризации. В дальнейшем этот вектор будет считаться неизвестным и интерпретироваться как помеха. Тем не менее, для вывода последующих результатов существенным фактом является ограниченность данной величины.

В разделе 1.3 введены основные понятия, связанные с методом динамического программирования. Применительно к задачам целевого управления функцию цены определяют как

$$V(t,x) = \inf_{u(\cdot)} \left\{ \phi_{\mathcal{X}_1}(x(t_1,t,x)|_{u(\cdot)}) \right\},$$

где $x(\cdot;t,x)|_{u(\cdot)}$ — траектория системы (1), выпущенная в прямом времени из начальной позиции (t,x). Известно, что указанная функция цены задаёт окрестность множества разрешимости исходной нелинейной системы[22]:

$$\mathcal{W}_\mu(t_0,t_1,\mathcal{X}_1) = \{x \in \Omega : \ V(t_0,x) \leqslant \mu\},$$

а также является решением (вообще говоря, обобщённым) уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана с соответствующим граничным условием:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \min\limits_{u \in \mathcal{P}} \left\langle \dfrac{\partial V}{\partial x}, A(t)x + \hat{A}(t)g(x_1) + B(t)u + f(t) \right\rangle = 0, \quad t \in [t_0,t_1], \\ V(t_1,x) = \phi_{\mathcal{X}_1}(x). \end{cases}$$

В диссертационной работе предлагается построить функцию $\hat{W} = \hat{W}(t,\tilde{x})$, которая будет соответствовать приближённому решению этого уравнения. Здесь и далее используется обозначение $\tilde{x} = (x^T, 1)^T$ для упрощения выкладок.

Такое приближение ищется в классе непрерывных кусочно-кубических функций, которые вблизи каждой гиперплоскости $\mathcal{H}^{(i)}$, разделяющей области $\Omega^{(i)}$ и $\Omega^{(i+1)}$, определяются равенством

$$\hat{W}(t,\tilde{x}) = \alpha^{(i)}(x)\langle \tilde{x}, K^{(i)}(t)\tilde{x}\rangle + \left(1 - \alpha^{(i)}(x)\right)\langle \tilde{x}, K^{(i+1)}(t)\tilde{x}\rangle. \tag{4}$$

Значение линейной функции $\alpha^{(i)}(x)$ зависит от расстояния между точкой x и гиперплоскостью $\mathcal{H}^{(i)}$, а матричные функции $K^{(i)}(t)$ и $K^{(i+1)}(t)$ суть неизвестные коэффициенты.

Раздел 1.4 посвящён анализу функции (4). Предложен способ оценки её значений вдоль определённых траекторий кусочно-линейной системы (3).

[22] *Kurzhanski A. B., Varaiya P.* Dynamics and control of trajectory tubes. Birkhäuser, 2014.

Лемма 1. *Пусть $x = x(t)$ — произвольное решение дифференциального включения, полученного при замыкании кусочно-линейной системы* (3) *"сглаженным" управлением*

$$u^*(t,x) = \alpha^{(i)}(x) \cdot u^{(i)}(t,x) + (1 - \alpha^{(i)}(x)) \cdot u^{(i+1)}(t,x), \tag{5}$$

где многозначные управления $u^{(i)}(\cdot)$ подобраны таким образом, чтобы доставлять минимум гамильтониану в уравнении ГЯБ на множестве $\Omega^{(i)}$. Пусть также $\hat{W}(t,\tilde{x})$ — кусочно-кубическая функция (4)*. Тогда на основе коэффициентов системы* (3) *можно определить такие функции $a(t)$ и $\eta(t)$, что будет выполнено неравенство*

$$\hat{W}(t_1, \tilde{x}(t_1)) - \hat{W}(t_0, \tilde{x}(t_0)) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} [a(t) + \eta(t)]\, dt.$$

На основе полученной леммы можно вывести гарантированную внутреннюю оценку множества разрешимости для исходной нелинейной системы уравнений (1).

