

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

*На правах рукописи*

**Ван Луцзе**

**Эйлеровы численные модели динамики гипоупругой  
многоматериальной среды**

Специальность 1.2.2

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2025

Диссертация подготовлена на кафедре вычислительной механики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

**Меньшов Игорь Станиславович,**  
доктор физико-математических наук, старший  
научный сотрудник

Официальные оппоненты:

**Бураго Николай Георгиевич,**  
доктор физико-математических наук,  
Институт проблем механики им. А.Ю.  
Ишлинского РАН, лаборатория моделирования  
в механике деформируемого твердого тела,  
ведущий научный сотрудник

**Зингерман Константин Моисеевич,**  
доктор физико-математических наук,  
профессор, Тверской государственный  
университет, факультет прикладной  
математики и кибернетики, кафедра  
математического моделирования и  
вычислительной математики, заведующий  
кафедрой

**Титарев Владимир Александрович,**  
доктор физико-математических наук,  
Федеральный исследовательский центр  
"Информатика и управление" РАН, отделение  
2, главный научный сотрудник

Защита диссертации состоится «11» февраля 2026г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ 012.1 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, строение 52, факультет ВМК, ауд. 685.

E-mail: ds@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале:  
<https://dissovet.msu.ru/dissertation/3741>

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_ 20\_\_ г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета МГУ 012.1,  
доктор физико-математических наук,  
член-корреспондент РАН

 Ильин А.В.

# Общая характеристика работы

**Актуальность работы** обусловлена важностью рассматриваемых задач во многих промышленных и научных областях, в частности в механике ударно-волновых процессов в конденсированных средах, механике взрывов, технологии обработки металлов давлением, а также во многих коммерческих программных комплексах, таких как LS-DYNA и AUTODYN. Более того, при моделировании динамики многоматериальных упругопластических сред, эйлеровы модели, основанные на методе диффузной границы, в основном построены в рамках гиперупругости. Следовательно, исследование задач многокомпонентного течения с использованием гипоупругой модели Уилкинса может восполнить пробел в научных исследованиях. Учитывая широкое применение этой модели, данное исследование является необходимым и имеет большое значение.

**Степень разработанности данной темы.** Первые попытки современного описания упругопластичности при конечных деформациях восходят к теории Прандтля-Рейсса (Prandtl-Reuss theory), в которой основная идея заключается в разложении приращения деформации в единицу времени на упругую и пластическую компоненты. Данная теория закладывает основу для анализа реакции материалов, такой как упрочнение, и широко используется в инженерии, часто в сочетании с критерием текучести Мизеса. С этим тесно связано дальнейшее развитие теории, в которой Труесделл (Truesdell) предложил теорию гипоупругости, связывающую объективную производную напряжения Коши или Кирхгофа и скорость деформации через тензор 4-го порядка, зависящий от напряжения<sup>1</sup>. Таким образом, упругая часть в теории Прандтля-Рейсса обычно описывается этим гипоупругим соотношением, содержащим объективную коротационную или некоротационную производную, предпочтительно производную Яуманна или производную Грина-Нагди (Green-Naghdi) напряжения Коши или Кирхгофа.

В рамках данного теоретического направления в 1960-х годах была предложена модель Уилкинса<sup>2</sup>, которая первоначально использовалась для решения задач высокоскоростного удара и распространения упругопластических волн. Подробные сведения об упругопластических материалах представлены, например, в работе<sup>3</sup>, где, в частности, приводятся описания материалов, включающие динамическую пластичность на основе теории дислокаций, упрочнение,

<sup>1</sup>Truesdell C. Hypo-Elasticity //Journal of Rational Mechanics and Analysis. — 1955. — vol. 4, — pp. 83–133; Truesdell C. The Simplest Rate Theory of Pure Elasticity // Communications on pure and applied mathematics. — 1955. — vol. 8, № 1, — pp. 123–132; Truesdell C. Hypo-elastic Shear // Journal of Applied Physics. — 1956. — vol. 27, № 5, — pp. 441–447; Truesdell C. Remarks on Hypo-Elasticity // Journal of Research of the National Bureau of Standards B. — 1963. — vol. 67, — pp. 141–143.

<sup>2</sup>Wilkins M. L. Calculation of Elastic-Plastic Flow. University of California Lawrence Radiation Laboratory, 1963. 70 pp.

<sup>3</sup>Wilkins M. L. Computer Simulation of Dynamic Phenomena. Springer Science & Business Media, 2013. 260 pp.

давление и влияние температуры на прочность материала. Математическая модель представлена таким образом, что переход от упругой и идеальной пластической моделей к вышеупомянутой теоретической структуре возможен без внесения каких-либо изменений в базовую программу, решающую уравнения механики. Благодаря использованию явного интегрирования по времени и простой стратегии обновления напряжений, вычислительные затраты на один шаг времени очень низки. В численных методах модели Уилкинса, интерес переключился на центрированные конечно-объемные методы (cell-centered) и методы конечных элементов в последнее время.

Классическая гипоупругая модель Уилкинса проста, но имеет ряд недостатков: выбор объективной производной в некоторой степени произволен, модель не является термодинамически согласованной, поскольку она генерирует энтропию даже в упругом режиме, а из-за производной Яуманна система не может быть записана в консервативной форме<sup>4</sup>. В общем случае конечной деформации высказывались разные мнения относительно надлежащего разложения и формулировки определяющих отношений<sup>5</sup>. Однако в настоящее время не существует единой теории, способной идеально решить эти проблемы.

Другим подходом к описанию поведения материалов при конечной деформации является гиперупругая модель, основанная на концепции функции энергии деформации<sup>6</sup>. Определяя энергию деформации на единицу объема как функцию метрики деформации, получают соответствующую зависимость напряжения-деформации. Данное моделирование имеет прочную математическую основу и обычно использует тензорный анализ и дифференциальную геометрию в качестве инструментов. К этому направлению относится модель, предложенная Годуновым и Роменским<sup>7</sup> и усовершенствованная Пешковым и Роменским<sup>8</sup>. Такое выражение естественным образом удовлетворяет условиям объективности (инвариантности относительно поворота) и термодинамической согласованности. Однако, большая часть усилий исследователей на современном этапе направлена на совершенствование определяющих моделей, таких как формулировка поверхностей текучести в пространстве напряжений. Таким

<sup>4</sup>Korobeynikov S. N. Analysis of Hooke-like Isotropic Hypoelasticity Models in View of Applications in FE Formulations // Archive of Applied Mechanics. — 2020. — vol. 90, № 2, — pp. 313–338.

<sup>5</sup>Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A. Elastoplasticity beyond Small Deformations // Acta Mechanica. — 2006. — vol. 182, № 1, — pp. 31–111; Simo J. C., Pister K. S. Remarks on Rate Constitutive Equations for Finite Deformation Problems: Computational Implications // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1984. — vol. 46, № 2, — pp. 201–215; Naghdi P. M. A Critical Review of the State of Finite Plasticity // Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP. — 1990. — vol. 41, № 3, — pp. 315–394; Bruhns O. The Prandtl-Reuss Equations Revisited // ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics: Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik. — 2014. — vol. 94, — pp. 187–202.

<sup>6</sup>Gurtin M. E., Fried E., Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge University Press, 2010. 721 pp.; Simo J. C., Hughes T. J. R. Computational Inelasticity. Springer Science & Business Media, 2006. 405 pp.

<sup>7</sup>Godunov S. K., Romenskii E. I. Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws. Springer Science & Business Media, 2013. 263 pp.

<sup>8</sup>Peshkov I., Romenski E. A Hyperbolic Model for Viscous Newtonian Flows // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2016. — vol. 28, № 1, — pp. 85–104.

образом, модель Уилкинса по-прежнему предпочтительна во многих научных, инженерных и промышленных приложениях.

В практическом применении часто возникает задача о течении много-компонентных гетерогенных сжимаемых сред, содержащих два или более компонентов. Для твердой части сплошной среды обычно используется вышеупомянутая гипоупругая или гиперупругая модель. В аспекте численных методов альтернативой лагранжевым методам является эйлерова формулировка механики деформируемых твердых тел с помощью так называемого метода диффузной границы (diffuse interface method)<sup>9</sup>. Данный метод представляет собой новый тип описания границы, отличающийся от традиционных методов объема жидкости (volume-of-fluid method) и определения уровня (level set method). Межфазная граница в методе диффузной границы представлена в виде узкой смешанной зоны разных фаз, а распределение фаз определяется функцией порядка (фазовой долей объема). Основным недостатком метода диффузной границы является то, что интерфейс (граница) имеет тенденцию к диффузии со временем. Следовательно, для коротких процессов, таких как большие деформации, вызванные высокоскоростными ударами твердых тел, подходит эйлеровский метод диффузной границы. Данный метод широко используется в исследованиях вязкокапиллярных структур и фазовых переходов<sup>10</sup>. В области моделирования больших упругопластических деформаций в работах<sup>11</sup> делается попытка смоделировать такие процессы в рамках гиперупругой модели. В данном случае используется простая смешанная модель, которая не может быть применима к другим упругопластическим моделям, таким как гипоупругая модель Уилкинса.

Таким образом, целесообразно и необходимо создать гипоупругую эйлерову математическую модель на основе метода диффузной границы. Среда состоит из нескольких различных материалов (фаз), разделенных контактными межфазными границами (интерфейсами). Предполагается, что каждая фаза описывается в рамках гипоупругой модели (модели Уилкинса) с критерием пластичности Мизеса. В дополнении, необходимо разработать соответствующие численные методы для решения неконсервативных моделей. Для такого типа задач стандартным подходом было использование стратегии «разделения операторов» (operator splitting): разделение уравнения на консервативную

---

<sup>9</sup>Anderson D. M., McFadden G. B., Wheeler A. A. Diffuse-Interface Methods in Fluid Mechanics // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1998. № Volume 30, 1998. — vol. 30, — pp. 139–165.

<sup>10</sup>Perigaud G., Saurel R. A Compressible Flow Model with Capillary Effects // Journal of Computational Physics. — 2005. — vol. 209, № 1, — pp. 139–178; Saurel R., Petitpas F., Abgrall R. Modelling Phase Transition in Metastable Liquids: Application to Cavitating and Flashing Flows // Journal of Fluid Mechanics. — 2008. — vol. 607, — pp. 313–350.

<sup>11</sup>Favrie N., Gavrilyuk S. L. Diffuse Interface Model for Compressible Fluid – Compressible Elastic–Plastic Solid Interaction // Journal of Computational Physics. — 2012. — vol. 231, № 7, — pp. 2695–2723; Favrie N., Gavrilyuk S. L., Saurel R. Solid–Fluid Diffuse Interface Model in Cases of Extreme Deformations // Journal of Computational Physics. — 2009. — vol. 228, № 16, — pp. 6037–6077; Ndanou S., Favrie N., Gavrilyuk S. Multi-Solid and Multi-Fluid Diffuse Interface Model: Applications to Dynamic Fracture and Fragmentation // Journal of Computational Physics. — 2015. — vol. 295, — pp. 523–555.

часть и неконсервативную часть (источник)<sup>12</sup>. Не учитывая источник, консервативная часть решается с использованием схемы Русанова или других подобных методов для получения промежуточного решения. Затем это промежуточное решение используется в качестве начального значения для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный подход прост, но в значительной степени зависит от коммутативности операторов и, как правило, имеет точность только первого порядка. Более того, он разрушает связь между задачами и может некорректно отражать физические явления, в которых доминируют неконсервативные члены. Для систематического решения вышеуказанных проблем была предложена и разработана схема консервативного пути (Path Conservative Scheme)<sup>13</sup>, например, в рамках метода конечных объемов<sup>14</sup>. Поэтому создание соответствующих численных методов с использованием этого формата является еще одной важной проблемой и направлением исследований. Следовательно, создание соответствующих численных методов с использованием этой схемы является еще одной важной задачей и направлением исследований.

### **Цели настоящей диссертационной работы**

1. Исследовать решение биматериальной задачи Римана для гипоупругой модели Уилкинса с учетом критерия пластичности Мизеса в упрощенном случае одноосной деформации.
2. Разработать эйлерову математическую модель, описывающую течение разных гипоупругих сред, разделенных межфазными границами, в рамках одной системы определяющих уравнений.
3. Построить численные методы для решения предложенной модели гетерогенной (многоматериальной) гипоупругой среды.
4. Создать комплекс программ на основе разработанной модели и численных методов для решения задач механики гетерогенных гипоупругих сред. Провести верификационные расчеты с помощью разработанного программного комплекса и сравнение с результатами, полученными альтернативными методами.
5. Модифицировать гипоупругую модель Уилкинса, сделав ее термодинамически согласованной.

**Объект и предмет исследования.** В диссертации используются методы вычислительной математики и математического моделирования. Комплекс программ разработан на языке С.

**Научная новизна** представленных в диссертации результатов состоит в следующем:

<sup>12</sup>Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // Journal of Computational Physics. — 1999. — vol. 150, № 2, — pp. 425–467.

<sup>13</sup>Maso G., Floch P. L., Murat F. Definition and Weak Stability of Nonconservative Products // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1995. — vol. 74, — pp. 483–548.

<sup>14</sup>Parés C. Numerical Methods for Nonconservative Hyperbolic Systems: A Theoretical Framework // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2006. — vol. 44, № 1, — pp. 300–321.

1. Разработана обобщенная эйлерова модель для неоднородной среды двух разных гипоупругих материалов, разделенных контактным разрывом.
2. Построены численные методы для решения предложенной модели, обеспечивающие гарантированное выполнение отсутствия нефизических численных осцилляций, вызванных неконсервативными членами, на основе консервативных вдоль пути в фазовом пространстве схем.
3. Предложена модификация модели Уилкинса, обеспечивающая безусловную термодинамическую согласованность (невозрастание энтропии).

**Теоретическая ценность и практическая значимость** диссертационной работы заключаются в разработанной дискретной модели течения гипоупругих сред, соответствующих численных методах и программном комплексе для расчета параметров течения многоматериальной гипоупругой среды на эйлеровых сетках. Данная модель и программный комплекс открывает возможность численного моделирования сложных физических процессов с большими деформациями во многих промышленных задачах.

**На защиту выносятся следующие положения:**

1. Однородная (гомогенизированная) эйлерова модель Уилкинса для описания течения двух разных гипоупругих сред, разделенных контактным разрывом.
2. Численные методы и алгоритмы для решения предложенной модели, обеспечивающие гарантированное выполнение отсутствия нефизических численных осцилляций, вызванных неконсервативными членами, на основе консервативных вдоль пути в фазовом пространстве схем.
3. Комплекс программ для решения задач механики гетерогенных гипоупругих сжимаемых сред.
4. Модификация модели Уилкинса, обеспечивающая безусловную термодинамическую согласованность (невозрастание энтропии).

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов обеспечены строгостью используемого математического аппарата и подтверждаются сравнением результатов вычислительных экспериментов с известными в литературе экспериментальными и расчетными данными, а также данными, полученными с помощью других методов.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы апробированы на следующих научных конференциях:

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2023”.
2. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2024”.
3. Конференция «Вычислительная классическая и многофазная гидродинамика и термомеханика сплошной среды» (Сочи, Международный математический центр «Сириус», 2024 г.).

4. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2025”.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных работах, изданных в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в докторской совет МГУ по специальности и отрасли наук.

**Личный вклад соискателя.** Основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад соискателя в опубликованные работы. Основные результаты, полученные в диссертации получены лично автором.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа представлена на 99 страницах, содержит 27 иллюстраций и 5 таблиц. Список литературы содержит 101 наименование.

## Основное содержание работы

**Во введении** содержится обзор литературы и основных результатов по исследуемой теме, сформулированных в последующих главах.

**В первой главе** рассматривается математические свойства модели Уилкинса, которая в эйлеровой формулировке записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}) = 0 \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S} + \mathbf{S} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{S} - 2\mu \left( \mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right) = k \mathbf{S}, \quad (1d)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{u}$  — вектор скорости,  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений,  $E$  — полная энергия,  $\boldsymbol{\Omega} = 1/2 (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T)$  — тензор вращения,  $\mathbf{D} = 1/2 (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$  — тензор скоростей деформации,  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$ ,  $p$  — давление,  $\mathbf{S}$  — тензор девиатора напряжения,  $\text{tr}(\mathbf{S}) = 0$ ,  $\mu$  — модуль сдвига. Для пластического течения, критерий Мизеса автоматически удовлетворяется, если  $k$  имеет следующий вид:

$$k = -\frac{3\mu \mathbf{S} : \mathbf{D}}{Y^2} H \left( \frac{\mathbf{S} : \mathbf{S}}{2} - \frac{Y^2}{3} \right), \quad (2)$$

где  $Y$  — предел текучести материала, и  $H(x)$  — функция Хевисайда.

В литературе существуют две модели Уилкинса, которые различаются по составу их полной энергии: стандартная форма имеет следующий вид:

$$E = e + 0.5 \mathbf{u}^2; \quad (3)$$

где  $e$  — внутренняя энергия, а модифицированная форма Гаврилюком<sup>15</sup>, следующая:

$$E = e + 0.5\mathbf{u}^2 + \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu\rho}. \quad (4)$$

В данной работе используется вторая форма (4), поскольку из уравнений (1) и (3) получается, что

$$\frac{de}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{4\mu\rho} \frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{dt}. \quad (5)$$

Из этого следует, что для гипоупругой модели Уилкинса внутренняя энергия должна быть связана не только с давлением и плотностью, но и со вторым инвариантом девиаторного напряжения,  $\mathbf{S} : \mathbf{S}$ . В общем случае внутренняя энергия является термодинамическим параметром, поэтому мы выделяем часть внутренней энергии, связанную с девиаторным напряжением, и считаем оставшуюся часть, которая может быть выражена в зависимости от давления и плотности с использованием уравнения состояния, внутренней энергией. То есть, как показано в уравнении (4).

Учитывая, что производная Яуманна совпадает с материальной производной для потенциальных течений, для упрощения изложения рассматривается только одномерная упругая модель без производной Яуманна, которая записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \\ S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \rho c^2 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}. \quad (7)$$

---

<sup>15</sup>Gavrilyuk S. L., Favrie N., Saurel R. Modelling Wave Dynamics of Compressible Elastic Materials // Journal of Computational Physics. — 2008. — vol. 227, № 5, — pp. 2941–2969; Kulikovskii A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Y. Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems. CRC Press, 2000. 564 pp.

Здесь  $c$  — скорость звука, которая определяется как,

$$c^2 = \left( a^2 + \frac{S_{ij}S_{ij}}{4\mu\rho^2(e_p)_\rho} \right), \quad (8)$$

$a$  — гидродинамическая скорость звука, которая определяется как,

$$a^2 = \left( p/\rho^2 - (e_\rho)_p \right) / (e_p)_\rho. \quad (9)$$

В силу автомодельности решение задачи Римана зависит только от переменной подобия  $\xi = x/t$ , и, поэтому

$$(\mathbf{A} - \xi \mathbf{I}) \frac{d\mathbf{W}}{d\xi} = 0. \quad (10)$$

Таким образом,  $\xi$  — должно совпадать с собственным значением  $\mathbf{A}$ , а  $d\mathbf{W}/d\xi$  — с соответствующим правым собственным вектором  $\mathbf{A}$ . Стандартная процедура расчетов, как и в работе<sup>16</sup>, показывает, что характеристические поля контактной ( $\lambda_{1-5} = u$ ) и сдвиговой ( $\lambda_{8-11} = u \pm \sqrt{\mu/\rho}$ ) волны линейно вырождены, в отличие от продольной волны ( $\lambda_{6,7} = u \pm \sqrt{c^2 + 4\mu/(3\rho)}$ ), которая является действительно нелинейной. Таким образом, без учета вакуумной ситуации существует четыре возможных структуры волн в задаче Римана, как показано на рисунке 1.

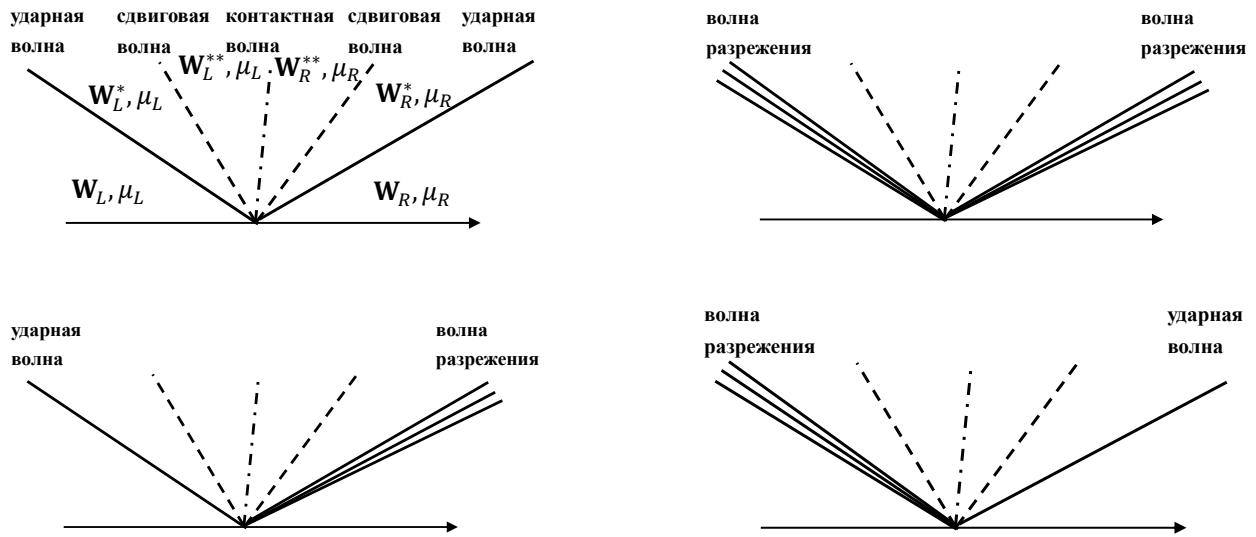


Рисунок 1 — Возможные волновые конфигурации задачи Римана.

Для контактной волны получим

$$[u] = [v] = [w] = 0, [S_{12}] = [S_{13}] = 0, [p - S_{11}] = 0. \quad (11)$$

<sup>16</sup>Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. 564 pp.

Квадратные скобки здесь обозначают разницу между левым и правым концами разрыва. Для сдвиговой волны,

$$[\rho] = 0, [u] = 0, [p] = 0, [S_{11}] = [S_{22}] = [S_{33}] = 0, [S_{23}] = 0$$

$$S_{12R}^{**} - S_{12L}^* = \sqrt{\mu_R \rho_R^*} (v_R^* - v_R^{**}), S_{12L}^{**} - S_{12R}^* = -\sqrt{\mu_L \rho_L^*} (v_L^* - v_L^{**}) \quad (12)$$

$$S_{13R}^{**} - S_{13L}^* = \sqrt{\mu_R \rho_R^*} (w_R^* - w_R^{**}), S_{13L}^{**} - S_{13R}^* = -\sqrt{\mu_L \rho_L^*} (w_L^* - w_L^{**}).$$

Если продольная волна является волной разрежения, получаем

$$dv = dw = 0, dS_{12} = dS_{13} = dS_{23} = 0, dS_{11} = -2dS_{22} = -2dS_{33}$$

$$dp = c^2 d\rho = a^2 d\rho + \frac{S_{ij} S_{ij}}{4\mu \rho^2 e_p} d\rho, du = \pm \frac{\sqrt{c^2 + \frac{4\mu}{3\rho}}}{\rho} d\rho, dS_{11} = -\frac{4\mu}{3\rho} d\rho. \quad (13)$$

Если продольная волна является ударной волной, получаем линию Рэлея-Михельсона и ударную адиабату Гюгонио, записанные в следующем виде:

$$\sigma_{11}^* - \sigma_{11} = (\rho(u - D))^2 \left( \frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{\rho} \right) = m^2 \left( \frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{\rho} \right)$$

$$e^* - e + \frac{S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2}{4\mu} \left( \frac{1}{\rho^*} - \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{2} (p^* + p) \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*} \right). \quad (14)$$

Уравнения (11) – (14) показывают, что продольные волны изменяют только продольные параметры, а сдвиговые волны изменяют только тангенциальные параметры. Это означает, что в рамках уравнений (1) и (4) может существовать изолированная линейно-вырожденная сдвиговая волна.

**Во второй главе** на основе метода диффузной границы разработана одномерная эйлерова модель для двухматериальных гипоупругих сред. Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

где  $\mathbf{Q}$  – вектор консервативных переменных,  $\mathbf{F}$  – вектор потока, а третий член представляет собой неконсервативную часть. Для упрощения рассматриваемой процедуры усреднения мы опускаем коррекцию производной Яуманна; однако, эта коррекция может быть включена в результирующую многоматериальную модель.

Мы вводим характеристическую функцию  $\chi(t, \mathbf{x}) = 1$ , если  $\mathbf{x}$  лежит в области материала  $\alpha$ , и  $\chi(t, \mathbf{x}) = 0$ , если  $\mathbf{x}$  находится в материале  $\beta$ . Эта функция удовлетворяет уравнению переноса

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{u}^I \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad (16)$$

где  $\mathbf{u}^I$  — скорость на границе. Введем фильтр, то есть небольшую область  $V$  с центром в точке  $\mathbf{x}$ . В общем случае она состоит из подобластей, занятых двумя материалами. Для удобства мы введем конечную функцию фильтра  $\psi$ , принимающую значение 1 в этой малой области и 0 на остальном пространстве. При усреднении по пространству<sup>17</sup>, из уравнений (15) и (16) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial t} - \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi \tilde{\mathbf{F}}_m}{\partial x_m} - \bar{\mathbf{F}}_m \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} + \frac{1}{V} \int_{\psi=1} \left( \chi \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right) dV = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u}^I \cdot \nabla \varphi = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\varphi$  — объемная доля,  $\varphi = \frac{1}{V} \int \psi \chi dV = \frac{1}{V} \int_V \chi dV$ ,  $V$  — объем фильтра,  $\tilde{\mathbf{Q}}$  обозначает усредненную переменную по области ненулевого значения фильтра, что имеет вид,  $\tilde{\mathbf{Q}} = \int_V \chi \mathbf{Q} dV / \int_V \chi dV$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}$  обозначает усредненную переменную по интерфейсу. Суммирование по индексу  $m$  выполняется в уравнении (17). Применяется усреднение в одномерном случае (объем  $V$  вырождается в длину  $L$ ). Для неконсервативного члена принимается следующее предположение,

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{\psi=1} \left( \chi \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \right) dx &\approx \frac{1}{L} \tilde{\mathbf{B}} \int_{\psi=1} \left( \frac{\partial \chi \mathbf{Q}}{\partial x} - \mathbf{Q} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) dx \\ &= \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \varphi \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial x} - \tilde{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \varphi \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial x} + \tilde{\mathbf{B}} \left( \tilde{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{Q}} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из уравнений (17) и (18) неравновесная модель, которую можно рассматривать как аналог гидродинамической двухфазной модели Баера-Нунциато<sup>18</sup>, получается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi \mathbf{F}}{\partial x} + (\mathbf{Q}^I u^I - \mathbf{F}^I) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \mathbf{B} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^I) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u}^I \cdot \nabla \varphi = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\mathbf{Q}^I$  обозначает  $\mathbf{Q}$  в точке интерфейса.

С учетом взаимодействий между фазами, в правой части уравнения (19) должен быть включен член релаксации, общая форма которого имеет вид:

---

<sup>17</sup>Drew D. A., Passman S. L. Theory of Multicomponent Fluids. Applied Mathematical Sciences, vol.35. New York, NY: Springer, 1999. 310 pp.

<sup>18</sup>Baer M. R., Nunziato J. W. A Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDt) in Reactive Granular Materials // International Journal of Multiphase Flow. — 1986. — vol. 12, № 6, — pp. 861–889.

$$\begin{aligned}
F_{ui}^\alpha &= K_u^\alpha \left( u_i^\beta - u_i^\alpha \right), F_{ui}^\beta = K_u^\beta \left( u_i^\alpha - u_i^\beta \right) \\
F_{\sigma 11}^\alpha &= K_\sigma^\alpha \left( \sigma_{11}^\beta - \sigma_{11}^\alpha \right), F_{\sigma 11}^\beta = K_\sigma^\beta \left( \sigma_{11}^\alpha - \sigma_{11}^\beta \right) \\
F_{\sigma 1j}^\alpha &= K_{\sigma Tj}^\alpha \left( \sigma_{1j}^\beta - \sigma_{1j}^\alpha \right), F_{\sigma 1j}^\beta = K_{\sigma Tj}^\beta \left( \sigma_{1j}^\alpha - \sigma_{1j}^\beta \right), j \neq 1 \\
F_\varphi^\alpha &= K_\varphi^\alpha \left( \sigma_{11}^\beta - \sigma_{11}^\alpha \right),
\end{aligned} \tag{20}$$

где  $K_u^k$ ,  $K_\sigma^k$ ,  $K_{\sigma Tj}^k$  и  $K_\varphi^k$  — параметры релаксации для скорости, девиаторных напряжений и объемной доли.

Для определения связи между коэффициентами релаксации напряжений принимается следующее предположение: при малых деформациях компоненты напряжения имеют определенную связь друг с другом в соответствии с законом Гука, поэтому предполагается, что такая же связь существует и между этими коэффициентами релаксации напряжений. Кроме того, по закону сохранения и совместимости деформаций, получается, что

$$\begin{aligned}
K_u^\alpha &= K_u^\beta, F_\varphi^\alpha = \varphi^\alpha \frac{K_\sigma^\alpha \left( \sigma_{11}^\beta - \sigma_{11}^\alpha \right)}{\left( \rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha \right)} \\
F_{\sigma ii}^\alpha &= \frac{K_\sigma^\alpha \left( \sigma_{11}^\beta - \sigma_{11}^\alpha \right) \left( \rho^\alpha c^{\alpha 2} - \frac{2}{3} \mu^\alpha \right)}{\left( \rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha \right)} \\
F_{\sigma ii}^\beta &= \frac{K_\sigma^\beta \left( \sigma_{11}^\alpha - \sigma_{11}^\beta \right) \left( \rho^\beta c^{\beta 2} - \frac{2}{3} \mu^\beta \right)}{\left( \rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3} \mu^\beta \right)}, i \neq 1 \\
\frac{K_\sigma^\alpha \varphi^\alpha}{\left( \rho^\alpha c^{\alpha 2} + \frac{4}{3} \mu^\alpha \right)} &= \frac{K_\sigma^\beta \varphi^\beta}{\left( \rho^\beta c^{\beta 2} + \frac{4}{3} \mu^\beta \right)}, \frac{\varphi^\alpha K_{\sigma Tj}^\alpha}{\mu^\alpha} = \frac{\varphi^\beta K_{\sigma Tj}^\beta}{\mu^\beta}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Для асимптотического анализа удобно записать систему (19) в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{C}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \frac{1}{\tau} \mathbf{H}(\mathbf{U}), \tag{22}$$

где  $\tau \rightarrow 0^+$  — время релаксации,  $\mathbf{H}(\mathbf{U})$  — вектор, содержащий релаксационные члены (21),  $\mathbf{U} = (\varphi^k \rho^k, \mathbf{u}^k, \sigma_{1i}^k, \sigma_{jj}^k, \varphi^\alpha)^T$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 2, 3$ . Предполагается, что асимптотическое решение (22) может быть выражено как

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(0)} + \tau \mathbf{U}^{(1)} + \mathbf{O}(\tau^2). \tag{23}$$

Подставляя (23) в (22), получается

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{L}(\mathbf{U}^{(0)}) - \mathbf{M}(\mathbf{U}^{(0)}) \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{H}(\mathbf{U}^{(0)}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{L}(\mathbf{U}) &= \mathbf{C}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}, \mathbf{M}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для простоты обозначений в дальнейшем верхний индекс (0) опущен. Из второго уравнения в (24) следует, что

$$\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{u}^\beta = \mathbf{u}^{\alpha I} = \mathbf{u}^{\beta I}, \sigma_{1i}^\alpha = \sigma_{1i}^\beta = \sigma_{1i}^{\alpha I} = \sigma_{1i}^{\beta I}. \quad (25)$$

Из первого уравнения в (24) и уравнений (21) и (25) получается, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^\alpha \rho^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\alpha \rho^\alpha u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi^\beta \rho^\beta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi^\beta \rho^\beta u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) u^2 - \sigma_{11})}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) v}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) uv - \sigma_{12})}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) w}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) uw - \sigma_{13})}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) E}{\partial t} + \frac{\partial ((\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) Eu - \sigma_{11}u - \sigma_{12}v - \sigma_{13}w)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha S_{11}^\alpha + 4/3\mu^\alpha \varphi^\alpha \rho^\alpha \ln \rho^\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha S_{11}^\alpha + 4/3\mu^\alpha \varphi^\alpha \rho^\alpha \ln \rho^\alpha) u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\beta \rho^\beta S_{11}^\beta + 4/3\mu^\beta \varphi^\beta \rho^\beta \ln \rho^\beta)}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\beta \rho^\beta S_{12}^\beta + 4/3\mu^\beta \varphi^\beta \rho^\beta \ln \rho^\beta) u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) S_{12}}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) S_{12}u}{\partial x} - \frac{(\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) \mu^\alpha \mu^\beta}{\varphi^\alpha \mu^\beta + \varphi^\beta \mu^\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) S_{13}}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) S_{13}u}{\partial x} - \frac{(\varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta) \mu^\alpha \mu^\beta}{\varphi^\alpha \mu^\beta + \varphi^\beta \mu^\alpha} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x} - (\varphi^\beta \Lambda^\beta - \varphi^\alpha \Lambda^\alpha) \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \rho E &= \varphi^\alpha \rho^\alpha e^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta e^\beta + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \varphi^\alpha \rho^\alpha \frac{S_{ij}^\alpha S_{ij}^\alpha}{4\mu^\alpha \rho^\alpha} + \varphi^\beta \rho^\beta \frac{S_{ij}^\beta S_{ij}^\beta}{4\mu^\beta \rho^\beta} \\ \rho &= \varphi^\alpha \rho^\alpha + \varphi^\beta \rho^\beta \\ \Lambda^\alpha &= \frac{\varphi^\beta (\rho^\alpha c^{\alpha 2} + 4/3\mu^\alpha)}{\varphi^\beta (\rho^\alpha c^{\alpha 2} + 4/3\mu^\alpha) + \varphi^\alpha (\rho^\beta c^{\beta 2} + 4/3\mu^\beta)} \\ \Lambda^\beta &= \frac{\varphi^\alpha (\rho^\beta c^{\beta 2} + 4/3\mu^\beta)}{\varphi^\beta (\rho^\alpha c^{\alpha 2} + 4/3\mu^\alpha) + \varphi^\alpha (\rho^\beta c^{\beta 2} + 4/3\mu^\beta)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Равновесная модель (26) являются гиперболической. В разделе 2.3 анализируется упрощенная форма данной модели при одноосной деформации, которая совпадает с моделью, получаемой на основе принципа гидродинамической аналогии.

**В третьей главе** разработан численный метод, основанный на консервативных по пути схемах<sup>19</sup>, для системы уравнений (1) и (26), которые могут быть выражены в неконсервативном виде (15) в автомодельной переменной  $\lambda = x/t$ ,

$$\mathbf{Q} - \frac{\partial(\lambda \mathbf{Q})}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \lambda} = 0. \quad (28)$$

Интегрируя (28) по  $\lambda \in [s_L, s_R]$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_* (s_R - s_L) - (\mathbf{Q}_R s_R - \mathbf{Q}_L s_L) + (\mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L) \\ + \int_{\mathbf{Q}_L}^{\mathbf{Q}_*} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} + \int_{\mathbf{Q}_*}^{\mathbf{Q}_R} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = 0 \\ \int_{\mathbf{Q}_L}^{\mathbf{Q}_*} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = \int_0^1 \mathbf{B}(\psi(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_*, s)) \frac{\partial \psi}{\partial s} ds \\ \int_{\mathbf{Q}_*}^{\mathbf{Q}_R} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = \int_0^1 \mathbf{B}(\psi(\mathbf{Q}_*, \mathbf{Q}_R, s)) \frac{\partial \psi}{\partial s} ds, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $s_L$  и  $s_R$  — скорости самых крайних волн,  $\psi(s)$  — непрерывная параметризуемая кривая в фазовом пространстве (путь),  $0 \leq s \leq 1$  — параметр вдоль кривой. Следовательно, результат интегрирования неконсервативной части зависит от выбора пути. В большинстве схем в качестве пути выбирается прямолинейный отрезок, соединяющий состояние слева и справа от разрыва:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_*, s) &= \mathbf{Q}_L + (\mathbf{Q}_* - \mathbf{Q}_L) s \\ \psi(\mathbf{Q}_*, \mathbf{Q}_R, s) &= \mathbf{Q}_* + (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_*) s. \end{aligned} \quad (30)$$

---

<sup>19</sup>Dumbser M., Balsara D. S. A New Efficient Formulation of the HLLEM Riemann Solver for General Conservative and Non-Conservative Hyperbolic Systems // Journal of Computational Physics. — 2016. — vol. 304, — pp. 275–319.

Учитывая уравнения (11) – (14), в данной работе выбран конкретный путь, то есть, существует два этапа, на первом из которых изменяются продольные параметры, а на втором — тангенциальные. Вычислим интегрирование неконсервативного члена по этому пути, как показано ниже:

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{Q}_L \rightarrow \mathbf{Q}_*) \\
 & 1. \rho_L \rightarrow \rho^* \\
 & 2. v_L, w_L, S_{12L}, S_{13L} \rightarrow v^*, w^*, S_{12}^*, S_{13}^* \\
 & \mathbf{q} = \mathbf{q}_L + (\mathbf{q}_* - \mathbf{q}_L) s, \mathbf{q} = v, w, S_{12}, S_{13} \\
 & \int_0^1 \left( \rho S_{12} \frac{\partial v}{\partial s} + \rho S_{13} \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds = \\
 & \frac{\rho^*}{2} (S_{12L} + S_{12}^*) (v^* - v_L) + \frac{\rho^*}{2} (S_{13L} + S_{13}^*) (w^* - w_L).
 \end{aligned} \tag{31}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left( \rho S_{12} \frac{\partial v}{\partial s} + \rho S_{13} \frac{\partial w}{\partial s} \right) ds (\mathbf{Q}_* \rightarrow \mathbf{Q}_R) = \\
 & -\frac{\rho^*}{2} (S_{12R} + S_{12}^*) (v^* - v_R) - \frac{\rho^*}{2} (S_{13R} + S_{13}^*) (w^* - w_R).
 \end{aligned} \tag{32}$$

Используя уравнение (29) для уравнений в одномерной модели (1), и следуя тому же пути, что и в уравнении (31), в результате простых алгебраических расчетов получается,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{MS} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \\
 & \mathbf{M} = \begin{vmatrix} s_R - s_L & 0 & 0 & \frac{v_R - v_L}{2} & \frac{w_R - w_L}{2} & 0 \\ 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{v_L - v_R}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{w_L - w_R}{2} & 0 \\ \frac{v_L - v_R}{4} & \frac{v_R - v_L}{4} & 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{w_R - w_L}{4} \\ \frac{w_L - w_R}{4} & 0 & \frac{w_R - w_L}{4} & 0 & s_R - s_L & \frac{v_R - v_L}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{w_L - w_R}{4} & \frac{v_L - v_R}{4} & s_R - s_L \end{vmatrix} \\
 & \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} S'_{11R} (s_R - u^*) - S'_{11L} (s_L - u^*) \\ S'_{22R} (s_R - u^*) - S'_{22L} (s_L - u^*) \\ S'_{33R} (s_R - u^*) - S'_{33L} (s_L - u^*) \\ S_{12R} (s_R - u^*) - S_{12L} (s_L - u^*) + \mu (v_R - v_L) \\ S_{13R} (s_R - u^*) - S_{13L} (s_L - u^*) + \mu (w_R - w_L) \\ S_{23R} (s_R - u^*) - S_{23L} (s_L - u^*) \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} \frac{v^*-v_L}{2}S_{12L} + \frac{w^*-w_L}{2}S_{13L} + \frac{v_R-v^*}{2}S_{12R} + \frac{w_R-w^*}{2}S_{13R} \\ -\frac{v^*-v_L}{2}S_{12L} - \frac{v_R-v^*}{2}S_{12R} \\ -\frac{w^*-w_L}{2}S_{13L} - \frac{w_R-w^*}{2}S_{13R} \\ \frac{v^*-v_L}{4}(S_{22L} - S_{11L}) + \frac{w^*-w_L}{4}S_{23L} + \frac{v_R-v^*}{4}(S_{22R} - S_{11R}) + \frac{w_R-w^*}{4}S_{23R} \\ \frac{w_R-w^*}{4}(S_{33R} - S_{11R}) + \frac{v_R-v^*}{4}S_{23R} + \frac{w^*-w_L}{4}(S_{33L} - S_{11L}) + \frac{v^*-v_L}{4}S_{23L} \\ -\frac{v^*-v_L}{4}S_{13L} - \frac{w^*-w_L}{4}S_{12L} - \frac{v_R-v^*}{4}S_{13R} - \frac{w_R-w^*}{4}S_{12R} \\ S'_{11L} = S_{11L} + \frac{4}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_L}{\rho^*}\right), S'_{11R} = S_{11R} + \frac{4}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_R}{\rho^*}\right) \\ S'_{22L} = S_{22L} - \frac{2}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_L}{\rho^*}\right), S'_{22R} = S_{22R} - \frac{2}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_R}{\rho^*}\right) \\ S'_{33L} = S_{33L} - \frac{2}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_L}{\rho^*}\right), S'_{33R} = S_{33R} - \frac{2}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_R}{\rho^*}\right), \end{vmatrix} \quad (33)$$

где  $\mathbf{S} = (S_{11}^*, S_{22}^*, S_{33}^*, S_{12}^*, S_{13}^*, S_{23}^*)^T$ . Таким образом, для алгоритма HLL переменные  $\mathbf{S}$  в возмущенной области вычисляются по уравнениям (33). Для консервативных переменных вычислительный метод соответствует классическому алгоритму HLL:

$$\rho^* = \frac{\rho_R(s_R - u_R) - \rho_L(s_L - u_L)}{s_R - s_L} \quad (34a)$$

$$u_i^* = \frac{\rho_R u_{iR} (s_R - u_R) + \sigma_{1iR} - \rho_L u_{iL} (s_L - u_L) - \sigma_{1iL}}{\rho^* (s_R - s_L)}, i = 1, 2, 3 \quad (34b)$$

$$E^* = \frac{\rho_R E_R (s_R - u_R) + \sigma_{1mR} u_{mR} - \rho_L E_L (s_L - u_L) - \sigma_{1nL} u_{nR}}{\rho^* (s_R - s_L)}, \quad (34c)$$

где  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$ , суммирование  $m$  и  $n$  в уравнении (34c).

В HLLC предполагается следующее соотношение,

$$u_{iL}^* = u_{iR}^* = u_i^*. \quad (35)$$

Повторяя вышеописанный способ, получаем:

$$\rho_k^* = \rho_k \frac{s_k - u_k}{s_k - u^*} \quad (36a)$$

$$u_i^* = \frac{\rho_R u_{iR} (s_R - u_R) + \sigma_{1iR} - \rho_L u_{iL} (s_L - u_L) - \sigma_{1iL}}{\rho_R (s_R - u_R) - \rho_L (s_L - u_L)} \quad (36b)$$

$$E_k^* = E_k + \frac{\sigma_{1mk} u_{mk} - \sigma_{1nk}^* u_n^*}{\rho_k (s_k - u_k)} \quad (36c)$$

$$\sigma_{1iL}^* = \sigma_{1iR}^* = \sigma_{1ik} + \rho_k (u_{ik} - u_i^*) (s_k - u_k), i, n, m = 1, 2, 3. k = L, R, \quad (36d)$$

где суммирование  $m$  и  $n$  в уравнении (36c). Для неконсервативной части,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{MS} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \\
\mathbf{M} &= \left| \begin{array}{cccccc}
s_k - u^* & 0 & 0 & \frac{v_k - v^*}{2} & \frac{w_k - w^*}{2} & 0 \\
0 & s_k - u^* & 0 & \frac{v^* - v_k}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & s_k - u^* & 0 & \frac{w^* - w_k}{2} & 0 \\
\frac{v^* - v_k}{4} & \frac{v_k - v^*}{4} & 0 & s_k - u^* & 0 & \frac{w_k - w^*}{4} \\
\frac{w^* - w_k}{4} & 0 & \frac{w_k - w^*}{4} & 0 & s_k - u^* & \frac{v_k - v^*}{4} \\
0 & 0 & 0 & \frac{w^* - w_k}{4} & \frac{v^* - v_k}{4} & s_k - u^*
\end{array} \right| \\
\mathbf{R}_1 &= \left| \begin{array}{c}
S'_{11k}(s_k - u^*) \\
S'_{22k}(s_k - u^*) \\
S'_{33k}(s_k - u^*) \\
S_{12k}(s_k - u^*) \\
S_{13k}(s_k - u^*) \\
S_{23k}(s_k - u^*)
\end{array} \right| \\
\mathbf{R}_2 &= \left| \begin{array}{c}
\frac{1}{2}(S_{12k}(v^* - v_k) + S_{13k}(w^* - w_k)) \\
-\frac{1}{2}S_{12k}(v^* - v_k) \\
-\frac{1}{2}S_{13k}(w^* - w_k) \\
-\mu(v^* - v_k) + \frac{1}{4}((S_{22k} - S_{11k})(v^* - v_k) + S_{23k}(w^* - w_k)) \\
-\mu(w^* - w_k) + \frac{1}{4}((S_{33k} - S_{11k})(w^* - w_k) + S_{23k}(v^* - v_k)) \\
-\frac{1}{4}(S_{13k}(v^* - v_k) + S_{12k}(w^* - w_k))
\end{array} \right|, \quad (37)
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{S} = (S_{11k}^*, S_{22k}^*, S_{33k}^*, S_{12k}^*, S_{13k}^*, S_{23k}^*)^T$ ,  $k = L, R$ . Такие определения, как  $S'_{11k}$ , согласуются с уравнением (33).

Расчет потоков в HLLC производится следующим образом,

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^+ - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^- \right) \quad (38a)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{i-1/2}^+ &= H(C_{1,i-1/2}) C_{1,i-1/2} \mathbf{Q}_{i-1/2,L}^* \\
&+ (s_{R,i-1/2} + (H(-C_{1,i-1/2}) - 1) C_{1,i-1/2}) \mathbf{Q}_{i-1/2,R}^* - s_{R,i-1/2} \mathbf{Q}_i^n \\
\mathbf{F}_{i+1/2}^- &= H(-C_{1,i+1/2}) C_{1,i+1/2} \mathbf{Q}_{i+1/2,R}^* \\
&+ (s_{L,i+1/2} + (H(C_{1,i+1/2}) - 1) C_{1,i+1/2}) \mathbf{Q}_{i+1/2,L}^* - s_{L,i+1/2} \mathbf{Q}_i^n,
\end{aligned} \quad (38b)$$

где  $\Delta x$  — длина сетки,  $\Delta t$  — шаг времени,  $H(x)$  — функция Хевисайда,  $C_{1,i-1/2} - u^*$  при решении задачи Римана между сетками  $i-1$  и  $i$ . Для случая HLL пусть  $C_1 = 0$ .

Двухматериальная модель Уилкинса (26) может быть выражена в виде уравнения (15), поэтому вышеуказанный метод остается применимым. Предполагая, что уравнение (35) выполняется, для консервативной части (26),

получаем,

$$(\varphi^m \rho^m)_k^* = (\varphi^m \rho^m)_k \frac{(u_k - s_k)}{u^* - s_k}, m = \alpha, \beta, k = L, R. \quad (39a)$$

$$u_i^* = \frac{\rho_R u_{iR} (s_R - u_R) + \sigma_{1iR} - \rho_L u_{iL} (s_L - u_L) - \sigma_{1iL}}{\rho_R (s_R - u_R) - \rho_L (s_L - u_L)} \quad (39b)$$

$$E_k^* = E_k + \frac{\sigma_{1sk} u_{sk} - \sigma_{1nk}^* u_n^*}{\rho_k (s_k - u_k)}, i, s, n = 1, 2, 3. \quad (39c)$$

$$\sigma_{1iL}^* = \sigma_{1iR}^* = \sigma_{1ik} + \rho_k (u_{ik} - u_i^*) (s_k - u_k) \quad (39d)$$

$$\rho_k = (\varphi^\alpha \rho^\alpha)_k + (\varphi^\beta \rho^\beta)_k, \rho_k^* = (\varphi^\alpha \rho^\alpha)_k^* + (\varphi^\beta \rho^\beta)_k^*, \quad (39e)$$

где суммирование  $s$  и  $n$  в уравнении (39c). Переписав уравнение объемной доли в модели (26), получим следующее,

$$\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi^\alpha u)}{\partial x} - \Lambda^\beta \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (40)$$

Для неконсервативной части можно по-прежнему использовать метод интегрирования по определенному пути в фазовом пространстве. Здесь, однако, мы используем другой широко используемый метод при решении неконсервативных членов в уравнении объемной доли, то есть рассматриваем их как источниковые члены. Классическая схема HLLC с источниками имеет вид,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^{n+1} &= \mathbf{Q}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \left( \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} \right) + \mathbf{s}_i \right) \\ \mathbf{F} &= \frac{1 + \operatorname{sgn}(u^*)}{2} [\mathbf{F}_L + s_L (\mathbf{Q}_L^* - \mathbf{Q}_L)] + \frac{1 - \operatorname{sgn}(u^*)}{2} [\mathbf{F}_R + s_R (\mathbf{Q}_R^* - \mathbf{Q}_R)] \\ \mathbf{Q}_k &= \varphi_k^\alpha, \mathbf{F}_k = \varphi_k^\alpha u_k, \mathbf{Q}_k^* = \frac{s_k - u_k}{s_k - u^*} \varphi_k^\alpha, k = L, R \\ \mathbf{s}_i &= \Lambda^\beta (C_{i+1/2} - C_{i-1/2}) \\ C &= \frac{1 + \operatorname{sgn}(u^*)}{2} \left[ u_L + s_L \left( \frac{s_L - u_L}{s_L - u^*} - 1 \right) \right] \\ &\quad + \frac{1 - \operatorname{sgn}(u^*)}{2} \left[ u_R + s_R \left( \frac{s_R - u_R}{s_R - u^*} - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (41)$$

где  $\operatorname{sgn}(x)$  — функция знака. Для девиаторной части в модели (26) с целью упрощения расчетов предполагается, что объемная доля изменяется только на контактной волне, т.е.

$$\varphi_k^\alpha = \varphi_k^{\alpha*}. \quad (42)$$

Следовательно, получаем,

$$\begin{aligned}
 S_{11k}^{m*} &= S_{11k}^m + \frac{4}{3}\mu^m \ln \left( \frac{u^* - s_k}{u_k - s_k} \right) \\
 S_{12k}^* &= S_{12k} + \frac{(v^* - v_k) \mu^\beta \mu^\alpha}{(u^* - s_k) (\varphi_k^\alpha \mu^\beta + \varphi_k^\beta \mu^\alpha)} \\
 S_{13k}^* &= S_{13k} + \frac{(w^* - w_k) \mu^\beta \mu^\alpha}{(u^* - s_k) (\varphi_k^\alpha \mu^\beta + \varphi_k^\beta \mu^\alpha)}, m = \alpha, \beta, k = L, R.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Для удобства программирования уравнение (38), которое используется для расчета неконсервативных потоков, также может быть одновременно применено и для консервативных.

В разделах 3.3 и 3.4 достоверность предложенной математической модели и вычислительного метода проверена с помощью численных экспериментов, а результаты сравнены с результатами, полученными другими численными методами и теоретическими решениями.

Вычислительный алгоритм основан на методе, описанном выше, с переменным шагом по времени, выбираемым в соответствии с обычным условием устойчивости Куранта-Фридрихса-Льюи (CFL). В качестве материала выбирается алюминий и медь с УРС Ми-Грюнайзена. Соответствующие параметры УРС указаны в таблице 1. Используется критерий Мизеса: если  $Q = S_{ij}S_{ij} \geq \frac{2}{3}Y^2$ , то  $S_{ij} \rightarrow S_{ij}\sqrt{\frac{2}{3}Y}$ .

Таблица 1 — Константы алюминия и меди

Параметры	Алюминий	Медь
$\rho_0, \text{kg/m}^3$	2780	8930
$\Gamma$	2.13	2
$s$	1.338	1.49
$a_0, \text{m/s}$	5330	3970
$\mu, \text{GPa}$	27.6	45
$Y, \text{GPa}$	0.29	0.09

Рассмотрим следующие два случая, как показано на рисунках 2 и 3. Первый случай является примером ударной волны, когда объект ударяется о стену слева с определенной отрицательной начальной скоростью. Второй случай является примером центрированной волны растяжения, когда левая сторона объекта прикреплена к стене, а правая растягивается с положительной начальной скоростью. Границное условие слева — жесткая недеформируемая стенка, а справа — лагранжева граница с нулевым напряжением и давлением. Начальная скорость  $u$ , и остальные скорости и девиаторные напряжения

равны 0. В случае одноосной деформации существуют только продольные волны. По мере увеличения скорости удара, структура проходит три фазы, а именно, одноволновый упругий режим, двухволновый режим с упругим предвестником и одноволновый пластический режим. Для случая растяжения не существует режима, в котором возникает только одна пластическая волна, даже при очень высоких скоростях растяжения. Сравниваются численные результаты с теоретическими результатами.

Далее мы рассмотрим двухматериальный случай. Материал слева (при-мыкающий к стене) — алюминий, а материал справа от границы — медь. Начальные давление и напряжение равны нулю, начальная скорость  $u$ . В качестве эталонного решения используются результаты, полученные произвольным лагранжево-эйлеровым методом (ALE). Сетка состоит из 1000 расчетных ячеек, по 500 ячеек отведено для каждого из двух материалов. В случае неподвижной сетки для объемных долей материалов во всех расчетных ячейках задаются ненулевые начальные значения. Начальное значение отсечки  $10^{-9}$  принимается для алюминия в области меди и, соответственно, для меди в области алюминия. Когда скорость удара увеличивается выше критической скорости алюминия, в алюминии распространяются двойные упругопластические волны, в то время как в меди возникает трехволновый (рисунок 4) или двухволновый режим. Отметим, что слева результаты, полученные с использованием подвижной сетки, совпадают с результатами алюминия, а справа — с результатами меди.

Далее рассматривается биматериальная задача Римана, в которой граница разделяет два упругих материала. Теоретическое решение задачи Римана служит в качестве эталона. Поскольку в настоящее время доступно только теоретическое решение для упругой фазы, предел текучести материала  $Y$  устанавливается на чрезвычайно высокое значение в численных расчетах, чтобы гарантировать, что критерий пластичности не оказывает влияния. На рисунке 5 слева и справа начальные значения скоростей  $u$  и  $w$ , а также все девиаторные напряжения равны 0, а скорость  $v$  составляет  $-10 \text{ м/с}$  и давление  $p = 10^8 \text{ Па}$  слева и  $v$  составляет  $10 \text{ м/с}$  и давление  $p = 10^5 \text{ Па}$  справа. Слева — алюминий, а справа — медь. В этом случае продольная волна слева является волной разрежения, а справа ударной волной. Выбор разрыва по давлению, а не по скорости в дислокациях сделан для того, чтобы показать, что продольные волны слева и справа также могут быть разных типов.

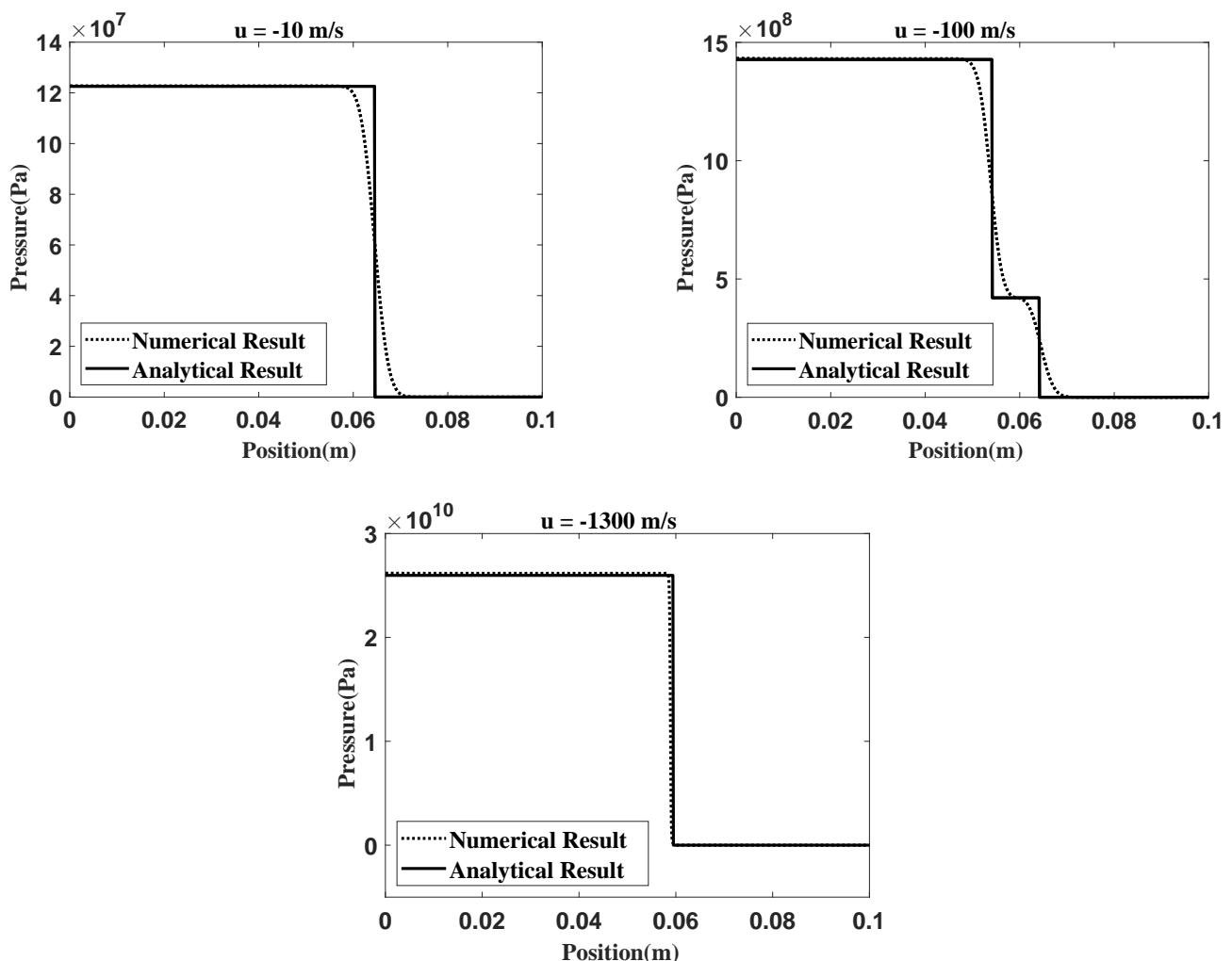


Рисунок 2 — Распределение давления в алюминии при нескольких различных скоростях для ударной волны. (1000 сеток)

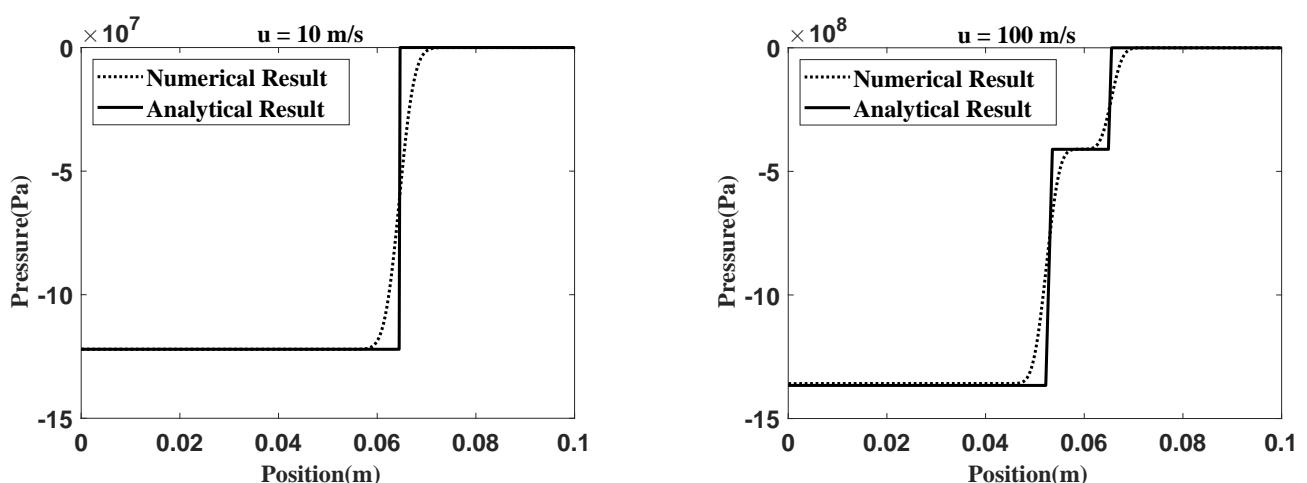


Рисунок 3 — Распределение давления в алюминии при нескольких различных скоростях для волны разрежения. (1000 сеток)

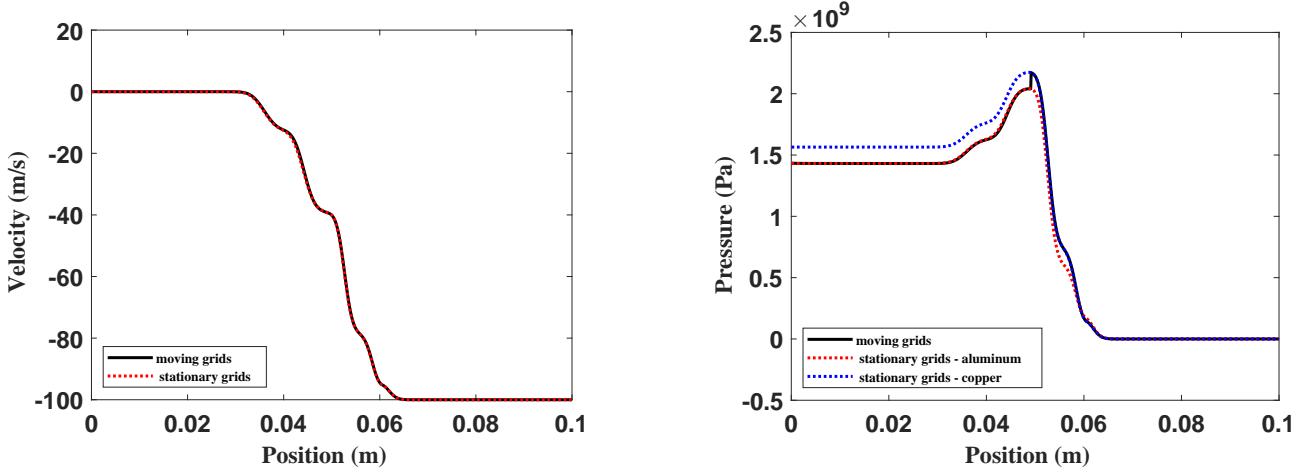


Рисунок 4 — Распределения скорости и давления при  $10^{-5}$  с для скорости удара 100 м/с. Двойные упругопластические волны распространяются в алюминии. Упругая предвестниковая волна алюминия достигает границы и заставляет медь генерировать двойные упругопластические волны. Затем вторая пластическая волна алюминия достигает границы и порождает еще одну пластическую волну в меди.

Согласно анализу задачи Римана, результаты в общем случае могут быть рассмотрены как простая суперпозиция случая одноосной деформации и случая сдвига. Сначала решим задачу для случая, когда начальные значения левой и правой сторон отличаются только давлением, чтобы получить продольные переменные за продольной волны, а затем решим задачу для случая, когда отличается только скорость  $v$ , чтобы получить тангенциальные переменные за сдвиговой волны, и сумма этих двух результатов будет результатом, показанным на рисунке 5.

При учете критерия пластичности количество волн увеличивается по сравнению с упругими случаями. Для четкого отображения сдвиговых волн исходная длина увеличена с 0.1 м до 0.2 м, и, соответственно, количество сеток увеличено до 4000. Плотность является средней, определяемой уравнением (27). В отличие от случая одноосной деформации, две модели с упругим членом в полной энергии (уравнение (4)) и без него (уравнение (3)) имеют существенные различия в описании процесса сдвига.

На рисунке 6 показаны соответствующие численные расчеты, которые согласуются с результатами в численных расчетах сдвигового слоя в статье<sup>20</sup>. Следует отметить, что в данном случае разрыв начальной скорости  $v$  все еще настолько мал, что за волной материал еще не достиг пластического состояния. Несмотря на то, что теоретические результаты свидетельствуют о том, сдвиговые волны не вызывают изменений продольных параметров в модели с упругим членом, в численных результатах все же наблюдаются незначительные колебания, амплитуда которых уменьшается с увеличением количества узлов сетки.

<sup>20</sup>Peshkov I. et al. Theoretical and Numerical Comparison of Hyperelastic and Hypoelastic Formulations for Eulerian Non-Linear Elastoplasticity // Journal of Computational Physics. — 2019. — vol. 387, — pp. 481–521.

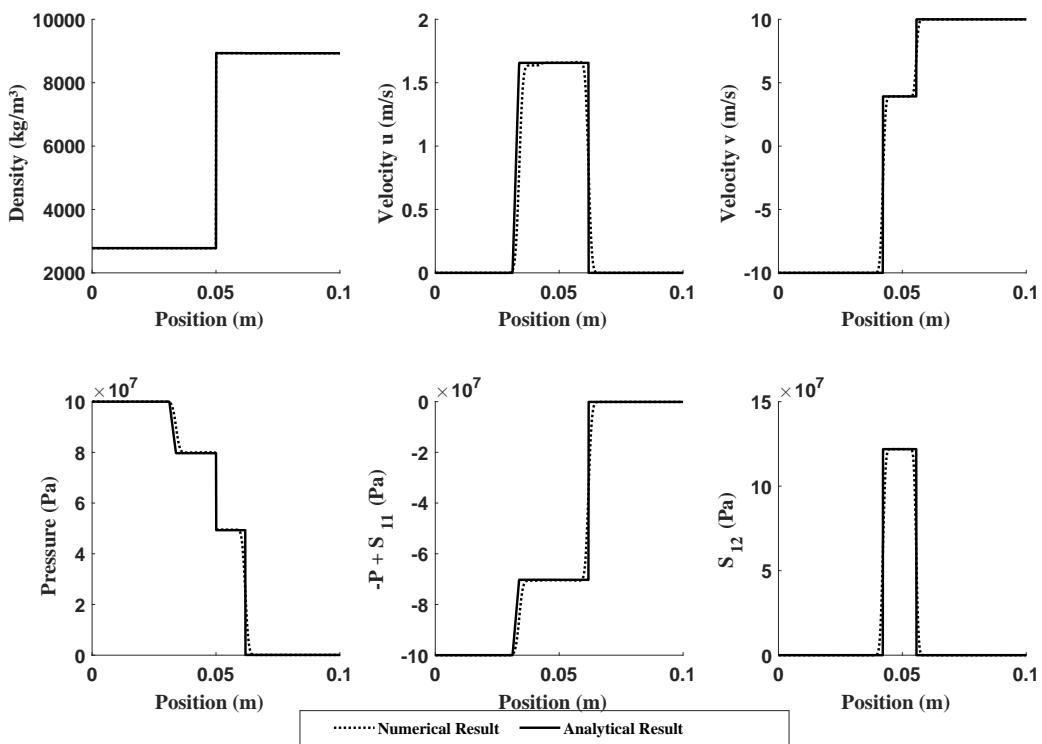


Рисунок 5 — Распределения параметров состояния при  $0.25 \times 10^{-5}$  с в общем случае различных материалов.

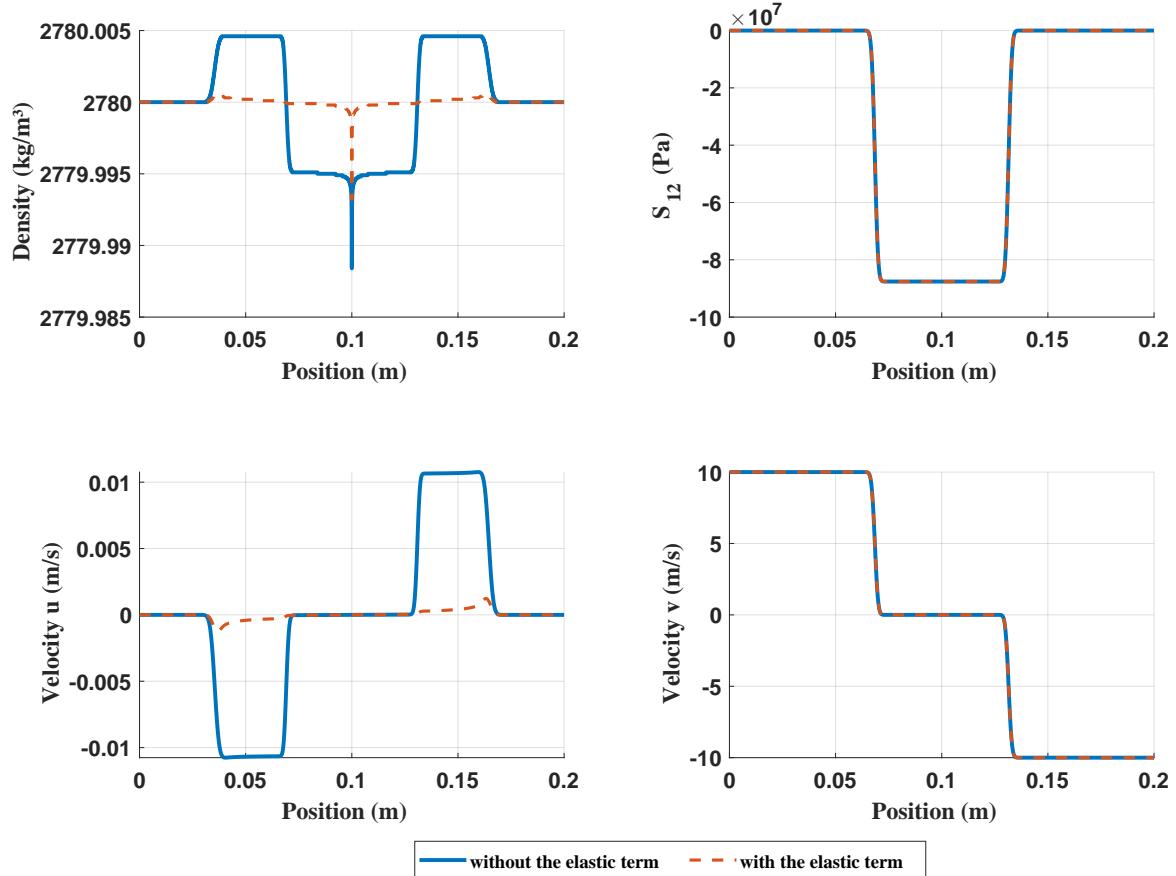


Рисунок 6 — Распределения параметров состояния двух моделей при  $10^{-5}$  с в случае сдвига алюминия. Начальные условия отличаются только скоростью  $v$ , которая составляет  $10 \text{ м/с}$  в левой части и  $-10 \text{ м/с}$  в правой.

Как показано на рисунке 7, когда разрыв в начальной скорости  $v$  достаточно велик для того, чтобы материал достиг пластического состояния, сдвиговые волны в обеих моделях перестают быть независимыми. Это отличается от ситуации, когда материал находится в упругом состоянии, где только сдвиговые волны в модели без упругого члена не являются независимыми. Волновая структура представляет собой сначала упругую продольную волну, затем упругую сдвиговую волну, а затем пластическую сдвиговую волну. На контактном разрыве скорость  $v$  является разрывной. Согласно соотношению Ранкина-Гюгониота для сохранения массы, скорость  $u$  должна быть непрерывной, хотя и в чрезвычайно узком диапазоне на рисунке 7.

Тем не менее, на контактном разрыве непрерывность скорости  $v$  зависит от величины разрыва в начальной скорости  $v$ , независимо от того, находится ли материал до сдвиговой волны уже в пластической стадии, как показано на рисунках 8 и 9.

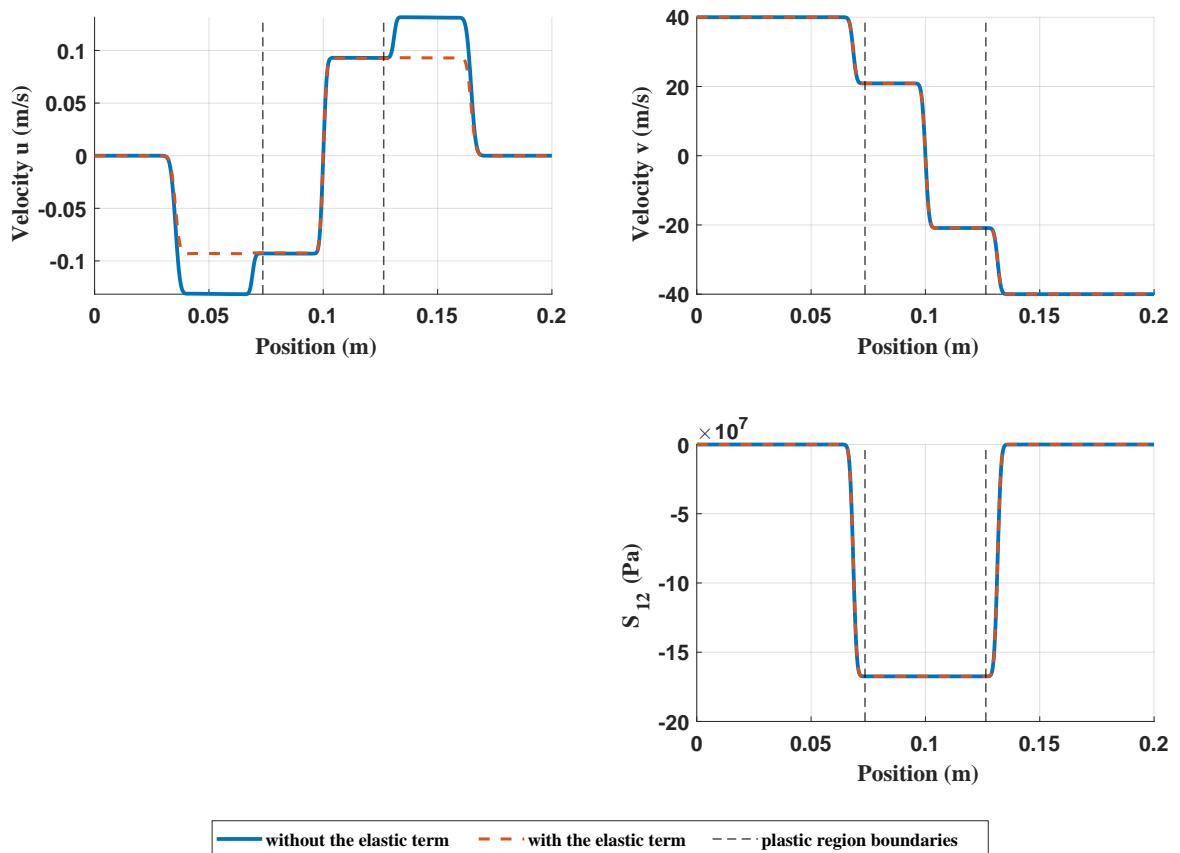


Рисунок 7 — Распределения параметров состояния двух моделей при  $10^{-5}$  с в случае сдвига алюминия. Начальные условия отличаются только скоростью  $v$ , которая составляет 40 м/с в левой части и -40 м/с в правой.

**В четвертой главе** предлагается модификация модели Уилкинса, которая обеспечивает безусловную термодинамическую согласованность (невозрастание энтропии). По первому закону термодинамики,

$$\delta q = de - \delta w, \quad (44)$$

где  $q$  и  $w$  — тепло и работа на единицу массы соответственно. Согласно второму закону термодинамики, для обратимых процессов, уравнение (44) может быть записано в виде,

$$de = Tds + dw, \quad (45)$$

где  $T$  — температура,  $s$  — энтропия. Обозначим  $S_{ij}S_{ij}$  через  $Q$ . По сравнению с уравнением (5) следует, что

$$de = Tds - pd\frac{1}{\rho} + \frac{1}{4\mu\rho}dQ. \quad (46)$$

Из уравнения (46) следует, что

$$\frac{\partial e}{\partial Q} = \frac{1}{4\mu\rho}. \quad (47)$$

Если рассматривать  $e$  как функцию плотности, энтропии и  $Q$ , то оно должно иметь вид

$$e = e_0(\rho, s) + \frac{Q}{4\mu\rho}. \quad (48)$$

Необходимым условием для того, чтобы  $de$  в уравнении (46) было точным дифференциалом (полным дифференциалом), является выполнение условия интегрируемости (смешанные частные производные равны), то есть,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(-p)}{\partial Q} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{4\mu\rho}\right)}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)} \\ \frac{\partial(-p)}{\partial s} &= \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)} \\ \frac{\partial\left(\frac{1}{4\mu\rho}\right)}{\partial s} &= \frac{\partial T}{\partial Q}. \end{aligned} \quad (49)$$

Уравнение (49) эквивалентно

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{v,s} &= \frac{1}{4\mu} \\ -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{v,Q} &= \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_{s,Q} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial Q}\right)_{v,s} &= 0, \end{aligned} \quad (50)$$

где  $v$  — удельный объем. Из первого уравнения следует, что если  $de$  является полным дифференциалом, то необходимо, чтобы  $p$  явно зависело от  $Q$ , то есть

$$p = \Pi(\rho, s) - \frac{Q}{4\mu}. \quad (51)$$

Это означает, термодинамическое давление  $\Pi$  не эквивалентно шаровому тензору напряжений  $p$ . Следовательно, для сохранения согласованности с обозначениями, использованными в предыдущих разделах, термодинамическая часть внутренней энергии  $e_0$  сокращенно называется внутренней энергией и по-прежнему обозначается символом  $e$ , а упругий член  $Q/(4\mu\rho)$  удаляется из состава внутренней энергии, что идентично уравнению (4). Уравнение состояния  $e(\rho, s)$  также должно быть функцией плотности и термодинамического давления,  $e(\rho, \Pi)$ . Поскольку модель Уилкинса (1) основана на законах сохранения и законе линейной упругости Гука, которые не изменяются, термодинамически согласованную модель может получить, просто заменив давление в (1) уравнением (51). Для случая одноосной деформации численные результаты очень близки к результатам, полученным с использованием двух предыдущих моделей. В разделе 4.2 с использованием теории волн Римана, а именно метода интегрирования по интегральной кривой в пространстве параметров состояния, доказано, что при сдвиге происходит продольная близость материала, что приводит к увеличению плотности.

## Заключение

Основные полученные результаты состоят в следующем:

1. В исходной модели Уилкинса используется полная энергия в виде, применяемой в гидродинамике, а именно сумма внутренней энергии и кинетической энергии. Однако в последние годы в литературе рекомендуется включать энергию сдвиговой упругой деформации в полную энергию без дополнительных объяснений. В данной работе используется последняя формула для полной энергии. Утверждается, что включение упругого члена в полную энергию не только отражает отличительные характеристики твердых тел по сравнению с жидкостями, но и дает возможность сдвиговым волнам в данной модели существовать независимо с математической и механической точки зрения.

2. На основе метода диффузной границы и усреднения по пространству создана неравновесная биматериальная модель упругого тела, которую можно рассматривать как аналог гидродинамической двухфазной модели Баера-Нунциато. Методом асимптотического анализа в предельном случае малых времен релаксации выведена равновесная односкоростная модель для течений гетерогенных упругих сред с разрешенными межфазными интерфейсами. В приближении одноосной деформации построенная модель совпадает с моделью, получаемой на основе принципа гидродинамической аналогии.

3. Разработан новый численный метод решения предложенной гипоупругой модели гетерогенных сред на фиксированной Эйлеровой сетке, основанный на консервативных вдоль пути в фазовом пространстве схемах (path-conservative schemes). Используя предложенный численный метод, проанализированы гомогенные и гетерогенные упругопластические течения в случае одноосной деформации. В этом случае численные результаты для двух моделей — одной с упругим членом в полной энергии и другой без него оказались очень близки. Исследовано различие между двумя моделями в общем случае, включающем сдвиговую деформацию. В частности показано, что, в модели, включающей упругие члены может существовать изолированная линейно-вырожденная сдвиговая волна, тогда как в модели без упругих членов сдвиговые волны нелинейные и обязательно сопровождаются возникновением продольных волн. Проведены численные исследования вопросов, не обсуждавшихся ранее в литературе, а именно упругопластические течения в расширенной одномерной модели. Показано, что материалы могут оставаться устойчивыми к сдвиговой деформации даже на пластической стадии. Непрерывность скорости  $v$  на контактном разрыве зависит от размера начальной скорости разрыва.

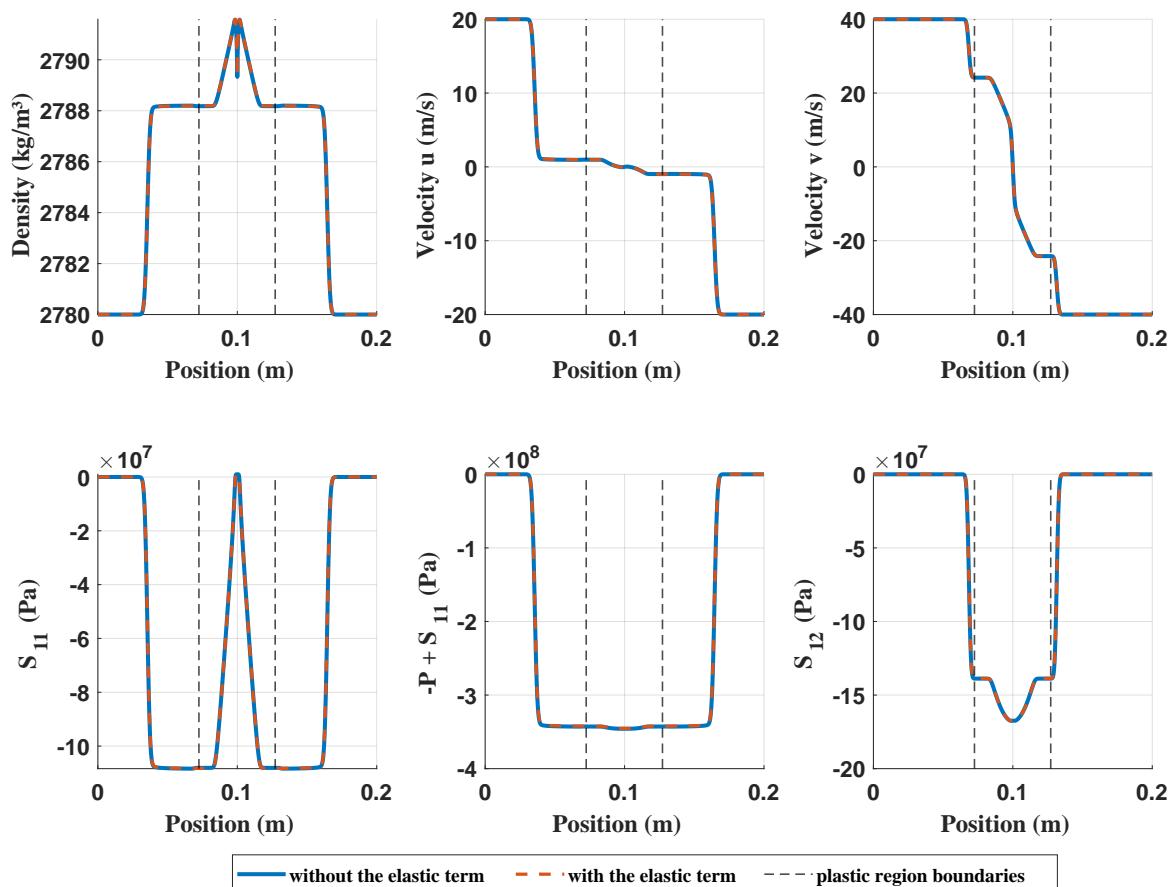


Рисунок 8 — Распределения параметров состояния двух моделей при  $10^{-5}$  с в общем случае с критерием пластичности. Материалы с обеих сторон представляют собой алюминий. Начальные условия отличаются только скоростями  $u$  и  $v$ , которые составляют 20 м/с, 40 м/с для левой стороны, и  $-20$  м/с,  $-40$  м/с для правой стороны, соответственно.

4. Обе модели Уилкинса, широко используемые в настоящее время, имеют свои недостатки, главным из которых является термодинамическая несогласованность. Исходя из предположения, что внутренняя энергия является функцией плотности, энтропии и второго инварианта девiatorного напряжения, делается вывод, что термодинамическое давление и механическое давление не являются идентичными физическими параметрами. На основе этого предложена новая термодинамически согласованная модель, и проанализированы ее отличия от предыдущих моделей.

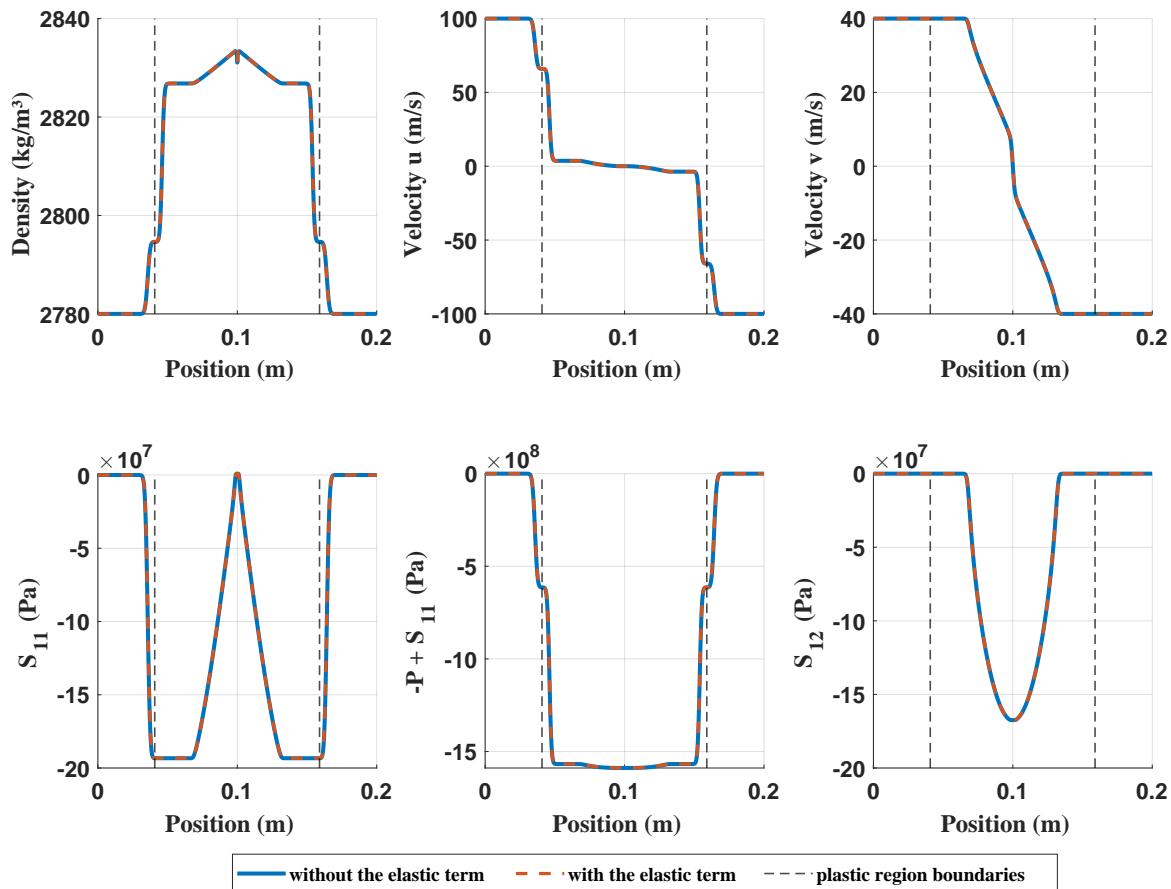


Рисунок 9 — Распределения параметров состояния двух моделей при  $10^{-5}$  с в общем случае с критерием пластичности. Материалы с обеих сторон представляют собой алюминий. Начальные условия отличаются только скоростями  $u$  и  $v$ , которые составляют 100 м/с, 40 м/с для левой стороны, и  $-100$  м/с,  $-40$  м/с для правой стороны, соответственно.

# **Публикации автора по теме диссертации**

**Научные статьи, опубликованные в изданиях,  
рекомендованных для защиты в диссертационном совете  
МГУ по специальности и отрасли наук:**

1. Ван Л., Меньшов И.С., Серёжкин А.А. Численное и аналитическое исследование ударно-волновых процессов в упругопластических средах // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2023. — Т. 63, № 10. — С. 1660-1673. EDN: FOZVKE. Импакт-фактор 0,68 (РИНЦ) [0.8 п.л. / 0.875 п.л.].

Автором предложен новый численный метод решения неконсервативной модели Уилкинса. Программная реализация, проведение численных экспериментов, и сравнение с теоретическим решением в случае одноосной деформации выполнены автором.

2. Wang L., Menshov I. S., Serezkin A. A. Numerical modelling of large elasto-plastic multi-material deformations on eulerian grids // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2024. — vol. 39, № 3. — pp. 165-174. EDN: YEDXQB. Импакт-фактор 0,6 (JIF) [0.6 п.л. / 0.625 п.л.].  
Автором выполнено обобщение гидродинамической модели Байера-Нунциато на упругопластические течения. Программная реализация, проведение численных экспериментов, и сравнение результатов с другими численными методами отслеживания границ выполнены автором.

3. Wang L., Menshov I. S., Serezkin A. A. One-dimensional model for multi-material hypoelastic medium // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2024. — vol. 16, № S2. — pp. S234-S249. EDN: PDGYJN. Импакт-фактор 0,306 (SJR) [0.9 п.л. / 1 п.л.].

Автором разработана одномерная эйлерова модель для многоматериальных гипоупругих сред на основе метода диффузной границы. Программная реализация, проведение численных экспериментов, и сравнение численных результатов предлагаемой модели с теоретическим решением задачи Римана для двух материалов с разрешенной границей выполнены автором.