

**ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Пряничникова Алексея Михайловича
на тему: «Полигоны с условиями на решетку конгруэнций»
по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика**

Актуальность избранной темы. Полигон над полугруппой – это множество, на котором действует полугруппа. Примеров полигонов много, так, произвольная полугруппа является полигоном над собой, универсальная алгебра – полигон над полугруппой ее эндоморфизмов, полумодуль над полукольцом – полигон над мультипликативной полугруппой этого полукольца (аналогично для модуля над кольцом). Одним из важных направлений теории полигонов является структурная теория полигонов, в частности, задача исследования полигонов с решеткой конгруэнций, удовлетворяющей каким-либо условиям. Этой тематике посвящена и рецензируемая диссертационная работа А.М. Пряничникова. Именно, изучаются полигоны, решетка конгруэнций которых дистрибутивна, или модулярна, или цепь, или удовлетворяет нетривиальному тождеству.

Исследования решетки конгруэнций алгебры и наоборот, исследование свойств алгебры при фиксированных свойствах решетки конгруэнций являются важными задачами общей алгебры. Известно, что решетка нормальных подгрупп любой группы модулярна, так же модулярны и решетка идеалов кольца (но не полукольца), и решетка подмодулей модуля над кольцом. Для полигонов над полугруппами даже модулярность выполняется далеко не всегда. Работ, в которых изучаются решетки конгруэнций на полигоне немного, отметим, что некоторые продвижения в этом направлении принадлежат А. А. Степановой, И. Б. Кожухову, их ученикам. Как правило, вопросы дистрибутивности, модулярности, линейной упорядоченности решетки полигона решались, когда на полугруппу или полигон над ней накладывались дополнительные ограничения (конечность,

простота полугруппы, полугруппа левых нулей и пр.). В работе А.М. Пряничникова продолжаются исследования полигонов над полугруппами в более общей ситуации. Таким образом, можно констатировать, что задачи, решаемые в диссертационном исследовании, являются нетривиальными и актуальными.

Общая характеристика работы. Диссертация изложена на 109 страницах, состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 45 источников.

Введение содержит обзор результатов предшественников по теме исследования, обуславливается актуальность и значимость работы, указываются цели и задачи, методы исследования, приводятся основные результаты.

В первой главе вводятся обозначения и основные понятия теории полигонов. Основным объектом изучения в главе являются полигоны над прямоугольными связками. Получены характеристики таких полигонов с модулярными, дистрибутивными, линейно упорядоченными решетками конгруэнций (теоремы 1.2 – 1.4). Результаты показывают тесную связь решеточных свойств с условиями конечности и связности полигона. Подтверждаются теоретические доказательства и написанной компьютерной программой, позволяющей построить полигон и проверяющей модулярность (дистрибутивность) ее решетки конгруэнций. Автором отмечено, что самый большой полигон с модулярной решеткой конгруэнций состоит из 11, а решетка конгруэнций на нем – из 300 элементов. Самостоятельный интерес имеют вспомогательные результаты главы, некоторые из них относятся к полигонам над произвольной полугруппой.

Во второй главе исследуется вопрос о строении полигонов, у которых в решетке конгруэнций выполняется нетривиальное тождество. Первый содержательный результат этой главы получен для полигонов над конечной полугруппой (теорема 2.1 и следствие 2.1). Далее рассматриваются полигоны

над вполне простой (вполне 0-простой) полугруппой. Это важные, наиболее изученные типы полугрупп, а с конечных вполне простых полугрупп фактически началось развитие теории полугрупп. Исследования ведутся (благодаря теореме Риса) с помощью рисовских матричных полугрупп. В следствии 2.2 теоремы 2.2 получена характеристика полигона над 0-простой полугруппой с условиями конечности как для группы, так и для множества индексов; и решетка конгруэнций удовлетворяет нетривиальному тождеству. Отметим, что полученные в теоремах 2.1 и 2.2 условия (как и в теоремах первой главы) связаны с конечностью полигона. Построены два нетривиальных примера бесконечных конгруэнц-простых (и поэтому их решетки конгруэнций удовлетворяют нетривиальному тождеству) полигонов над вполне простой и вполне 0-простой полугруппами (предложения 2.1 и 2.2). Во второй главе активно используются порядков и квазипорядок на полигонах, вводится понятие длины элемента и длины полигона (это позволяет проводить рассуждения по индукции), важным методом является установление соответствия между конгруэнцией на вполне простом полигоне и подгруппой (здесь рассматривается группа из конструкции рисовской матричной полугруппы).