Теорема 1. *Пусть для вещественнозначной функции $\hat{W}(t,\tilde{x})$, определённой равенством* (4)*, в момент времени t_1 выполнено*

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leqslant \hat{W}(t_1,\tilde{x}) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega,$$

а функции $a(t)$ и $\eta(t)$ получены из леммы 1. Тогда множество

$$\mathcal{W}_\mu^{\text{int}}(t) = \left\{ x \in \Omega : \ \hat{W}(t,\tilde{x}) \leqslant -\int\limits_{t}^{t_1} [a(t) + \eta(t)]\, dt + \mu \right\}$$

является при любом $t \in [t_0, t_1]$ подмножеством множества разрешимости $\mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1)$ исходной нелинейной системы (1)*, т.е.*

$$\mathcal{W}_\mu^{\text{int}}(t) \subseteq \mathcal{W}_\mu(t, t_1, \mathcal{X}_1).$$

Как следствие, управление (5) позволяет решить поставленную задачу синтеза.

Раздел 1.5 более подробно описывает детали численного метода. Показано, что неизвестные коэффициенты функции $\hat{W}(t,\tilde{x})$ могут быть вычислены как решение матричных дифференциальных уравнений.

Вторая глава диссертации посвящена обобщению метода на случай наличия нелинейных членов, зависящих сразу от нескольких переменных.

В разделе 2.1 приведена соответствующая математическая постановка задачи. В отличие от предыдущей главы, исследуется нелинейная система

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)u, \quad t \in [t_0, t_1], \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}, \tag{6}$$

где $f(t,x)$, $g(t,x)$ — произвольные функции, непрерывные по t и достаточно гладкие по x, со значениями в $\mathbb{R}^{n_x}$ и $\mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ соответственно. Будем, однако, полагать, что функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ удовлетворяют условиям, гарантирующим продолжимость решения на весь отрезок времени $[t_0, t_1]$ при любом граничном условии $x(t_0) = x_0 \in \Omega$. На управления наложены поточечные ограничения, в каждый момент времени задаваемые выпуклым компактным множеством. Требуется построить управляющую стратегию в позиционной форме, которая переводит систему (6) из заданной позиции x_0 в момент времени t_0 в компактное целевое множество $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$ в момент времени t_1. Если попасть во множество $\mathcal{X}_1$ нельзя, необходимо достичь как можно меньшей его окрестности:

$$x(t_1; t_0, x_0)|_{u(\cdot)} \in \mathcal{X}_1 + B_\mu(0),$$

где $B_\mu(0)$ — шар радиуса μ с центром в нуле, а значение $\mu \geqslant 0$ необходимо минимизировать.

Раздел 2.2 содержит описание кусочной линеаризации системы (6). Для этого сперва осуществляется разбиение области Ω на симплексы $\Omega^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$. Оно может быть получено, например, с помощью триангуляции Делоне[23]. Далее можно выписать непрерывную кусочно-аффинную аппроксимацию правой части исходной системы:

$$f(t,x) + g(t,x)u = A^{(i)}(t)x + B(t)u + r^{(i)}(t) + v^{(i)}(t,x,u), \quad x \in \Omega^{(i)},$$

где $v^{(i)}$ — ограниченная погрешность полученной аппроксимации. Поскольку при задании квадратичных функций удобно работать с “расширенным” пространством переменных, где $\tilde{x} = (x^T, 1)^T$, осуществляется переход к системе

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x} + \tilde{B}^{(i)}(t)u + \tilde{C}(t)v^{(i)}, \ \ \tilde{x} \in \Omega^{(i)} \times \{1\}, \ t \in [t_0, t_1]. \qquad (7)$$

В разделе 2.3 определена кусочно-квадратичная функция вида

$$V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \langle \tilde{x}, K^{(i)}(t)\tilde{H}^{(i)}\tilde{x} \rangle, \quad x \in \Omega^{(i)}, \qquad (8)$$

где $K^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{(n_x+1)\times(n_x+1)}$ — матрицы неизвестных коэффициентов, $H^{(i)} \in \mathbb{R}^{(n_x+1)\times(n_x+1)}$ — известные матрицы, однозначно задающие форму и положение симплексов $\Omega^{(i)}$. В конечный момент времени значения матриц $K^{(i)}(t)$ определяются так, что при всех $i = 1, \ldots, N$ выполнено неравенство

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leqslant V^{(i)}(t_1, \tilde{x}) \quad \forall x \in \Omega^{(i)},$$

[23] *O'Rourke J.* Computational Geometry in C. Cambridge University Press, 1998; *Скворцов А. В., Мирза Н. С.* Алгоритмы построения и анализа триангуляции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006.

позволяющее определить граничное условие в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Оценка производной функции (8) по направлению $\ell = (\ell_t, \ell_x^T)^T$, где

$$\ell_t = 1, \quad \ell_x = \tilde{A}^{(i)}(t)\tilde{x} + \tilde{B}^{(i)}(t)u + \tilde{C}(t)v^{(i)},$$

приводит к неравенству

$$\frac{dV^{(i)}}{d\ell}(t, \tilde{x}) \leqslant \langle \tilde{x},\ [\dot{K}^{(i)} + \hat{Z}^{(i)}]\ \tilde{H}^{(i)}\tilde{x} \rangle, \tag{9}$$

где $\hat{Z}^{(i)} = \hat{Z}^{(i)}(t, K^{(1)}(t), \ldots, K^{(N)}(t))$ — известные матричные функции. Представлены такие способы нахождения матриц $\hat{Z}^{(i)}$, что справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть функция* (8) *в момент времени* t_1 *является непрерывной по* $\tilde{x}$, *а при* $t \in [t_0, t_1)$ *вычисляется на основе решения системы матричных дифференциальных уравнений*

$$\dot{K}^{(i)}(t) + \hat{Z}^{(i)}(t, K^{(1)}(t), \ldots, K^{(N)}(t)) = 0, \quad i = \overline{1, N}. \tag{10}$$

Тогда при любом $t \in [t_0, t_1]$ *аппроксимация* (8) *функции цены является непрерывной по* $\tilde{x}$ *на множестве* $\Omega \times \{1\}$.

Тогда из (9)–(10) следует, что функция $V^{(i)}$ не возрастает вдоль траекторий системы (7), и, аналогично результатам предыдущей главы, для исходной нелинейной системы (6) доказывается оценка множества разрешимости.

Теорема 2. *Пусть целевое множество* $\mathcal{X}_1$ *представимо в виде*

$$\mathcal{X}_1 = \{x \in \Omega : \phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leqslant 0\}, \quad \phi_{\mathcal{X}_1}(x) = \langle \tilde{x}, \hat{K}\tilde{x} \rangle, \quad \hat{K} \in \mathbb{R}^{(n_x+1)\times(n_x+1)},$$

а непрерывные матричные функции $K^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, N}$, *являются решениями системы матричных дифференциальных уравнений* (10). *Пусть также* $V(t, \tilde{x})$ *— непрерывная кусочно-квадратичная функция в расширенном пространстве переменных, для каждого множества* $\Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$, *определённая как*

$$V^{(i)}(t, \tilde{x}) = \left\langle \tilde{x}, K^{(i)}(t)\tilde{H}^{(i)}\tilde{x} \right\rangle, \quad t \in [t_0, t_1],\ \tilde{x} \in \Omega^{(i)} \times \{1\}.$$

Тогда множество

$$\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) = \{x \in \Omega \ \mid V(t_0, \tilde{x}) \leqslant \mu\} \tag{11}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости:

$$\mathcal{W}_\mu^{int}(t_0) \subseteq \mathcal{W}_\mu(t_0, t_1, \mathcal{X}_1).$$

Раздел 2.4 посвящён введению в уравнения (10) дополнительных слагаемых — регуляризующих членов. Такая необходимость вызвана особенностью построенной задачи Коши: полученные матричные уравнения являются дифференциальными уравнениями типа Риккати, решения которых могут быстро возрастать, приводя к низкой точности оценок (11). Более того, такие решения могут не быть продолжимы на весь временной отрезок[24]. Тем не менее, указанные проблемы могут быть устранены за счёт использования модифицированных уравнений: осуществляется переход от (10) к уравнениям

$$\dot{K}^{(i)}(t) + \hat{Z}^{(i)}(t, K^{(1)}, \ldots, K^{(N)}) = \Delta^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, N},\ t \in [t_0, t_1),$$

где $\Delta^{(i)} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{(n_x+1)\times(n_x+1)}$ — зафиксированные непрерывные функции. В настоящее время неизвестно, как выбрать значения $\Delta^{(i)}(t)$, чтобы гарантировать продолжимость решения, однако предлагается подбирать функции $\Delta^{(i)}(t)$ на основе сравнения значений аппроксимации функции цены в соседних вершинах.

Третья глава диссертации посвящена приближённому решению поставленной в предыдущей главе задачи целевого управления с помощью построения кусочно-квадратичных аппроксимаций функции цены, которые могут иметь разрывы на границах симплексов разбиения. При этом предполагается, что позиционные управления тоже допускают разрывы по переменной x. Отказ от требования непрерывности позволяет получить более точную оценку матриц $\hat{Z}^{(i)}$ в выражениях (9)–(10), что способствует уменьшению погрешности попадания в целевое множество. Недостатком подхода, однако, является его применимость лишь к автономным системам:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad t \in [t_0, t_1],\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n_x}. \tag{12}$$

Несмотря на то, что в качестве ограничений на управления по-прежнему могут выступать различные выпуклые множества, в данной главе рассматриваются эллипсоидальные ограничения, поскольку возникающие задачи оптимизации в этом случае имеют наиболее простой вид.

В разделе 3.1 определено понятие достижимости симплексов: считается, что симплекс $\Omega^{(j)}$ достижим из симплекса $\Omega^{(i)}$, если существует такая точка на общей границе симплексов, что при некотором допустимом управлении вектор скорости рассматриваемой системы направлен в сторону симплекса $\Omega^{(j)}$ относительно разделяющей их гиперплоскости. Такое условие является лишь необходимым, но не достаточным, чтобы траектория системы переходила из $\Omega^{(i)}$ в $\Omega^{(j)}$, зато допускает простую численную проверку на основе опорных функций.

---

[24] *Егоров А. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005.

Далее можно выделить множества в фазовом пространстве, где оценка функции цены и функция управления всё-таки обязаны быть непрерывны и, таким образом, нуждаются в специальной “склейке”. Склейка производится, когда симплексы являются взаимодостижимыми: показано, что в этом случае можно корректно определить решения задачи Коши для системы (12), замкнутой предложенным позиционным управлением.

В разделе 3.2 описан алгоритм построения разрывного управления в фиксированный момент времени. Алгоритм устроен следующим образом:

1. В каждой вершине симплексов разбиения выбирается управление, использование которого не приведёт к попаданию траектории в соседний симлекс с бо́льшим значением функции (8).

2. При найденных управлениях находятся все пары взаимодостижимых симплексов.

3. Алгоритм возвращается к шагу 1, однако далее на искомые управления накладываются дополнительные ограничения в связи со склейкой в обозначенных местах. Если же дополнительных склеек не требуется, алгоритм завершает работу.

Доказано, что указанный алгоритм завершает свою работу за конечное число итераций.

В разделе 3.3 осуществляются подготовительные действия для введения вспомогательных задач оптимизации, позволяющих осуществлять склейки “наиболее аккуратно” — в противном случае модифицированная оценка функции цены может давать менее точную оценку множества разрешимости. Для этого требуется в каждой вершине разбиения обойти содержащие её симплексы в определённом порядке, в соответствии с их достижимостью друг из друга. Указанная подзадача сводится к построению топологической сортировки вершин графа.

В разделе 3.4 выведена итоговая внутренняя оценка множества разрешимости, где кусочно-квадратичная оценка функции цены получена на основе модифицированных уравнений (10) и представленного алгоритма поиска разрывных управлений. Доказано, что искомые в алгоритме управления всегда существуют.

Теорема 3. *Пусть $V(t, \tilde{x})$ — кусочно-квадратичная функция вида* (8), *допускающая разрывы на границах симплексов $\Omega^{(i)}$. Пусть её коэффициенты $K^{(i)}(t_1)$ в конечный момент времени подобраны так, что выполнено*

$$\phi_{\mathcal{X}_1}(x) \leqslant V(t_1, \tilde{x}) \quad \forall x \in \Omega.$$

Пусть также при любых $t \in [t_0, t_1]$ справедливо

$$\dot{K}^{(i)}(t) + \hat{Z}^{(i)}(t, K^{(1)}, \ldots, K^{(N)}) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Тогда множество

$$\mathcal{W}_{\mu}^{int}(t) = \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; V(t, \tilde{x}) \leqslant \mu \right\}$$

является внутренней оценкой множества разрешимости, т.е.

$$\mathcal{W}_{\mu}^{int}(t) \subseteq \mathcal{W}_{\mu}(t, t_1, \mathcal{X}_1).$$

Наконец, раздел 3.5 описывает детали численного метода, позволяющие снизить вычислительную нагрузку при поиске управлений и решении вспомогательных задач.

Четвёртая глава посвящена анализу полученных результатов и, кроме того, описывает обобщения разработанного подхода.

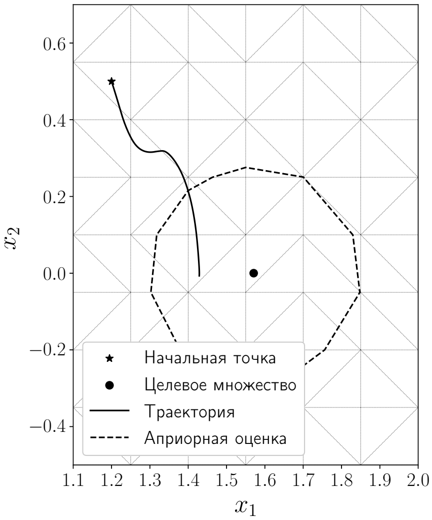
В разделе 4.1 без доказательств приведены основные утверждения, полученные ранее П.А. Точилиным в работах [5; 6] в русле описанного подхода, но при рассмотрении оценок функции цены в других параметрических семействах. Автором диссертационной работы были реализованы соответствующие численные методы, впоследствии также используемые для сравнения с описанными в диссертации результатами.

Раздел 4.2 посвящён способам поиска субоптимальных управляющих стратегий при поиске приближённого решения уравнения ГЯБ. В ранее представленных алгоритмах они выбирались так, чтобы в каждой области $\Omega^{(i)}$ минимизировать производную функции цены вдоль траектории движения. Однако, с учётом кусочно-заданного характера оценки функции цены, возникала неоднозначность при выборе значений управления в вершинах разбиения. Для её устранения приходилось дополнительно корректировать эти значения, что, в свою очередь, негативно сказывалось на полученном решении. В данном разделе описано, как позиционные управления могут быть выбраны с помощью алгоритмов обучения с подкреплением.

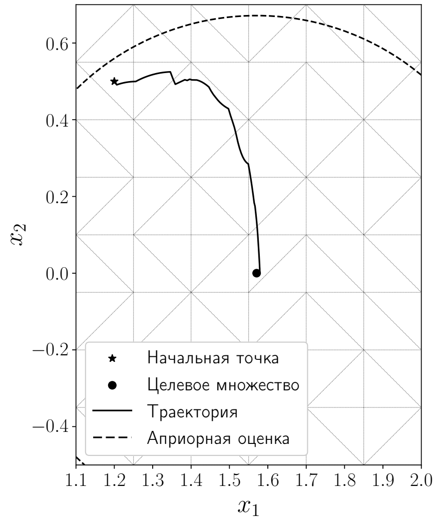
В разделе 4.3 продемонстрированы результаты работы алгоритмов на модельных примерах: рассматриваются движение квадрокоптера в горизонтальной плоскости, маятник на тележке, маятник с электромотором, линейная система. Так, на рис. 1 для системы

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{k_2}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{MgL}{J} \end{bmatrix} \sin(x_1) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_1}{J} \end{bmatrix} u \tag{13}$$

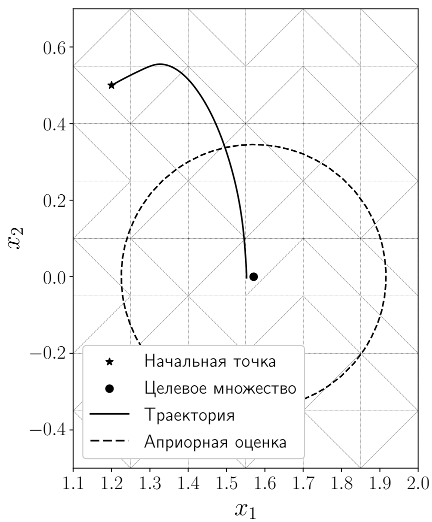
для описанных в диссертации методов приведены траектории, полученные на основе представленных синтез-управлений. Пунктирной линией обозначены границы множеств, куда априорно гарантируется попадание траекторий системы в конечный момент времени.



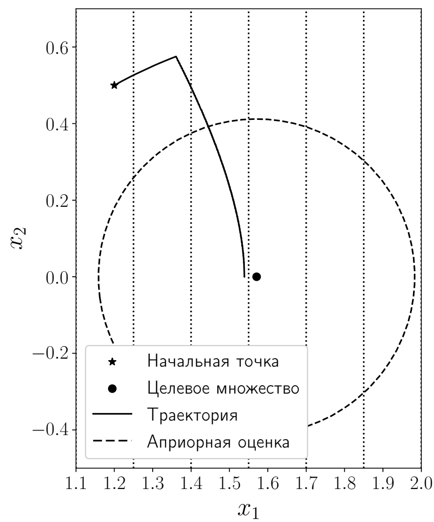
(a) Непрерывная кусочно-квадратичная оценка функции цены вида (8)



(b) Разрывная кусочно-квадратичная оценка функции цены вида (8)



(c) Кусочно-кубическая оценка функции цены из работы [6]



(d) Кусочно-кубическая оценка функции цены (4)

Рис. 1: Траектории системы (13) и соответствующие априорные оценки отклонения от целевой точки при использовании различных алгоритмов.

Кроме того, в работе приведены графики, позволяющие оценить априорные и апостериорные точности представленных методов в зависимости от диаметра разбиения множества Ω, а также исследована их вычислительная сложность.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем.

1. Предложены алгоритмы построения внутренних аппроксимаций множеств разрешимости для нелинейных систем дифференциальных уравнений, аффинных по управляющему параметру, на основе вычисления кусочно-квадратичных и кусочно-кубических оценок функции цены, заданных на совокупности множеств (симплексов либо гиперполос) в фазовом пространстве.

2. На основе полученных оценок функции цены представлены способы определения непрерывных и разрывных позиционных управлений, позволяющих перевести систему в окрестность целевого множества с гарантированной априорной оценкой погрешности.

3. Разработан численный метод, позволяющий получить гарантированные внутренние оценки множества разрешимости, а также априорные оценки погрешности попадания траектории в целевое множество при использовании кусочно-аффинной аппроксимации произвольной фиксированной позиционной стратегии управления.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — кандидату физико-математических наук Точилину Павлу Александровичу — за постановку задач и постоянное внимание к работе. Также автор благодарит за полученные знания весь профессорско-преподавательский состав факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова и коллектив кафедры системного анализа в отдельности.

Основные публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертационной работы изложены в работах, которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

1. *Чистяков И. А.* О гарантированной оценке отклонения от целевого множества в задаче управления при обучении с подкреплением // Автоматика и телемеханика. — 2025. — № 1. — С. 80—98. — EDN: JQKKTQ. — Входит в RSCI, импакт-фактор 0,885 (РИНЦ); 1.2 п.л. — Перевод:
   Chistiakov I. A. On Guaranteed Estimate of Deviations from the Target Set in a Control Problem under Reinforcement Learning // Automation and Remote Control. — 2025. — Vol. 86, no. 1. — P. 61–73. — DOI: 10.31857/S0005117925010055. — 0.8 п.л.
2. *Чистяков И. А.*, *Точилин П. А.* Приближённое решение задачи целевого управления в случае нелинейности по одной переменной // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 11. — С. 1560—1571. — EDN: WCRMWX. — Входит в RSCI, импакт-фактор 0,73 (РИНЦ); 80%; 0.8 п.л. — Перевод:
   Chistyakov I. A., *Tochilin P. A.* Approximate Solution of the Target Control Problem with a Nonlinearity Depending on One State Variable // Differential Equations. — 2019. — Vol. 55, no. 11. — P. 1518–1530. — EDN: ZJBXMH. — RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,8 (JIF); 80%; 0.8 п.л.
3. *Чистяков И. А.*, *Точилин П. А.* Применение кусочно-квадратичных функций цены для приближённого решения нелинейной задачи целевого управления // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 11. — С. 1545—1554. — EDN: MAEWVF. — Входит в RSCI, импакт-фактор 0,73 (РИНЦ); 75%; 0.6 п.л. — Перевод:
   Chistyakov I. A., *Tochilin P. A.* Application of Piecewise Quadratic Value Functions to the Approximate Solution of a Nonlinear Target Control Problem // Differential Equations. — 2020. — Vol. 56, no. 11. — P. 1513–1523. — EDN: YROAKL. — RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,8 (JIF); 75%; 0.7 п.л.
4. *Чистяков И. А.*, *Точилин П. А.* Построение разрывных кусочно-квадратичных функций цены в задаче целевого управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2022. — Т. 28, № 3. — С. 259—273. — EDN: RBYIYL. — Входит в RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,3 (JIF); 80%; 0.9 п.л. — Перевод:
   Chistyakov I. A., *Tochilin P. A.* Construction of Discontinuous Piecewise

Quadratic Value Functions in a Target Control Problem // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2022. — Vol. 319, no. 1. — P. 98–111. — EDN: FHDAVK. — RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,4 (JIF); 80%; 0.8 п.л.

5. *Точилин П. А.*, *Чистяков И. А.* О построении разрывного кусочно-аффинного синтеза в задаче целевого управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2021. — Т. 27, № 3. — С. 194—210. — EDN: VXMONV. — Входит в RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,3 (JIF); 25%; 1.1 п.л.

6. *Точилин П. А.*, *Чистяков И. А.* О кусочно-кубических оценках функции цены в задаче целевого управления нелинейной системой // Дифференциальные уравнения. — 2024. — Т. 60, № 5. — С. 672—685. — EDN: LBIBKJ. — Входит в RSCI, импакт-фактор 0,73 (РИНЦ); 25%; 0.9 п.л. — Перевод:
   Tochilin P. A., *Chistyakov I. A.* On Piecewise Cubic Estimates of the Value Function in a Target Control Problem for a Nonlinear System // Differential Equations. — 2024. — Vol. 60, no. 5. — P. 642–654. — EDN: MMYOXZ. — RSCI, Scopus, Web of Science, импакт-фактор 0,8 (JIF); 25%; 0.8 п.л.