В третьей главе рассматриваются полигоны над свободной циклической полугруппой – унары, дается их описание при наличии нетривиального тождества в его решетке конгруэнций. В главе определяются необходимые понятия, такие как узел, начальный, периодический элемент полигона, вводятся виды унаров: прямая, луч, цикл, цикл с хвостом. В теореме 3.1 доказывается, что если решетка конгруэнций унара удовлетворяет нетривиальному тождеству, то унар имеет конечное число компонент связности, конечное число начальных элементов и узлов и входная степень каждого элемента унара конечна (последнее условие связано с рассмотрением унара как направленного графа). Указанные свойства унара равносильны тому, что унар является гомоморфным образом копроизведения конечного числа прямых и лучей (теорема 3.2).

Четвертая глава, можно считать, затрагивает некоторые вопросы гомологической теории полигонов. Более точно, в главе дается описание плоских унаров и близких к ним. Отметим, что плоские полигоны над полугруппами практически не изучались, некоторые результаты можно найти в известной монографии Килпа, Кнауэра, Михалева А.В. Поэтому выбор унаров для исследования плоскостности оправдан, а полученные результаты вносят заметный вклад в развитие теории. В третьей и четвертой главах диссертации используется удачная геометрическая (или же в терминах графов) интерпретация, используемый геометрический язык способствует прозрачности полученных результатов. Это подкрепляется рисунками, которые также помогают лучшему пониманию текста.

В заключении диссертации напоминается об основных достижениях проведенных исследований.

Степень обоснованности положений, выносимых на защиту, научных выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность и новизна: диссертация носит теоретический характер. Определения введены строго, формулировки утверждений корректны, их доказательства верны и полны, что говорит о высокой степени обоснованности выносимых на защиту положений. Достоверность результатов обусловлена строгостью математических доказательств. Всего автором опубликовано 6 статей по теме диссертации. Все выносимые на защиту результаты являются новыми и опубликованы в рецензируемых математических журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Отмечу некоторые недостатки работы:

1) в формулировке леммы 2.6 вместо «конгруэнции» следует написать «некоторой конгруэнции»;

2) в предложении 2.1 единичную матрицу лучше обозначить не через I , поскольку этот символ используется автором для обозначения индексного множества рисовской матричной полугруппы, которая фигурирует в формулировке этого же утверждения;

3) опечатка в слове «изоморфных» в лемме 2.9; также в тексте диссертации замечены несколько ошибок пунктуационного характера;

4) в первой главе одним из основных параметров является множество $A = X \setminus XS$, в диссертации оно введено на с. 26. Но в автореферате оно явно не указано, что затрудняет понимание текста, например, в формулировке теоремы 1.2;

5) ссылку в автореферате лучше обозначать единообразно, а не использовать и «там же», и «ibid»;

6) В автореферате (с.6) и введении диссертации (с.6) приводится результат Кацова (2004 г.) о плоскостности полумодуля над полукольцом. Отмечу, что докторская диссертация Ильина С.Н. (2023 г.) посвящена изучению гомологических свойств полумодулей над полукольцами, в частности, Ильиным получено обобщение результата Кацова.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Пряничников Алексей Михайлович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук наук, доцент,
главный научный сотрудник
Института точных наук и информационных технологий
ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет
им. Питирима Сорокина»

ЧЕРМНЫХ Василий Владимирович

Подпись

Дата

Контактные данные:

тел.: , e-mail:

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Адрес места работы:

167001, г.Сыктывкар, Октябрьский пр-кт, д. 55, каб. 428
ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет им. Питирима
Сорокина», Институт точных наук и информационных технологий
Тел.: +7(8212) 390-308; e-mail: ssu@syktsu.ru

Подпись доктора физико-математических наук, доцента Института точных наук и
информационных технологий Сыктывкарского государственного университета
им. Питирима Сорокина Чермных В.В. удостоверяю: