

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И АНАЛИЗА
БОЛЬШИХ ДАННЫХ

На правах рукописи

Шашков Олег Владимирович
ПРОСТЫЕ ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ

1.1.5 – Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор С.В. Пчелинцев

Москва - 2026

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Предварительные сведения	19
1.1. Основные понятия	19
1.2. Теоремы Джекобсона о бипредставлениях простых альтернативных алгебр	23
1.3. Простые супералгебры	30
Глава 2. Простые супералгебры абелева типа	32
2.1. Супералгебры $B(A, \tau, \chi)$	32
2.2. Пирсовы разложения супералгебр	37
2.3. Структура простых супералгебр ёмкости ≥ 2 над алгебраически замкнутым полем	43
2.4. Супералгебры ёмкости 1	47
2.5. Строение абелевых супералгебр	52
2.6. Структура простых супералгебр, четная часть которых является полем	55
Глава 3. Простые супералгебры с ассоциативно-коммутативной чётной частью	64
3.1. Предварительные леммы и замечания	64
3.2. Пирсово разложение супералгебры B^+	65
3.3. Произведения компонент M_{ij} в супералгебре B	68
3.4. Ростки компонент	70
3.5. Структура 2-ростковой компоненты	74
3.6. Абелевость простых супералгебр	78
Глава 4. Супералгебры с полупростой сильно альтернативной четной частью	80
4.1. Предварительные обозначения и леммы	80
4.2. Ветвление супералгебр	83
4.3. Строение компоненты M_{11}	86
4.4. Строение компоненты M_{12}	96
4.5. WA-полупростые супералгебры	101

Глава 5. Супералгебры с сильно альтернативной четной частью	106
5.1. Супералгебры ёмкости 1	106
5.2. Основная теорема Веддерберна для супералгебр ёмкости 1	121
5.3. Супералгебры произвольной ёмкости	129
Глава 6. Правоальтернативные бимодули над простыми алгебрами	147
6.1. Бимодули над алгеброй Кэли—Диксона	147
6.2. Бимодули над алгебрами $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$	152
6.3. Симметрические и косые бимодули с одной йодановой компонентой	161
6.4. Косые бимодули	164
Глава 7. Простые супералгебры с полупростой четной частью	167
7.1. Простые супералгебры с четной частью M_2	167
7.2. Асимметричные дубли	176
7.3. Супералгебры с полупростой четной частью	180
7.4. Строение йордановой M_n -компоненты M_{11}	186
7.5. Йордановы компоненты емкости 2	191
7.6. Основная теорема	198
Глава 8. Автоморфизмы и дифференцирования простых унитарных супералгебр	200
8.1. Матричные представления, автоморфизмы и дифференцирования абелевых супералгебр	200
8.2. Специализация асимметричных дублей	203
8.3. Изоморфизм супералгебр $B_{4 4}(w)$ и $B_{4 4}(w')$	205
8.4. Автоморфизмы супералгебры $B_{4 4}(w)$	207
8.5. Чётные дифференцирования дубля $B_{4 4}(w)$	209
8.6. Нечётные дифференцирования	211
Глава 9. Простые супералгебры, четная часть которых содержит ниль-радикал	216
9.1. Простые унитарные супералгебры	216
9.2. Сингулярные супералгебры малой размерности	223
9.3. Сингулярные супералгебры размерности 5	225
9.4. Изоморфизмы супералгебр вида $B_{2 3}(\varphi, \xi, \psi)$	235

9.5. Сингулярные 6-мерные супералгебры с 3-мерной нечетной частью	238
9.6. Супералгебры, в которых существует такой $a \in A$, что выполнено $L_a^3 \neq 0$. . .	242
9.7. Супералгебры, в которых для любого $a \in A$ выполнено $L_a^3 = 0$	246
Заключение	252
Список сокращений и условных обозначений	254
Литература	255
Список публикаций	255
Цитированная литература	257

Введение

Общая характеристика работы. Работа посвящена исследованиям в области теории колец. В диссертации автор разработал новый метод построения простых конечномерных правоальтернативных супералгебр по их подсупералгебрам. Метод позволил провести классификацию простых унитарных и сингулярных супералгебр в широких классах супералгебр.

Актуальность темы. Проблема классификации простых алгебр является одной из центральных в структурной теории колец. В 1954 году А. А. Алберт [26] доказал, что всякая простая конечномерная правоальтернативная алгебра альтернативна. Замечательные результаты о бесконечномерных простых правоальтернативных алгебрах принадлежат И. М. Михееву [45] и В. Г. Скосырскому [60]: в [45] приведен пример простой правоальтернативной алгебры с тождеством $x^3 = 0$; в [60] доказано, что невырожденная правоальтернативная алгебра альтернативна, в частности, простая унитарная правоальтернативная алгебра альтернативна.

В последние полвека значительный интерес алгебраистов был связан с изучением супералгебр. Интерес к изучению супералгебр связан как с построением содержательной структурной теории, так и с применением супералгебр к решению трудных теоретико-кольцевых проблем. С одной стороны, активно изучаются простые супералгебры и их представления. С другой, супералгебры использовались при решении известных проблем.

Первое применение супералгебр в теории колец было указано в работах А. Р. Кемера [36, 37], посвященных положительному решению проблемы Шпехта.

Важные применения супералгебр в теории альтернативных и йордановых алгебр указаны в работах Е. И. Зельманова и И. П. Шестакова [31, 32] — решение проблемы Ширшова о разрешимости йордановой ниль-алгебры ограниченной степени и проблемы Жевлакова о нильпотентности радикала свободной альтернативной алгебры.

Использование супералгебр для построения контрпримеров указано в [56, 61, 78].

В теории йордановых и $(-1, 1)$ -алгебр важную роль играют супералгебры векторного типа $J(\Gamma, \delta)$ и $B(\Gamma, D, \gamma)$, введенные К. Маккриммоном [55] и И. П. Шестаковым [79]. В [64] указана связь супералгебр векторного типа с алгебрами Грассмана и первичными монстрами. В [30] указано применение супералгебр к изучению относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством Ли-нильпотентности степени 5 и 6.

В 1964 г. Ч. Т. К. Уолл [72] описал строение простых ассоциативных супералгебр, в частности, доказал, что всякая простая конечномерная ассоциативная унитарная супералгебра

A над алгебраически замкнутым полем изоморфна либо супералгебре $M_n[\sqrt{1}]$, либо $M_{m|n}$.

Простые супералгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 были классифицированы В. Г. Кацем [51, 52]. Детальному изложению теоремы Каца посвящена книга М. Шейнерта [69].

Простые йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 были классифицированы В. Г. Кацем [51] и И. Л. Кантором [38].

Первичные альтернативные супералгебры характеристики отличной от 2 и 3 описаны Е. И. Зельмановым и И. П. Шестаковым [32]. Простые альтернативные супералгебры произвольной характеристики описаны И. П. Шестаковым в [79]. Он же получил описание простых $(-1, 1)$ -супералгебр [80].

М. Расин и Е. Зельманов [65] классифицировали конечномерные простые йордановы супералгебры характеристики $\neq 2$ с полупростой четной частью. К. Мартинес и Е. Зельманов [54] дали описание конечномерных простых унитарных йордановых супералгебр, четная часть которых имеет ненулевой нильпотентный идеал. Простые йордановы супералгебры произвольной размерности с ассоциативной ниль-полупростой четной частью изучал В. Н. Желябин [75, 76]. В. Н. Желябин и И. П. Шестаков [77] в одном важном частном случае получили описание йордановых супералгебр абелева типа без каких-либо ограничений на размерность. Ими было доказано, что при некоторых ограничениях специальная йорданова супералгебра является центральным порядком в йордановой супералгебре векторного типа $J(\Gamma, \delta)$, где δ — ненулевое дифференцирование унитарной ассоциативно-коммутативной δ -простой алгебры Γ . А. П. Пожидаев и И. П. Шестаков [46, 47] описали простые конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры над полем характеристики нуль.

В 1993 г. Н. А. Писаренко [44] доказал, что для конечномерных альтернативных супералгебр при определенных ограничениях на типы простых компонент полупростой части справедлив аналог теоремы Веддербёрна об отщеплении радикала. Там же доказано, что всякая полупростая альтернативная супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2 и 3, разлагается в прямую сумму суперидеалов (градуированных идеалов), являющихся простыми супералгебрами.

Задача описания простых конечномерных правоальтернативных супералгебр была сформулирована И. П. Шестаковым в Днестровской тетради [63]. В [34] Д. П. Силва, Л. С. И. Мураками и И. П. Шестаковым были приведены первые примеры простых правоальтернативных супералгебр размерности 2, 5 и 8, четная часть которых является одной из алгебр: а) основное поле, б) 2-мерная алгебра с нулевым умножением, в) алгебра матриц 2-го порядка.

При изучении супералгебр естественным образом возникают бимодули. Понятия бимо-

дуля (бипредставления) для произвольного класса алгебр были введены С. Эйленбергом [40]. Наряду с ассоциативными алгебрами и алгебрами Ли теория бипредставлений была развита для других классов алгебр; так для альтернативных алгебр результаты получил Р. Д. Шафер [67], для йордановых алгебр Н. Свартхольм [70] и Н. Джекобсон [49], для алгебр Мальцева — Р. Карлссон [33] и Е. Н. Кузьмин [41]. Теория правых представлений правоальтернативных алгебр была разработана А. М. Слинко и И. П. Шестаковым [59]. Неприводимые правоальтернативные бимодули над алгеброй $M_2(\Phi)$ матриц 2-го порядка изучали Л. И. Мураками и И. П. Шестаков [57]. В [57] было доказано, что над алгеброй $M_2(\Phi)$ существует бесконечно много неизоморфных неприводимых правоальтернативных бимодулей и доказано, что не всякий бимодуль над алгеброй $M_2(\Phi)$ вполне приводим.

Изучение простых объектов тесно связано с их автоморфизмами и дифференцированиями, поэтому задача описания автоморфизмов, как и дифференцирований, простых алгебр и супералгебр представляет несомненный интерес (см. [29, 68]). В частности, простые исключительные алгебры Ли типа G_4 и типа F_2 возникали как алгебры дифференцирований алгебр Кэли—Диксона S (Картан—Джекобсон) и исключительных алгебр Алберта $H_3(C)$ (Шевалье—Шафер). Общие результаты в этом направлении принадлежат Дж. Титсу [71].

Цель работы. Основной целью работы является изучение простых конечномерных правоальтернативных супералгебр. Доказательство классификационных теорем, изучение автоморфизмов и дифференцирований простых супералгебр.

Основные результаты диссертации.

Лично автором получены следующие результаты:

1. Разработан метод ростков, который позволил расширить возможности метода пирсовских компонент. Доказано, что в случае порождения нечетной пирсовской компонентой ростка (т.е. идемпотента четной части) других пирсовских компонент, связанных с этим идемпотентом, в супералгебре нет [7, 12].
2. Разработан теоретико-графический процесс ветвления супералгебр. Доказана теорема о строении произвольной конечномерной правоальтернативной супералгебры с полупростой сильно альтернативной четной частью. Доказана теорема о полупростоте четной части простой конечномерной правоальтернативной супералгебры с сильно альтернативной четной частью [9, 12, 13].
3. Доказана теорема о строении произвольной конечномерной правоальтернативной супералгебры с сильно альтернативной четной частью ёмкости 1 [13–15].

В соавторстве с Пчелинцевым С. В. получены следующие результаты:

1. Доказана классификационная теорема о супералгебрах абелевого типа — о простых

конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебрах, нечетная часть которых является ассоциативным бимодулем над ассоциативно-коммутативной четной частью [1]. Результаты для случая полупростой четной части и алгебраически замкнутого основного поля получены лично автором, результаты для общего случая получены совместно;

2. Получена классификация простых супералгебр абелева типа бесконечной размерности, четная часть которых является полем (расширением основного поля) [2];

3. Дано полное описание всех простых конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебр с ассоциативно-коммутативной четной частью [7]. Лично автором разработаны результаты по представлению четного идемпотента в виде произведения нечетных элементов и свойства одно- и двухростковых компонент, остальные результаты получены совместно;

4. Получено полное описание строения произвольных конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебр с сильно альтернативной четной частью [9, 13–15]. В [9] автором впервые предложен метод, позволяющий по строению подсупералгебры делать вывод о строении самой супералгебры, разработан процесс ветвления, позволяющий строить не простые и неразложимые в сумму простых супералгебры, доказаны основные теоремы о строении произвольной (не обязательно простой) супералгебры с полупростой сильно альтернативной четной частью. В [13] доказано, что всякая простая супералгебра с сильно альтернативной четной частью имеет полупростую четную часть. Личные результаты автора опираются на совместные работы [4, 5];

5. Доказана основная классификационная теорема о простых конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебрах с полупростой четной частью [12]. В [12] параграф 3 написан совместно с Пчелинцевым С.В., остальные основные результаты работы получены автором;

6. Проведено полное изучение строения групп автоморфизмов и супералгебр дифференцирований построенных простых супералгебр [1, 11]. Результаты из работы [1] и пункт 3.1 статьи [11] получены совместно с Пчелинцевым С.В., остальная часть статьи [11] получена автором, опираясь на совместную работу [10];

7. Получены результаты о строении ниль-унитарных и сингулярных правоальтернативных супералгебр малых размерностей [3, 6, 8, 16]. Основные доказательства [3] и параграф 4 работы [8] написаны лично автором, остальные результаты получены совместно.

Все классифицированные объекты являются новыми и построенными при решающем участии автора.

Научная новизна. Новизна теоретических результатов, полученных в диссертации,

закljučается в следующем:

1. Указан новый класс супералгебр, названный супералгебрами абелева типа. В результате изучения конечномерных супералгебр этого класса было установлено, что в него входят не только известные ассоциативные и альтернативные простые супералгебры, но также и новые серии простых супералгебр, ранее не описанные в литературе. При этом полученные серии супералгебр вместе с ранее известными супералгебрами полностью исчерпывают объекты этого класса. Таким образом, была доказана классификационная теорема о супералгебрах абелевого типа — о простых конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебрах, нечетная часть которых является ассоциативным бимодулем над ассоциативно-коммутативной четной частью;

2. В рамках исследования простых супералгебр абелевого типа изучены бесконечномерные супералгебры, четная часть которых является полем. Построены новые серии супералгебр этого типа и доказано, что других таких супералгебр нет. Таким образом, была получена классификация простых супералгебр абелева типа бесконечной размерности, четная часть которых является полем (расширением основного поля);

3. При исследовании строения простых супералгебр с ассоциативно-коммутативной четной частью доказано, что все они исчерпываются супералгебрами абелевого типа. Тем самым получена полная классификация всех простых конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебр с ассоциативно-коммутативной четной частью;

4. При изучении конечномерных правоальтернативных супералгебр с полупростой сильно альтернативной четной частью впервые в истории исследования супералгебр такого класса удалось полностью описать строение произвольной (не простой) супералгебры. Был предложен новый процесс ветвления супералгебр и доказано, что всякая исследуемая супералгебра является прямой суммой простых абелевых супералгебр и некоторых их ветвлений;

5. Исследованы простые конечномерные супералгебры с простой и полупростой четной частью: определен новый класс супералгебр, названных асимметричными дублями; получены критерии простоты и правоальтернативности асимметричных дублей. Доказана основная классификационная теорема о простых конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебрах с полупростой четной частью: они исчерпываются супералгебрами абелевого типа и асимметричными дублями;

6. Проведено полное изучение строения групп автоморфизмов и супералгебр дифференцирований построенных простых супералгебр;

7. Получены результаты о строении ниль-унитарных и сингулярных правоальтернативных супералгебр малых размерностей.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для дальнейших исследований в теории супералгебр, а также при построении контрпримеров. Кроме того, они могут быть включены в программы спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в различных областях алгебры.

Методология и методы исследования. В работе применяются два основных метода исследования. Во-первых, изучается строение пирсовых компонент нечетной части и радикала четной части супералгебры по полной системе ортогональных идемпотентов. Во-вторых, исследуется строение мультипликативной обертывающей алгебры для присоединенной йордановой алгебры. Кроме того, применяются методы структурной теории алгебр, линейной алгебры и теории графов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Простые унитарные правоальтернативные конечномерные супералгебры абелевого типа над полем характеристики 0 имеют полупростую четную часть. Все простые унитарные правоальтернативные конечномерные супералгебры абелевого типа с полупростой четной частью исчерпываются сериями композиционных и циклических дублей.
2. Простые унитарные правоальтернативные конечномерные супералгебры с ассоциативно-коммутативной четной частью имеют абелев тип.
3. Унитарные правоальтернативные конечномерные супералгебры с полупростой сильно альтернативной четной частью распадаются в сумму простых супералгебр абелевого типа, их ветвлений и слабого аннулятора супералгебры.
4. Простые унитарные правоальтернативные, не альтернативные конечномерные супералгебры, четная часть которых — матрицы порядка 2, являются асимметричными дублями. Для асимметричных дублей имеется классификация изоморфизмов, автоморфизмов и дифференцирований.
5. Простые унитарные правоальтернативные конечномерные супералгебры с полупростой четной частью являются супералгебрами абелевого типа и асимметричными дублями.
6. Простые сингулярные супералгебры, размерности ≤ 6 исчерпываются построенным классом пятимерных супералгебр.

Степень достоверности. Все основные результаты диссертации являются оригинальными, обоснованными с помощью строгих математических доказательств и опубликованы как в международных, так и в российских рецензируемых журналах. Результаты других авторов, использованные в диссертации, снабжены соответствующими ссылками.

Апробация и доклады по теме диссертации. Основные результаты диссертации

докладывались на следующих конференциях.

1. XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, Россия, 2015 г.
2. XIV Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная 70-ти летию со дня рождения С.М. Воронина и Г.И. Архипова, Саратов, Россия, 2016 г.
3. Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, посвященная юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых, Казань, Россия, 2016 г.
4. Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, Россия, 21–25 ноября 2016 г.
5. Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, Россия, 20–23 ноября 2017 г.
6. Семинар «Lie and Jordan algebras and their Representations» в институте Математики и Статистики университета Сан-Пауло (Бразилия) 2018 г.
7. Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, Россия, 19–22 ноября 2018 г.
8. Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, Россия, 19–23 августа 2019 г.
9. Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры МГУ, 7 октября 2019 г.
10. Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, Россия, 20–24 сентября 2021 г.

Кроме того, результаты неоднократно докладывались на семинаре «Избранные вопросы алгебры» МГУ.

Публикации по теме диссертаци. Основные результаты диссертационной работы изложены в 16 работах общим объемом 18,55 п.л. (авторский объем 10,55 п.л.), которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты из списка

в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 9 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 260 страниц, из них 248 страниц текста, включая 2 рисунка. Библиография включает 79 наименований на 6 страницах.

Первая глава работы носит предварительный характер. В ней приводятся основные определения, доказываются несколько предварительных лемм, анализируется строение правых правоальтернативных модулей и йордановых бимодулей над простыми алгебрами, перечисляются известные примеры простых правоальтернативных супералгебр.

В главе 2 классифицированы центральные простые супералгебры абелева типа над полем характеристики нуль. Глава состоит из шести параграфов.

В § 2.1 приводятся критерии правой альтернативности, ассоциативности, простоты и центральности супералгебр вида $B(A, \tau, \chi)$. Кроме того, в этом параграфе вводятся основные центральные простые правоальтернативные супералгебры абелева типа:

- а) ω -дубль $B(A, \tau, R_\omega)$,
- б) композиционные дубли $B_{2|2}(\nu)$ и $B_{2|2}(\Gamma, *, \lambda, \mu)$,
- в) циклические дубли $B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$ и $B_{n|n}$.

В § 2.2 приводятся основные свойства пирсовых разложений супералгебры относительно полной ортогональной системы идемпотентов четной части. В частности, доказано, что нечетная часть является «циклической» относительно полной ортогональной системы идемпотентов четной части.

§§ 2.3–2.5 посвящены доказательству классификационных теорем. Сначала доказываются

Теорема 2.1. Пусть Φ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Если супералгебра $B = A \oplus M$ проста, то алгебра A полупроста.

Попутно доказана

Теорема 2.2. Супералгебра $B = A \oplus M$ над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики 0 изоморфна одной из супералгебр: $M_{1|1}(\Phi)$, $B_{2|2}(\nu)$, $B_{n|n}$ ($n \geq 1$).

В § 2.4 доказано, что если четная часть супералгебры B является полем, то B является либо ω -дублем, либо композиционным дублем.

В § 2.5 завершается доказательство основной теоремы

Теорема 2.3. Конечномерная центральная простая правоальтернативная супералгебра $B = A \oplus M$ абелева типа над полем Φ характеристики 0 изоморфна одной из следующих

супералгебр:

$$\Phi[\sqrt{1}], M_{1|1}(\Phi), B(\Gamma, *, \omega), B_{2|2}(\nu), B_{2|2}(\Gamma, *, \lambda, \mu), B\left(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i\right) \quad (n \geq 2),$$

где Γ — подходящее поле конечной степени над Φ .

В § 2.6 изучаются центральные простые унитарные правоальтернативные супералгебры $B = \Gamma \oplus M$ абелева типа произвольной размерности, у которых чётная часть Γ является полем. Доказано, что всякая такая супералгебра $B = \Gamma \oplus M$, за исключением супералгебры $B_{1|2}$, является дублем, т.е. нечетная часть представима в виде $M = \Gamma x$ для подходящего x .

Если порождающий элемент x коммутирует с чётной частью Γ , то B изоморфна скрученной супералгебре векторного типа $B(\Gamma, D, \gamma)$; если же x коммутирует с нечётной частью M , то B изоморфна ω -дублю $B(\Gamma, *, R_\omega)$.

Доказано также, что если основное поле алгебраически замкнуто, то B изоморфна одной из супералгебр $B_{1|2}$, $B(\Gamma, D, \gamma)$ или $B(\Gamma, *, R_\omega)$.

В главе 3 изучаются простые конечномерные правоальтернативные унитарные супералгебры над полем характеристики нуль. И доказываемся

Теорема 3.1. Пусть $B = A \oplus M$ — простая конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра над полем Φ характеристики 0. Если A — ассоциативно-коммутативная алгебра, то B является супералгеброй абелева типа.

Глава состоит из шести параграфов. Первые два параграфа носят предварительный характер; в них доказано несколько предварительных лемм о структуре супералгебры, в частности, доказаны простейшие свойства йордановых пирсовых компонент в правоальтернативной супералгебре. В § 3.3 обсуждается вопрос о представлении идемпотента в виде произведения нечетных элементов. В § 3.4 вводится понятие ростка йордановой компоненты, и доказываются две леммы о строении компонент, имеющих один или два ростка соответственно (всякая компонента имеет 1 или 2 ростка). В § 3.4 описана структура 1-ростковой компоненты. § 3.5 целиком посвящен описанию структуры 2-ростковой компоненты. В последнем § 3.6 завершается доказательство теоремы.

Глава 4 посвящена изучению конечномерных сильно альтернативных унитарных правоальтернативных супералгебр (*сильно альтернативной* называется супералгебра, являющаяся альтернативным бимодулем над четной частью). Кроме того, всюду в ней предполагается, что четная часть супералгебры полупроста, значит, по теореме Алберта альтернативна [26].

В главе вводится понятие слабого аннулятора супералгебры (см. п. 4.1.1) и доказываемся, что он является суперидеалом, а сама супералгебра является прямой суммой слабого аннулятора и супералгебры с нулевым слабым аннулятором (теорема 4.5). Кроме того, в

теореме 4.6 описана структура супералгебр с нулевым слабым аннулятором. Также описано строение супералгебр, в которых четная часть либо проста, либо является прямой суммой двух простых алгебр (теоремы 4.1–4.4). Оказалось, что таких супералгебр «на удивление мало»; в теореме 4.1 доказано, что всякая ассоциативная супералгебра с простой четной частью либо сама проста, либо *тривиально расщепляема*, т.е. произведение любых нечетных элементов равно 0.

Отметим, что результаты главы 4 представляют собой обобщение результатов главы 2, в частности, доказано следствие 4: всякая простая правоальтернативная супералгебра, являющаяся альтернативным бимодулем над полупростой альтернативной четной частью либо альтернативна, либо имеет абелев тип.

Глава 5 состоит из 3 параграфов. В § 5.1 положено начало описания *супералгебр ёмкости 1*, то есть таких супералгебр, четная часть которых содержит одно простое слагаемое в своем веддерберновском разложении. В частности, доказано, что если простая компонента четной части такой супералгебры является алгеброй Кэли—Диксона, то квадрат нечетной части содержится в радикале четной, следовательно супералгебра не может быть простой. Если же это простое слагаемое является алгеброй матриц порядка $n \geq 2$, то супералгебра является суммой простой супералгебры $S_{4|2}$ или $M_n[\sqrt{1}]$ и некоторого своего суперидеала. В § 5.2 доказано, что этот идеал нильпотентен:

Теорема 5.2. *Пусть $B = A \oplus M$ — правоальтернативная супералгебра с сильно альтернативной четной частью ёмкости 1 над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики не 2; S — простая конечномерная некоммутативная компонента алгебры A , причем единица алгебры S является единицей в B ; B — альтернативный унитарный бимодуль над A . Тогда $B = \check{B} \oplus \mathfrak{B}$, где $\check{B}$ — простая супералгебра, а $\mathfrak{B}$ — нильпотентный градуированный идеал супералгебры B .*

§ 5.3 состоит из 5 пунктов, сначала в нем указаны пирсовы разложения нечетной части и радикала четной части; доказана инвариантность этого радикала относительно почти-дифференцирований. Далее приводятся простейшие свойства произведений пирсовых компонент нечетной части и радикала четной части. Затем последовательно обсуждаются свойства произведений пирсовых компонент нечетной части. Более точно, доказывается, что произведения вида $M * \mathfrak{R} * M$ содержатся в $\mathfrak{R} = \text{Nil } A$. Завершается параграф доказательством основной теоремы.

Теорема 5.3. *Четная часть конечномерной простой правоальтернативной унитарной супералгебры над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики 0 полупроста в случае ее сильной альтернативности.*

В главе 6 изучаются унитарные правоальтернативные бимодули над простыми алгебрами (основное поле предполагается алгебраически замкнутым). Доказано, что всякий такой бимодуль над алгеброй Кэли—Диксона является прямой суммой регулярных бимодулей, в частности, он альтернативен. Для бимодулей над алгебрами матриц $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$, получены аналоги результатов Л. И. Мураками и И. П. Шестакова о структуре бимодулей над алгеброй $M_2(\Phi)$. Кроме того, построены примеры неприводимых неассоциативных бимодулей минимальной размерности над алгеброй $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$.

Глава состоит из четырех параграфов. В первом параграфе изучаются правоальтернативные бимодули над алгебрами Кэли—Диксона. Доказано, что всякий такой бимодуль альтернативен. В § 6.2 доказываются аналоги лемм Мураками—Шестакова о йордановых компонентах бимодуля над алгебрами матриц $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$. Отметим, что существенную роль при этом играет схема изучения правоальтернативных бимодулей, которую предложили Л. И. Мураками и И. П. Шестаков в [57]. Последние два параграфа посвящены поиску примеров неприводимых правоальтернативных бимодулей минимальной размерности. Результаты главы 6 используются далее для изучения структуры простых супералгебр.

В главе 7 завершается доказательство основной теоремы исследования о строении конечномерных простых унитарных правоальтернативных супералгебр с полупростой четной частью. Кроме того, в ней получен ряд результатов о строении супералгебр с простой четной частью. Глава состоит из шести параграфов.

В § 7.1 изучаются унитарные правоальтернативные супералгебры произвольной размерности с четной частью $M_2(\Phi)$, где Φ — основное поле. Опираясь на известные результаты Н. Свартхольма [70], Н. Джекобсона [50], А. М. Слинько и И. П. Шестакова [59], Л. И. Мураками и И. П. Шестакова [57], доказано, что если простая супералгебра неальтернативна, то нечетная часть является неприводимым 4-мерным бимодулем над четной частью; такие супералгебры мы называем асимметричными дублями. Над алгебраически замкнутым полем асимметричные дубли исчерпываются супералгебрами из [34].

В § 7.2 вводится понятие канонического базиса асимметричного дубля вида $V_{4|4}(w)$, зависящего от матрицы w с ненулевым следом, и указывается компактная запись умножения однородных элементов. Далее вводится общая конструкция построения дублей над M_2 , частным случаем которой являются дубли $V_{4|4}(w)$. Показано, что общий дубль является правоальтернативной супералгеброй и указан критерий её простоты.

§ 7.3 начинается с перечисления свойств йордановых компонент нечетной части. Далее вводится понятие йордановой неприводимой компоненты нечетной части и рассматриваются некоторые общие свойства таких компонент, принадлежащих собственному значению $\frac{1}{2}$.

В § 7.4 изучается строение йордановой M_n -компоненты M_{11} при $n \geq 3$, принадлежащей собственному значению 1, и доказывается

Теорема 7.2. *Пусть $B = A \oplus M$ — унитарная правоальтернативная супералгебра с полупростой четной частью, если $A_1 = M_n$ при $n \geq 3$, тогда либо $M_{11}^2 = 0$, либо $A_1 \oplus M_{11}$ является простой супералгеброй $M_n[\sqrt{1}]$.*

В качестве следствия из этой теоремы получено описание простых унитарных правоальтернативных супералгебр произвольной размерности с четной частью M_n при $n \geq 3$. Это ассоциативные супералгебры Уолла $M_n[\sqrt{1}]$.

В § 7.5 изучается строение йордановой компоненты нечетной части M_{12} , принадлежащей собственному значению $\frac{1}{2}$. Доказываются свойства этой компоненты в зависимости от вида простых компонент четной части A_1 и A_2 . В § 7.6 завершается доказательство основной теоремы исследования.

Теорема 7.3. *Простая конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра с полупростой четной частью является либо одной из супералгебр $M_{m|n}$, $M_n[\sqrt{1}]$, $B_{4|4}(w)$, $S_{4|2}$, либо одной из абелевых супералгебр $B_{1|2}$, $B_{n|n}$, $B_{2|2}(\nu)$.*

Глава 8 посвящена описанию групп автоморфизмов и супералгебр дифференцирований построенных простых унитарных супералгебр. В параграфе § 8.1 указаны матричные представления супералгебр $B_{2|2}(\nu)$ и $B_{2|2}$. Доказано также, что все супералгебры из теоремы 2.2 неизоморфны. Показано также, что группы автоморфизмов простых супералгебр абелевы (с этим обстоятельством и связано название «супералгебры абелева типа»). Кроме того, эти супералгебры не имеют ненулевых дифференцирований.

В § 8.2 указаны основные специализации асимметричных дублей $B_{4|4}(w)$ в зависимости от спектра определяющей матрицы w : жорданов, диагональный (в частности, исключительный и вырожденный) и обобщенно жорданов. § 8.3 посвящен решению проблемы изоморфизма асимметричных дублей. Две матрицы w и w' , имеющие ненулевые следы, назовем эквивалентными, если существуют такие скаляр $\varepsilon \in \Phi$ и матрица $s \in \mathrm{SL}_2$, что $w' = \varepsilon^2 s^{-1} w s$. Доказано, что дубли $B_{4|4}(w)$ и $B_{4|4}(w')$ изоморфны тогда и только тогда, когда матрицы w' и w эквивалентны (теорема 8.1).

В § 8.4 найдены группы автоморфизмов асимметричных дублей. Доказано, что группа автоморфизмов скалярного дубля $B_{4|4}(\lambda)$ является прямым произведением $U_2 \times \mathrm{SL}_2$; группы автоморфизмов всех других дублей абелевы (см. теорему 8.2).

В §§ 8.5, 8.6 вычислены супералгебры дифференцирований. Доказано, что алгебра четных дифференцирований скалярного дубля $B_{4|4}(\lambda)$ изоморфна $\mathfrak{sl}_2$; нечетные дифференцирования имеют только вырожденные дубли, супералгебры дифференцирований которых абелевы.

левы (см. теоремы 8.3 и 8.4).

Последняя глава 9 начинает новый этап исследования, в котором должны быть описаны простые правоальтернативные супералгебры, четная часть которых содержит ниль-радикал.

В § 9.1 рассматриваются супералгебры с унитарной четной частью над полем нулевой характеристики. Алгебра называется унитарной, если она получена внешним присоединением единицы к ниль-алгебре. Доказано, что всякая простая конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра с унитарной четной частью ассоциативна (теорема 9.1).

Супералгебру назовем *сингулярной*, если её чётная имеет нулевое умножение. В § 9.2 доказано, что не существует сингулярных супералгебр $B = A \oplus M$, в которых выполнено одно из ограничений: $\dim A = 1$ или $\dim M \leq 2$. Значит, наименьшая размерность простой сингулярной супералгебры равна 5.

В § 9.3 определяются супералгебры вида $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$ и доказывается

Теорема 9.2. *Всякая простая правоальтернативная сингулярная супералгебра размерности не выше 5 изоморфна супералгебре вида $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$.*

Схема доказательства этой теоремы такова. В силу известной леммы Алберта для любого четного a оператор L_a действует на нечетной части нильпотентно. Затем доказывается, что существует $a \in A$ такой, что $L_a^2 \neq 0$. Далее, можно подобрать элемент $b \in A$, не пропорциональный a , для которого операторы L_b и R_b вместе с операторами L_a и R_a имеют наиболее простой вид в подходящем базисе. После того как восстановлены умножения нечетных элементов на четные, удастся вычислить и произведения нечетных элементов. Тем самым, возникают супералгебры вида $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$.

В § 9.4 доказан следующий критерий

Теорема 9.3. *Простые супералгебры $B = B(\varphi, \xi, \psi)$ и $B' = B(\varphi', \xi', \psi')$ изоморфны тогда и только тогда, когда эквивалентны квадратичные формы, заданные матрицами*

$$\begin{pmatrix} \varphi & \xi \\ \xi & -\psi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \varphi' & \xi' \\ \xi' & -\psi' \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ простые супералгебры вида $B_{2|3}(p, 0, 1)$, где p — простое целое число, попарно неизоморфны, а также, что всякая простая правоальтернативная сингулярная супералгебра размерности не выше 5 над алгебраически замкнутым полем изоморфна супералгебре $B_{2|3}$.

В последних трех параграфах главы доказывается, что не существует простых сингулярных супералгебр размерности 6 (теорема 9.5). Сначала в § 9.5 доказано, что не существует 6-мерных сингулярных супералгебр с трехмерной четной частью (теорема 9.4).

§§ 9.6 и 9.7 завершают доказательство теоремы 9.5. Сначала в § 9.6 доказано, что не существует 6-мерных сингулярных супералгебр, в которых существует такой $a \in A$, что для оператора левого умножения L_a выполнено $L_a^3 \neq 0$. Случай $\dim A = 2$, $\dim M = 4$ и для любого $a \in A$ выполнено $L_a^3 = 0$ рассматривается в § 9.7.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1. Основные понятия

1.1.1. Линейные алгебры

Векторное пространство A над полем Φ называется *линейной алгеброй над полем Φ* , если в нем определена Φ -билинейная операция умножения $\cdot: A \times A \rightarrow A: (a, b) \mapsto ab$. Всюду в работе термин «алгебра» означает линейную алгебру над полем. Под характеристикой алгебры A понимается характеристика основного поля Φ : $\text{char } A = \text{char } \Phi$.

Как обычно, $[a, b] = ab - ba$ обозначает коммутатор элементов a, b ; $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ — ассоциатор элементов a, b, c ; а их йорданово произведение обозначается через $a \circ b = ab + ba$.

Если для любых элементов a и b Φ -алгебры A выполнено соотношение (тождество) $[a, b] = 0$, то алгебра называется *коммутативной*; если выполнено тождество $a \circ b = 0$, то — *антикоммутативной*; если $(a, b, c) = 0$, то — *ассоциативной*. Коммутативная алгебра, удовлетворяющая тождеству $(a^2, b, a) = 0$, называется *йордановой*.

Множество всех алгебр, удовлетворяющих некоторому списку тождеств, называется *многообразием алгебр*.

Алгебра называется *унитальной*, если она обладает нейтральным элементом по умножению, который называется *единицей* и обозначается символом 1 .

Подпространство I алгебры A называется *правым идеалом* этой алгебры, если оно устойчиво относительно умножения справа на элементы алгебры A , то есть для $i \in I$ и $a \in A$ выполнено $ia \in I$. Аналогично определяется и *левый идеал*. Под *идеалом* (обозначается $I \triangleleft A$) понимается множество, являющееся правым и левым идеалом одновременно.

1.1.2. Правоальтернативные алгебры

Следуя Альберту [25], алгебра над полем характеристики, отличной от 2, называется *правоальтернативной*, если она удовлетворяет тождеству:

$$(a, b, b) = 0.$$

Определяющее тождество правой альтернативности эквивалентно его линейаризации

$$(a, b, c) + (a, c, b) = 0,$$

$$(ab)c + (ac)b = a(b \circ c);$$

эти тождества, как и предыдущее, используется в дальнейшем без дополнительных пояснений.

Напомним основные тождества, выполняющиеся в произвольной правоальтернативной алгебре. Во-первых, в произвольной алгебре выполнены тождества [39]:

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b + (a, b, c) - (a, c, b) + (c, a, b), \quad (1.1)$$

$$[ab, c] + [bc, a] + [ca, b] = S(a, b, c), \quad (1.2)$$

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = S(a, b, c) - S(b, a, c), \quad (1.3)$$

$$(ab, c, d) - (a, bc, d) + (a, b, cd) = a(b, c, d) + (a, b, c)d, \quad (1.4)$$

где $S(a, b, c) = (a, b, c) + (b, c, a) + (c, a, b)$.

Далее, отметим простейшее следствие тождества правой альтернативности:

$$(a, b^2, c) = (a, b, b \circ c) \quad (1.5)$$

и тождества Клейнфелда [53]:

$$(ab, c, d) + (a, b, [c, d]) = a(b, c, d) + (a, c, d)b, \quad (1.6)$$

$$([a, b], c, d) + (a, b, [c, d]) - (b, a, [c, d]) = [a, (b, c, d)] + [(a, c, d), b]. \quad (1.7)$$

Далее, справедливы *правые тождества Муфанг* [39, 49]:

$$(a, c, cb) = (a, c, b)c, \quad (1.8)$$

$$(ac \cdot b)c = a(cb \cdot c), \quad (1.9)$$

$$(a, c, db) + (a, d, cb) = (a, c, b)d + (a, d, b)c, \quad (1.10)$$

Отметим ещё, что во всякой правоальтернативной алгебре справедливы тождества [39]

$$(a, x, y \circ z) + (a, y, z \circ x) + (a, z, x \circ y) = 0, \quad (1.11)$$

$$4(x, y, z)^+ = 2(y, z, x) + [y, [x, z]]. \quad (1.12)$$

Алгебра, антиизоморфная правоальтернативной, называется *левоальтернативной*. Алгебра называется *альтернативной*, если она правоальтернативна и левоальтернативна одновременно. Согласно теореме Артина алгебра альтернативна тогда и только тогда, когда

всякая её 2-порожденная подалгебра ассоциативна. Известно, что в альтернативной алгебре ассоциатор является кососимметрической (альтернативной) функцией своих аргументов (см. [39, 49]). По теореме Алберта [26] всякая конечномерная полупростая правоальтернативная алгебра альтернативна, значит, по теореме Цорна [73] является суммой идеалов, каждый из которых изоморфен либо матричной алгебре над основным полем, либо расщепляемой алгебре Кэли—Диксона (векторно-матричной алгебре Цорна).

Положим также $X * Y = XY + YX$, если одно из множеств X, Y является линейным пространством над основным полем. Через $\text{span } X$ обозначается подпространство, порожденное множеством X .

Пусть $A = (A; +, \cdot)$ — произвольная алгебра. Всюду ниже через $A^+ = \langle A; +, \cdot \rangle$ обозначается присоединенная алгебра относительно операции $a \cdot b = \frac{1}{2}a \circ b$, где ab обозначает произведение элементов a, b в алгебре A . Хорошо известно, что если алгебра A правоальтернативна, то A^+ — специальная йорданова [39].

1.1.3. Правоальтернативные супералгебры

Супералгеброй $B = B_0 \oplus B_1$ называется $\mathbb{Z}_2$ -градуированная алгебра, т.е. $B_i \cdot B_j \subseteq B_{i+j \pmod{2}}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное многообразие алгебр; $G = G_0 \oplus G_1$ — ассоциативная алгебра Грассмана с единицей 1, стандартной системой порождающих и стандартной градуировкой; супералгебра $B = B_0 \oplus B_1$ называется $\mathfrak{M}$ -супералгеброй, если ее грассманова оболочка $G(B) = B_0 \otimes G_0 \oplus B_1 \otimes G_1$ является $\mathfrak{M}$ -алгеброй [32].

Супералгебра $B = A \oplus M$ является *правоальтернативной* тогда и только тогда, когда для однородных элементов выполнено супертождество:

$$(p, q, r) + (-1)^{|q| \cdot |r|} (p, r, q) = 0, \quad (1.13)$$

где $|q|$ — чётность элемента $q \in A \cup M$, то есть $|q| = 0$, если $q \in A$ и $|q| = 1$, если $q \in M$.

Если $x, y \in M$, то из равенства (1.13) следует, что $(q, x, y) - (q, y, x) = 0$, т.е.

$$(qx)y = (qy)x + q[x, y].$$

Супералгебра с единицей называется *унитальной*. Идеал I супералгебры $B = A \oplus M$ называется *градуированным*, если $I = (I \cap A) \oplus (I \cap M)$. Супералгебра $B = A \oplus M$ называется *простой*, если $B^2 \neq 0$ и B не содержит собственных градуированных идеалов.

1.1.4. Центр супералгебры

Напомним, что множество $N_{\text{Comm}}(B) = \{n \in A \mid [n, B] = 0\}$ называется *коммутативным центром супералгебры* B ; $N_{\text{Ass}}(B) = \{n \in A \mid (n, B, B) = (B, n, B) = (B, B, n) = 0\}$ — *ассоциативным центром*, а $Z(B) = N_{\text{Comm}}(B) \cap N_{\text{Ass}}(B)$ называется *центром супералгебры* B . Унитарная супералгебра называется *центральной*, если ее центр совпадает с $\Phi \cdot 1$.

Предложение 1.1. *Центр простой унитарной супералгебры является полем.*

Доказательство. Пусть $B = A \oplus M$ — простая унитарная супералгебра, $0 \neq z \in Z(B)$, $p, q \in B$. Заметив, что $(zA + zM) * (A + M) \subseteq zA + zM$, получаем $zA + zM \triangleleft B$. Отсюда в силу простоты $zA = A$. В частности, $zt = 1$ для некоторого $t \in A$. Поскольку $0 = [1, p] = [zt, p] = z[t, p]$, откуда $[t, p] = 0$, т.е. $t \in N_{\text{Comm}}(B)$. Далее, используя основное ассоциаторное тождество (1.4), проверим, что $t \in N_{\text{Ass}}(B)$:

$$\begin{aligned} z(t, p, q) &= (zt, p, q) - (z, tp, q) + (z, t, pq) - (z, t, p)q = 0, \\ (pz, t, q) &= (p, zt, q) - (p, z, tq) + p(z, t, q) + (p, z, t)q = 0, \\ (p, q, t)z &= (pq, t, z) - (p, qt, z) + (p, q, tz) - p(q, t, z) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

1.1.5. Скалярные расширения

При изучении простых супералгебр часто возникает необходимость расширения основного поля до его алгебраического замыкания.

Предложение 1.2. *Пусть $B = A \oplus M$ — центральная простая супералгебра над полем Φ , Ω — расширение поля Φ . Тогда супералгебра $B_\Omega = B \otimes_\Phi \Omega$ является центральной простой над полем Ω .*

Доказательство. Доказательство вполне аналогично приведенному в [50, с. 165] для случая алгебр. Пусть $\bar{B} = B_\Omega = \bar{A} \oplus \bar{M}$. Тогда $\bar{A} = A \otimes_\Phi \Omega$ и $\bar{M} = M \otimes_\Phi \Omega$. Пусть $0 \neq U = U_0 \oplus U_1$ — идеал в $\bar{B}$, где $U_0 \subseteq \bar{A}$, $U_1 \subseteq \bar{M}$. Если $0 \neq u \in U_0 \cup U_1$, то запишем его в виде $u = \sum_i c_i \otimes \omega_i$, где $c_i \in A \cup M$, $\omega_i \in \Omega$ и ω_i линейно независимы над Φ , причем в указанном представлении все элементы c_i имеют одну четность. Назовем число ненулевых c_i в этом выражении *длиной* элемента u . Выберем элемент u наименьшей возможной длины. Далее, отождествим супералгебру B с Φ -подсупералгеброй $B \otimes 1$ алгебры $\bar{B}$ и в алгебре умножений $\text{Mult } \bar{B} = \text{alg}\langle R_a, L_b \mid a, b \in \bar{B} \rangle$ алгебры $\bar{B}$ рассмотрим Φ -подалгебру $B^* = \text{Mult}^{\bar{B}} B = \text{alg}\langle R_a, L_b \mid a, b \in B \rangle$, порожденную операторами умножения на элементы из B .

Если $0 \neq u \in U_1$, то, считая $c_1 \neq 0$, получаем в силу простоты B , что существует элемент $W_0 \in B^*$, такой что $c_1 W_0 = 1$. Тогда от элемента u можно перейти к элементу $u' \in U_0$ той же

длины, имеющему вид

$$u' = 1 \otimes \omega_1 + b_2 \otimes \omega_2 + \cdots + b_m \otimes \omega_m,$$

где $b_i \in A$.

Значит, для любого $a \in A$ верно

$$[u', a \otimes 1] = [b_2, a] \otimes \omega_2 + \cdots + [b_m, a] \otimes \omega_m.$$

Поскольку этот элемент принадлежит идеалу U и его длина меньше длины u , то

$$[b_2, a] \otimes \omega_2 + \cdots + [b_m, a] \otimes \omega_m = 0.$$

Так как элементы ω_i линейно независимы над Φ , то из свойств тензорного произведения следует, что $[b_i, a] = 0$ для $i = 2, \dots, m$ и произвольного $a \in A$. Значит, $b_i \in N_{\text{Comm}}(A)$ для $i = 2, \dots, m$. Аналогично рассматривая элемент $(u', a \otimes 1, b \otimes 1)_\sigma$, где σ — произвольная перестановка аргументов ассоциатора, получаем $b_i \in N_{\text{Ass}}(A)$ для $i = 2, \dots, m$. Значит, $b_i \in Z(A) = \Phi \cdot 1$ для $i = 2, \dots, m$. Записав теперь $b_i = \alpha_i \cdot 1$, $\alpha_i \in \Phi$, получим

$$u' = 1 \otimes \omega_1 + \alpha_2 \otimes \omega_2 + \cdots + \alpha_m \otimes \omega_m = 1 \otimes \omega$$

и $\omega \neq 0$ ввиду линейной независимости ω_i над Φ . Тогда $1 \in U$ и $U = \overline{B}$.

Пусть теперь элемент $z = \sum_i a_i \otimes \omega_i \in Z(\overline{B})$, где $a_i \in A$. Мы снова предполагаем, что ω_i линейно независимы над Φ . Значит, для любых $p, q \in B$ верно:

$$0 = [z, p \otimes 1] = \sum_i [a_i, p] \otimes \omega_i,$$

$$0 = (z, p \otimes 1, q \otimes 1)_\sigma = \sum_i (a_i, p, q)_\sigma \otimes \omega_i.$$

Отсюда следует, что $[a_i, p] = (a_i, p, q)_\sigma = 0$, т.е. $a_i \in Z(A) = \Phi \cdot 1$. Считая, что $a_i = \alpha_i \cdot 1$, $\alpha_i \in \Phi$, имеем $z = \sum_i a_i \otimes \omega_i = \sum_i \alpha_i \otimes \omega_i = 1 \otimes (\sum_i \alpha_i \omega_i) \in \Omega \cdot 1$, т.е. $Z(\overline{B}) \subseteq \Omega \cdot 1$. Обратное включение $\Omega \cdot 1 \subseteq Z(\overline{B})$ тривиально. $\square$

1.2. Теоремы Джекобсона о бипредставлениях простых альтернативных алгебр

Напомним теоремы Джекобсона об альтернативных бимодулях над простыми алгебрами [49]. На алгебре матриц $M_2 = M_2(\Phi)$ задана стандартная инволюция $\bar{a} = \text{tr } a \cdot 1 - a$:

$$\text{если } a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \text{ то } \bar{a} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

В частности, $\bar{e}_{11} = e_{22}$, $\bar{e}_{22} = e_{11}$, $\bar{e}_{12} = -e_{12}$, $\bar{e}_{21} = -e_{21}$.

Унитарный бимодуль M над M_2 называется *бимодулем Кэли*, если выполнено свойство $\bar{a}x = xa$ для любых $x \in M$ и $a \in M_2$. *Стандартным бимодулем Кэли* над алгеброй M_2 называется 2-мерное пространство C_2 с базисом m_1, m_2 и действием $\bar{e}_{ij}m_k = m_ke_{ij} = \delta_{kj}m_i$, где δ_{kj} — символ Кронекера. Известно, что всякий бимодуль Кэли является прямой суммой стандартных бимодулей Кэли.

Понятно, что в стандартном бимодуле выполнены очевидные соотношения:

$$e_{ij} \circ m_k = \delta_{ij}m_k.$$

Регулярным бимодулем $\text{Reg } M_2$ над алгеброй M_2 называется бимодуль $[M_2]$ с базисом $[e_{ij}]$ ($i, j = 1, 2$) и действием $e_{ij}[e_{kl}] = \delta_{jk}[e_{il}]$, $[e_{kl}]e_{ij} = \delta_{li}[e_{kj}]$. Известно, что всякий унитарный ассоциативный бимодуль над M_2 является прямой суммой регулярных бимодулей. Справедливы следующие две теоремы, доказанные Джекобсоном в [49].

Теорема 1.1. *Пусть A — унитарная ассоциативная алгебра. Тогда всякий унитарный альтернативный бимодуль над $M_n(A)$, $n \geq 3$, является ассоциативным. Любой альтернативный бимодуль над $M_2(\Phi)$ является прямой суммой ассоциативного бимодуля и бимодуля Кэли.*

И. П. Шестаков показал в [79], что ограничение конечномерности в теореме 1.1 не является существенным.

Теорема 1.2. *Пусть $C = C(\Phi)$ — алгебра Кэли-Диксона и пусть M является альтернативным бимодулем над C . Тогда $M = M_1 \oplus M_0$, где M_1 — унитарный подбимодуль, M_0 аннулируется с обеих сторон алгеброй C . Любой унитарный альтернативный бимодуль разлагается в прямую сумму подбимодулей, изоморфных регулярному C -бимодулю.*

1.2.1. Бимодули и бипредставления

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр. Общее понятие бимодуля M над алгеброй A в многообразии $\mathfrak{M}$ принадлежит С. Эйленбергу [40]. Допустим, что заданы отображения:

$$\lambda_a: M \rightarrow M: m \mapsto am, \quad \rho_a: M \rightarrow M: m \mapsto ma.$$

Предполагается, что композиции am , ma билинейны. Рассмотрим *расщепляемое нулевое расширение* $S = M \oplus A$, т.е. пространство относительно умножения:

$$(m_1 + a_1)(m_2 + a_2) = (m_1a_2 + a_1m_2) + a_1a_2.$$

Если $S \in \mathfrak{M}$, то говорят, что M является $\mathfrak{M}$ -бимодулем над алгеброй A .

Например, алгебра $S = M \oplus A$ ассоциативна тогда и только тогда, когда алгебра A ассоциативна и $(a_1, a_2, m) = (a_1, m, a_2) = (m, a_1, a_2) = 0$ для всех $a_1, a_2 \in A$, $m \in M$. Далее, M правоальтернативный бимодуль, если для всех $m \in M$ и $a_1, a_2 \in A$ выполнены равенства:

$$(m, a_1, a_2) + (m, a_2, a_1) = 0, \quad (a_1, m, a_2) + (a_1, a_2, m) = 0.$$

Пара отображений (λ_a, ρ_a) называется $\mathfrak{M}$ -бипредставлением алгебры A . Понятия бимодуля и бипредставления эквивалентны. Всякий бимодуль M над A является ассоциативным правым модулем над алгеброй (λ_A, ρ_A) , порожденной линейными отображениями λ_a, ρ_a , где $a \in A$. Более того, для всякой алгебры A из многообразия $\mathfrak{M}$ существует универсальная ассоциативная алгебра, обозначаемая $U_{\mathfrak{M}}(A)$, такая, что всякий $\mathfrak{M}$ -бимодуль над A является правым ассоциативным модулем над $U_{\mathfrak{M}}(A)$, и обратно, каждый правый ассоциативный модуль над $U_{\mathfrak{M}}(A)$ является $\mathfrak{M}$ -бимодулем над A . Алгебра $U_{\mathfrak{M}}(A)$ называется $\mathfrak{M}$ -мультипликативной обертывающей для A . Можно также рассматривать унитарную $\mathfrak{M}$ -мультипликативную обертывающую алгебру $U_{\mathfrak{M}}^1(A)$ для унитарной алгебры A ; имеется соответствие между унитарными $\mathfrak{M}$ -бимодулями над A и унитарными правыми ассоциативными модулями над $U_{\mathfrak{M}}^1(A)$.

Описание $\mathfrak{M}$ -мультипликативной обертывающей алгебры для A в произвольном многообразии $\mathfrak{M}$ представляет значительные трудности. Если A — конечномерная альтернативная или йорданова алгебра, то согласно [49, 67] мультипликативная обертывающая также конечномерна. С другой стороны, унитарная мультипликативная обертывающая для правоальтернативной алгебры $M_2(\Phi)$ обязательно бесконечномерна [57], поскольку существует бесконечно много не изоморфных неприводимых унитарных правоальтернативных бимодулей над $M_2(\Phi)$. Кроме того, в [57] доказано, что не всякий правоальтернативной $M_2(\Phi)$ -бимодуль вполне приводим.

1.2.2. Йордановы бимодули над алгеброй симметрической билинейной формы

В 1942 г. Н. Свартхольм [70] описал неприводимые унитарные представления йордановой алгебры невырожденной симметрической билинейной формы в случае алгебраически замкнутого основного поля.

Пусть $J = J(V, f) = \Phi \cdot 1 + V$ — йорданова алгебра невырожденной симметрической билинейной формы f на V , причем $n = \dim_{\Phi} V \geq 2$. Напомним, что умножение в алгебре $J(V, f)$ определяется равенствами

$$1.v = v, \quad v.w = f(v, w) \quad (v, w \in V).$$

Обозначим через $Cl(V, f)$ алгебру Клиффорда формы f . Хорошо известно, что $J(V, f)$ — специальная йорданова алгебра; $Cl(V, f)$ — универсальная ассоциативная обёртывающая для йордановой алгебры $J(V, f)$; мы считаем, что $J(V, f)$ вложена в $Cl(V, f)$. Если $v_1, v_2, \dots, v_n$ — ортогональный базис V , то слова

$$v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_s}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n,$$

вместе с единицей $v_\emptyset = 1$ образуют базис алгебры $Cl(V, f)$.

Нам необходимо описание неприводимых йордановых J -бимодулей только для двух значений $n = 3, 7$, поскольку присоединенные йордановы алгебры для матричной алгебры 2-го порядка и расщепляемой алгебры Кэли-Диксона, являются алгебрами симметрической билинейной формы на пространствах бесследных элементов размерности 3 и 7 соответственно.

Пусть $n = 2s - 1$ и число s четно. Введем дополнительный базисный элемент v_0 , считая его ортогональным к V ; положим $V' = \Phi v_0 + V$ и определим $f(v_0, v_0) = 1$. Рассмотрим алгебру $Cl(V, f)$ как подалгебру в алгебре $Cl(V')$.

Пусть $V^{(k)}$, $k = 0, \dots, s$, — подпространство, натянутое на векторы $v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_s}$, где i_j расположены в возрастающем порядке и имеют значения $1, \dots, s$. Тогда подпространства

$$\begin{aligned} W_1 &= V^{(0)} + V^{(1)}, & W_3 &= V^{(2)} + V^{(3)}, \dots, & W_{s-1} &= V^{(s-2)} + V^{(s-1)}, \\ W_0 &= v_0 V^{(0)}, & W_2 &= v_0 V^{(1)} + v_0 V^{(2)}, \dots, & W_s &= v_0 V^{(s-1)} + v_0 V^{(s)} \end{aligned}$$

являются J -бимодулями.

Если $(-1)^{[n/2]}\delta = c^2$, где δ — дискриминант формы $f(x, y)$, $c \in \Phi$, то пространство W_s разлагается в прямую сумму двух J -бимодулей $W_s = W_s(1 - c) \oplus W_s(1 + c)$.

Известно (см. [49]), что, если $(-1)^{[n/2]}\delta = c^2$, то указанные J -бимодули

$$W_0, W_1, \dots, W_{s-1}, \quad W_s(1 + c), W_s(1 - c)$$

исчерпывают список неприводимых унитарных йордановых J -бимодулей.

1.2.3. Йордановы бимодули над алгеброй $M_2(\Phi)^+$.

Алгебра $M_2(\Phi)^+$ является йорданова алгеброй $J(V, f) = \Phi \cdot 1 + V$ невырожденной симметрической билинейной формы, где $u_1 = e_{11} - e_{22}$, $u_2 = e_{12}$, $u_3 = e_{21}$, e_{ij} — матричные единицы, $V = \text{span}(u_1, u_2, u_3)$, $f(x, y) = -\frac{1}{2}f_0(x, y)$, где $f_0(x, y) = x\bar{y} + y\bar{x}$, через $\bar{a}$ обозначен образ матрицы a при инволюции, т.е. $\overline{\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \beta & -\gamma \\ -\delta & \alpha \end{pmatrix}$. Напомним, что $\text{tr}(a) = a + \bar{a} \in \Phi \cdot 1$. Если $x, y \in V$, то $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx) = -\frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) = f(x, y)$.

Тем самым, проверено, что $M_2(\Phi)^+ = J(V, f)$.

Далее, $u_1 \perp \text{span}(u_2, u_3)$. Положим $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 + u_3$, $v_3 = u_2 - u_3$. Легко проверить, что $v_2 \perp v_3$, т.е. v_1, v_2, v_3 — ортогональный базис в V . Кроме того,

$$\begin{aligned} f(v_1, v_1) &= -\frac{1}{2} \cdot 2v_1\overline{v_1} = (e_{11} - e_{22})^2 = 1, \\ f(v_2, v_2) &= f(u_2 + u_3, u_2 + u_3) = 2f(u_2, u_3) = \\ &= -(e_{12}\overline{e_{21}} + e_{21}\overline{e_{12}}) = e_{12}e_{21} + e_{21}e_{12} = 1, \\ f(v_3, v_3) &= f(u_2 - u_3, u_2 - u_3) = -2f(u_2, u_3) = -1. \end{aligned}$$

Следуя п. 1.2.2, укажем все неприводимые бимодули над алгеброй $J(V, f) = M_2(\Phi)^+$. Пусть $Cl(V')$ — алгебра Клиффорда над пространством $V' = \text{span}(v_i \mid i = 0, \dots, 3)$. Рассмотрим в ней подпространство $W_2 = \text{span}(v_0v_i, v_0v_jv_k \mid j < k; i, j, k = 1, 2, 3)$. Заметим, что $\dim_{\Phi} W_2 = 6$. Положим: $e_i = v_0v_i$, $g_{jk} = v_0v_jv_k$ ($j < k$). Тогда таблица умножения для бимодуля W_2 над $J(V, f)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} e_i \cdot v_i &= 0, & e_i \cdot v_j &= (-1)^{\text{inv}(i,j)} g_{ij} \ (i \neq j), \\ g_{ij} \cdot v_k &= 0 \ (\neq i, j, k), \\ g_{jk} \cdot v_j &= -\beta_j e_k, & g_{jk} \cdot v_k &= \beta_k e_j, \\ \beta_1 &= \beta_2 = 1, & \beta_3 &= -1. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Положим теперь $\sigma = v_1v_2v_3$. Заметим, что $\sigma = v_1v_2v_3$ — центральный элемент в алгебре $Cl(V)$ и выполнены равенства:

$$\begin{aligned} v_1\sigma &= v_2v_3, & v_1v_2\sigma &= -v_1v_1v_3 = -v_3, \\ v_2\sigma &= v_2v_1v_2v_3 = -v_1v_3, & v_1v_3\sigma &= -v_1v_1v_2 = -v_2, \\ v_3\sigma &= -v_1v_2, & v_2v_3\sigma &= -v_2v_1v_2 = v_1. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Кроме того, ясно, что $\sigma^2 = v_1v_2v_3\sigma = v_1^2 = 1$. Положим $\varepsilon^{\pm} = 1 \pm \sigma$; тогда $\frac{1}{2}\varepsilon^{\pm}$ являются центральными ортогональными идемпотентами в алгебре Клиффорда $Cl(V)$. Используя формулы (1.14) и (1.15) легко установить справедливость следующих двух лемм.

Лемма 1.1. Пусть $n_1 = e_1\varepsilon^+$, $n_2 = e_2\varepsilon^+$, $n_3 = e_3\varepsilon^+$. Тогда пространство $\text{span}(n_1, n_2, n_3)$ является йордановым бимодулем над алгеброй $M_2(\Phi)^+$ типа N , т.е. справедливы равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 \cdot e_{11} = n_1 \cdot e_{22} = n_2 \cdot e_{12} = -n_2 \cdot e_{21} = -n_3 \cdot e_{12} = -n_3 \cdot e_{21} = \frac{1}{2}n_1, \\ -n_1 \cdot e_{12} = n_2 \cdot e_{11} = n_3 \cdot e_{11} = \frac{1}{2}(n_2 + n_3), \\ n_1 \cdot e_{21} = n_2 \cdot e_{22} = -n_3 \cdot e_{22} = \frac{1}{2}(n_2 - n_3). \end{array} \right.$$

Лемма 1.2. Пусть $n_1 = e_1\varepsilon^-$, $n_2 = e_2\varepsilon^-$, $n_3 = e_3\varepsilon^-$. Тогда пространство $\text{span}(n_1, n_2, n_3)$ является йордановым бимодулем над алгеброй $M_2(\Phi)^+$ типа N' , т.е. справедливы равенства:

$$\begin{cases} n_1.e_{11} = n_1.e_{22} = -n_2.e_{12} = n_2.e_{21} = n_3.e_{12} = n_3.e_{21} = \frac{1}{2}n_1, \\ n_1.e_{12} = n_2.e_{22} = n_3.e_{22} = \frac{1}{2}(n_2 + n_3), \\ n_1.e_{21} = -n_2.e_{11} = n_3.e_{11} = \frac{1}{2}(n_3 - n_2). \end{cases}$$

Согласно [49, 57], существуют четыре неизоморфных неприводимых унитарных йордановых бимодуля над $M_2(\Phi)^+$, имеющих следующую структуру:

1. Φn с действием $n.e_{11} = n.e_{22} = \frac{1}{2}n$; $n.e_{12} = n.e_{21} = 0$;
2. $\text{Reg } M_2(\Phi)^+$;
3. бимодули типа N и N' , указанные в леммах 1.1 и 1.2.

Вычислим пирсову компоненту $N_1 = N_1(e_{11})$. Пусть $\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3 \in N_1$; тогда

$$\begin{aligned} \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3 &= (\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3).e_{11} = \\ &= \frac{1}{2}\alpha_1 n_1 + \frac{1}{2}\alpha_2(n_2 + n_3) + \frac{1}{2}\alpha_3(n_2 + n_3) = \\ &= \frac{1}{2}\alpha_1 n_1 + \frac{1}{2}\{(\alpha_2 + \alpha_3)n_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)n_3\}, \end{aligned}$$

откуда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_3$. Значит, $N_1 = \Phi(n_2 + n_3)$. Аналогично, $N_0 = \Phi(n_2 - n_3)$ и точно также проверяется равенство $N_{\frac{1}{2}} = \Phi n_1$.

1.2.4. Йордановы бимодули над алгебрами $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$

В 1954 г. Н. Джекобсон [49] получил описание всех представлений простых конечномерных унитарных йордановых алгебр, доказав при этом полную приводимость представлений полупростых йордановых алгебр. Структура неприводимых унитарных представлений йордановых матричных алгебр вида $M_n(\Phi)^+$, $n \geq 3$, указана в теореме.

Теорема 1.3. Пусть $A = M_n(\Phi)$ — алгебра матриц порядка $n \geq 3$. Допустим, что H и S — пространства симметрических и кососимметрических матриц из A соответственно, $a \mapsto a^t$ — транспонирование матриц. Тогда линейные преобразования

$$\begin{aligned} x &\mapsto xa + ax, & x \in A, a \in A, \\ x &\mapsto xa + a^t x, & x \in H, a \in A, \quad x \mapsto xa + a^t x, & x \in S, a \in A, \\ x &\mapsto ax + xa^t, & x \in H, a \in A, \quad x \mapsto ax + xa^t, & x \in S, a \in A, \end{aligned}$$

дают пять неприводимых унитарных йордановых представлений алгебры A^+ ; других неприводимых унитарных представлений алгебра A^+ не имеет.

1.2.5. Правые правоальтернативные модули над простыми алгебрами

Пусть A — правоальтернативная алгебра. Тогда алгебра A^+ с умножением $x.y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ йорданова. Пусть M — правоальтернативный бимодуль над A . Тогда мы имеем на нем две бимодульные структуры.

Если мы рассмотрим только правое действие A на M , то получим правоальтернативный правый модуль над A , т.е. $(m, a, a) = 0$ для всех $a \in A$ и $m \in M$. Этот модуль обозначим через M^R . Структура правых правоальтернативных модулей была описана в [59]. В частности, было доказано, что матричная алгебра $M_n(\Phi)$ имеет два неизоморфных неприводимых правых правоальтернативных модуля: I_n^r и I_n^l , где I_n^r изоморфен неприводимому ассоциативному правому модулю над $M_n(\Phi)$ и I_n^l изоморфен неприводимому ассоциативному левому модулю над $M_n(\Phi)$. Кроме того, было доказано, что правый $M_n(\Phi)$ -модуль вполне приводим. Неприводимый правый правоальтернативный модуль I_n^r порождается элементами $\{m'_1, \dots, m'_n\}$ и рассматривается относительно действия

$$m'_i e_{jk} = \delta_{ij} m'_k \quad (1 \leq i, j, k \leq n),$$

а I_n^l порождается $\{m_1, \dots, m_n\}$ и матрицы действуют по правилу

$$m_i e_{jk} = \delta_{ik} m_j \quad (1 \leq i, j, k \leq n).$$

Заметим, что при $n = 2$ эти модули альтернативны и изоморфны подмодулям регулярного бимодуля $\text{Reg } M_2(\Phi)$ и бимодуля Кэли $\text{Cay } M_2(\Phi)$ (см. [49]).

1.2.6. Три леммы Мураками-Шестакова о правоальтернативных M_2 -бимодулях

Кроме правого действия на бимодуле M рассмотрим еще одно действие; для любых $m \in M$ и $a \in A$ определим композицию $m.a = \frac{1}{2}(ma + am)$. В этом случае мы получаем йорданов модуль над A^+ . Этот модуль обозначим через M^J . Заметим, что если M — унитарный бимодуль, то также унитарны и бимодули M^R , M^J .

Запишем разложение правого правоальтернативного модуля M^R :

$$M^R = \bigoplus_{i=1}^{k_1} M_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{k_2} M'_j,$$

где $M_i \simeq I_2^r$ и $M'_j \simeq I_2^l$ для всех i и j .

Положим

$$M_r^R = \bigoplus_{i=1}^{k_1} M_i \quad \text{и} \quad M_l^R = \bigoplus_{j=1}^{k_2} M'_j.$$

Если рассмотрим йорданов модуль M^J , то

$$M^J \cong \bigoplus_{i=1}^{s_1} P_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{s_2} N_j \oplus \bigoplus_{k=1}^{s_3} N'_s \oplus \bigoplus_{l=1}^{s_4} A_l,$$

где $P_i \simeq \Phi$, N_j — бимодули типа N , N'_s — бимодули типа N' и $A_l \simeq M_2(\Phi)^+$. В [57] доказаны следующие предложения, которые мы называем леммами Мураками-Шестакова.

Лемма 1.3. *Если M^J имеет компоненты, изоморфные Φ или N , то эти компоненты содержатся в M_l^R .*

Лемма 1.4. *Бимодуль M^J не имеет компонент изоморфных N' .*

Лемма 1.5. *Если M^J имеет компоненту изоморфную $M_2(\Phi)^+$, то она изоморфна $M_2(\Phi)$.*

1.3. Простые супералгебры

Унитарная супералгебра называется *простой*, если она не имеет собственных градуированных идеалов и ее квадрат отличен от нуля. Если нечетная часть отлична от 0, то квадрат нечетной части также отличен от 0.

Перечислим основные примеры простых конечномерных правоальтернативных унитарных супералгебр.

1. *Простые ассоциативные супералгебры.* В 1964 г. Ч. Т. К. Уолл [72] доказал, что всякая простая конечномерная ассоциативная супералгебра изоморфна $M_{m|n}$ или $M_n[\sqrt{1}]$:

$$\begin{aligned} M_{m|n} &= A \oplus M \text{ и} \\ A &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a \in M_m, b \in M_n \right\}, \\ M &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in M_{m \times n}, y \in M_{n \times m} \right\}; \end{aligned}$$

$M_n[\sqrt{1}] = M_n \oplus M_n u$, где $u = \sqrt{1}$, т.е. $u^2 = 1$, и элемент u перестановочен с элементами из M_n .

2. *Простая альтернативная супералгебра $B_{1|2}$* (см. [79]). Пусть $\text{char } \Phi = 3$, $B_{1|2} = A \oplus M$ — супералгебра над Φ , у которой $A = \Phi \cdot 1$, $M = \Phi x + \Phi y$, где 1 — единица B и $x^2 = y^2 = 0$, $xy = -yx = 1$.

3. *Простая альтернативная супералгебра Шестакова $S_{4|2}$* (см. [79]). Пусть $\text{char } \Phi = 3$, $S_{4|2} = A \oplus M$ — супералгебра над Φ , $A = M_2$, $M = C_2 = \Phi t_1 + \Phi t_2$ — стандартный бимодуль Кэли с базисом t_1, t_2 и действием

$$\bar{e}_{ij} t_k = t_k e_{ij} = \delta_{kj} t_i,$$

где $\bar{e}_{11} = e_{22}$, $\bar{e}_{22} = e_{11}$, $\bar{e}_{12} = -e_{12}$, $\bar{e}_{21} = -e_{21}$; δ_{kj} — символ Кронекера.

Умножение на M определено равенствами

$$\bar{m}_i m_j = e_{ji},$$

где $\bar{m}_1 = m_2$, $\bar{m}_2 = -m_1$.

4. *Скрученная супералгебра векторного типа* $B(\Gamma, D, \gamma)$ (см. [79, 80]). Пусть Γ — унитарная ассоциативно-коммутативная алгебра над основным полем Φ ; $\bar{\Gamma}$ — ее копия (чертой обозначен изоморфизм линейных пространств). Элементы из пространства Γ считаются чётными, а из $\bar{\Gamma}$ — нечётными. Пусть D — ненулевое дифференцирование алгебры Γ и γ — фиксированный элемент из Γ . Тогда супералгебра $B(\Gamma, D, \gamma) = \Gamma \oplus \bar{\Gamma}$ с умножением

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot b = \overline{ab}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \gamma ab + 2a^D b + ab^D$$

называется *скрученной супералгеброй векторного типа*.

Супералгебры $B(\Gamma, D, \gamma)$ были введены И.П. Шестаковым [79, 80] при классификации простых альтернативных супералгебр и простых $(-1, 1)$ -супералгебр. Супералгебра $B(\Gamma, D, \gamma)$ является *строго $(-1, 1)$ -супералгеброй*, т.е. она правоальтернативна и удовлетворяет тождеству $[[x, y]_s, z]_s = 0$, где $[x, y]_s = xy - (-1)^{|x||y|}yx$ — суперкоммутатор однородных элементов x, y .

5. *Сингулярная 5-мерная супералгебра* $B_{2|3}$ (см. [34]). Напомним, что $B_{2|3} = A \oplus M$, где $A = \text{span}(a_1, a_2)$, $M = \text{span}(m_1, m_2, m_3)$ — линейные пространства, порожденные указанными элементами, и ненулевыми являются только следующие произведения базисных элементов:

$$\begin{array}{l} m_1 a_1 = -a_1 m_1 = m_3 a_2 = -a_2 m_3 = m_2, \\ a_1 m_2 = m_3, \quad a_2 m_2 = -m_1, \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} m_1 m_2 = a_1, \\ m_3 m_2 = a_2. \end{array} \right.$$

Заметим, что A — четная часть, а M — нечетная часть супералгебры $B_{2|3}$. Пусть R_a, L_a — операторы умножения на элемент a , $T \in \{R, L\}$, $T^M(A)$ — подалгебра в алгебре $\text{End}_{\Phi}(M)$, порожденная множеством $\{R_i, L_i \mid i = 1, 2, T_i = T_{a_i}\}$. Легко понять, что $T^M(A) \simeq M_3(\Phi)$, в частности, M — неприводимый A -бимодуль.

Глава 2

Простые супералгебры абелева типа

2.1. Супералгебры $B(A, \tau, \chi)$

Супералгебра $B = A \oplus M$ называется *супералгеброй абелева типа* (абелевой), если A ассоциативна и коммутативна, а M — ассоциативный A -бимодуль.

Примерами супералгебр абелева типа являются супералгебры чётного векторного типа $J(\Gamma, \delta)$ и $B(\Gamma, D, \gamma)$, где $\Gamma = \Gamma_0$ ассоциативна и коммутативна. Первая из них была введена К. Маккриммоном [55] и является йордановой, вторая — правоальтернативной и введена И. П. Шестаковым [79]. Известно [64], что грассмановы оболочки первичных йордановых супералгебр чётного векторного типа $J(\Gamma, \delta)$ над полем характеристики 0 имеют одни и те же идеалы тождеств; аналогичный результат верен и для чётных скрученных супералгебр $B(\Gamma, D, \gamma)$.

Определение. Пусть A — коммутативно-ассоциативная унитарная алгебра над полем Φ , τ — автоморфизм алгебры A , χ — ненулевой линейный оператор пространства A над Φ ; $[A]$ — линейная копия A . Обозначим через $B(A, \tau, \chi)$ супералгебру $B = B_0 \oplus B_1$, где $B_0 = A$, $B_1 = [A]$ и умножение однородных элементов которой задано правилами:

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot [b] = [ab], \quad [a] \cdot b = [ab^\tau], \quad [a] \cdot [b] = ab^\chi,$$

где ab означает произведение элементов a, b в алгебре A , a^τ — образ a при действии τ .

Простейшие примеры таких супералгебр — это ассоциативные супералгебры $B(\Phi, \text{Id}, \text{Id}) = \Phi[\sqrt{1}]$ и $B(\Phi^2, *, *) = M_{1|1}(\Phi)$, где Id — тождественное отображение.

Везде в этой главе по умолчанию считается, что характеристика основного поля Φ равна нулю.

2.1.1. Критерии правой альтернативности, простоты и центральности

Сначала докажем следующее

Предложение 2.1. а) $B(A, \tau, \chi)$ является супералгеброй абелева типа.

б) $B(A, \tau, \chi)$ правоальтернативна только, если для любых $a, b \in A$:

$$(a(b + b^\tau))^\chi = a^\chi(b + b^\tau), \quad (2.1)$$

$$(a^\chi b - ab^\chi)^\tau = -(a^\chi b - ab^\chi). \quad (2.2)$$

Доказательство. Вычислим ассоциаторы:

$$\begin{aligned}
(a, b, [c]) &= ab \cdot [c] - a[bc] = [abc] - [abc] = 0, \\
(a, [b], c) &= [ab]c - a[bc^\tau] = [abc^\tau] - [abc^\tau] = 0, \\
([a], b, c) &= [ab^\tau]c - [a] \cdot bc = [ab^\tau c^\tau] - [a(bc)^\tau] = 0, \\
(a, [b], [c]) &= [ab] \cdot [c] - a \cdot bc^x = abc^x - abc^x = 0, \\
([a], [b], c) &= ab^xc - [a] \cdot [bc^\tau] = ab^xc - a(bc^\tau)^x = a(b^xc - (bc^\tau)^x), \\
([a], c, [b]) &= [ac^\tau] \cdot [b] - [a] \cdot [cb] = ac^\tau b^x - a(bc)^x = a(c^\tau b^x - (bc)^x), \\
([a], [b], [c]) &= [ab^xc] - [a(bc^x)^\tau].
\end{aligned}$$

Теперь легко видеть, что справедливы пп. а) и б). □

Предложение 2.2. а) Если $B(A, \tau, \chi)$ — простая супералгебра, то A не имеет собственных (τ, χ) -инвариантных идеалов.

б) Допустим, что $1 \in A \cdot A^x$. Если алгебра A не имеет собственных (τ, χ) -инвариантных идеалов, то супералгебра $B(A, \tau, \chi)$ проста.

в) Если супералгебра $B(A, \tau, \chi)$ проста и τ, χ перестановочны, то $1 \in A \cdot A^x$.

Доказательство. а) Пусть $B = B(A, \tau, \chi)$ — простая супералгебра. Если $0 \neq I \triangleleft A$ и $I^\tau + I^x \subseteq I$, то $I + [I]$ — ненулевой идеал в B , значит, $I = A$.

б) Пусть A не имеет собственных (τ, χ) -инвариантных идеалов и $1 \in A \cdot A^x$. Рассмотрим $0 \neq I + [J] \triangleleft B$. Тогда $I \triangleleft A$ и $I + I^\tau \subseteq J$, поскольку $I[1] = [I]$ и $[1]I = [I^\tau]$.

Далее, $JA^x = [J][A] \subseteq I$, значит, $J = J \cdot 1 \subseteq JAA^x \subseteq JA^xA \subseteq IA \subseteq I$. Поскольку ранее было доказано включение $I \subseteq J$, то $I = J$, но тогда $I^\tau \subseteq I$.

Кроме того, $J^x \subseteq I$, поскольку $[1][J] = J^x$, т.е. $I^x \subseteq I$, значит, I является (τ, χ) -инвариантным идеалом.

Следовательно, $I = A$ и $I + [J] = A + [A] = B$, т.е. B — простая супералгебра.

в) Докажем, что $AA^x + [AA^x]$ — ненулевой идеал в B . Если $AA^x = 0$, то $[A] \triangleleft B$, что невозможно. Значит, $AA^x \neq 0$ и $AA^x + [AA^x] \neq 0$. Далее, $(AA^x)^x \subseteq A^x \subseteq AA^x$ и $(AA^x)^\tau = A^\tau A^{x\tau} = AA^{\tau x} = AA^x$, т.е. AA^x является ненулевым (τ, χ) -инвариантным идеалом. Тогда $AA^x + [AA^x]$ — ненулевой идеал в B , значит, $AA^x = A$, в частности, $1 \in AA^x$. □

Заметим, что супералгебра $B = B(A, \tau, \chi)$ может быть проста, но не правоальтернативна. Положим $\Phi = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Q}(\gamma)$, $\gamma^2 + \gamma + 1 = 0$, $\tau = \text{Id}$, $1^x = \gamma^x = 1$. В силу предложения 2.2 супералгебра B проста. Проверим, что тождество $(x, x, x) = 0$ не выполнено в грасмановой

оболочке $G(B)$. Допустим противное. Тогда, используя суперизацию тождества $(x, x, x) = 0$ и значения ассоциаторов, вычисленные в предложении 2.1, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= ([a], [b], c) + ([a], c, [b]) - ([b], c, [a]) - ([b], [a], c) = \\ &= a(b^xc - (bc^\tau)^x) + a(c^\tau b^x - (bc)^x) - b(c^\tau a^x - (ac)^x) - b(a^xc - (ac^\tau)^x). \end{aligned}$$

Поскольку $\tau = \text{Id}$, то

$$(ab^x - ba^x)c - a(bc)^x + b(ac)^x = 0.$$

Полагая $a = 1$, $b = c = \gamma$, получаем $(\gamma^x - \gamma)\gamma - (\gamma^2)^x + \gamma \cdot \gamma^x = 0$. Заметим, что $(\gamma^2)^x = -(\gamma + 1)^x = -2$. Значит, $0 = (1 - \gamma)\gamma + 2 + \gamma = 2\gamma + 2 - \gamma^2 = 3\gamma + 3$, противоречие.

Предложение 2.3. Простая супералгебра $B(A, \tau, \chi)$ ассоциативна тогда и только тогда, когда существует $g \in A$ такой, что $g = g^\tau$, $\tau^2 = \text{Id}$, $\chi = \tau R_g$.

Доказательство. Супералгебра $B(A, \tau, \chi)$ ассоциативна только, если для любых a, b, c : $([a], [b], c) = 0$, $([a], c, [b]) = 0$ и $([a], [b], [c]) = 0$, т.е. выполнены равенства

$$b^xc = (bc^\tau)^x, \quad b^xc^\tau = (bc)^x, \quad b^xc = (bc^x)^\tau. \quad (2.3)$$

Допустим, что выполнены равенства (2.3). Тогда, полагая $g = 1^x$, имеем

$$(c^\tau)^x = gc, \quad c^x = c^\tau g, \quad (c^x)^\tau = gc,$$

значит, $(c^\tau)^x = (c^x)^\tau$, т.е. τ и χ перестановочны и $c^x = c^\tau g$, $(c^x)^\tau = gc$. Из двух последних равенств следует $(c^\tau g)^\tau = gc$, значит, $c^{\tau^2} g^\tau = gc$. Так как $g^\tau = (1^x)^\tau = (1^\tau)^x = 1^x = g$, то $(c^{\tau^2} - c)g = 0$. Поскольку $1 \in AA^x$ по предложению 2.1, то $1 \in gA$, и, стало быть, $c^{\tau^2} - c = 0$, т.е. $\tau^2 = \text{Id}$. Кроме того, $c^x = c^\tau g$, значит, $\chi = \tau R_g$.

Обратно, если существует $g \in A$ такой, что $g^\tau = g$, $\chi = \tau R_g$, $\tau^2 = \text{Id}$, то

$$\begin{aligned} b^xc &= b^\tau gc, & (bc^\tau)^x &= (bc^\tau)^\tau g = b^\tau cg, \\ b^xc^\tau &= b^\tau gc^\tau, & (bc)^x &= (bc)^\tau g = b^\tau c^\tau g, \\ & & (bc^x)^\tau &= (bc^\tau g)^\tau = b^\tau cg. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает справедливость равенств (2.3). □

Лемма 2.1. Верно равенство $Z_0(B(A, \tau, \chi)) = \{a \in A \mid a^\tau = a, (ab)^x = ab^x\}$.

Доказательство. В самом деле, если $c \in Z_0(B(A, \tau, \chi))$, то выполнены равенства $0 = [[b], c] = [bc^\tau] - [bc] = [b(c^\tau - c)]$, т.е. $c^\tau = c$; $0 = ([a], [b], c) = a(b^xc - (bc^\tau)^x)$, т.е. $b^xc = (bc)^x$. □

2.1.2. Супералгебра $B(A, \tau, R_\omega)$

Супералгебра $B(A, \tau, R_\omega)$ получается из $B(A, \tau, \chi)$, если в качестве линейного оператора χ взять оператор R_ω правого умножения на элемент $\omega \in A$. Эту супералгебру $B(A, \tau, R_\omega)$ назовем ω -дублем алгебры A .

Супералгебру $B(A, \tau) := B(A, \tau, \text{Id})$ назовем *стандартным дублем* A .

Предложение 2.4. Пусть алгебра A является τ -простой и ω обратим в A . Тогда

- а) ω -дубль $B(A, \tau, R_\omega)$ является простой правоальтернативной супералгеброй;
- б) если $\tau \neq \text{Id}$, то супералгебра $B(A, \tau, R_\omega)$ неассоциативна;
- в) центр ω -дубля $B(A, \tau, R_\omega)$ совпадает с алгеброй τ -неподвижных элементов $\{a \in A \mid a^\tau = a\}$ алгебры A .

Доказательство. Пункт а) вытекает из предложений 2.1 и 2.2.

б) Заметим, что если $B(A, \tau, R_\omega)$ ассоциативна, то в силу (2.3) имеем $b^\chi c^\tau = (bc)^\chi$ и полагая $b = 1$, получаем $1^\chi c^\tau = c^\chi$. Поскольку $\chi = R_\omega$, то $\omega c^\tau = c\omega$, $c^\tau = c$, откуда $\tau = \text{Id}$, — противоречие.

Пункт в) немедленно вытекает из леммы 2.1. □

2.1.3. Циклический дубль $B_{n|n}$

Важный пример стандартного дубля — *циклический дубль* $B_{n|n}$. Пусть Φ^n — прямая сумма n экземпляров поля Φ . Если $a = (a_1, \dots, a_n)$, то положим $a^\tau = (a_2, \dots, a_n, a_1)$. Ясно, что τ — автоморфизм алгебры Φ^n порядка n . Положим

$$B_{n|n} = B(\Phi^n, \tau).$$

В силу предложения 2.4 циклический дубль $B_{n|n}$ является центральной простой правоальтернативной супералгеброй; $B_{n|n}$ ассоциативна только при $n = 1$.

2.1.4. Расщепляемый композиционный дубль $B_{2|2}(\nu)$

Пусть $\Phi^2 = \Phi e_1 \oplus \Phi e_2$ — расщепляемая композиционная алгебра над Φ с базисом $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ и стандартной инволюцией $*$: $(\alpha_1, \alpha_2)^* = (\alpha_2, \alpha_1)$. Обозначим через $B_{2|2}(\nu)$ супералгебру $B(\Phi^2, *, \chi)$, где $\nu \in \Phi$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \nu \end{pmatrix}$ — матрица оператора χ в базисе e_1, e_2 .

Предложение 2.5. Расщепляемый композиционный дубль $B_{2|2}(\nu)$ является центральной простой неассоциативной правоальтернативной супералгеброй.

Доказательство. Равенство (2.1) вытекает немедленно из линейности оператора χ , поскольку $b + b^* = (\beta_1, \beta_2) + (\beta_2, \beta_1) \in \Phi \cdot 1$. Для проверки равенства (2.2) сначала вычислим $a^\chi b$: $a^\chi b = (\alpha_1, \alpha_2)^\chi (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 \nu) (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_1, \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_2 \nu)$.

Значит, $a^\chi b - ab^\chi = (-\gamma, \gamma)$, где $\gamma = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$. Отсюда, очевидно, вытекает равенство (2.2).

Кроме того, если $a = (0, 1)$, то $a^\chi = (1, \nu)$, $1^\chi = (2, 1 + \nu)$ и $a^* \cdot 1^\chi = (1, 0)(2, 1 + \nu) = (2, 0)$, т.е. $a^\chi \neq a^* \cdot 1^\chi$, значит, на основании (2.3) супералгебра $B_{2|2}(\nu)$ неассоциативна.

Алгебра Φ^2 не имеет собственных $*$ -идеалов и $(1, 0)^\chi = (1, 1)$, значит, в силу предложения 2.2 супералгебра проста. Её центральность вытекает из леммы 2.1. $\square$

2.1.5. Нерасщепляемый композиционный дубль $B_{2|2}(\Gamma, *, \lambda, \mu)$

Пусть Γ — конечное расширение поля Φ и $*$ — автоморфизм Γ/Φ . Допустим, что существуют $\lambda, \mu \in \Gamma$ такие, что для оператора χ и произвольного $a \in \Gamma$ выполнено

$$a^\chi = \lambda a^* + \mu a. \quad (2.4)$$

Найдем условия, при которых $B = B(\Gamma, *, \chi)$ является центральной простой правоальтернативной супералгеброй, но не является ω -дублем. Заметим, что $*$ $\neq$ Id, иначе $a^\chi = (\lambda + \mu)a$ и B является $(\lambda + \mu)$ -дублем. Если $\lambda = 0$, то $a^\chi = \mu a$ и, значит, B изоморфна μ -дублю. Итак, можно считать, что

$$* \neq \text{Id}, \quad \lambda \neq 0. \quad (2.5)$$

В силу предложения 2.1 супералгебра B правоальтернативна только, когда выполнены равенства (2.1) и (2.2). Поскольку $(a(b + b^*))^\chi - a^\chi(b + b^*) = \lambda(a^*b^* + a^*b^{**}) + \mu(ab + ab^*) - (\lambda a^* + \mu a)(b + b^*) = \lambda(a^*b^* + a^*b^{**}) - \lambda a^*(b + b^*) = \lambda a^*(b^{**} - b)$, то ввиду (2.5) равенство (2.1) равносильно условию: $*$ — автоморфизм порядка 2.

Напомним, что в супералгебре B справедливы равенства

$$a[b] = [ab], \quad [a]b = [ab^*], \quad [a][b] = a(\lambda b^* + \mu b).$$

Пусть $\Delta = \{a \in \Gamma \mid a^* = a\}$ — поле инвариантов автоморфизма $*$. Покажем, что $\Delta \subseteq Z_0(B)$. В самом деле, если $a \in \Delta$, то $[[b], a] = [b]a - [ab] = [b(a^* - a)] = 0$ и $([b], [c], a) = [b][c]a - [b][ca] = b(\lambda c^* + \mu c)a - b(\lambda(ca)^* + \mu ca) = 0$. Значит, супералгебра B центральна только, если $\dim_\Phi \Gamma = 2$.

Преобразуем выражение: $a^\chi b - ab^\chi + (a^\chi b - ab^\chi)^* = \lambda a^*b + \mu ab - \lambda ab^* - \mu ab + (\lambda a^*b + \mu ab - \lambda ab^* - \mu ab)^* = \lambda a^*b - \lambda ab^* + (\lambda a^*b - \lambda ab^*)^* = \lambda a^*b - \lambda ab^* + \lambda^* ab^* - \lambda^* a^*b = (\lambda - \lambda^*)a^*b + (\lambda^* - \lambda)ab^* = (\lambda - \lambda^*)(a^*b - ab^*)$.

Значит, равенство (2.2) равносильно $(\lambda - \lambda^*)(a^*b - ab^*) = 0$. Поскольку $*$ $\neq$ Id, то при $b = 1$ имеем $a^*b - ab^* = a^* - a \neq 0$, значит, $\lambda^* = \lambda$, $\lambda \in \Phi$.

Супералгебру $B(\Gamma, *, \chi)$, для которой выполнены условия: Γ — поле, $\dim_{\Phi} \Gamma = 2$, $*$ $\neq$ Id и $a^{\chi} = \lambda a^* + \mu a$, назовем *нерасщепляемым композиционным дублем* и обозначим через $B_{2|2}(\Gamma, *, \lambda, \mu)$.

2.1.6. Циклический ω -дубль $B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$

Пусть $A = \Gamma^n = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_n$ — прямая сумма изоморфных полей и задан набор τ_i ($i = \overline{1, n}$) изоморфизмов: $\tau_1: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_n$, $\tau_{i+1}: \Gamma_{i+1} \rightarrow \Gamma_i$ ($i = \overline{1, n-1}$). Положим также $\tau = \sum_{i=1}^n \tau_i$, $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$, где $\omega_i \in \Gamma_i$. Если элемент ω обратим, то супералгебру $B(A, \tau, R_{\omega})$ назовем *циклическим ω -дублем* и обозначим через $B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$. В силу предложения 2.4 эта супералгебра правоальтернативна, но не ассоциативна, и является простой.

Предложение 2.6. *Циклический ω -дубль $B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$ централен тогда и только тогда, когда автоморфизм $\tau = \tau_1 \tau_n \tau_{n-1} \cdots \tau_2$ порождает группу $\text{Gal}(\Gamma/\Phi)$.*

Доказательство. Пусть $x = [b_1] + \cdots + [b_{n-1}] + [b_n]$ и $a = a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, где $a_i, b_i \in \Gamma_i$. Допустим, что $xa = ax$ для любого x . Тогда ввиду равенств $[b_1]a_2 = [b_1 a_2^{\tau_2}]$, $\dots$, $[b_{n-1}]a_n = [b_{n-1} a_n^{\tau_n}]$, $[b_n]a_1 = [b_n a_1^{\tau_1}]$, имеем $0 = ax - xa = [a_1 b_1 - b_1 a_2^{\tau_2}] + \cdots + [a_{n-1} b_{n-1} - b_{n-1} a_n^{\tau_n}] + [a_n b_n - b_n a_1^{\tau_1}]$, откуда, считая $b_i \neq 0$ ($i = \overline{1, n}$), получаем

$$a_1 = a_2^{\tau_2}, \dots, a_{n-1} = a_n^{\tau_n}, a_n = a_1^{\tau_1}. \quad (2.6)$$

Аналогично, если $(x, y, a) = 0$ для любого $y = [c_1] + \cdots + [c_{n-1}] + [c_n]$, то также справедливы равенства (2.6). Из этих равенств вытекает, что $a_1^{\tau_1 \tau_n \tau_{n-1} \cdots \tau_2} = a_1$, т.е. $a_1^{\tau} = a_1$. Таким образом, $a_1 \in \Phi e_1$, где e_1 — единица в Γ_1 , только при условии, что τ порождает группу $\text{Gal}(\Gamma/\Phi)$. Если же $a_1 = \alpha e_1$ для некоторого $\alpha \in \Phi$, то $a_n = a_1^{\tau_1} = \alpha e_n$, $a_{n-1} = a_n^{\tau_n} = \alpha e_{n-1}$, $\dots$, $a_2 = a_3^{\tau_3} = \alpha e_2$, т.е. $a = \alpha \cdot 1$. $\square$

2.2. Пирсовы разложения супералгебр

Пусть A — конечномерная коммутативно-ассоциативная Φ -алгебра. Тогда по теореме Веддербёрна $A = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_n \oplus \mathfrak{R}$ — прямая сумма простых алгебр, каждая из которых является алгеброй с делением (полем) над Φ , и радикала $\mathfrak{R} = \text{Nil } A$. Обозначим единицу алгебры Γ_i через e_i . Элементы $e_1, \dots, e_n$ образуют полную систему E ортогональных идемпотентов, т.е. $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$ ($i \neq j$), e_i не является суммой ортогональных идемпотентов, $e_1 + \cdots + e_n = 1$ — единица алгебры A .

Число n , как обычно, называется ёмкостью алгебры A (супералгебры B).

Ясно, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_n$, где

$$\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}e_i = \{r_i \in \mathfrak{R} \mid r_i e_i = r_i\}.$$

Аналогично, поскольку A -бимодуль M ассоциативен, то $M = \bigoplus_{ij} P_{ij}$, где

$$P_{ij} = e_i M e_j = \{x_{ij} \in M \mid e_i x_{ij} = x_{ij} e_j = x_{ij}\}.$$

Всюду ниже, если не оговорено противное, $r_i \in \mathfrak{R}_i$, $x_{ij} \in P_{ij}$.

Заметим, что если $k \neq i, j$, то $r_i e_k = e_k x_{ij} = x_{ij} e_k = 0$. Кроме того, если $a \in A$ и $a e_1 = a$, то $a = \alpha_1 e_1 + r_1$. В самом деле, пусть $a = \sum_i \alpha_i e_i + \sum_i r_i$; тогда $a e_1 = \alpha_1 e_1 + r_1$. Очевидно также: если $x \in M$ и $e_i x e_j = x$, то $x \in P_{ij}$.

2.2.1. Соотношения между компонентами P_{ij}

Заметим вначале, что из тождества Клейнфелда следует

Лемма 2.2. *В абелевой супералгебре выполнено свойство $(E, M, M) = 0$. Если $\text{char } \Phi = 0$, то $(\mathfrak{R}, M, M) \subseteq \mathfrak{R}$.*

Доказательство. В самом деле, из тождества Клейнфелда (1.6) вытекает, что отображение $R_{x,y}: a \mapsto (a, x, y)$ является дифференцированием алгебры A . Отсюда следуют утверждения леммы. $\square$

Лемма 2.3. *Выполнены свойства:*

- а) $P_{11}P_{ij} = P_{ij}P_{11} = 0$, если $(i, j) \neq (1, 1)$;
- б) $P_{12}P_{ij} = P_{ij}P_{12} = 0$, если $i, j \geq 2$;
- в) Если среди чисел i, j, k, l имеются три различных, то $P_{ij}P_{kl} = 0$.

Доказательство. а) Во-первых, по правой альтернативности $x_{11}x_{12} \cdot e_2 = x_{11}x_{12}$. Во-вторых, в силу леммы 2.2 и коммутативности алгебры A получаем $x_{11}x_{12} \cdot e_2 = e_2 \cdot x_{11}x_{12} = e_2 x_{11} \cdot x_{12} = 0$, значит, $x_{11}x_{12} = 0$, т.е. $P_{11}P_{1k} = 0$ ($k \neq 1$).

Далее, по правой альтернативности $x_{12}x_{11} \cdot e_1 = 2x_{12}x_{11}$, но так как собственными значениями оператора R_{e_1} могут быть только 0 и 1, то $x_{12}x_{11} = 0$. Таким образом, $P_{1k}P_{11} = 0$ ($k \neq 1$).

По правой альтернативности имеем $x_{21}x_{11} \cdot e_2 = 0$ и по лемме 2.2: $x_{21}x_{11} \cdot e_2 = e_2 \cdot x_{21}x_{11} = e_2 x_{21} \cdot x_{11} = x_{21}x_{11}$. То есть $x_{21}x_{11} = 0$ и $P_{k1}P_{11} = 0$ ($k \neq 1$).

Наконец, $x_{11}x_{21} = e_1 \cdot x_{11}x_{21} = x_{11}x_{21} \cdot e_1 = 0$.

б) Пусть $i, j \geq 2$. Тогда в силу леммы 2.2 и коммутативности алгебры A имеем $x_{12}x_{ij} = e_1 \cdot x_{12}x_{ij} = x_{12}x_{ij} \cdot e_1 = 0$ и $0 = e_1 \cdot x_{ij}x_{12} = x_{ij}x_{12} \cdot e_1 = x_{ij}x_{12}$.

в) Достаточно проверить, что нулевыми являются следующие произведения:

$$x_{12}x_{34}, \quad x_{11}x_{23}, \quad x_{12}x_{13}, \quad x_{12}x_{31}, \quad x_{12}x_{23}, \quad x_{12}x_{32}, \quad x_{12}x_{33}.$$

Равенства $x_{12}x_{34} = x_{12}x_{23} = x_{12}x_{32} = x_{12}x_{33} = 0$ следуют из п. б); $x_{11}x_{23} = 0$ ввиду п. а). Осталось проверить $x_{12}x_{13} = x_{12}x_{31} = 0$. Пусть $x \in \{x_{13}, x_{31}\}$; тогда имеем: $0 = e_2 \cdot x_{12}x = x_{12}x \cdot e_2 = -x_{12}x$, что и требовалось. $\square$

Легко видеть, что на основании леммы 2.2 справедлива следующая

Лемма 2.4. Пусть $M_1 = P_{11} + P_{12} + \dots + P_{1,n}$. Тогда

$$M_1M \subseteq \Phi e_1 + \mathfrak{R}_1 \quad \text{и} \quad (\Phi e_1 + R_1)M \subseteq M_1.$$

Лемма 2.5. Если $j, l \neq p$, то $x_{ij}x_{kl} \cdot x_{mp} = 0$.

Доказательство. По правой альтернативности верно равенство $(x_{ij}, x_{kl}, x_{mp}) = (x_{ij}, x_{mp}, x_{kl})$. Умножим обе его части справа на e_p . Так как $j \neq p$, то $x_{ija}e_p = x_{ije_p}a = 0$. Следовательно, $x_{ij}x_{kl} \cdot x_{mp}e_p = x_{ij}x_{mp} \cdot x_{kle_p}$. Учитывая, что $l \neq p$, получаем $x_{ij}x_{kl} \cdot x_{mp}e_p = 0$, и, стало быть, верно требуемое — $x_{ij}x_{kl} \cdot x_{mp} = 0$. $\square$

2.2.2. Совместимость компонент P_{ij}

Всюду далее в этом параграфе Φ — алгебраически замкнутое поле, значит, $\Gamma_i = \Phi e_i$.

Лемма 2.6. Хотя бы одна из компонент P_{12}, P_{13} должна быть нулевой.

Доказательство. Допустим от противного, что $P_{12}, P_{13} \neq 0$ и рассмотрим подпространство $M_1 = P_{11} + P_{12} + \dots + P_{1,n}$.

Докажем, что $M_1M \subseteq \mathfrak{R}_1$. Отметим, что если $i \neq j$, то $P_{1i}P_{1j} = 0$ по лемме 2.3 в).

Пусть $x_{13} \neq 0$, $x, y \in P_{11} \cup P_{12}$. Тогда $xy \cdot x_{13} = 0$ по лемме 2.5. Далее, ввиду леммы 2.4 $xy = \alpha_1 e_1 + r_1$ для подходящих $\alpha_1 \in \Phi$ и $r_1 \in \mathfrak{R}_1$.

Если $\alpha_1 \neq 0$, то $x_{13} = rx_{13}$, где $r \in \mathfrak{R}_1$. Тогда $x_{13} = rx_{13} = r^2x_{13} = \dots = r^Nx_{13}$. Отсюда ввиду нильпотентности элемента r следует, что $x_{13} = 0$, — противоречие. Значит, $\alpha_1 = 0$ и можно утверждать, что для любых i, j : $P_{1i}P_{1j} + P_{1i}P_{j1} \subseteq \mathfrak{R}_1$, т.е. $M_1M \subseteq \mathfrak{R}_1$.

В силу леммы 2.4: $M_iM \subseteq \Phi e_i + \mathfrak{R}_i$ ($i \geq 2$). Следовательно, $M^2 \subseteq I$, где $I = \Phi e_2 + \dots + \Phi e_n + \mathfrak{R}$. Поскольку I — идеал A , то $I + M$ — собственный идеал супералгебры B , — противоречие. $\square$

Лемма 2.7. Если $P_{12} \neq 0$ и $P_{21} \neq 0$, то $P_{ij} = 0$ ($i \geq 3$).

Доказательство. Положим

$$I = \Phi e_3 + \dots + \Phi e_n + \mathfrak{R}_3 + \dots + \mathfrak{R}_n, \quad M' = M_3 + \dots + M_n.$$

Докажем, что $I + M'$ — собственный идеал супералгебры B .

1°: I — идеал A , поскольку $\mathfrak{R}_i A \subseteq \mathfrak{R}_i$.

2°: $AM' + M'A \subseteq M'$, поскольку $e_i M_j + \mathfrak{R}_i M_j \subseteq \delta_{ij} M_j$ и $M_i A \subseteq M_i$.

3°: $M'M \subseteq I$, так как $M_i M \subseteq I$ ($i \geq 3$).

4°: $MM' \subseteq I$. Достаточно проверить, что $MM_3 \subseteq I$. Имеем $(P_{11} + P_{12})P_{3i} = 0$ и $(P_{21} + P_{22})P_{3i} = 0$ по лемме 2.3, значит, $(M_1 + M_2)M_3 = 0$, поскольку $M_1 = P_{11} + P_{12}$, $M_2 = P_{21} + P_{22}$ в силу леммы 2.6.

5°: $IM \subseteq M'$, $MI \subseteq M'$. Первое включение верно в силу леммы 2.4. Докажем второе включение. При $k \geq 3$ справедливы следующие соотношения:

$$M_1 e_k = (P_{11} + P_{12})e_k = 0,$$

$$M_1 \mathfrak{R}_k = (P_{11} + P_{12})\mathfrak{R}_k = (P_{11} + P_{12})e_k \mathfrak{R}_k = 0,$$

аналогично, $M_2 e_k = M_2 \mathfrak{R}_k = 0$. □

Лемма 2.8. Если $P_{12} \neq 0$ и $P_{21} \neq 0$, то $n = 2$ и $M = P_{12} + P_{21}$.

Доказательство. В силу лемм 2.6 и 2.7 для n возможно единственное значение $n = 2$ и достаточно понять, что $P_{11} = 0$. От противного, пусть существует элемент $x_{11} \neq 0$. Выберем также $x_{12} \neq 0$. На основании леммы 2.3 а) по правой альтернативности имеем $y_{12} z_{21} \cdot x_{11} = y_{11} z_{11} \cdot x_{12} = y_{12} z_{12} \cdot x_{11} = 0$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 2.6, отсюда легко вывести, что

$$y_{11} z_{11}, y_{12} z_{12}, y_{12} z_{21} \in \mathfrak{R}_1. \quad (2.7)$$

Например, проверим, что $y_{12} z_{21} \in \mathfrak{R}_1$. Пусть $y_{12} z_{21} = \alpha e_1 + r_1$ и $\alpha \neq 0$; тогда $x_{11} = r x_{11}$, где $r \in \mathfrak{R}_1$ и $x_{11} = r x_{11} = r^2 x_{11} = \dots = r^N x_{11} = 0$ ввиду нильпотентности элемента r , — противоречие.

Положим $I = \Phi e_2 + \mathfrak{R}$, и покажем, что $I + M$ — собственный идеал супералгебры B . Поскольку I — идеал A , то достаточно понять, что $M^2 \subseteq I$. Ясно, что $M_2 M \subseteq I$. Проверим, что $M_1 M \subseteq I$. Поскольку ввиду леммы 2.3 а): $P_{11} P_{ij} = 0$, если $(i, j) \neq (1, 1)$, и $P_{12} P_{ii} = 0$, если $i = 1, 2$, то осталось проверить соотношения $P_{11} P_{11}, P_{12} P_{12}, P_{12} P_{21} \subseteq \mathfrak{R}_1$. Однако, эти соотношения следуют из (2.7). Итак, доказано, что $I + M$ — собственный идеал B , — противоречие. □

Лемма 2.9. *Хотя бы одна из компонент P_{21} , P_{11} , P_{13} равна нулю.*

Доказательство. Допустим, что P_{21} , P_{11} , P_{13} отличны от 0. Тогда по лемме 2.6

$$M_1 = P_{11} + P_{13}.$$

Покажем, что $P_{1k}P_{1l} + P_{1k}P_{l1} \subseteq \mathfrak{R}_1$ для любых k, l .

Заметим, что $x_{11}y_{11} \cdot x_{13} = 0$ по лемме 2.5, следовательно, $P_{11}^2 \subseteq \mathfrak{R}_1$. Поскольку $P_{11}P_{1k} = P_{11}P_{k1} = P_{1k}P_{11} = P_{k1}P_{11} = 0$ ($k \geq 2$) в силу леммы 2.3 а), то можно считать, что $k, l \geq 2$ и рассмотреть элемент $x_{1k}x'$, где $x' \in P_{1l} + P_{l1}$. По правой альтернативности имеем $(x_{1k}x')x_{11} = 0$. Отсюда получаем, что $x_{1k}x' \in \mathfrak{R}_1$, т.е. $P_{1k}P_{1l} + P_{1k}P_{l1} \subseteq \mathfrak{R}_1$.

Положим $I = \Phi e_2 + \dots + \Phi e_n + \mathfrak{R}$ — идеал A . Докажем, что $M^2 \subseteq I$.

1°. $M_2M \subseteq I$, так как $e_2(M_2M) = M_2M$.

2°. По доказанному ранее $M_1^2 \subseteq I$.

3°. Докажем, что $M_1M_j = 0$ ($j \geq 2$). Прежде всего, ясно, что $P_{11}P_{jk} = 0$ ($j \geq 2$).

Пусть $i, j \geq 2$ и $x_{1i}x_{jk} \neq 0$; тогда $x_{1i}x_{jk} = e_1 \cdot x_{1i}x_{jk} = x_{1i}x_{jk} \cdot e_1 = x_{1i} \cdot x_{jk}e_1$ по правой альтернативности, откуда $k = 1$, т.е. $x_{1i}x_{j1} \neq 0$. Так как по лемме 2.8 обе компоненты P_{1i} , P_{i1} ($i \geq 2$) не могут быть отличны от нуля, то $x_{1i}x_{j1} \neq 0$ при $i \neq j$ и $i, j \geq 2$. Но это противоречит лемме 2.3 в).

Тем самым, доказано, что $M^2 \subseteq I$. Значит, $I + M$ — собственный идеал супералгебры B , — противоречие. $\square$

Лемма 2.10. *Хотя бы одна из компонент P_{11} , P_{12} равна нулю.*

Доказательство. Допустим, что P_{11} , P_{12} отличны от 0. Тогда

$$M_1 = P_{11} + P_{12} \text{ по лемме 2.6,}$$

$$M_2 = P_{22} + P_{23} + \dots + P_{2n} \text{ по лемме 2.8,}$$

$$M_k = P_{k1} + P_{k2} + P_{k3} + \dots + P_{kn} \text{ (} k \geq 2 \text{)}.$$

Положим $I = \Phi e_2 + \dots + \Phi e_n + \mathfrak{R}$. Заметим, что $M_kM \subseteq I$ ($k \geq 2$). Также легко видеть, что $M_1M_k = 0$ ($k \geq 2$). Далее, $M_1^2 = P_{11}^2 + P_{12}^2$. На основании леммы 2.5: $x_{11}y_{11} \cdot x_{12} = 0$ и $x_{12}y_{12} \cdot x_{11} = 0$, значит, $M_1^2 = P_{11}^2 + P_{12}^2 \subseteq \mathfrak{R}_1$.

Таким образом, $M^2 \subseteq I$. Значит, $I + M$ — собственный идеал супералгебры B , — противоречие. $\square$

Лемма 2.11. *Хотя бы одна из компонент P_{11} , P_{21} равна нулю.*

Доказательство. Допустим, что P_{11} , P_{21} отличны от 0. Тогда $P_{12} = P_{13} = \dots = P_{1n} = 0$ в силу леммы 2.10. Следовательно, $M_1 = P_{11}$ и $M_k = P_{k1} + P_{k2} + P_{k3} + \dots + P_{kn}$ при $k \geq 2$.

Положим

$$I = \Phi e_2 + \cdots + \Phi e_n + \mathfrak{R}_2 + \cdots + \mathfrak{R}_n, \quad M' = M_2 + \cdots + M_n.$$

Докажем, что $I + M'$ — собственный идеал супералгебры B .

1° I — идеал в A , $IM + MI \subseteq M'$.

2° $AM' + M'A \subseteq M'$, поскольку $AM_k + M_k A \subseteq M_k$.

3° $MM' + M'M = M'^2 \subseteq I$, поскольку по лемме 2.3 а) $M_1 M' = M' M_1 = 0$. Итак, $I + M'$ — собственный идеал B — противоречие. $\square$

Лемма 2.12. *Только для одного числа $i \neq 1$ $P_{1i} \neq 0$.*

Доказательство. Заметим сначала, что в силу леммы 2.6 двух различных компонент $P_{1i} \neq 0$ и $P_{1j} \neq 0$ не может быть. Допустим, что $P_{12} = \cdots = P_{1n} = 0$. Тогда $M = P_{11} + M'$, где $M' = \sum_{i \geq 2} M_i$.

На основании леммы 2.3 а): $P_{11} P_{ij} = P_{ij} P_{11} = 0$, если $(i, j) \neq (1, 1)$. Кроме того, если $i \geq 2$, то верно включение $M_i M + M M_i \subseteq I$, где

$$I = \Phi e_2 + \cdots + \Phi e_n + \mathfrak{R}_2 + \cdots + \mathfrak{R}_n.$$

Докажем, что $I + M'$ — идеал супералгебры B .

1° I — идеал в A ;

2° $IM \subseteq M'$ и $MI \subseteq (P_{11} + M')I \subseteq P_{11}I + M' \subseteq M'$, так как $P_{11}I = 0$.

3° $MM' + M'M \subseteq I$ по доказанному.

Итак, $I + M'$ — собственный идеал B , — противоречие. $\square$

2.2.3. E -циклическость нечетной части M

Супералгебру $B = A + M$ назовем E -циклической относительно полной системы E ортогональных идемпотентов, если

$$M = P_{12} + P_{23} + \cdots + P_{n-1,n} + P_{n1}.$$

Лемма 2.13. *Если M содержит ненулевые компоненты вида $P_{12}, P_{23}, \dots, P_{k-1,k}, P_{k1}$ ($k \geq 3$), то $k = n$ и супералгебра $B = A + M$ является E -циклической.*

Доказательство. Допустим от противного, что $k < n$. Положим

$$I = \Phi e_{k+1} + \cdots + \Phi e_n + \mathfrak{R}_{k+1} + \cdots + \mathfrak{R}_n, \quad M' = M_{k+1} + \cdots + M_n.$$

Докажем, что $I + M'$ — собственный идеал супералгебры B .

1° $M'M \subseteq I$.

2° $MM' \subseteq I$. Это включение является следствием равенства

$$(M_1 + M_2 + \cdots + M_k)M' = 0, \quad (2.8)$$

которое мы и проверим. Во-первых, ввиду леммы 2.6:

$$M_1 = P_{12}, M_2 = P_{23}, \dots, M_{k-1} = P_{k-1,k}, M_k = P_{k1}.$$

Во-вторых, если $i < k$, $p \geq k + 1$, то ввиду леммы 2.3 в) справедливы равенства

$$M_i M_p = \sum_q P_{i,i+1} P_{pq} = 0, \quad M_k M_p = \sum_q P_{k1} P_{pq} = 0,$$

из которых и вытекает требуемое соотношение (2.8).

3° I — идеал в A .

4° $IM \subseteq M'$.

5° $MI \subseteq M'$, поскольку $(M_1 + M_2 + \cdots + M_k)I = 0$.

Мы пришли к противоречию с простотой супералгебры B . □

Предложение 2.7. *Супералгебра $B = A + M$ является E -циклической, причем число её ненулевых компонент P_{ij} совпадает с ёмкостью B .*

Доказательство. По лемме 2.12 $P_{1i} \neq 0$ при некотором $i \neq 1$, значит, изменяя обозначения идемпотентов $e_2, \dots, e_n$, можем считать, что $P_{12} \neq 0$. Аналогично, $P_{2i} \neq 0$ при некотором $i \neq 2$. Если $i = 1$, то по лемме 6 имеем $n = 2$ и B является E -циклической. В противном случае можно считать, что $P_{23} \neq 0$. Итак, $P_{12} \neq 0$ и $P_{23} \neq 0$, в частности, $n \geq 3$. Если $n = 3$, то $P_{31} \neq 0$ и доказывать нечего. Если же $n \geq 4$, то $P_{3i} \neq 0$ при некотором $i \neq 3$, причем $i \neq 1, 2$ ввиду леммы 2.13. Значит, $i \geq 4$ и можно считать, что $P_{34} \neq 0$. Далее, рассуждая аналогично, получаем требуемое. □

2.3. Структура простых супералгебр ёмкости ≥ 2 над алгебраически замкнутым полем

Всюду в этом параграфе поле Φ предполагается алгебраически замкнутым.

2.3.1. Супералгебры ёмкости ≥ 2

Пусть B — супералгебра ёмкости $n \geq 2$. В силу предложения 2.7

$$M = P_{12} + P_{23} + \cdots + P_{n-1,n} + P_{n1}.$$

Компоненту P_{ij} назовем *неизотропной*, если $(\exists x_{ij} \in P_{ij}) x_{ij}^2 \notin \mathfrak{R}_i$.

Лемма 2.14. Если P_{12} — неизотропная компонента, то $P_{12} = \Phi x + \mathfrak{R}_1 x$ для любого $x \in P_{12}$ такого, что $x^2 \notin \mathfrak{R}_1$.

Доказательство. Пусть $x = x_{12}$, $x^2 \notin \mathfrak{R}_1$ и $y \in P_{12}$. Положим

$$x^2 = \alpha e + r, \quad xy = \beta e + s, \quad yx = \gamma e + t, \quad (2.9)$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$, $r, s, t \in \mathfrak{R}_1$, $e = e_1$. По условию $\alpha \neq 0$.

Вычислим ассоциаторы:

$$(x, x, y) = x^2 y - x \cdot xy = (\alpha e + r)y - x(\beta e + s) = \alpha y + ry,$$

$$(x, y, x) = xy \cdot x - x \cdot yx = (\beta e + s)x - x(\gamma e + t) = \beta x + sx.$$

По правой альтернативности $\alpha y + ry = \beta x + sx$, значит, $y \in \Phi x + \mathfrak{R}_1 P_{12}$ и $P_{12} = \Phi x + \mathfrak{R}_1 P_{12}$.

Следовательно, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} P_{12} &= \Phi x + \mathfrak{R}_1 P_{12} = \Phi x + \mathfrak{R}_1(\Phi x + \mathfrak{R}_1 P_{12}) = \Phi x + \mathfrak{R}_1 x + \mathfrak{R}_1^2 P_{12} = \dots = \\ &= \Phi x + \mathfrak{R}_1 x + \mathfrak{R}_1^2(\Phi x + \mathfrak{R}_1 P_{12}) \subseteq \Phi x + \mathfrak{R}_1 x + \mathfrak{R}_1^3 P_{12} \subseteq \dots \subseteq \\ &\subseteq \Phi x + \mathfrak{R}_1 x + \mathfrak{R}_1^N P_{12}, \end{aligned}$$

откуда ввиду нильпотентности $\mathfrak{R}$ и вытекает утверждение леммы. $\square$

Лемма 2.15. Если компонента P_{12} изотропна, то $(\forall x, y \in P_{12}) xy \in \mathfrak{R}_1$.

Доказательство. Пусть $x, y \in P_{12}$. Тогда $(x + y)^2, x^2, y^2 \in \mathfrak{R}_1$ и $xy + yx \in \mathfrak{R}_1$. Отсюда и из (2.9) следует, что $\gamma = -\beta$. Поскольку $P_{12}(\Phi e_1 + \mathfrak{R}_1) = 0$, то $y \cdot xy = y \cdot yx = 0$ и ввиду правой альтернативности имеем по модулю $\mathfrak{R}_1 P_{12}$:

$$0 = (y, y, x) - (y, x, y) \equiv -yx \cdot y \equiv -(\gamma e + t)y \equiv \beta y.$$

Если $\beta \neq 0$, то $y \in \mathfrak{R}_1 P_{12}$. Но тогда

$$(\forall r \in \mathfrak{R}_1, z \in P_{12}) x \cdot rz = x(r \circ z) = (xz)r \in R_1,$$

в частности, $xy \in \mathfrak{R}_1$. Если же $\beta = 0$, то $xy \in \mathfrak{R}_1$. $\square$

Лемма 2.16. Если компонента P_{12} неизотропна, то $P_{12}\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}P_{12}$.

Доказательство. Из неизотропности P_{12} и леммы 2.14 имеем $P_{12} = \Phi x + \mathfrak{R}x$. Поскольку $P_{12}\mathfrak{R} \subseteq P_{12}$, то для любого $r \in \mathfrak{R}$ существуют $\alpha \in \Phi$, $s \in \mathfrak{R}$ такие, что $xr = \alpha x + sx$. Покажем, что $\alpha = 0$. От противного, пусть $\alpha \neq 0$, тогда $x = r_1 x + xr_2$, т.е. $x = \sum_i xT_{r_i}$, где T_r — оператор правого или левого умножения на r . Итерируя данное равенство, получаем

$$x = \sum_i xT_{r_i} = \sum_{i,j} xT_{r_i}T_{r_j} = \dots = \sum_{i_1, \dots, i_m} xT_{r_{i_1}} \dots T_{r_{i_m}} = 0,$$

поскольку идеал $\mathfrak{R}$ нильпотентен. Значит, $P_{12}\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}P_{12}$. $\square$

2.3.2. Супералгебры ёмкости $n \geq 3$

Везде далее в этом параграфе мы считаем, что характеристика основного поля Φ равна нулю.

Лемма 2.17. *Если супералгебра $B = A + M$ имеет ёмкость $n \geq 3$, то A полупроста и B изоморфна супералгебре $B_{n|n}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что все компоненты M неизотропны.

Если компонента P_{12} изотропна, то $(\forall x, y \in P_{12}) xy \in \mathfrak{R}_1$ по лемме 2.15. Пусть

$$I = \Phi e_2 + \dots + \Phi e_n + \mathfrak{R}.$$

Тогда $P_{12} * M \subseteq I$ ввиду леммы 2.3 и легко понять, что $I + M$ — собственный идеал B , — противоречие. Итак, каждая компонента $P_{12}, \dots, P_{n-1,n}, P_{n1}$ неизотропна и, ввиду леммы 2.14, имеет вид $P_{ij} = \Phi x_{ij} + \mathfrak{R}_i x_{ij}$. Кроме того, в силу леммы 2.16: $P_{ij} \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R} P_{ij}$.

Пусть $M' = \mathfrak{R} * M = \mathfrak{R} M$. Докажем, что $\mathfrak{R} + M'$ — идеал в B . Для этого достаточно проверить включения $\mathfrak{R} A \subseteq \mathfrak{R}$, $A * M' \subseteq M'$, $\mathfrak{R} * M \subseteq M'$, $M * M' \subseteq \mathfrak{R}$. Нетривиальным является только последнее включение $M * M' \subseteq \mathfrak{R}$, доказательство которого представим в виде двух пунктов.

1°. $M' M \subseteq \mathfrak{R}$. Поскольку произведение двух различных компонент P_{ij} в супералгебре ёмкости ≥ 3 равно нулю, то достаточно понять, что $r_i x_{ij} \cdot x_{ij} \in \mathfrak{R}$ и $r_i x_{ij} \cdot r'_i x_{ij} \in \mathfrak{R}$, где $r_i, r'_i \in \mathfrak{R}$. Пусть $x = x_{ij}$. Тогда $r_i x_{ij} \cdot x_{ij} = r_i x \cdot x = r_i x^2 + (r_i, x, x) \in \mathfrak{R}$ ввиду леммы 2.2.

Аналогично, $r_i x_{ij} \cdot r'_i x_{ij} = r_i x \cdot r'_i x = (r_i \cdot r'_i x) x + r_i (x \cdot r'_i x - r'_i x \cdot x) \in \mathfrak{R}^2 x \cdot x + \mathfrak{R} A \subseteq \mathfrak{R} + (\mathfrak{R}^2, x, x) \subseteq \mathfrak{R}$.

2°. $M M' \subseteq \mathfrak{R}$. Аналогично п. 1° достаточно понять, что $x_{ij} \cdot r_i x_{ij} \in \mathfrak{R}$ и $r_i x_{ij} \cdot r'_i x_{ij} \in \mathfrak{R}$, где $r_i, r'_i \in \mathfrak{R}$. Значит, сохраняя обозначения п. 1°, осталось проверить, что $x \cdot r_i x \in \mathfrak{R}$. Заметим, что $x r_i = x_{ij} r_i = 0$. Используя равенство $x r_i = 0$, имеем: $x \cdot r_i x = -(x, r_i, x) = -(x, x, r_i) = -x^2 r_i \in \mathfrak{R}$.

Из пп. 1° и 2° вытекает $\mathfrak{R} = 0$, значит,

$$A = \Phi e_1 + \dots + \Phi e_n, \quad M = P_{12} + P_{23} + \dots + P_{n-1,n} + P_{n1}.$$

Кроме того, $P_{ij} = \Phi x_{ij}$, причем $x_{ij}^2 \neq 0$, по лемме 2.14. Считая $x_{ij}^2 = \alpha_{ij} e_i \neq 0$, положим $x'_{ij} = \sqrt{\alpha_{ij}^{-1}} x_{ij}$, где $\sqrt{\alpha}$ — фиксированный корень уравнения $t^2 = \alpha$ в поле Φ . Легко понять, что супералгебра с базисом $e_1, \dots, e_n, x'_{12}, \dots, x'_{n-1,n}, x'_{n1}$ совпадает с супералгеброй $B_{n|n}$. $\square$

2.3.3. Супералгебры ёмкости $n = 2$

Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма 2.18. *Если B — супералгебра ёмкости $n = 2$, то A — полупростая алгебра.*

Доказательство разобьем на ряд этапов, заметив, что $M = P_{12} + P_{21}$.

1°. Докажем, что $(M, M, \mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{K}$. В самом деле, во-первых,

$$(P_{12}, P_{21}, \mathfrak{K}_1) = (P_{12}, \mathfrak{K}_1, P_{21}) \subseteq P_{12}\mathfrak{K}_1 \cdot P_{21} - P_{12} \cdot \mathfrak{K}_1 P_{21} = 0,$$

$$(P_{12}, P_{21}, \mathfrak{K}_2) \subseteq P_{12}P_{21} \cdot \mathfrak{K}_2 - P_{12} \cdot P_{21}\mathfrak{K}_2 \subseteq P_{12}P_{21} \cdot \mathfrak{K}_2 = 0,$$

и аналогично $(P_{21}, P_{12}, \mathfrak{K}_1) = (P_{21}, P_{12}, \mathfrak{K}_2) = 0$.

Во-вторых,

$$(P_{12}, P_{12}, \mathfrak{K}_1) = P_{12}P_{12} \cdot \mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_1.$$

В-третьих, если P_{12} — изотропная компонента, то $P_{12}P_{12} \subseteq \mathfrak{K}_1$ по лемме 2.15 и

$$(P_{12}, P_{12}, \mathfrak{K}_2) \subseteq P_{12}P_{12} \cdot \mathfrak{K}_2 - P_{12} \cdot P_{12}\mathfrak{K}_2 \subseteq P_{12}P_{12} \subseteq \mathfrak{K}_1;$$

если же P_{12} — неизотропная компонента, то $P_{12}\mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{K}_1P_{12}$ по лемме 2.16 и

$$\begin{aligned} (P_{12}, P_{12}, \mathfrak{K}_2) &\subseteq P_{12}P_{12} \cdot \mathfrak{K}_2 - P_{12} \cdot P_{12}\mathfrak{K}_2 \subseteq P_{12} \cdot P_{12}\mathfrak{K}_2 \subseteq P_{12} \cdot \mathfrak{K}_1P_{12} = \\ &= P_{12}(\mathfrak{K}_1 \circ P_{12}) \subseteq P_{12}\mathfrak{K}_1 \cdot P_{12} + P_{12}P_{12} \cdot \mathfrak{K}_1 = P_{12}P_{12} \cdot \mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_1. \end{aligned}$$

2°. Проверим, что $x_{12} \cdot r_2x_{21} \in \mathfrak{K}_1$. Пусть $x_{12} \cdot r_2x_{21} = \alpha e_1 + r_1$. Тогда, учитывая $r_2x_{21} \cdot x_{12} \in \mathfrak{K}_2$ и $x_{21}(r_2x_{21} \cdot x_{12}) \in x_{21}\mathfrak{K}_2 = 0$, имеем:

$$\alpha x_{21} + x_{21}r_1 = x_{21} \cdot x_{12}(r_2x_{21}) = x_{21}[x_{12}, r_2x_{21}] = x_{21}x_{12} \cdot r_2x_{21} - (x_{21} \cdot r_2x_{21})x_{12} \in \mathfrak{K}_2x_{21}.$$

Если $\alpha \neq 0$, то $x_{21} \in x_{21}\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2x_{21}$, значит, $x_{21} = 0$, — противоречие.

3°. Соотношение $x_{21} \cdot r_1x_{12} \in \mathfrak{K}_2$ вытекает из п. 2° после переименования идемпотентов.

4°. Докажем, что $\mathfrak{K} + \mathfrak{K} * M \triangleleft B$. Достаточно понять, что $(\mathfrak{K} * M) * M \subseteq \mathfrak{K}$, т.е. что четные элементы вида pqs , где $p, q, s \in \mathfrak{K} \cup P_{12} \cup P_{21}$, лежат в радикале $\mathfrak{K}$ (расстановка скобок в силу п. 1° не играет роли). Если произведение $\pi = pqs$ начинается или заканчивается элементом из $\mathfrak{K}$, то в силу п. 1° ясно, что $\pi \in \mathfrak{K}$. Итак, пусть $q \in \mathfrak{K}$ и можно считать, без ограничения общности, что $q = r_1 \in \mathfrak{K}_1$. Тогда $\pi = x_{21}r_1x_{12} \in \mathfrak{K}_2$ ввиду п. 3°.

5°. Из п. 4° следует, что $\mathfrak{K} = 0$, т.е. A — полупростая алгебра. □

Лемма 2.19. *Супералгебра B ёмкости $n = 2$ изоморфна $M_{1|1}(\Phi)$, $B_{2|2}$ или $B_{2|2}(\nu)$.*

Доказательство. Из леммы 2.18 следует, что $A = \Phi e_1 + \Phi e_2$. Кроме того, $M = \Phi x_{12} + \Phi x_{21}$.

Пусть $x_{12}x_{21} = \beta_1 e_1$, $x_{21}x_{12} = \beta_2 e_2$. Поскольку ввиду леммы 2.4

$$(x_{12}, x_{12}, x_{21}) = x_{12}x_{12} \cdot x_{21} - x_{12} \cdot x_{12}x_{21} \in \Phi e_1 x_{21} + \Phi x_{12} e_1 = 0,$$

то по правой альтернативности имеем: $0 = (x_{12}, x_{12}, x_{21}) = (x_{12}, x_{21}, x_{12}) = \beta_1 x_{12} - \beta_2 x_{12}$, откуда $\beta_1 = \beta_2$.

Если $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то $x_{12}^2 \neq 0$, $x_{21}^2 \neq 0$. В самом деле, если $x_{12}^2 = 0$, то $\Phi x_{12} \triangleleft B$, что невозможно. Тогда $x_{12}^2 = e_1$, $x_{21}^2 = e_2$ и $B = B_{2|2}$.

Если же $\beta = \beta_1 = \beta_2 \neq 0$, то, заменяя x_{21} на $\beta^{-1}x_{21}$, можно считать, что $x_{12}x_{21} = e_1$, $x_{21}x_{12} = e_2$. Пусть $x_{12}^2 = \alpha_1 e_1$, $x_{21}^2 = \alpha_2 e_2$. Для скаляров α_1, α_2 возможны три случая:

а) $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$, б) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0$ или $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$, в) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$.

В первом случае сделаем замену: $y_{12} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}x_{12}$, $y_{21} = \sqrt{\alpha_1}x_{21}$. Тогда $y_{12}^2 = e_1$, $y_{21}^2 = \nu e_2$, $y_{12}y_{21} = e_1$, $y_{21}y_{12} = e_2$. Значит, $B = B_{2|2}(\nu)$.

Во втором случае, без ограничения общности, можно считать, что $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$. Тогда такая замена, как в первом случае, приводит к супералгебре $B = B_{2|2}(0)$.

Наконец, в третьем случае получается, что B совпадает с ассоциативной супералгеброй $B = M_{1|1}(\Phi) = B_{2|2}(\Phi^2, *, *)$, где $*$ — стандартная инволюция на Φ^2 . $\square$

Замечание. Если B — супералгебра ёмкости $n = 2$, то M неизотропна, т.е. содержит такой элемент x , что $x^2 \neq 0$. В случае в) таким элементом является $x_{12} + x_{21}$: $(x_{12} + x_{21})^2 = 1$. Однако, в случае в) компоненты P_{12} и P_{21} изотропны.

2.4. Супералгебры ёмкости 1

2.4.1. Полупростота четной части

Всюду в этом параграфе $A = \Phi \cdot 1 + \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R} = \text{Nil } A$ и $\mathfrak{R}^n = 0$.

Предложение 2.8. *Радикал $\mathfrak{R}$ равен 0.*

Доказательство. Допустим противное, т.е. $\mathfrak{R} \neq 0$. Всюду в этом предложении:

$$r, r_i, r'_i, r''_i, s_i, s_{ij}, s'_{ij}, r'_{ij}, s''_{ij} \in \mathfrak{R}.$$

Поскольку $(\mathfrak{R}, M, M) \subseteq \mathfrak{R}$ в силу леммы 2.2, то $\mathfrak{R}M \cdot M \subseteq \mathfrak{R} + (\mathfrak{R}, M, M) \subseteq \mathfrak{R}$. Отсюда следует включение $\mathfrak{R}M(\mathfrak{R} \circ M) \subseteq \mathfrak{R}$. Значит, для нечетных элементов $x \in M$, $y_i \in \mathfrak{R}M$,

$z_i \in \mathfrak{R} \circ M$ выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha + r, & xy_i &= \beta_i + r_i, & xz_i &= \gamma_i + r'_i, \\ y_i x &= s_i, & y_i y_j &= s_{ij}, & y_i z_j &= s'_{ij}, \\ z_i x &= \delta_i + r''_i, & z_i y_j &= \eta_{ij} + r'_{ij}, & z_i z_j &= \xi_{ij} + s''_{ij}. \end{aligned}$$

Докажем, что $M \setminus (\mathfrak{R} * M) \neq \emptyset$. Если $M = \mathfrak{R} * M$, то в силу абелевости B и нильпотентности $\mathfrak{R}$ имеем $M = \mathfrak{R} * \mathfrak{R} * M = \dots = \mathfrak{R} * \dots * \mathfrak{R} * M = 0$. Поэтому можно сразу считать, что $x \in M \setminus (\mathfrak{R} * M)$.

Дальнейшие рассмотрения представим в виде последовательности шагов.

1°. Докажем, что $\beta_i = 0$, $\delta_i = 2\gamma_i$, $\eta_{ij} = 0$. Все сравнения имеют вид по модулю $\mathfrak{R} * M$

$$\begin{aligned} (x, y_i, x) &= xy_i \cdot x - x \cdot y_i x = (\beta_i + r_i)x - xs_i \equiv \beta_i x, \\ (x, x, y_i) &= x^2 y_i - x \cdot xy_i = (\alpha + r)y_i - x(\beta_i + r_i) \equiv -\beta_i x, \end{aligned}$$

значит, $\beta_i = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} (x, z_i, x) &= xz_i \cdot x - x \cdot z_i x = (\gamma_i + r'_i)x - x(\delta_i + r''_i) \equiv \gamma_i x - \delta_i x, \\ (x, x, z_i) &= x^2 z_i - x \cdot xz_i = (\alpha + r)z_i - x(\gamma_i + r'_i) \equiv -\gamma_i x, \end{aligned}$$

значит, $\delta_i = 2\gamma_i$. Аналогично,

$$(x, z_i, y_j) = xz_i \cdot y_j - x \cdot z_i y_j \equiv -\eta_{ij} x, \quad (x, y_j, z_i) = xy_j \cdot z_i - x \cdot y_j z_i \equiv 0;$$

значит, $\eta_{ij} = 0$.

2°. В силу п. 1° таблица умножения имеет вид

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha + r, & xy_i &= r_i, & xz_i &= \gamma_i + r'_i, \\ y_i x &= s_i, & y_i y_j &= s_{ij}, & y_i z_j &= s'_{ij}, \\ z_i x &= 2\gamma_i + r''_i, & z_i y_j &= r'_{ij}, & z_i z_j &= \xi_{ij} + s''_{ij}. \end{aligned}$$

3°. Докажем, что можно считать $\alpha \neq 0$. Пусть $x^2 \in \mathfrak{R}$ для любого $x \in M \setminus (\mathfrak{R} * M)$. Тогда по модулю $\mathfrak{R}$ имеем

$$(x + \lambda z_i)^2 = x^2 + \lambda(x \circ z_i) + \lambda^2 z_i^2 \equiv 3\lambda\gamma_i + \lambda^2 \xi_{ii}.$$

Следовательно,

$$3\gamma_i + \xi_{ii} = 0, \quad 6\gamma_i + 4\xi_{ii} = 0,$$

откуда следует, что $\gamma_i = \xi_{ii} = 0$. Значит, квадрат любого элемента из $\mathfrak{R} \circ M$ содержится в радикала $\mathfrak{R}$, т.е. $0 \equiv (z_i + z_j)^2 = \xi_{ij} + \xi_{ji}$. Далее, поскольку $z_i[z_i, z_j] = z_i^2 z_j - (z_i z_j)z_i$, то по модулю $\mathfrak{R}M$ верно $(\xi_{ij} - \xi_{ji})z_i + z_i(s''_{ij} - s''_{ji}) \equiv -\xi_{ij}z_i$ и $3\xi_{ij}z_i \equiv z_i t_i$, где $t_i \in \mathfrak{R}$.

Если $\xi_{ij} \neq 0$, то $z_i \equiv z_i t$ для подходящего $t \in \mathfrak{R}$, и, итерируя это сравнение, имеем $z_i \equiv z_i t \equiv z_i t^2 \equiv \dots \equiv z_i t^n \equiv 0$, т.е. $z_i \in \mathfrak{R}M$. Отсюда $z_i z_j \in \mathfrak{R}M \cdot M \subseteq \mathfrak{R}$, т.е. $\xi_{ij} = 0$, — противоречие.

Стало быть, таблица умножения имеет вид

$$\begin{aligned} x^2 &= r, & xy_i &= r_i, & xz_i &= r'_i, \\ y_i x &= s_i, & y_i y_j &= s_{ij}, & y_i z_j &= s'_{ij}, \\ z_i x &= r''_i, & z_i y_j &= r'_{ij}, & z_i z_j &= s''_{ij}. \end{aligned}$$

Наконец, отсюда вытекает, что $M^2 \subseteq \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R} + M$ — собственный идеал B , — противоречие.

4°. Ввиду п. 3° можно считать, что таблица умножения имеет вид:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 + r, & xy_i &= r_i, & xz_i &= \gamma_i + r'_i, \\ y_i x &= s_i, & y_i y_j &= s_{ij}, & y_i z_j &= s'_{ij}, \\ z_i x &= 2\gamma_i + r''_i, & z_i y_j &= r'_{ij}, & z_i z_j &= \xi_{ij} + s''_{ij}. \end{aligned}$$

5°. Докажем теперь, что $M/(\mathfrak{R} * M)$ одномерно. Допустим, что существуют два линейно независимых элемента x, y по модулю $\mathfrak{R} * M$ такие, что

$$x^2 = 1 + r, \quad y^2 = \beta + s, \quad xy = \gamma + p, \quad yx = \delta + q, \quad \text{где } r, s, p, q \in \mathfrak{R}.$$

Тогда по модулю $\mathfrak{R} * M$:

$$\begin{aligned} (x, y, x) &= xy \cdot x - x \cdot yx = (\gamma + p)x - x(\delta + q) \equiv \gamma x - \delta x, \\ (x, x, y) &= x^2 y - x \cdot xy = (\alpha + r)y - x(\gamma + p) \equiv y - \gamma x \end{aligned}$$

т.е. $y + (\delta - 2\gamma)x \in \mathfrak{R} * M$, — противоречие.

6°. Обозначим через $\mathfrak{R}^*$ подалгебру в алгебре $\text{End}_{\mathbb{F}} M$ линейных операторов пространства M , порожденную операторами T_r умножения на элементы $r \in \mathfrak{R}$. Поскольку алгебра $\mathfrak{R}^*$ нильпотентна, то, обозначая через N ее индекс нильпотентности, имеем

$$\begin{aligned} M &= \Phi x + M\mathfrak{R}^* = \Phi x + (\Phi x + M\mathfrak{R}^*)\mathfrak{R}^* = \Phi x + x\mathfrak{R}^* + M\mathfrak{R}^{*2} = \\ &= \Phi x + x\mathfrak{R}^* + (\Phi x + M\mathfrak{R}^*)\mathfrak{R}^{*2} = \Phi x + x\mathfrak{R}^* + x\mathfrak{R}^{*2} + M\mathfrak{R}^{*3} = \dots = \\ &= \Phi x + x\mathfrak{R}^* + x\mathfrak{R}^{*2} + \dots + x\mathfrak{R}^{*N-1} + M\mathfrak{R}^{*N} = \\ &= \Phi x + x\mathfrak{R}^* + x\mathfrak{R}^{*2} + \dots + x\mathfrak{R}^{*N-1}. \end{aligned}$$

7°. Пусть $Y = \mathfrak{R}M$. Покажем, что $\mathfrak{R} \circ M \equiv \mathfrak{R} \circ x \pmod{Y}$.

Пусть $w \in M$, тогда для $p, q \in \mathfrak{R}$ по абелевости имеем $(qw) \circ p = q(w \circ p) \in Y$. Далее, $(wq) \circ p = w \circ (qp) + p \cdot wq - qpw \in w \circ (qp) + Y$.

8°. Покажем, что $\gamma_i = 0$. В силу п. 4°: $Y * M \subseteq \mathfrak{R}$, поэтому доказательство достаточно провести для элемента $z_i \in \mathfrak{R} \circ x$. Если $z_i = x \circ p_i$, где $p_i \in \mathfrak{R}$, то из п. 4° имеем:

$$x(x \circ p_i) = \gamma_i + r'_i \quad \text{и} \quad (x \circ p_i)x = 2\gamma_i + r''_i.$$

Применяя правую альтернативность, преобразуем эти соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_i + r'_i &= x(x \circ p_i) = x^2 p_i + x p_i \cdot x = (1 + r)p_i + x p_i \cdot x = s_i + x p_i \cdot x, \\ 2\gamma_i + r''_i &= (x \circ p_i)x = x p_i \cdot x + p_i x \cdot x = x p_i \cdot x + t_i, \end{aligned}$$

где $s_i, t_i \in \mathfrak{R}$. Вычитая почленно из первого равенства второе, получаем $\gamma_i = 0$.

9°. Докажем, что $\xi_{ij} = 0$.

Пусть Z — линейная оболочка векторов $z_1, z_2, \dots$. Если $r, s \in \mathfrak{R}$ и $z_i = x \circ r$, $z_j = x \circ s$, то в силу пп. 4°, 8° имеем

$$\xi_{ij} \equiv z_i z_j = (x \circ r)(x \circ s) = (x \circ r)x \cdot s + (x \circ r)s \cdot x \in \mathfrak{R} + Zx \equiv 0 \pmod{\mathfrak{R}}.$$

10°. Пусть $I = \mathfrak{R} + M'$, где $M' = \mathfrak{R} * M = Y + Z$. Проверим, что I — собственный идеал B . В самом деле, справедливы включения

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\mathfrak{R} &\subseteq \mathfrak{R}, & \mathfrak{R} * M &\subseteq M', \\ \mathfrak{R} * M' &\subseteq \mathfrak{R} * M \subseteq M', & M * M' &= (\Phi x + Y + Z) * (Y + Z) \subseteq \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Полученное противоречие завершает доказательство предложения. □

Из предложения 2.8 и лемм 2.17 и 2.18 вытекает

Теорема 2.1. Пусть Φ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Если супералгебра $B = A + M$ проста, то алгебра A полупроста.

Попутно с теоремой 2.1 получена

Теорема 2.2. Супералгебра $B = A + M$ над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики 0 изоморфна одной из супералгебр: $M_{1|1}(\Phi)$, $B_{2|2}(\nu)$, $B_{n|n}$ ($n \geq 1$).

Доказательство. Пусть поле Φ алгебраически замкнуто и супералгебра B имеет ёмкость 1; тогда $A = \Phi$ по теореме 2.2. Поскольку $x^2 \in \Phi$, то $(x, x, x) = x^2 x - x x^2 = 0$, значит, $(x, x, y) + (x, y, x) + (y, x, x) = 0$, $2(x, x, y) + (y, x, x) = 0$.

Если $x^2 \neq 0$, то можно считать, что $x^2 = 1$. В этом случае $0 = y - 2x(xy) + (yx)x$, т.е. $y = 2(xy)x - (yx)x$, $M = \Phi x$ и $B = \Phi[\sqrt{1}] = B_{1|1}$.

Если $(\forall x \in M) x^2 = 0$, то $(\forall x, y \in M) xy + yx = 0$. Так как $M^2 \neq 0$ (иначе $M \triangleleft B$), то $(\exists x, y \in M) xy = 1$ и по правой альтернативности имеем $2(xy)z = 2z(xy) = z[x, y] = (zx)y - (zy)x$, откуда следует, что $M = \Phi x + \Phi y$. Наконец, $(x, x, y) = -x$, $(x, y, x) = (xy)x - x(yx) = 2x$, что противоречит правой альтернативности супералгебры B .

Если же B имеет ёмкость ≥ 2 , то теорема вытекает из лемм 2.17 и 2.19. $\square$

2.4.2. Структура B при условии, что A — поле

Докажем следующее

Предложение 2.9. Пусть $B = \Gamma + M$ — центральная простая супералгебра и Γ — поле. Тогда B является либо ω -дублем $B(\Gamma, \tau, R_\omega)$ и τ порождает группу $\text{Gal}(\Gamma/\Phi)$, либо нерасщепляемым композиционным дублем $B_{2|2}(\Gamma, *, \lambda, \mu)$.

Доказательство. Поскольку $\text{char } \Phi = 0$ и $\Gamma := A$ — поле конечной степени $n \geq 2$ над Φ , то всякое дифференцирование D поля Γ тривиально [35, с. 303], т.е. $D(\Gamma) = 0$. В частности, $(A, M, M) = 0$. Если a — примитивный элемент в Γ , то элементы a^i ($i = \overline{0, n-1}$) образуют базис пространства Γ над Φ .

Пусть Ω — алгебраическое замыкание поля Φ . Тогда супералгебра $B_\Omega = \Omega \otimes_\Phi B$ является центральной простой правоальтернативной супералгеброй абелева типа над полем Ω , четная часть которой коммутативная и ассоциативная Ω — алгебра размерности n , следовательно, в силу теоремы 2.2 ее нечетная часть M_Ω также имеет размерность n , но в таком случае $\dim_\Phi M = n$. Далее, если $0 \neq x \in M$, то элементы $a^i x$ ($i = \overline{0, n-1}$) линейно независимы над Φ и, значит, образуют Φ -базис M , тогда $M = \Gamma x$. Определим отображение $*$: $\Gamma \rightarrow \Gamma$, положив $xb = b^*x$. Легко понять, что это отображение линейно над Φ и $(bc)^* = b^*c^*$. Наконец, если $b^* = 0$, то $xb = 0$ и если $b \neq 0$, то $0 = xb \cdot b^{-1} = x$, — противоречие. Таким образом, доказано, что $*$ — автоморфизм поля Γ .

Если $*$ — Id , то $[M, \Gamma] = 0$ и $a \cdot xy = xy \cdot a = -xa \cdot y + 2x \cdot ya$ ввиду правой альтернативности. Кроме того, $xa = ax$ и $(a, x, y) = 0$, значит, $a \cdot xy = x \cdot ya$ и $(x, y, a) = 0$, т.е. B — супералгебра над полем Γ . Тем самым, $B = B(\Gamma, \text{Id}, R_\omega)$, где $x^2 = \omega \neq 0$, т.е. получается супералгебра вида $B(\Gamma, \tau, R_\omega)$.

Итак, можно считать, что $*$ $\neq \text{Id}$. Поскольку x — произвольный ненулевой элемент из M , то в силу леммы 2.17, замечания к лемме 2.19 и доказательства теоремы 2.2 можно считать, что $x^2 = \omega \neq 0$. Положим $\zeta = (x, x, a)$. Тогда на основании правого тождества Муфанг

$$(x, a, a^i x) = (x, a, x)a^i = a^i(x, a, x) = -a^i \zeta.$$

Отсюда $xa \cdot a^i x - x \cdot a^{i+1} x = -a^i \zeta$ или $x \cdot a^{i+1} x = xa \cdot a^i x + a^i \zeta = a^*(x \cdot a^i x) + a^i \zeta$.

Итак, считая $x_0 = x$, $x_{i+1} = ax_i$ ($i < n$), имеем

$$x \cdot x_1 = x \cdot ax = xa \cdot x - (x, a, x) = a^* \omega + \zeta,$$

и по индукции легко проверить, что

$$x \cdot x_k = (a^*)^k \omega + \frac{(a^*)^k - a^k}{a^* - a} \zeta,$$

следовательно, $[1] \cdot [g] = g^* \omega + \frac{g^* - g}{a^* - a} \zeta$, где $[g] = gx$, и для любых $f, g \in \Phi(a)$ верно

$$[f] \cdot [g] = f \cdot g^\chi, \quad \text{где } [f] = fx, \quad g^\chi = g^* \omega + \frac{g^* - g}{a^* - a} \zeta.$$

Положим $\mu = -(a^* - a)^{-1} \zeta$, $\lambda = \omega - \mu$. Тогда $g^\chi := \lambda g^* + \mu g$, значит, χ — линейный оператор пространства Γ над Φ .

Итак, $B = B(\Gamma, *, \chi)$. Тогда ввиду п. 2.1.5 получаем, что B является либо ω -дублем поля Γ , либо нерасщепляемым композиционным дублем $B_{2|2}(\Gamma, *, \lambda, \mu)$. $\square$

2.5. Стрoение абелевых супералгебр

Этот параграф посвящен доказательству основной теоремы об абелевых супералгебрах.

Теорема 2.3. *Конечномерная центральная простая правоальтернативная супералгебра $B = A + M$ абелева типа над полем Φ характеристики 0 изоморфна одной из следующих супералгебр:*

$$\Phi[\sqrt{1}], M_{1|1}(\Phi), B(\Gamma, *, \omega), B_{2|2}(\nu), B_{2|2}(\Gamma, *, \lambda, \mu), B\left(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i\right) \quad (n \geq 2),$$

где Γ — подходящее поле конечной степени над Φ .

Доказательство. Рассмотрим супералгебру $B_\Omega = \Omega \otimes_\Phi B$, где Ω — алгебраическое замыкание поля Φ . Если $r \in \mathfrak{R} = \text{Nil } A$, то $r \otimes 1$ нильпотентен, значит, $r \otimes 1 \in \mathfrak{R}_\Omega = \text{Nil } A_\Omega$. Поскольку B_Ω — центральная простая, то, значит, $\mathfrak{R}_\Omega = 0$ на основании результатов §§2.3, 2.4.

Значит, $A = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \dots \oplus \Gamma_n$ — прямая сумма полей и в силу §2.4 можно считать, что $n \geq 2$. Пусть $d_i = \dim_\Phi \Gamma_i$, $d = d_1 + d_2 + \dots + d_n$. Далее,

$$A_\Omega = (\Gamma_1)_\Omega \oplus \dots \oplus (\Gamma_n)_\Omega \quad \text{и} \quad (\Gamma_i)_\Omega = \Omega e_{i,1} \oplus \dots \oplus \Omega e_{i,d_i}.$$

Пусть e_i — единица поля Γ_i . Положим также, что $E_i = \{e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i}\}$ — полная ортогональная система идемпотентов алгебры $(\Gamma_i)_\Omega$, $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ — полная ортогональная система идемпотентов алгебры A_Ω .

Тогда по теореме 2.1: $\dim_{\Omega}(M_{\Omega}) = d$ и пространство M_{Ω} является E -циклическим, т.е. $M_{\Omega} = g_1 M_{\Omega} g_2 \oplus g_2 M_{\Omega} g_3 \oplus \dots \oplus g_{d-1} M_{\Omega} g_d \oplus g_d M_{\Omega} g_1$ — прямая сумма одномерных Ω -пространств, а $(g_1, g_2, \dots, g_d)$ — некоторая перестановка идемпотентов системы E . Среди всех пространств $g_k M_{\Omega} g_l$ ровно d_i штук начинаются с идемпотентов $g_k \in E_i$, следовательно, сумма таких слагаемых совпадает с пространством $(e_i M)_{\Omega}$. Таким образом, $\dim_{\Phi}(e_i M) = d_i$ и поскольку Γ_i — поле степени d_i над Φ , то $e_i M = \Gamma_i x$ для подходящего элемента x . Запишем этот элемент в виде $x = x e_1 + \dots + x e_n$. В силу предыдущего ясно, что $x e_i = 0$, поскольку $(e_i M)_{\Omega}$ состоит из слагаемых $g_k M_{\Omega} g_l$, где $k \neq l$. Если $x = \dots + x e_p + \dots + x e_q + \dots$ записано в виде суммы ненулевых слагаемых и таких слагаемых, по крайней мере, два, т.е. $p \neq q$, то $e_i M \supseteq \Gamma_i x e_p \oplus \Gamma_i x e_q$, значит, $d_i = \dim_{\Phi}(e_i M) \geq 2d_i$, что невозможно.

Тем самым, доказано, что M как пространство над полем Φ разлагается в прямую сумму ненулевых компонент $M = P_{12} \oplus P_{23} \oplus \dots \oplus P_{n-1,n} \oplus P_{n1}$ и $\dim_{\Phi} P_{ij} = d_i$.

Поскольку P_{ij} является левым линейным пространством над полем Γ_i и правым пространством над Γ_j , то $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq d_1$. Откуда следует, что

$$d_1 = d_2 = \dots = d_n \text{ и } \dim_{\Phi} P_{12} = \dim_{\Phi} P_{23} = \dots = \dim_{\Phi} P_{n-1,n} = \dim_{\Phi} P_{n1} = d_1.$$

Докажем, что все алгебры $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ изоморфны. Заметим, что $P_{12} = \Gamma_1 x = x \Gamma_2$ для любого ненулевого $x \in P_{12}$. Рассмотрим отображение $\tau_2: \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$, определенное правилом $a = b^{\tau_2}$, если $ax = xb$. Легко проверить, что τ_2 — изоморфизм алгебр.

Если компонента P_{12} неизотропна, то $(\exists x \in P_{12}) x^2 = \omega_1 e_1 \neq 0$. Заметим, что $P_{12} \cdot A e_1 = P_{12} \cdot e_1 A = P_{12} e_1 \cdot A = 0$. Пусть $a, b \in \Gamma_1$. Тогда по правой альтернативности

$$(ax)(bx) = (ax)b \cdot x - (ax, b, x) = -(ax, b, x) = (ax, x, b) = (ax \cdot x)b = a\omega_1 b = ab\omega_1.$$

При $n \geq 3$ все компоненты P_{ij} неизотропны и различные компоненты перемножаются нулевым образом в силу леммы 2.3, значит, умножение в супералгебре B определяется обратимым элементом $\omega = \omega_1 e_1 + \dots + \omega_n e_n \in \Gamma_1 e_1 + \dots + \Gamma_n e_n$ и набором автоморфизмов $(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Тем самым, супералгебра B изоморфна циклическому ω -дублю $B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$, причем выполнено заключение предложения 2.6, т.е. группа $\text{Gal}(\Gamma/\Phi)$ порождается элементом $\tau = \tau_1 \circ \tau_n \circ \tau_{n-1} \circ \dots \circ \tau_2$.

Если $n = 1$, то можно воспользоваться предложением 2.9.

Итак, можно считать, что $n = 2$. Тогда $A = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ и $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2 \simeq \Gamma$, $P_{12} = \Gamma e_1 x_{12}$, $P_{21} = \Gamma e_2 x_{21}$. Следуя доказательству леммы 2.19, положим

$$x_{12}^2 = \omega_1 e_1, \quad x_{21}^2 = \omega_2 e_2, \quad x_{12} x_{21} = \beta e_1, \quad x_{21} x_{12} = \beta e_2, \quad \text{где } \beta \in \Gamma.$$

Если $\beta = 0$, то B изоморфна ω -дублю $B(\Gamma^2, \tau_1 + \tau_2, \omega_1 + \omega_2)$ при условии, что $\tau_1 \circ \tau_2$ порождает группу $\text{Gal}(\Gamma/\Phi)$.

Если $\beta \neq 0$, то можно считать, что $\beta = 1$, т.е. $x_{12}x_{21} = e_1$, $x_{21}x_{12} = e_2$. В силу правой альтернативности для $a_i, b_i \in \Gamma e_i$ имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1x_{12}, x_{21}, b_1) + (a_1x_{12}, b_1, x_{21}) = (a_1x_{12}, x_{21}, b_1) = \\ &= (a_1x_{12} \cdot x_{21})b_1 - a_1x_{12} \cdot x_{21}b_1 = a_1b_1 - a_1x_{12} \cdot b_1^{\tau_1}x_{21}, \end{aligned}$$

значит, $a_1x_{12} \cdot b_1^{\tau_1}x_{21} = a_1b_1$, $a_1x_{12} \cdot b_2x_{21} = a_1b_2^{\tau_1^{-1}}$. Аналогично, $b_2x_{21} \cdot a_1x_{12} = b_2a_1^{\tau_2^{-1}}$.

Пусть $[a_1] = a_1x_{12}$, $[a_2] = a_2x_{21}$, где $a_i \in \Gamma e_i$. Тогда

$$\begin{aligned} a_1[b_1] &= [a_1b_1], & [b_1]a_2 &= [b_1a_2^{\tau_2}], & a_2[b_1] &= [b_1]a_1 = [0], \\ [b_2]a_1 &= [b_2a_1^{\tau_1}], & a_2[b_2] &= [a_2b_2], & a_1[b_2] &= [b_2]a_2 = [0], \\ [a_1][b_1] &= a_1b_1\omega_1, & [a_1][b_2] &= a_1b_2^{\tau_1^{-1}}, & [b_2][a_1] &= b_2a_1^{\tau_2^{-1}}, & [a_2][b_2] &= a_2b_2\omega_2. \end{aligned}$$

Поскольку выполнены равенства:

$$\begin{aligned} ([a_1], [b_1], [b_2]) &= [a_1][b_1] \cdot [b_2] - [a_1] \cdot [b_1][b_2] = a_1b_1\omega_1[b_2] - [a_1]b_1b_2^{\tau_1^{-1}} = 0, \\ ([a_1], [b_2], [b_1]) &= [a_1][b_2] \cdot [b_1] - [a_1] \cdot [b_2][b_1] = a_1b_2^{\tau_1^{-1}}[b_1] - [a_1]b_2b_1^{\tau_2^{-1}} = \\ &= [a_1b_2^{\tau_1^{-1}}b_1] - [a_1(b_2b_1^{\tau_2^{-1}})^{\tau_2}]. \end{aligned}$$

то $a_1b_2^{\tau_1^{-1}}b_1 = a_1(b_2b_1^{\tau_2^{-1}})^{\tau_2}$, т.е. $b_2^{\tau_1^{-1}} = b_2^{\tau_2}$, $\tau_1^{-1} = \tau_2$, $\tau_1 \circ \tau_2 = \text{Id}$.

Докажем, что $a = a_1e_1 + a_2e_2 \in Z_0(B)$, если $a_1^{\tau_1} = a_2$. Пусть $x = [b_1] + [b_2]$, $y = [c_1] + [c_2]$.

Вычислим $[x, a]$ и (x, y, a) . Имеем

$$[x, a] = [b_1]a_2 + [b_2]a_1 - a_1[b_1] - a_2[b_2] = [b_1a_2^{\tau_2}] + [b_2a_1^{\tau_1}] - [a_1b_1] - [a_2b_2].$$

Далее,

$$\begin{aligned} xy &= ([b_1] + [b_2])([c_1] + [c_2]) = b_1c_1\omega_1 + b_1c_2^{\tau_2} + b_2c_1^{\tau_1} + b_2c_2\omega_2, \\ xy \cdot a &= a_1b_1c_1\omega_1 + a_1b_1c_2^{\tau_2} + a_2b_2c_1^{\tau_1} + a_2b_2c_2\omega_2, \\ ya &= ([c_1] + [c_2])(a_1 + a_2) = [c_1]a_2 + [c_2] \cdot a_1 = [c_1a_2^{\tau_2}] + [c_2a_1^{\tau_1}], \\ x \cdot ya &= b_1c_1a_2^{\tau_2}\omega_1 + b_1(c_2a_1^{\tau_1})^{\tau_2} + b_2(c_1a_2^{\tau_2})^{\tau_1} + b_2c_2a_1^{\tau_1}\omega_2 = \\ &= b_1c_1a_2^{\tau_2}\omega_1 + a_1b_1c_2^{\tau_2} + a_2b_2c_1^{\tau_1} + a_1^{\tau_1}b_2c_2\omega_2, \end{aligned}$$

значит,

$$0 = (x, y, a) = (a_1 - a_2^{\tau_2})b_1c_1\omega_1 + (a_2 - a_1^{\tau_1})b_2c_2\omega_2.$$

Отсюда вытекает, что $[x, a] = (x, y, a) = 0$ для любых x, y только, если $a_1^{\tau_1} = a_2$. Итак, элемент $a_1e_1 + a_1^{\tau_1}e_2$ централен для любого $a_1 \in \Gamma$. Отсюда в силу центральности супералгебры B вытекает, что $\Gamma = \Phi$. Значит, $B = M_{1|1}(\Phi)$ или $B = B_{2|2}(\nu)$. $\square$

2.6. Структура простых супералгебр, четная часть которых является полем

В этом параграфе изучаются центральные простые унитарные правоальтернативные супералгебры $B = \Gamma \oplus M$ абелева типа произвольной размерности, у которых чётная часть Γ является полем. Доказано, что всякая такая супералгебра $B = \Gamma \oplus M$, за исключением супералгебры $B_{1|2}$, является дублем, т.е. нечетная часть представима в виде $M = \Gamma x$ для подходящего x .

Если порождающий элемент x коммутирует с чётной частью Γ , то B изоморфна скрученной супералгебре векторного типа $B(\Gamma, D, \gamma)$, введенной И.П. Шестаковым [79, 80]; если же x коммутирует с нечётной частью M , то B изоморфна супералгебре $B(\Gamma, *, R_\omega)$, введенной в главе 2 под названием ω -дубль.

Доказано также, что если основное поле алгебраически замкнуто, то B изоморфна одной из супералгебр $B_{1|2}$, $B(\Gamma, D, \gamma)$ или $B(\Gamma, *, R_\omega)$.

Определение 2.1. Супералгебра абелева типа $B = \Gamma \oplus M$ называется *скалярной*, если $(\Gamma, M, M) = 0$; если же $(\Gamma, M, M) \neq 0$, то супералгебру B назовем *векторной*.

Всюду ниже в этом параграфе предполагается, что $B = \Gamma \oplus M$ — центральная простая унитарная правоальтернативная супералгебра абелева типа над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики не равной двум и Γ — поле, являющееся расширением основного поля Φ .

2.6.1. Структура бимодуля M

Начнем со следующей простой леммы.

Лемма 2.20. Если $x \in M$ и $x^2 \neq 0$, то $M = \Gamma x + x\Gamma$.

Доказательство. Пусть $x^2 = \omega \neq 0$ и $y \in M$; тогда по правой альтернативности имеем:

$$\omega y = xy \cdot x + x[x, y] \in \Gamma x + x\Gamma,$$

т.е. $\omega M \subseteq \Gamma x + x\Gamma$. Далее, учитывая, что M — ассоциативный Γ -бимодуль, имеем $M = \omega(\omega^{-1}M) \subseteq \omega M \subseteq \Gamma x + x\Gamma \subseteq M$, что и требовалось. $\square$

Следствие 2.1. Пусть $x^2 \neq 0$. Если $[x, \Gamma] = 0$ или $[x, M] = 0$, то $M = \Gamma x$.

В самом деле, если $[x, M] = 0$, то $\omega y = xy \cdot x \in \Gamma x$. Откуда $M \subseteq \omega^{-1}\Gamma x \subseteq \Gamma x$.

Лемма 2.21. Если $[x, y] \neq 0$, то $M = \Gamma x + \Gamma y$. В частности, $\dim_{\Gamma} M \leq 2$.

Доказательство. Пусть $[x, y] = \nu \neq 0$; тогда по правой альтернативности имеем:

$$(zx)y - (zy)x = z[x, y] = z\nu,$$

т.е. $M\nu \subseteq \Gamma x + \Gamma y$. Поскольку $M = (M\nu^{-1})\nu \subseteq M\nu \subseteq \Gamma x + \Gamma y \subseteq M$, то $M = \Gamma x + \Gamma y$. $\square$

Определение 2.2. Вектор $x \in M$ называется *изотропным*, если $x^2 = 0$. Пространство M назовем *изотропным*, если все его векторы изотропны.

Позже будет доказано, что $\dim_{\Gamma} M = 1$, если M неизотропно.

Определение 2.3. Супералгебру $B = \Gamma \oplus M$ назовем *дублем*, если $\dim_{\Gamma} M = 1$ (множество M рассматривается как левое векторное пространство над полем Γ).

2.6.2. Центризатор $K_0(M)$ нечетной части

Лемма 2.22. Множество $K_0(M) = \{a \in \Gamma \mid [M, a] = 0\}$ является полем. Если $[M, \Gamma] \neq 0$, то $K_0(M) \subseteq Z_0(B)$, т.е. супералгебру B можно рассматривать над полем $K_0(M)$.

Доказательство. Используя коммутаторные тождества (1.1) и (1.2) легко проверить, что центризатор $K = K_0(M)$ является полем.

Всюду далее в этой лемме $k \in K$. В силу суперизации тождества (1.3) имеем

$$(x, y, k) - (y, k, x) + (k, x, y) + (y, x, k) - (x, k, y) + (k, y, x) = 0,$$

$$2(x, y, k) - 2(y, k, x) + 2(k, x, y) = 0,$$

т.е.

$$(x, y, k) - (y, k, x) + (k, x, y) = 0. \quad (2.10)$$

Суперизация тождества Клейнфелда (1.7) имеет вид

$$([x, a], y, z) + (x, a, [y, z]_s) - (a, x, [y, z]_s) = [x, (a, y, z)] + [(x, y, z), a].$$

Откуда

$$([x, k], y, z) = [x, (k, y, z)] + [(x, y, z), k],$$

следовательно,

$$(K, M, M) \subseteq K. \quad (2.11)$$

Точно также верно тождество

$$([k, x], y, a) + (k, x, [y, a]) - (x, k, [y, a]) = [k, (x, y, a)] - [(k, y, a), x]_s,$$

следовательно,

$$(k, x, [y, a]) = (x, k, [y, a]). \quad (2.12)$$

Учитывая тождество (2.10), имеем

$$(x, [y, a], k) - ([y, a], k, x) + (k, x, [y, a]) = 0,$$

откуда на основании (2.12) получаем

$$([y, a], k, x) = 0. \quad (2.13)$$

Далее, в силу суперизованного тождества Клейнфелда (1.6) и (2.13) имеем

$$0 = ([y, a]z, k, x) = [y, a](z, k, x).$$

Значит, учитывая, что $(z, k, x) \in \Gamma$, получаем один из двух вариантов:

$$(M, M, K) = 0 \quad \text{или} \quad [M, \Gamma] = 0.$$

По условию $[M, \Gamma] \neq 0$, значит, $(M, M, K) = 0$; тогда $(k, x, y) = 0$ в силу (2.10), т.е. $K \subseteq Z_0(B)$ и супералгебру B можно рассматривать над полем K . $\square$

2.6.3. Неизотропность пространства M

Теорема 2.4. Пусть $B = \Gamma \oplus M$ — простая правоальтернативная супералгебра абелева типа и Γ — поле характеристики не равной 2. Тогда либо B — коммутативная альтернативная супералгебра над полем характеристики 3 и, значит, изоморфна одной из супералгебр $B_{1|2}$ или $B(\Gamma, D, 0)$, либо пространство M не изотропно.

Доказательство. Пусть пространство M изотропно, т.е. $(\forall x \in M)x^2 = 0$. Тогда для любых $x, y \in M$: $xy + yx = (x + y)^2 - x^2 - y^2 = 0$, т.е.

$$xy = -yx. \quad (2.14)$$

Отсюда по правой альтернативности имеем $-(xy)x = x[x, y] = -2x(yx)$, т.е.

$$(xy)x = 2x(yx). \quad (2.15)$$

Рассуждения удобно представить в виде последовательности шагов.

1° Заметим сначала, что $M^2 + M$ — идеал в B . Действительно, имеем

$$M^2\Gamma \subseteq (M\Gamma)M + M(M \circ \Gamma) \subseteq M^2,$$

$$\Gamma M^2 = M^2\Gamma \subseteq M^2,$$

$$M^2 * M \subseteq \Gamma * M \subseteq M, \quad M * M \subseteq M^2.$$

2°. Поскольку B — простая супералгебра, то $M^2 = \Gamma$. Значит, $(\exists x, y \in M) xy \neq 0$.

3°. Зафиксируем элементы $x, y \in M$, для которых $xy \neq 0$, и рассмотрим множество $\Delta = \{a \in \Gamma \mid (\exists b \in \Gamma) xa = bx\}$. Докажем, что Δ — подполе в Γ .

Действительно, если $xa = bx$, то после умножения справа на a^{-1} и слева на b^{-1} , получаем $x = bxa^{-1}$ и $b^{-1}x = xa^{-1}$, т.е. $xa^{-1} = b^{-1}x$. Кроме того, легко видеть, что множество Δ замкнуто относительно операций сложения и умножения в Γ .

4°. Из равенства (2.15) следует $(\forall z \in M) xz \in \Delta$.

5°. Докажем, что характеристика поля Φ равна 3.

Отображение $*$: $\Delta \rightarrow \Gamma$ такое, что $xa = a^*x$ является вложением. В самом деле, если $xa = 0$, то $x = xaa^{-1} = 0$, — противоречие.

В силу п. 2° получаем $xy \neq 0$. Пусть $a = xy$. В силу п. 4° имеем $a \in \Delta$. Тогда ввиду (2.14) и (2.15) $ax = -2xa$, т.е. $a^* = -\frac{a}{2}$. Далее, $-\frac{a^2}{2} = (a^2)^* = (a^*)^2 = (-\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$, откуда получаем $3a^2 = 0$, значит, характеристика поля Φ равна 3.

6°. Докажем, что $[M, \Gamma] = 0$.

По лемме 2.21 имеем $M = \Gamma x + \Gamma y$. Далее, в силу (2.15) $ax = (xy)x = 2x(yx) = -2x(xy) = xa$, т.е. $[x, a] = 0$. Аналогично, $[y, a] = 0$. Значит, $[M, a] = 0$.

Тем самым, доказано, что если $xy \neq 0$, то $[M, xy] = 0$. Поскольку в силу п. 2° имеем $\Gamma = M^2$, то $[M, \Gamma] = 0$.

7°. Докажем, что B коммутативна и альтернативна.

В силу п. 6° получаем $[M, \Gamma] = 0$. По предположению $(\forall z, t \in M) z \circ t = 0$, значит, грассманова оболочка $G(B)$ — коммутативная алгебра; тогда $G(B)$ коммутативна и альтернативна. По теореме Шестакова [79] простая коммутативная альтернативная супералгебра B совпадает с одной из супералгебр $B_{1|2}$ или $B(\Gamma, D, 0)$ (характеристика 3). $\square$

2.6.4. Скалярные супералгебры

Допустим, что $(\Gamma, M, M) = 0$.

Лемма 2.23. *Если B — скалярная супералгебра, т.е. $(\Gamma, M, M) = 0$, и $x^2 = \omega \neq 0$, то верно равенство $[M, M] = 0$.*

Доказательство. Положив $xy = \rho_y$, $yx = \lambda_y$, по правой альтернативности имеем

$$x^2y = (xy)x + x(xy) - x(yx) = \rho_yx + x\rho_y - x\lambda_y,$$

значит,

$$\omega y = \rho_yx + x(\rho_y - \lambda_y). \quad (2.16)$$

Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1°. Докажем, что $[ax, x] = 0$.

Положим $y = ax$, тогда из (2.16) имеем

$$\omega ax = \rho_{ax}x + x(\rho_{ax} - \lambda_{ax}),$$

$$(\omega a - \rho_{ax})x = x(\rho_{ax} - \lambda_{ax}).$$

Поскольку $\lambda_{ax} = (ax)x = ax^2 = a\omega$, то $(\omega a - \rho_{ax})x = x(\rho_{ax} - \omega a)$.

Пусть $b = \omega a - \rho_{ax}$. Тогда $bx = -xb$ и $b^2x = -bxb = xb^2$, т.е. $b^2 \in \Phi \cdot 1$ по лемме 2.22. Поскольку по условию поле $\Phi \cdot 1$ алгебраически замкнуто, то $b \in \Phi \cdot 1$. Так как $bx = -xb$, то $bx = -bx$, значит, $2b = 0$ и $b = 0$. Таким образом, $\rho_{ax} = \omega a$. Кроме того, ранее было доказано $\lambda_{ax} = \omega a$.

2°. Теперь проверим, что $[xa, x] = 0$.

Заметим, что в силу п. 1° справедливы равенства

$$(x, x, a) = x^2a - x(xa) = \omega a - \rho_{xa},$$

$$(x, a, x) = (xa)x - x(ax) = \lambda_{xa} - \rho_{ax} = \lambda_{xa} - \omega a.$$

Отсюда в силу правой альтернативности имеем: $\rho_{xa} = \lambda_{xa}$, т.е. $[xa, x] = 0$.

3°. Проверим, что $[axb, x] = 0$.

Пусть $y = \omega^{-1}axb$. Тогда $\omega y = \rho_yx + x(\rho_y - \lambda_y)$ в силу (2.16). Поскольку по доказанному $[x, xa] = 0 = [x, ax]$, то $[\omega y, x] = 0$, значит, $[axb, x] = 0$.

4°. Докажем, что $[ax, xb] = 0$. Преобразуем выражения $(axb)x$ и $x(axb)$:

$$(axb)x = a \cdot (xb)x = a \cdot x(xb) = ax \cdot xb,$$

$$x(axb) = x(-bax + b \circ (ax)) = -abx \cdot x + xb \cdot ax + (x \cdot ax)b = xb \cdot ax,$$

поскольку $(x \cdot ax)b = b(x \cdot ax) = b(ax \cdot x) = (b \cdot ax)x = abx \cdot x$.

Следовательно, в силу п. 3° верно $[ax, xb] = 0$.

5°. Заметим, что $[ax, bx] = [(ax), ba^{-1}(ax)] = 0$ ввиду п. 1°, поскольку

$$(ax)^2 = a \cdot x(ax) = a \cdot (ax)x = a \cdot a\omega = a^2\omega \neq 0.$$

6°. Наконец, покажем, что $[xa, xb] = 0$.

Из (2.16) при $y = \omega^{-1}xa$ имеем $xa = \omega y = \rho_yx$, поскольку $\rho_y = xy = x \cdot \omega^{-1}xa$, $\lambda_y = yx = \omega^{-1}xa \cdot x = x \cdot \omega^{-1}xa = \rho_y$ ввиду п. 3°. Тогда $[xa, xb] = [\rho_yx, xb] = 0$ на основании п. 4°. $\square$

Следствие 2.2. Если B — скалярная супералгебра и $x^2 = \omega \neq 0$, то $M = \Gamma x$. Кроме того, пространство M не содержит изотропных векторов.

Доказательство. Поскольку $\rho_y = \lambda_y$ в силу леммы 2.23, то $\omega y = \rho_y x$ в силу (2.16) и $y = \omega^{-1} \rho_y x \in \Gamma x$. Далее, если $a \neq 0$, то, как уже отмечалось, $(ax)^2 = \omega a^2 \neq 0$. Следствие доказано. $\square$

Теорема 2.5. *Скалярная супералгебра $B = \Gamma + M$, содержащая неизотропный вектор, является ω -дублем.*

Доказательство. Пусть $x^2 = \omega \neq 0$. Положим также $[a] = ax$. Кроме того, пусть $a^* = b$, если $xa = bx$. Ясно, что $*$ — вложение $\Gamma \rightarrow \Gamma$. Кроме того,

$$\begin{aligned} a[b] &= a(bx) = (ab)x = [ab], \\ [a]b &= (ax)b = a(xb) = a(b^*x) = (ab^*)x = [ab^*], \\ [a][b] &= ax \cdot bx = a(x \cdot bx) = a(bx \cdot x) = \omega ab, \end{aligned}$$

что совпадает с таблицей умножения для супералгебры $B(\Gamma, *, R_\omega)$. $\square$

2.6.5. Векторные супералгебры

Лемма 2.24. *Если $x^2 = \gamma \neq 0$ и $[x, \Gamma] = 0$, то супералгебра $B = \Gamma \oplus M$ является скрученной супералгеброй векторного типа $B(\Gamma, D, \gamma)$.*

Доказательство. В силу леммы 2.20 и равенства $[x, \Gamma] = 0$ верно $M = \Gamma x$. Покажем, что $B = B(\Gamma, D, \gamma)$, где $aD = \frac{1}{2}(a, x, x)$. В силу правой альтернативности имеем:

$$\begin{aligned} a \cdot bx &= (ab)x, \\ ax \cdot b &= -(ab)x + 2a(bx) = (ab)x, \\ 2ax \cdot bx &= ax(b \circ x) = (ax \cdot b)x + (ax \cdot x)b = \\ &= (ab)x \cdot x + (ax \cdot x)b = 2(ab)^D + 2\gamma ab + 2a^D b = 2\gamma ab + 4a^D b + 2ab^D, \end{aligned}$$

следовательно,

$$ax \cdot bx = \gamma ab + 2a^D b + ab^D. \quad \square$$

2.6.6. Супералгебра $B = \Gamma \oplus M$ является дублем

Лемма 2.25. *Если $a, b \in \Gamma$, $z, u, v \in M$, то*

$$\text{а) } (a, z, bu) = (a, z, u)b; \quad \text{б) } (a, z, v)u = (a, u, v)z.$$

Доказательство. В силу суперизованного правого тождества Муфанг

$$\begin{aligned}(a, z, bu) + (a, b, zu) &= (a, z, u)b - (a, b, u)z, \\ (a, z, uv) - (a, u, zv) &= -(a, z, v)u + (a, u, v)z,\end{aligned}$$

откуда в силу $(\Gamma, \Gamma, M) = 0$ следует требуемые равенства. $\square$

Пусть x, y — базисные векторы неизотропного пространства M над Γ . Тогда в силу леммы 2.25 б) имеем $(a, x, x)y = (a, y, x)x$ и по линейной независимости x, y следует $(a, x, x) = (a, y, x) = 0$. Применяя лемму 2.25 а) получаем $(a, bu, cv) = (a, u, v)bc = 0$, где $u, v \in \{x, y\}$, имеем $(\Gamma, M, M) = 0$, т.е. B — супералгебра скалярного типа и, значит, по теореме 2.5 является ω -дублем.

2.6.7. Предварительный результат

Определение 2.4. Супералгебру $B = \Gamma \oplus M$ абелева типа назовем *исключительным дублем*, если $M = \Gamma x$ и $[x, \Gamma] \neq 0$, $[x, M] \neq 0$ для некоторого неизотропного вектора $x \in M$.

Предложение 2.10. Пусть $B = \Gamma \oplus M$ — центральная простая правоальтернативная супералгебра абелева типа над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики не равной 2. Если Γ — поле, то B является либо супералгеброй $B_{1|2}$, либо скрученной супералгеброй векторного типа, либо ω -дублем скалярного типа, либо исключительным дублем.

Доказательство следует из пп. 2.6.3–2.6.6.

2.6.8. Таблица умножения исключительного дубля

Пусть $B = \Gamma \oplus M$ — центральный простой исключительный дубль поля Γ , т.е. $M = \Gamma t$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}t^2 &= \omega, & ta &= a^*t, \\ a^\sigma &= a^* + a, & a^\tau &= a^* - a, \\ a^D &= (a, t, t), & a^\chi &= (t, t, a).\end{aligned}$$

Заметим, что отображение $^*: \Gamma \rightarrow \Gamma$ является вложением.

Считая, что супералгебра B правоальтернативна, восстановим её таблицу умножения:

- 1° $a \cdot bt = (ab)t, \quad at \cdot b = atb = (ab^*)t,$
- 2° $t \cdot a^*t = t \cdot ta = t^2a - (t, t, a) = \omega a - a^\chi,$
- 3° $[b, t] = bt - tb = bt - b^*t = -b^\tau t,$

$$4^\circ \ (am, b, m) = -(a, m, [b, m]) + a(m, b, m) = (a, m, b^\tau m) + a(m, b, m) = (a, m, m)b^\tau - a(m, m, b) = a^D b^\tau - ab^\chi,$$

$$5^\circ \ am \cdot m = (a, m, m) + am^2 = a^D + \omega a,$$

$$6^\circ \ (am \cdot b)m = (ab^*m)m = (ab^*)^D + \omega ab^*,$$

$$7^\circ \ am \cdot bm = \omega ab^* + a^D b^* + a(b^*)^D - a^D b^\tau + ab^\chi = a^D b + a(\omega b^* + b^{*D} + b^\chi) = a^D b + ab^\psi, \text{ где } b^\psi = \omega b^* + b^{*D} + b^\chi.$$

2.6.9. Дополнительные леммы

Лемма 2.26. Верно соотношение $D \neq 0$.

Доказательство. В самом деле, если $(\forall a \in \Gamma) a^D = 0$, то $am \cdot bm = ab^\psi$, где $\psi = {}^*R_\omega + \chi$. Значит, B совпадает с супералгеброй вида $B(\Gamma, *, \psi)$ относительно умножения:

$$a[b] = [ab], \quad [a]b = [ab^*], \quad [a][b] = ab^\psi,$$

где $[b] = bm$. Однако, такая супералгебра является скалярной, т.е. $(\Gamma, M, M) = 0$, — противоречие. $\square$

Лемма 2.27. Существует такой элемент $a \in \Gamma$, что $a^* \neq a$.

Доказательство. В самом деле, если $(\forall a \in \Gamma) a^* = a$, то $\Gamma = \Phi$ и $D = 0$, получаем противоречие. $\square$

Лемма 2.28. Если $x, y \in \Gamma m$, то вложение $*$ и дифференцирование $D = R_{x,y}$ перестановочны.

Доказательство. Пусть $(m, x, y) = bm$; тогда в силу суперизованного тождества Клейнфелда (1.6) имеем:

$$\begin{aligned} (a^{D*} - a^{*D})m &= (a, x, y)^*m - (a^*, x, y)m = \\ &= m(a, x, y) - (a^*m, x, y) + a^*(m, x, y) = \\ &= (ma, x, y) - (m, x, y)a - (ma, x, y) + a^*(m, x, y) = \\ &= -bma + a^*bm = -a^*bm + a^*bm = 0. \quad \square \end{aligned}$$

2.6.10. Гипотетический дубль $B(\Gamma, *, D, \psi)$

Определение 2.5. Супералгебру $B(\Gamma, *, D, \psi) = \Gamma \oplus [\Gamma]$ назовем *гипотетическим дублем*, если $*$: $\Gamma \rightarrow \Gamma$ — вложение, D — ненулевое дифференцирование алгебры Γ над Φ , ψ — линейный оператор Γ над Φ и умножение однородных элементов задано правилами:

$$a[b] = [ab], \quad [a]b = [ab^*], \quad [a][b] = a^D b + ab^\psi.$$

Можно проверить, что супералгебра $B(\Gamma, *, D, \psi)$ является простой. Далее мы покажем, что она не может быть правоальтернативна.

Предложение 2.11. *Правоальтернативных гипотетических дублей не существует.*

Доказательство. Допустим, что гипотетический дубль правоальтернативен. Тогда силу леммы 2.28 верно равенство: $(a^*, t, bt) = (a, t, bt)^*$. Учитывая лемму 2.25 а), имеем

$$(a^*, t, t)b = ((a, t, t)b)^* = (a, t, t)^*b^*.$$

Следовательно, $(a, t, t)^*b = (a, t, t)^*b^*$. Поскольку $0 \neq (a, t, t)^* \in \Gamma$ в силу леммы 2.26, то $b^* = b$ для любого $b \in \Gamma$, что противоречит лемме 2.27. $\square$

Из предложений 2.10 и 2.11 вытекает теорема

Теорема 2.6. *Центральная простая правоальтернативная супералгебра $B = \Gamma \oplus M$ абелева типа, в которой чётная часть Γ является полем характеристики не равной двум (основное поле Φ предполагается алгебраически замкнутым), изоморфна либо коммутативной альтернативной супералгебре $B_{1|2}$ или $B(\Gamma, D, 0)$ ($\text{char } \Phi = 3$), либо скрученной $(-1, 1)$ -супералгебре Шестакова $B(\Gamma, D, \gamma)$, либо скалярному ω -дублю $B(\Gamma, *, R_\omega)$.*

2.6.11. Достаточное условие простоты супералгебры

Предложение 2.12. *Пусть $B = \Gamma \oplus M$ — правоальтернативная унитарная супералгебра. Если Γ — поле и $M^2 \neq 0$, то супералгебра B является простой.*

Доказательство. Пусть $I \oplus N$ — ненулевой идеал в B . Если $0 \neq I$, то $0 \neq I \triangleleft \Gamma$, значит, $I = \Gamma$ и $1 \in I \oplus N$, откуда следует, что $I \oplus N = B$. Значит, можно считать, что $N * \Gamma \subseteq N$ и $N * M = 0$. Поскольку $M^2 \subseteq \Gamma$, то в силу правой альтернативности $M^2\Gamma \subseteq (M\Gamma)M + M(M \circ \Gamma) \subseteq M^2$, следовательно, $M^2 = \Gamma$. Наконец, $M^2N \subseteq (MN)M + M[M, N] = 0$, откуда $N = 0$. $\square$

Глава 3

Простые супералгебры с ассоциативно-коммутативной чётной частью

В этой главе изучаются простые конечномерные правоальтернативные унитарные супералгебры над полем характеристики нуль. И доказывається

Теорема 3.1. *Пусть $B = A \oplus M$ — простая конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра над полем Φ характеристики 0. Если A — ассоциативно-коммутативная алгебра, то B является супералгеброй абелева типа.*

3.1. Предварительные леммы и замечания

Всюду ниже в этой главе $B = A \oplus M$ — простая конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра с ассоциативно-коммутативной чётной частью A (характеристика основного поля Φ предполагается равной 0). По предложению 1.2 поле Φ можно считать алгебраически замкнутым.

Лемма 3.1. *Верно равенство: $M^2 = A$.*

Доказательство. Покажем, что M^2 — идеал в A . По правой альтернативности имеем

$$AM^2 = M^2A \subseteq MA \cdot M + M(M \circ A) \subseteq M^2.$$

Значит, $M^2 + M \triangleleft B$ и ввиду простоты B получаем требуемое. $\square$

По теореме Веддербёрна об отщеплении радикала (см. [28]): $A = S \oplus \mathfrak{R}$, где $S = \Phi e_1 \oplus \dots \oplus \Phi e_n$ — полупростая алгебра, $\mathfrak{R} = \text{Nil } A$ — ниль-радикал A . Кроме того, положим: $E = (e_1, \dots, e_n)$ — полная система ортогональных идемпотентов и $A_i = Ae_i$.

Лемма 3.2. *Верно равенство: $(B, S, A) = 0$.*

Доказательство. По соотношению (1.5) для элементов $p \in B$, $e_i \in E$, $a_j \in A_j$ имеем:

$$(p, e_i, a_j) = (p, e_i^2, a_j) = (p, e_i, e_i \circ a_j).$$

Если $i \neq j$, то $e_i \circ a_j = 0$ и $(p, e_i, a_j) = 0$, если же $i = j$, то $e_i \circ a_j = 2a_j$ и снова $(p, e_i, a_j) = 0$.

Лемма доказана. $\square$

Положим $R_{x,y} = R_x R_y - R_{xy}$, где $x, y \in M$.

Лемма 3.3. *Отображение $R_{x,y}$ является дифференцированием чётной части A и выполнены соотношения $SR_{x,y} = 0$ и $AR_{x,y} \subseteq \mathfrak{R}$.*

Доказательство. В силу суперизованного тождества Клейнфелда (1.6): $R_{x,y}$ — дифференцирование A . Если $e^2 = e$, то $(e, x, y) = (e^2, x, y) = e \circ (e, x, y) = 2(e, x, y)e$, значит, $(e, x, y) = 0$. Отсюда следует, что $SR_{x,y} = 0$.

Далее, по теореме Андерсона [27] ниль-радикал $\mathfrak{R}$ инвариантен относительно любого дифференцирования, значит, $\mathfrak{R}R_{x,y} \subseteq \mathfrak{R}$ и $AR_{x,y} \subseteq \mathfrak{R}$. $\square$

Замечание. Ограничение на характеристику в теореме связано с применением теорем Ведерберна и Андерсона, последняя справедлива только в случае нулевой характеристики. В самом деле, формальное дифференцирование D на алгебре усечённых многочленов $\Phi[t]/t^p\Phi[t]$, где $p = \text{char } \Phi$, показывает, что теорема Андерсона не верна в случае конечной характеристики. Однако, нам неизвестно является ли существенным ограничение на характеристику в нашей теореме.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма А. А. Алберта.

Лемма 3.4 ([25]). *Если $e^2 = e$, то $(\forall x \in M) [(e, e, x), e] = 0$. В частности, оператор левого умножения L_e на идемпотент e является корнем многочлена $(t^2 - t)^2$.*

3.2. Пирсово разложение супералгебры B^+

Введем пирсовы компоненты $\mathfrak{R}_i$, M_{ii} и M_{ij} ($i \neq j$) относительно системы E :

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_i &= \mathfrak{R}e_i, & M_{ii} &= \{x_{ii} := (e_i x)e_i \mid x \in M.\}, \\ M_{ij} &= \{x_{ij} := (e_i x)e_j + (e_j x)e_i \mid x \in M.\}.\end{aligned}$$

Легко видеть, что имеют место разложения:

$$\mathfrak{R} = \bigoplus_i \mathfrak{R}_i, \quad M = \bigoplus_{i,j} M_{ij}.$$

Заметим, что указанные пространства являются йордановыми компонентами в B^+ для $\mathfrak{R}$ и M относительно системы E (см. [50]).

Общий метод изучения правоальтернативных алгебр, восходящий еще к А. А. Алберту и А. И. Ширшову, заключается в привлечении присоединенной йордановой алгебры. Поскольку

B^+ не является простой йордановой супералгеброй, как это легко видеть из примеров простых супералгебр абелевого типа (см. главу 2), то использовать указанный подход в полном объеме невозможно. Тем не менее, можно доказать некоторые свойства пирсовых йордановых компонент и использовать их для изучения супералгебры B . Заметим, что йордановы свойства компонент можно найти в [39] и [50]. Однако, для полноты изложения мы приводим необходимые доказательства, тем более, что эти свойства являются очевидными следствиями правого тождества Муфанг.

Всюду ниже $a_i, b_i \in A_i$, $r_i, s_i \in \mathfrak{R}_i$, $x_{ij} \in M_{ij}$.

Лемма 3.5. *Выполнены равенства:*

- а) $e_1 x_{11} = x_{11} e_1 = x_{11}$;
- б) $a_2 x_{11} = x_{11} a_2 = 0$;
- в) $x_{11} \circ a_1 \in M_{11}$, $(x_{11} a_1) e_1 = x_{11} a_1$, $(a_1 x_{11}) e_1 = a_1 x_{11}$.

Доказательство. Используя правое тождество Муфанг (1.9) и лемму 3.2, получаем

- а) $e_1 x_{11} = e_1 \cdot (e_1 x) e_1 = (e_1 e_1 \cdot x) e_1 = x_{11}$, $x_{11} e_1 = (e_1 x) e_1 \cdot e_1 = x_{11}$;
- б) $a_2 x_{11} = a_2 \cdot (e_1 x) e_1 = (a_2 e_1 \cdot x) e_1 = 0$, $x_{11} a_2 = (e_1 x) e_1 \cdot a_2 = (e_1 x)(e_1 a_2) = 0$.
- в) В силу правой альтернативности имеем

$$e_1(x_{11} \circ a_1) = (e_1 x_{11}) a_1 + (e_1 a_1) x_{11} = x_{11} a_1 + a_1 x_{11} = x_{11} \circ a_1.$$

Далее, равенство $(x_{11} a_1) e_1 = x_{11} a_1$ вытекает из леммы 3.2. Наконец, снова по правой альтернативности и п. а) верно

$$(a_1 x_{11}) e_1 = -(a_1 e_1) x_{11} + a_1 (x_{11} \circ e_1) = -a_1 x_{11} + 2a_1 x_{11} = a_1 x_{11}. \quad \square$$

Лемма 3.6. *Справедливы следующие равенства:*

- а) $x_{12} \circ e_1 = x_{12}$;
- б) $e_1 x_{12} = e_1 x_{12} \cdot e_2 = x_{12} e_2$, $e_1 x_{12} \cdot e_2 + e_2 x_{12} \cdot e_1 = x_{12}$;
- в) $(e_1 + e_2) x_{12} = x_{12} (e_1 + e_2) = x_{12}$;
- г) $e_1 x_{12} \cdot e_1 = 0$.

Доказательство. В силу линеаризации правого тождества Муфанг (1.9) имеем

$$e_1 x_{12} = e_1 \{(e_1 x) e_2 + (e_2 x) e_1\} = (e_1 x) e_2, \quad (3.1)$$

$$(e_1 x_{12}) e_2 = e_1 \{(e_1 x) e_2 + (e_2 x) e_1\} \cdot e_2 = (e_1 x) e_2 \cdot e_2 = (e_1 x) e_2. \quad (3.2)$$

В силу леммы 3.2 ясно, что

$$x_{12} e_1 = \{(e_1 x) e_2 + (e_2 x) e_1\} e_1 = (e_2 x) e_1. \quad (3.3)$$

Складывая почленно равенства (3.1) и (3.3), получаем п. а).

Переименовывая индексы 1 и 2 в равенствах (3.2) и (3.3), получаем

$$(e_2x_{12})e_1 = (e_2x)e_1, \quad (3.4)$$

$$x_{12}e_2 = (e_1x)e_2. \quad (3.5)$$

Из равенств (3.1)–(3.5) вытекает п. б).

Из пп. а) и б) немедленно следует п. в):

$$(e_1 + e_2)x_{12} = e_1x_{12} + e_2x_{12} = x_{12}e_2 + e_2x_{12} = x_{12} \circ e_2 = x_{12},$$

$$x_{12}(e_1 + e_2) = x_{12}e_1 + x_{12}e_2 = x_{12}e_1 + e_1x_{12} = x_{12} \circ e_1 = x_{12}.$$

П. г) следует из п. б) и леммы 3.2: $(e_1x_{12})e_1 = (x_{12}e_2)e_1 = 0$. □

Лемма 3.7. Если $i \notin \{j, k\}$, то $a_ix_{jk} = x_{jk}a_i = 0$.

Доказательство. Учитывая лемму 3.5 б), достаточно проверить $a_3x_{12} = x_{12}a_3 = 0$.

По линейаризованному тождеству Муфанг (1.9)

$$a_3x_{12} = a_3\{(e_1x)e_2 + (e_2x)e_1\} = (a_3e_1)x \cdot e_2 + (a_3e_2)x \cdot e_1 = 0;$$

по леммам 3.6 в) и 3.2:

$$x_{12}a_3 = x_{12}(e_1 + e_2) \cdot a_3 = x_{12} \cdot (e_1 + e_2)a_3 = 0. \quad \square$$

Лемма 3.8. Выполнены следующие равенства:

$$\text{а) } x_{12} \circ a_1 \in M_{12}; \quad \text{б) } a_1x_{12} \cdot e_1 = 0.$$

Доказательство. а) Имеем:

$$a_1x_{12} = a_1\{e_1x_{12} \cdot e_2 + e_2x_{12} \cdot e_1\} = (a_1e_1)x_{12} \cdot e_2 = (e_1a_1)x_{12} \cdot e_2 =$$

$$= -(e_1x_{12})a_1 \cdot e_2 + e_1(a_1 \circ x_{12}) \cdot e_2 = e_1(a_1 \circ x_{12}) \cdot e_2,$$

$$x_{12}a_1 = x_{12}(e_1a_1 \cdot e_1) = (x_{12}e_1)a_1 \cdot e_1 = (e_2x_{12})a_1 \cdot e_1 = e_2(a_1 \circ x_{12}) \cdot e_1.$$

Сложив два эти равенства, получаем требуемое в п. а).

П. б) следует из леммы 3.6 г) и тождества Муфанг (1.9):

$$a_1x_{12} \cdot e_1 = (a_1e_1)x_{12} \cdot e_1 = a_1((e_1x_{12})e_1) = 0. \quad \square$$

3.3. Произведения компонент M_{ij} в супералгебре B

3.3.1. Лемма о произведении нечетных элементов

Лемма 3.9. *Справедливы соотношения:*

- а) $x_{ij}y_{kl} = 0$, если $\{i, j\} \neq \{k, l\}$;
- б) $x_{11}y_{11} \in A_1$;
- в) $x_{12}y_{12} \in A_1 + A_2$.

Доказательство. Заметим, что $(e_i, x, y) = 0$ по лемме 3.3, значит,

$$(e_i x)y = e_i(xy) \in e_i A = A_i. \quad (3.6)$$

а) Используя правое тождество Муфанг, леммы 3.6 б), 3.7 и включение (3.6), получаем:

$$x_{ij}y_{kl} = x_{ij}\{(e_k y)e_l + (e_l y)e_k\} = (x_{ij}e_k)y \cdot e_l + (x_{ij}e_l)y \cdot e_k = 0,$$

если $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$; и поскольку $(x_{12}e_1)y_{13} = (e_2 x_{12})y_{13} \in A_2$, то

$$x_{12}y_{13} = x_{12}\{(e_1 y_{13})e_3 + (e_3 y_{13})e_1\} = (x_{12}e_1)y_{13} \cdot e_3 + (x_{12}e_3)y_{13} \cdot e_1 \in A_2 e_3 = 0;$$

аналогично

$$x_{11}y_{12} = x_{11}\{(e_1 y_{12})e_2 + (e_2 y_{12})e_1\} = (e_1 x_{11})y_{12} \cdot e_2 \in A_1 e_2 = 0;$$

$$x_{12}y_{11} = x_{12}\{(e_1 y_{11})e_1\} = (x_{12}e_1)y_{11} \cdot e_1 = (e_2 x_{12})y_{11} \cdot e_1 \in A_2 e_1 = 0.$$

Точно также проверяются и остальные пункты:

$$\text{б)} \quad x_{11}y_{11} = x_{11}(e_1 y_{11} \cdot e_1) = (x_{11}y_{11})e_1 \in A e_1 \subseteq A_1;$$

$$\text{в)} \quad x_{12}y_{12} = x_{12}(e_1 y_{12} \cdot e_2 + e_2 y_{12} \cdot e_1) = (x_{12}e_1)y_{12} \cdot e_2 + (x_{12}e_2)y_{12} \cdot e_1 \in A_1 + A_2. \quad \square$$

3.3.2. Запись идемпотентов в виде произведения нечетных элементов

Лемма 3.10. *Пусть $x \in M$, $y_{kl} \in M_{kl}$. Если верно равенство $xy_{kl} = a \in A$, то найдется такой элемент $x_{kl} \in M_{kl}$, что $x_{kl}y_{kl} = a$.*

Доказательство. Если $xy_{kl} = a$, то, используя разложение элемента x по пирсовым компонентам $x = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}$, имеем $xy_{kl} = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}y_{kl} = x_{kl}y_{kl}$ в силу леммы 3.9 а). $\square$

Лемма 3.11. *Если $a \in M_{ij}^2$, то $(\forall b \in A) ab \in M_{ij}^2$.*

Доказательство. Пусть $a = \sum_{k=1}^m x_k y_k$ для некоторых элементов $x_k, y_k \in M_{ij}$. Тогда по правой альтернативности получаем

$$ab = \sum_{k=1}^m x_k y_k \cdot b = \sum_{k=1}^m (-x_k b \cdot y_k + x_k (y_k \circ b)).$$

По лемме 3.10 имеется такой элемент $x'_k \in M_{ij}$, что $x_k b \cdot y_k = x'_k y_k$, а по леммам 3.5 в), 3.7 и 3.8 а): $y_k \circ b \in M_{ij}$, что и требовалось. $\square$

Лемма 3.12. Если $M_{11}^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$, то $e_1 \in M_{11}^2$.

Доказательство. Пусть $M_{11}^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$; тогда по лемме 3.9 б) для некоторых элементов $x, y \in M_{11}$ верно $xy = e_1 + r_1$, где $r_1 \in \mathfrak{R}_1$, т.е. $e_1 + r_1 \in M_{11}^2$. По лемме 3.11 для любого k : $r_1^k + r_1^{k+1} = (e_1 + r_1)r_1^k \in M_{11}^2$. Из нильпотентности элемента r_1 следует, что $r_1^m = 0$ для некоторого показателя m . Тогда

$$e_1 = (e_1 + r_1) - (r_1 + r_1^2) + \cdots + (-1)^k (r_1^k + r_1^{k+1}) + \cdots \in M_{11}^2. \quad \square$$

Понятно, что рассуждения леммы 3.12 применимы не только к компонентам вида M_{11} , но и к компонентам вида M_{12} , но в следующей лемме для таких компонент этот результат будет существенно усилен.

Лемма 3.13. Если $x_{12}y_{12} \equiv e_1 + \beta e_2 \pmod{\mathfrak{R}}$, где $\beta \in \Phi$, то $(\exists u_{12}, v_{12} \in M_{12}) u_{12}v_{12} = e_1$.

Доказательство. Поскольку $x_{12}y_{12} \in A_1 + A_2$ по лемме 3.9 в), то $x_{12}y_{12} = e_1 + \beta e_2 + r_1 + r_2$, где $r_1 \in \mathfrak{R}_1$, $r_2 \in \mathfrak{R}_2$. Пусть $e_1 x_{12} = \sum u_{ij}$ — разложение по пирсовым компонентам. Тогда

$$e_1 + r_1 = e_1(e_1 + \beta e_2 + r_1 + r_2) = e_1(x_{12}y_{12}),$$

и на основании леммы 3.3 имеем

$$e_1(x_{12}y_{12}) = (e_1 x_{12})y_{12} = u_{12}y_{12}.$$

Таким образом, $u_{12}y_{12} = e_1 + r_1$.

На основании леммы 3.8 а), можно ввести обозначение $z_{12} = y_{12} \circ r_1$; тогда по правой альтернативности, и учитывая лемму 3.2, имеем

$$\begin{aligned} e_1 x_{12} \cdot z_{12} &= (e_1 x_{12})(y_{12} \circ r_1) = (e_1 x_{12} \cdot y_{12})r_1 + (e_1 x_{12} \cdot r_1)y_{12} = \\ &= (e_1 \cdot x_{12}y_{12})r_1 + (x_{12}e_2 \cdot r_1)y_{12} = (e_1 + r_1)r_1 = r_1 + r_1^2. \end{aligned}$$

Значит, $r_1 + r_1^2 = e_1 x_{12} \cdot z_{12} = \sum u_{ij} z_{12} = u_{12} z_{12}$.

Тем самым, для элемента $v_{12} = y_{12} - z_{12}$ получаем

$$u_{12}v_{12} = u_{12}(y_{12} - z_{12}) = e_1 - r_1^2.$$

Рассуждая аналогично, можно так подобрать элементы $u', v' \in M_{12}$, что $u'v' = e_1 + (-1)^m r_1^{m'}$, где $m' = 2^m$, и, значит, ввиду нильпотентности элемента r_1 можно считать, что $u'v' = e_1$ для подходящих элементов $u', v' \in M_{12}$. $\square$

3.4. Ростки компонент

3.4.1. Ростки компонент

Идемпотент e_i назовем *ростком компоненты* M_{jk} , если $e_i \in M_{jk}^2$. Ввиду леммы 3.9 ясно, что это возможно только в случае $i \in \{j, k\}$.

Лемма 3.14. *Если e_1 — росток компоненты M_{1k} (возможно, что $k = 1$), то для любого $j \neq k$ выполнено равенство $e_1 M_{1j} = 0$. Далее, всякий идемпотент является ростком некоторой компоненты, причем один идемпотент не может быть ростком двух различных компонент.*

Доказательство. Допустим, что $e_1 \in M_{1k}^2$; тогда для некоторых элементов $x_i, y_i \in M_{1k}$ выполнено равенство $e_1 = \sum_{i=1}^m x_i y_i$. Значит, правой альтернативности и лемме 3.9(a) для любого $z \in M_{1j}$:

$$e_1 z = \sum_{i=1}^m x_i y_i \cdot z = \sum_{i=1}^m x_i z \cdot y_i + \sum_{i=1}^m x_i [y_i, z] = 0.$$

Отсюда вытекает требуемое равенство $e_1 M_{1j} = 0$.

Докажем, что e_1 является ростком какой-нибудь компоненты. По лемме 3.1: $M^2 = A$, значит, $e_1 \in M^2$. Если $(\forall k \geq 2) M_{1k}^2 \subseteq \mathfrak{R}_1 + A_k$ и $M_{11}^2 \subseteq \mathfrak{R}_1$, то $e_1 \notin M^2$, значит, либо $(\exists k \geq 2) e_1 + \mathfrak{R}_1 + A_k \subseteq M_{1k}^2$, либо $e_1 + \mathfrak{R}_1 \subseteq M_{11}^2$. Тогда e_1 в силу лемм 3.12 и 3.13 является ростком либо M_{1k} , либо M_{11} .

Допустим, что $e_1 \in M_{1k}^2$ и $e_1 \in M_{1j}^2$ при $k \neq j$; тогда $(\exists z_i, t_i \in M_{1j}) e_1 = \sum_{i=1}^l z_i t_i$. В силу леммы 3.3 и равенств $e_1 z_i = 0$ имеем: $e_1 = e_1^2 = e_1 (\sum_{i=1}^l z_i t_i) = \sum_{i=1}^l (e_1 z_i) t_i = 0$, — противоречие. $\square$

Будем говорить, что идемпотент e_i *действует скалярно* на пространстве V , если существуют такие скаляры ρ_i, λ_i , что для любого $x \in V$ выполнены равенства $x e_i = \rho_i x$, $e_i x = \lambda_i x$; алгебра S *действует скалярно* на V , если все идемпотенты действуют скалярно на нем. Заметим, что алгебра S в силу леммы 3.5 действует скалярно на M_{ii} .

Лемма 3.15. Пусть V — подпространство в M_{12} . Если идемпотент e_1 действует (справа или слева) скалярно на V , то и алгебра S действует скалярно на V .

Доказательство. Поскольку в силу правой альтернативности и леммы 3.4 операторы R_{e_1} , L_{e_1} имеют собственные значения 0 и 1, то либо $x_{12}e_1 = 0$, либо $x_{12}e_1 = x_{12}$. Если $x_{12}e_1 = x_{12}$, то $x_{12}e_2 = 0$ по лемме 3.6.

Пусть $x_{12}e_1 = 0$. Тогда по лемме 3.6 имеем:

$$e_1x_{12} = x_{12} \circ e_1 = x_{12}, \quad e_2x_{12} = (e_1 + e_2)x_{12} - e_1x_{12} = 0.$$

Это означает, что на V скалярно действуют идемпотенты e_1 и e_2 . По лемме 3.7 остальные идемпотенты $e_3, e_4, \dots$ действуют на V нулевым образом как слева, так и справа, т.е. и они действуют скалярно. $\square$

Лемма 3.16. Выполнены свойства:

- а) Если идемпотент e_1 не является ростком M_{11} , то $M_{11} = 0$.
- б) Если идемпотент e_1 не является ростком M_{12} , то $(\forall z \in M_{12}) e_1z = 0, e_2z = z$.
- в) Если $M_{12} \neq 0$, то хотя бы один из идемпотентов e_1 и e_2 является её ростком.

Доказательство. а) Поскольку e_1 не является ростком M_{11} , то по лемме 3.14 элемент e_1 является ростком некоторой компоненты M_{ij} , значит, $M_{ij} = M_{1k}$ ($k \geq 2$). Тогда по лемме 3.14 имеем: $e_1M_{11} = 0$. Однако, по лемме 3.5 а): $e_1x_{11} = x_{11}$, значит, $M_{11} = 0$.

б) Пусть e_1 не является ростком компоненты M_{12} . Тогда по лемме 3.14 верно $e_1M_{12} = 0$. Так как $x_{12} \circ e_1 = x_{12}$, то $x_{12}e_1 = x_{12}$, откуда $e_2x_{12} = x_{12}$ по лемме 3.6 б).

в) Пусть $M_{12} \neq 0$ и e_1, e_2 не являются ростками этой компоненты. Тогда по лемме 3.14 верно $e_1x_{12} = 0, e_2x_{12} = 0$. Однако, по лемме 3.6 в) $(e_1 + e_2)x_{12} = x_{12}$. Из этих трех равенств следует, что $x_{12} = 0$, т.е. $M_{12} = 0$, — противоречие. $\square$

Заметим, что из лемм 3.16 и 3.9 вытекает, что всякая ненулевая компонента имеет 1 или 2 ростка. Более точно, если $M_{11} \neq 0$, то она имеет единственный росток e_1 ; если же $M_{12} \neq 0$, то только e_1 и e_2 могут быть её ростками.

3.4.2. Одно-ростковые компоненты

Лемма 3.17. Если компонента M_{12} имеет единственный росток e_1 , то

а) $A * M_{12} = M_{12}, A_2M_{12} = M_{12}A_1 = 0$. В частности, алгебра S действует скалярно на компоненте M_{12} .

б) $(A, A, M_{12}) = 0$;

в) $(M_{12}, A, A) = 0$.

Доказательство. а) По условию e_1 — росток компоненты M_{12} , и пусть e_2 — росток компоненты M_{2i} при $i \neq 1$. Тогда по леммам 3.6 и 3.14 для всякого элемента $z \in M_{12}$:

$$ze_1 = e_2z = 0, \quad e_1z = ze_2 = z.$$

Заметим, что ввиду леммы 3.2: $za_1 = ze_2 \cdot a_1 = z \cdot e_2a_1 = 0$. Кроме того, по лемме 3.8: $z \circ a_2 \in M_{12}$, поэтому $z \circ a_2 = e_1(z \circ a_2) = e_1z \cdot a_2 + e_1a_2 \cdot z = za_2$, т.е. $a_2z = 0$ и $za_2 \in M_{12}$. Отсюда имеем

$$A_2M_{12} = M_{12}A_1 = 0, \quad A_1M_{12} + M_{12}A_2 \subseteq M_{12}. \quad (3.7)$$

Тем самым, п. а) доказан.

б) Поскольку $A_2M_{12} = 0$ и $A_1M_{12} \subseteq M_{12}$ в силу (3.7), то осталось проверить $(A_1, A_1, M_{12}) = 0$. На основании равенства $M_{12}A_1 = 0$ имеем для элементов $a_1, b_1 \in A_1$:

$$a_1 \cdot b_1z = a_1(b_1 \circ z) = a_1b_1 \cdot z + a_1z \cdot b_1 = a_1b_1 \cdot z.$$

в) Вначале проверим, что $M_{12}^2 \subseteq A_1$. Пусть $x, y \in M_{12}$. Тогда в силу (3.6) и (3.7) имеем $xy = e_1x \cdot y = e_1 \cdot xy$, т.е. $M_{12}^2 \subseteq A_1$. Далее, по лемме 3.13 найдутся такие элементы $u, v \in M_{12}$, что $uv = e_1$. Тогда для любого элемента $z \in M_{12}$ ввиду парвой альтернативности и (3.7) имеем:

$$z = e_1z = uv \cdot z = uz \cdot v + u[v, z] = uz \cdot v \in \Phi v + \mathfrak{R}_1v,$$

т.е.

$$M_{12} = \Phi v + \mathfrak{R}_1v. \quad (3.8)$$

Отсюда вытекает, что для любого $r_2 \in \mathfrak{R}_2$ найдутся такие $r_1 \in \mathfrak{R}_1$, $\alpha \in \Phi$, что $vr_2 = \alpha v + r_1v$. Докажем, что $\alpha = 0$. Пусть, от противного, $\alpha \neq 0$. Тогда можно записать $v = s_1v + vs_2$, где $s_1 \in \mathfrak{R}_1$, $s_2 \in \mathfrak{R}_2$. Так как $M_{12}A_1 = 0$ в силу (3.7), то $uz \cdot s_1 = u \cdot s_1z$ в силу правой альтернативности, откуда

$$M_{12} \cdot \mathfrak{R}_1M_{12} \subseteq \mathfrak{R}_1. \quad (3.9)$$

Отметим также, что ввиду п. б) и (3.9) верно

$$M_{12} \cdot (\mathfrak{R}_1M_{12})\mathfrak{R}_2 \subseteq M_{12} \cdot \mathfrak{R}_1(M_{12}\mathfrak{R}_2) \subseteq \mathfrak{R}_1. \quad (3.10)$$

Учитывая а) и б), имеем по модулю $\mathfrak{R}$:

$$e_1 = uv = u(s_1v + vs_2) \equiv u \cdot vs_2 = u \cdot (s_1v + vs_2)s_2 \equiv u \cdot vs_2^2 = \dots \equiv u \cdot vs_2^k = 0.$$

Получили противоречие, значит, $\alpha = 0$ и $vr_2 = r_1v$, т.е. $v\mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{R}_1v$.

Для завершения доказательства п. в) проведем необходимые вычисления, используя равенство $(A, M_{12}, A) = 0$:

$$vr_2 \cdot s_2 = r_1v \cdot s_2 = r_1 \cdot vs_2 = r_1 \cdot s_1v = r_1s_1 \cdot v.$$

Отсюда в силу коммутативности A следует, что $vr_2 \cdot s_2 = vs_2 \cdot r_2$. Поэтому, на основании правой альтернативности, верно

$$2vr_2 \cdot s_2 = vr_2 \cdot s_2 + vs_2 \cdot r_2 = v(r_2 \circ s_2) = 2v \cdot r_2s_2. \quad (3.11)$$

Применяя снова п. б), получаем:

$$(r'_1v \cdot r_2)s_2 = (r'_1 \cdot vr_2)s_2 = r'_1(vr_2 \cdot s_2) = r'_1(v \cdot r_2s_2) = r'_1v \cdot r_2s_2. \quad (3.12)$$

Учитывая равенства (3.8), (3.11) и (3.12), получаем требуемое в п. в). $\square$

3.4.3. Двух-ростковые компоненты

Пусть имеется 2-ростковая компонента M_{12} . Докажем, что в простой супералгебре B отсутствуют компоненты M_{1i} и M_{2i} при $i \notin \{1, 2\}$. Предположим противное; пусть имеется компонента $M_{2i} \neq 0$. Переобозначим идемпотенты так, чтобы $i = 3$. По леммам 3.14 и 3.16 идемпотент e_3 является ростком компоненты M_{23} (иначе эта компонента не имеет ростков). Мы получили первую компоненту в цепочке ненулевых компонент, которую мы хотим определить. Если другой компоненты M_{3i} нет, то эта компонента будет и последней; если же она есть, то $i \notin \{1, 2, 3\}$ иначе мы бы получили «безростковую» компоненту, а по лемме 3.16 «безростковая» компонента нулевая. Обозначим новую компоненту M_{34} . Ее ростком является e_4 . Продолжая процесс, мы получим цепочку ненулевых одноростковых компонент $M_{23}, M_{34}, M_{45}, \dots$. Понятно, что эта цепочка должна оборваться на некоторой последней компоненте $M_{l,l+1}$ с ростком e_{l+1} такой, что другой компоненты $M_{l+1,i}$ нет.

Это означает, что $A_{l+1} * M \subseteq M_{l,l+1}$. Кроме того ясно, что $A_{l+1} * A = A_{l+1}$, $M_{l,l+1} * A = M_{l,l+1}$ и $M_{l,l+1} * M = A_{l+1}$. Поэтому $A_{l+1} + M_{l,l+1} \triangleleft B$, что противоречит простоте супералгебры B .

Лемма 3.18. *Если компонента M_{12} имеет два ростка e_1, e_2 , то*

$$A * M_{12} \subseteq M_{12}, \quad (S, S, M_{12}) = 0.$$

В частности, алгебра S действует скалярно на компоненту M_{12} .

Доказательство. Рассмотрим произведение $a_1x_{12} \cdot e_2$, используя лемму 3.6 а):

$$a_1x_{12} \cdot e_2 = a_1(x_{12} \circ e_2) = a_1x_{12}.$$

Кроме того, по лемме 3.8 б)

$$a_1x_{12} \cdot e_1 = 0.$$

Поскольку имеется ненулевая компонента M_{12} , то, в силу замечаний предшествующих лемме 3.18, другие компоненты M_{ij} при $i \in \{1, 2\}$ отсутствуют. Значит, имеет место разложение по пирсовым компонентам:

$$a_1x_{12} = y_{12} + \sum_{i,j \geq 3} y_{ij}.$$

Тогда

$$0 = a_1x_{12} \cdot e_1 = y_{12}e_1$$

и

$$a_1x_{12} = a_1x_{12} \cdot e_2 = y_{12}e_2.$$

Складывая два последних равенства, получаем по лемме 3.6 в), что $a_1x_{12} = y_{12} \in M_{12}$. Отсюда по лемме 3.8 а) заключаем, что $x_{12}a_1 \in M_{12}$. Следовательно, верно включение

$$A * M_{12} \subseteq M_{12}.$$

Пусть $x \in M_{12}$. Тогда в силу леммы 3.4 верно $[(e_1, e_1, x), e_1] = 0$. По доказанному, $y = (e_1, e_1, x) \in M_{12}$, значит, $ye_1 = e_1y = ye_2$ по лемме 3.6 б), откуда $y(e_1 - e_2) = 0$. После умножения справа на $e_1 - e_2$ имеем $0 = y(e_1 - e_2)^2 = y(e_1 + e_2) = y$ по лемме 3.6 в), т.е. $(e_1, e_1, x) = 0$. Поскольку $(e_1, e_1 + e_2, x) = (e_1(e_1 + e_2))x - e_1((e_1 + e_2)x) = e_1x - e_1x = 0$ по лемме 3.6 в), то $(e_1, e_2, x) = 0$. В силу равноправия идемпотентов e_1, e_2 , получаем $(e_2, e_2, x) = (e_2, e_1, x) = 0$. Это означает, что все тройки e_i, e_j, x_{12} ассоциативны. $\square$

Замечание. Если A — полупростая алгебра, т.е. $A = S$, то для доказательства теоремы достаточно воспользоваться леммами 3.15–3.18, причем от лемм 3.17 и 3.18 необходимо только включение $S * M_{12} \subseteq M_{12}$.

3.5. Структура 2-ростковой компоненты

3.5.1. Компоненты P_{12} и P_{21} в супералгебре B

Всюду в этом параграфе мы считаем, что $e_1, e_2 \in M_{12}^2$. Кроме того, положим

$$A_{12} = A_1 + A_2,$$

$$\mathfrak{A}_{12} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2,$$

$$P_{12} = e_1M_{12}e_2,$$

$$P_{21} = e_2M_{12}e_1;$$

по лемме 3.18 расстановка скобок на этих произведениях не играет роли.

Поскольку $P_{12}, P_{21} \subseteq M_{12}$, то $M_{12} = P_{12} \oplus P_{21}$.

Лемма 3.19. *Выполнены включения:*

- а) $\mathfrak{R}_1 P_{12} \subseteq P_{12}$, $P_{12} \mathfrak{R}_2 \subseteq P_{12}$, $P_{12} \mathfrak{R}_1 = 0$, $\mathfrak{R}_2 P_{12} \subseteq P_{21}$.
- б) $\mathfrak{R}_2 P_{21} \subseteq P_{21}$, $P_{21} \mathfrak{R}_1 \subseteq P_{21}$, $P_{21} \mathfrak{R}_2 = 0$, $\mathfrak{R}_1 P_{21} \subseteq P_{12}$.
- в) В частности, верно включение $(\mathfrak{R}_{12} * M_{12}) * A_{12} \subseteq \mathfrak{R}_{12} * M_{12}$.

Доказательство. а) Покажем сначала, что для $x \in M_{12}$ справедливы равносильности:

$$x \in P_{12} \Leftrightarrow xe_1 = 0 \Leftrightarrow xe_2 = x. \quad (3.13)$$

В самом деле, если $x \in P_{12}$, то $x = e_1 x_{12} e_2$, значит, $xe_1 = (e_1 x_{12} e_2) e_1 = (e_1 x_{12})(e_2 e_1) = 0$. Отсюда в силу леммы 3.6 верно $xe_2 = x(e_1 + e_2) - xe_1 = x$. Наконец, если $xe_2 = x$, то, записав $x = p_{12} + p_{21}$, имеем $p_{12} + p_{21} = x = xe_2 = (p_{12} + p_{21})e_2 = p_{12}e_2 + p_{21}e_2 = p_{12}$; тогда $p_{21} = 0$ и $x = p_{12} \in P_{12}$.

Далее, лемм 3.2 и 3.6 имеем:

$$\begin{aligned} (r_1 p_{12}) e_1 &= -r_1 p_{12} + r_1 (p_{12} \circ e_1) = -r_1 p_{12} + r_1 p_{12} = 0; \\ (p_{12} r_2) e_1 &= 0; \quad p_{12} r_1 = p_{12} (e_1 r_1) = (p_{12} e_1) r_1 = 0; \\ e_2 p_{12} &= 0; \quad e_2 (p_{12} r_2) = (p_{12} r_2) e_1 = 0; \end{aligned}$$

значит, $(e_2, r_2, p_{12}) = -(e_2, p_{12}, r_2) = -(e_2 p_{12}) r_2 + e_2 (p_{12} r_2) = 0$, т.е.

$$e_2 (r_2 p_{12}) = r_2 p_{12}.$$

Из этих равенств, на основании (3.13), получаем включения из п. а).

П. б) получается из п. а) ввиду симметрии индексов 1 и 2.

П. в) немедленно вытекает из пп. а) и б) и скалярных действий идемпотентов на компонентах P_{12} и P_{21} . □

3.5.2. Дополнительные свойства компоненты P_{12}

Напомним, что пространство $V \subseteq M$ называется *изотропным*, если $(\forall x \in V) x^2 \in \mathfrak{R}$.

Лемма 3.20. *Если компонента P_{12} изотропна, то $(\forall x, y \in P_{12}) xy \in \mathfrak{R}_1$.*

Доказательство этой леммы дословно повторяет доказательство леммы 2.15 из главы 2.

Лемма 3.21. *Если компонента P_{12} изотропна, то $x_{12}(r_2 y_{21}) \in \mathfrak{R}$ для любых $x_{12} \in P_{12}$, $y_{21} \in P_{21}$, $r_2 \in \mathfrak{R}_2$.*

Доказательство. Пусть $x = x_{12}$, $y = r_2 y_{21}$; тогда ввиду (3.6) можно записать $xy = \alpha e_1 + r_1$, $yx = s_2 \in \mathfrak{R}_2$.

Применяя правую альтернативность, имеем по модулю $\mathfrak{R}M$:

$$\begin{aligned} 0 &= (x, x, y) - (x, y, x) \equiv -x(xy) - (xy)x + x(yx) = \\ &= -x(\alpha e_1 + r_1) - (\alpha e_1 + r_1)x + xs_2 \equiv -\alpha x + xs_2. \end{aligned}$$

Если $\alpha \neq 0$, то $x \equiv xr \pmod{\mathfrak{R}M}$ для подходящего $r \in \mathfrak{R}$. Итерируя это сравнение, получаем $x \equiv xr \equiv xr^2 \equiv \dots \equiv xr^k = 0$, — противоречие. $\square$

Лемма 3.22. *Если компонента P_{12} неизотропна, т.е. $(\exists x \in P_{12}) x^2 \notin \mathfrak{R}_1$, то $P_{12} = \Phi x + \mathfrak{R}_1 P_{12}$.*

Доказательство. Пусть $x = x_{12}$, $x^2 \notin \mathfrak{R}_1$ и $y \in P_{12}$. Положим

$$x^2 = \alpha e + r, \quad xy = \beta e + s, \quad yx = \gamma e + t,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$, $r, s, t \in \mathfrak{R}_1$, $e = e_1$. По условию $\alpha \neq 0$.

Используя равенства $xe = x\mathfrak{R}_1 = 0$ (см. лемму 3.19), вычислим ассоциаторы:

$$\begin{aligned} (x, x, y) &= x^2 y - x(xy) = (\alpha e + r)y - x(\beta e + s) = \alpha y + ry, \\ (x, y, x) &= (xy)x - x(yx) = (\beta e + s)x - x(\gamma e + t) = \beta x + sx. \end{aligned}$$

Поскольку $(x, x, y) = (x, y, x)$, то $\alpha y + ry = \beta x + sx$, значит, $y \in \Phi x + \mathfrak{R}_1 P_{12}$ и $P_{12} = \Phi x + \mathfrak{R}_1 P_{12}$. $\square$

Лемма 3.23. *Если компонента P_{12} неизотропна, то $P_{12}\mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{R}_1 M_{12}$.*

Доказательство. Из неизотропности P_{12} и леммы 3.22 имеем $P_{12} = \Phi x + \mathfrak{R}_1 P_{12}$. Поскольку $P_{12}\mathfrak{R}_2 \subseteq P_{12}$ (по лемме 3.19 a)), то для любого $r_2 \in \mathfrak{R}_2$ существуют $\alpha \in \Phi$, $s_1 \in \mathfrak{R}_1$ такие, что $xr_2 = \alpha x + s_1 x$. Покажем, что $\alpha = 0$. От противного, пусть $\alpha \neq 0$, тогда можно считать, что $x = sx + xr$, где $r, s \in \mathfrak{R}$, т.е. $x \equiv xr \pmod{\mathfrak{R}_{12}M_{12}}$. Заметим, что в силу правой альтернативности и леммы 3.18: $(\mathfrak{R}_{12}M_{12}) * \mathfrak{R}_{12} \subseteq \mathfrak{R}_{12}M_{12}$. Итерируя данное сравнение, получаем $x \equiv xr \equiv xr^2 \equiv \dots \equiv xr^m = 0$, поскольку элемент r нильпотентен. Противоречие, значит, $\alpha = 0$ и $P_{12}\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}P_{12} + \mathfrak{R}P_{21}$.

Учитывая, что по лемме 3.19:

$$P_{12}\mathfrak{R}_2 \subseteq P_{12}, \quad \mathfrak{R}_2 P_{12} \subseteq P_{21}, \quad \mathfrak{R}_2 P_{21} \subseteq P_{21}, \quad \mathfrak{R}_1 P_{21} \subseteq P_{12},$$

получаем

$$P_{12}\mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{R}_1 P_{12} + \mathfrak{R}_1 P_{21} = \mathfrak{R}_1 M_{12}. \quad \square$$

3.5.3. Идеал вида $\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{12} * M_{12}$ в супералгебре $A_{12} + M_{12}$

Лемма 3.24. *Верно включение: $P_{12}(\mathfrak{R}_1 M_{12}) \subseteq \mathfrak{R}_1$.*

Доказательство. В этой лемме $p_{12} \in P_{12}$, $x_{12} \in M_{12}$, $r_1, s_1 \in \mathfrak{R}_1$.

Пусть $p_{12}(r_1 x_{12}) = \alpha e_1 + s_1$. Учитывая, что $(r_1 x_{12})p_{12} = r_1(x_{12}p_{12}) + (r_1, x_{12}, p_{12}) \in \mathfrak{R}_1$ по леммам 3.3 и 3.19, имеем $[p_{12}, r_1 x_{12}] \in A_1$. Тогда верно

$$0 = p_{12}[p_{12}, r_1 x_{12}] = p_{12}^2(r_1 x_{12}) - p_{12}(r_1 x_{12}) \cdot p_{12}. \quad (3.14)$$

Покажем, что $p_{12}^2(r_1 x_{12}) \in \mathfrak{R}_1 M_{12}$. В самом деле, в силу леммы 3.19: $\mathfrak{R}_1 M_{12} \subseteq P_{12}$, значит, на основании леммы 3.18: $A_1(\mathfrak{R}_1 M_{12}) \subseteq e_1(\mathfrak{R}_1 M_{12}) + \mathfrak{R}_1(\mathfrak{R}_1 M_{12}) \subseteq \mathfrak{R}_1 M_{12}$, т.е. $p_{12}^2(r_1 x_{12}) \in \mathfrak{R}_1 M_{12}$. Тогда из (3.14) получаем $-\alpha p_{12} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{R}_1 M_{12}}$.

Если $\alpha \neq 0$, то $p_{12} \equiv 0$, значит, $P_{12}(\mathfrak{R}_1 M_{12}) \subseteq \mathfrak{R}_1$. Если же $\alpha = 0$, то $p_{12}(r_1 x_{12}) = s_1 \in \mathfrak{R}_1$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.25. *Верно включение: $(M_{12}, M_{12}, \mathfrak{R}_{12}) \subseteq \mathfrak{R}_{12}$.*

Доказательство. В самом деле, во-первых, имеем:

$$(P_{12}, P_{21}, \mathfrak{R}_1) = (P_{12}, \mathfrak{R}_1, P_{21}) = P_{12}(\mathfrak{R}_1 P_{21}) \subseteq \mathfrak{R}_1 \text{ ввиду леммы 3.24,}$$

$$(P_{12} P_{21}) \mathfrak{R}_2 \subseteq A_1 \mathfrak{R}_2 = 0 \text{ ввиду (3.6),}$$

$$(P_{12}, P_{21}, \mathfrak{R}_2) \subseteq (P_{12} P_{21}) \mathfrak{R}_2 - P_{12}(P_{21} \mathfrak{R}_2) = (P_{12} P_{21}) \mathfrak{R}_2 = 0 \text{ ввиду леммы 3.19 6).}$$

Во-вторых,

$$(P_{12}, P_{12}, \mathfrak{R}_1) = (P_{12} P_{12}) \mathfrak{R}_1 \subseteq A_1 \mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_1.$$

В-третьих, если P_{12} изотропна, то по лемме 3.20 выполнено $P_{12} P_{12} \subseteq \mathfrak{R}_1$ и

$$(P_{12}, P_{12}, \mathfrak{R}_2) \subseteq (P_{12} P_{12}) \mathfrak{R}_2 - P_{12}(P_{12} \mathfrak{R}_2) \subseteq P_{12} P_{12} \subseteq \mathfrak{R}_1;$$

если же P_{12} — неизотропная компонента, то $P_{12} \mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{R}_1 M_{12}$ по лемме 3.23, и на основании леммы 3.24 имеем:

$$(P_{12}, P_{12}, \mathfrak{R}_2) \subseteq (P_{12} P_{12}) \mathfrak{R}_2 - P_{12}(P_{12} \mathfrak{R}_2) = P_{12}(P_{12} \mathfrak{R}_2) \subseteq P_{12}(\mathfrak{R}_1 M_{12}) \subseteq \mathfrak{R}_1.$$

Тем самым, $(P_{12}, M_{12}, \mathfrak{R}_{12}) \subseteq \mathfrak{R}_{12}$. Аналогично проверяется, что $(P_{21}, M_{12}, \mathfrak{R}_{12}) \subseteq \mathfrak{R}_{12}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.26. *Верно соотношение: $\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{12} * M_{12} \triangleleft A_{12} + M_{12}$.*

Доказательство. Достаточно понять, что $(\mathfrak{R}_{12} * M_{12}) * M_{12} \subseteq \mathfrak{R}_{12}$, т.е. что четные элементы вида pqs , где $p, q, s \in \mathfrak{R}_{12} \cup P_{12} \cup P_{21}$, лежат в радикале $\mathfrak{R}_{12}$ (расстановка скобок в силу леммы

3.25 не играет роли). Если произведение $\pi = pqs$ начинается или заканчивается элементом из $\mathfrak{R}_{12}$, то в силу лемм 3.3 и 3.25 ясно, что $\pi \in \mathfrak{R}_{12}$. Итак, пусть $q \in \mathfrak{R}_{12}$ и можно считать, без ограничения общности, что $q = r_2 \in \mathfrak{R}_2$. Тогда $\pi = p_{12}r_2x_{21}$.

Если P_{12} изотропно, то ввиду леммы 3.21 имеем $\pi \in \mathfrak{R}_{12}$. Если же P_{12} неизотропно, то $p_{12}r_2 \cdot x_{21} \in \mathfrak{R}M \cdot M \subseteq \mathfrak{R}$ в силу леммы 3.23. Применяя лемму 3.25, получаем $\pi \in \mathfrak{R}$, и, стало быть, $\pi \in \mathfrak{R}_{12}$. $\square$

3.6. Абелевость простых супералгебр

По лемме 3.14 каждый идемпотент является ростком некоторой компоненты, причем эта компонента определяется ростком однозначно. Значит, имеет место разложение

$$M = M_{1i_1} \oplus \cdots \oplus M_{mi_m} \quad (3.15)$$

на ненулевые компоненты. Здесь $m \leq n$ (n — ёмкость супералгебры или размерность полупростой части A). Далее, каждый идемпотент e_j является ростком одной из компонент M_{ji_j} или M_{ki_k} , где $i_k = j$.

3.6.1. Компонента 1-го рода входит в разложение (3.15)

Компоненты вида M_{ii} назовем компонентами 1-го рода; а компоненты вида M_{ij} ($i \neq j$) назовем компонентами 2-го рода. Допустим, что в списке (3.15) существует (ненулевая) компонента 1-го рода, например, M_{11} ; тогда она имеет росток e_1 . Кроме того, можно утверждать: если $e_1 \in M_{ij}^2 + \mathfrak{R}$, то $i = j = 1$. Далее, в силу лемм 3.3 и 3.14 имеем $e_1 M_{12}^2 = (e_1 M_{12})M_{12} = 0$, значит, $M_{12}^2 \subseteq A_2$, т.е. квадраты всех компонент, отличных от M_{11} , содержатся в $I = A_2 + \cdots + A_n$. Обозначим через M' — сумму всех слагаемых в (3.15), за исключением M_{11} , и докажем, что $I + M' \triangleleft B$.

Во-первых, ясно, что $I \triangleleft A$. Во-вторых, ввиду лемм 3.17 и 3.18 каждая компонента 2-го рода замкнута относительно умножений справа и слева на элементы из A . Разложим элемент $x_{22} * a_2$ на компоненты в соответствии с равенством (3.15): $x_{22} * a_2 = y_{11} + y_{22} + \cdots + y_{ij} + \cdots$. Заметим, что в силу правой альтернативности $(x_{22} * a_2)e_1 = 0$. Значит, умножив обе указанной разложения справа на e_1 , получим $0 = y_{11} + \cdots + y_{ij} + \cdots$, при этом в правой части последнего равенства ввиду леммы 3.16 б) останутся только элементы $y_{1k} \in M_{1k}$. Из последнего равенства следует $y_{11} = 0$, т.е. $x_{22} * a_2 \in M'$. Итак, мы доказали включение $(I + M') * A \subseteq I + M'$.

Рассмотрим теперь произведения $I * M$ и $M' * M$. По доказанному, ясно, что $A_2 * M_{ij} \subseteq M'$. Далее, по лемме 3.9 а) имеем $M' * M = (M')^2 \subseteq I$.

Тогда из простоты супералгебры B следует, что $A = \Phi e_1$ и $M = M_{11}$; но это в силу результатов главы 2 влечет ассоциативность супералгебры B . Поскольку алгебра A коммутативна, то супералгебра B имеет абелев тип.

3.6.2. В представление (3.15) входит 2-ростковая компонента

Из предыдущего пункта вытекает, что в представление (3.15) входят только компоненты 2-го рода M_{ij} , т.е. $i \neq j$. Допустим, что среди них встречается 2-ростковая компонента M_{12} , т.е. предполагается, что $e_1, e_2 \in M_{12}^2$.

Обозначим через M' сумму всех слагаемых в (3.15), кроме M_{12} , и положим

$$M'' = M' + M_{12} * \mathfrak{R}, \quad I = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + A_3 + \cdots + A_n.$$

Докажем, что $I + M'' \triangleleft B$. Во-первых, ясно, что $I \triangleleft A$. Во-вторых, ввиду лемм 3.17 и 3.18 каждая компонента 2-го рода замкнута относительно умножений справа и слева на элементы из A . Кроме того, по лемме 3.19 в): $(M_{12} * \mathfrak{R}) * A \subseteq M_{12} * \mathfrak{R}$, значит, $M'' * A \subseteq M''$. Итак, доказано, что $(I + M'') * A \subseteq I + M''$.

Рассмотрим теперь произведения $I * M$ и $M'' * M$. Ясно, что $I * M \subseteq M''$. Далее, в силу лемм 3.9 и 3.26 имеем $M'' * M = (M')^2 + (M_{12} * \mathfrak{R}) * M_{12} \subseteq I$.

Итак, $I + M'' \triangleleft B$, следовательно, $A = \Phi e_1 \oplus \Phi e_2$ и $M = M_{12}$; тогда по лемме 3.18 супералгебра B имеет абелев тип.

3.6.3. В представление (3.15) входят только 1-ростковые компоненты 2-го рода

Согласно предыдущему пункту, все компоненты из представления (3.15) являются 1-ростковыми компонентами 2-го рода и тогда по лемме 3.17 супералгебра B имеет абелев тип. Теорема 3.1 полностью доказана.

Глава 4

Супералгебры с полупростой сильно альтернативной четной частью

Четная часть A супералгебры $B = A \oplus M$ называется *сильно альтернативной*, если A альтернативна и нечетная часть M является альтернативным A -бимодулем, другими словами, A -бимодуль B альтернативен. Для краткости будем говорить, что супералгебра *сильно альтернативна*, если её четная часть сильно альтернативна.

В этой главе изучаются конечномерные унитарные правоальтернативные супералгебры с полупростой сильно альтернативной четной частью. Вводится понятие слабого аннулятора нечетной части и доказывается, что он является суперидеалом, а сама супералгебра разлагается в прямую сумму слабого аннулятора и супералгебры с нулевым слабым аннулятором. В качестве следствия получено описание ассоциативных и альтернативных супералгебр из этого класса.

4.1. Предварительные обозначения и леммы

4.1.1. Слабый аннулятор супералгебры

Слабым аннулятором (weak annihilator) супералгебры $B = A \oplus M$ назовем множество $A_0 + M_0$, которое обозначим через $WA(B)$, если

$$M_0 = \{x \in M \mid x * M = 0\}, \quad A_0 = \{a \in A \mid a * M \subseteq M_0\}.$$

Эквивалентное определение слабого аннулятора выглядит следующим образом:

$$A_0 = \{a \in A \mid (a * M) * M = 0\}, \quad M_0 = \{x \in M \mid x * M = 0\}.$$

Введем обозначения: $A_0 = WA_0(B)$ и $M_0 = WA_1(B)$.

Далее будет показано, что *если четная часть A полупроста и сильно альтернативна, то слабый аннулятор $WA(B)$ является идеалом в супералгебре; факторалгебра по слабому аннулятору имеет нулевой слабый аннулятор* (теорема 4.5). Супералгебру с полупростой четной частью назовем *WA-полупростой*, если ее слабый аннулятор равен 0.

Если супералгебра B содержится в 2-многообразии, в частности, она альтернативна или $(-1, 1)$ -супералгебра, то $WA(B)$ является идеалом в B . В общем случае, он не является даже идеалом в присоединенной йордановой алгебре B^+ . Далее, он не является нильпотентным

идеалом, т.е. не лежит в радикале $\text{Rad } B$. Однако, как показывают результаты, полученные в этой главе, в рассматриваемом классе супералгебр он играет роль некоторого «радикала» и для него справедлива теорема об отщеплении.

4.1.2. Центральные идемпотенты

Всюду ниже в этой главе $B = A \oplus M$ — конечномерная сильно альтернативная правоальтернативная унитарная супералгебра с полупростой четной частью. Поскольку алгебра A полупроста, то по теореме Цорна $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$, где A_i — простая альтернативная алгебра с единицей e_i (см. [73]). Обозначим через $E = \{e_i \mid i = \overline{1, n}\}$ полную ортогональную систему центральных идемпотентов; число n назовем ёмкостью алгебры A .

Лемма 4.1. *Тройка множеств A, B, E ассоциативна, т.е. любой ассоциатор от элементов $a \in A, e \in E, p \in B$ равен нулю.*

Доказательство. По соотношению (1.5) для элементов $p \in B, e_i \in E$ и $a_j \in A_j$ имеем:

$$(p, e_i, a_j) = (p, e_i^2, a_j) = (p, e_i, e_i \circ a_j).$$

Если $i \neq j$, то $e_i \circ a_j = 0$ и $(p, e_i, a_j) = 0$, если же $i = j$, то $e_i \circ a_j = 2a_j$ и снова $(p, e_i, a_j) = 0$. Итак, $(p, e, a) = 0$. Так как B — альтернативный A -бимодуль, то все остальные ассоциаторы от элементов a, e, p также равны 0. $\square$

Лемма 4.2. *Справедливы равенства: $[E, A] = 0, (E, M, M) = 0$.*

Доказательство. Поскольку $[e_i, a_j] = 0$, то выполнено первое равенство. Если $e \in E, a \in A, x, y \in M$, то $e^2 = e, [e, a] = 0$ и в силу суперизованного тождества Клейнфелда (1.6)

$$(e, x, y) = (e^2, x, y) = -(e, e, x \circ y) + e \circ (e, x, y) = 2(e, x, y)e,$$

значит, $(e, x, y) = 0$. $\square$

4.1.3. Пирсовы компоненты

Как и раньше, рассмотрим пирсовы компоненты P_{ii}, P_{ij}, M_{ii} и M_{ij} ($i \neq j$) относительно полной системы центральных идемпотентов E :

$$P_{ii} = M_{ii} = \{x_{ii} := e_i x e_i \mid x \in M\},$$

$$P_{ij} = \{p_{ij} := e_i x e_j \mid x \in M\},$$

$$M_{ij} = \{x_{ij} := e_i x e_j + e_j x e_i \mid x \in M\}.$$

По лемме 4.1 расстановка скобок в рассмотренных произведениях несущественна, так как тройка элементов x, e_i, e_j ассоциативна.

Легко видеть, что имеет место разложение:

$$M = \bigoplus_{i \leq j} M_{ij} = \bigoplus_{i,j=1}^n P_{ij}.$$

Заметим, что указанные пространства M_{ii} и M_{ij} являются йордановыми пирсовыми компонентами пространства M относительно E в присоединенной супералгебре B^+ (см. [50]).

Всюду ниже используются обозначения $a_i, b_i \in A_i$, $x_{ij} \in M_{ij}$, $p_{ij} \in P_{ij}$.

Заметим, что из леммы 4.1 немедленно вытекает $e_1 x_{11} = x_{11} e_1 = x_{11}$; пространство M_{11} является A -бимодулем, причем $A_2 * M_{11} = 0$. Кроме того, справедлива

Лемма 4.3. *Выполнены следующие равенства:*

- а) $A_1 M_{12} \subseteq P_{12}$, $M_{12} A_1 \subseteq P_{21}$;
- б) $P_{12} + P_{21} \subseteq M_{12} \subseteq P_{12} + P_{21}$;
- в) $e_1 p_{12} = p_{12} e_2 = p_{12}$ для $p_{12} \in P_{12}$;
- г) $P_{12} A_1 = A_2 P_{12} = 0$.

В частности, P_{12} и M_{12} являются A -бимодулями.

Доказательство. а) Используя равенство $x_{12} e_1 = e_2 x_{12} = e_2 x_{12}$ и лемму 4.1, имеем:

$$\begin{aligned} a_1 x_{12} &= a_1 (e_1 x_{12} e_2 + e_2 x_{12} e_1) = e_1 a_1 x_{12} e_2 \in P_{12}, \\ x_{12} a_1 &= (e_1 x_{12} e_2 + e_2 x_{12} e_1) a_1 = x_{12} e_1 a_1 e_1 = e_2 x_{12} a_1 e_1 \in P_{21}. \end{aligned}$$

б) Заметим, что $p_{12} = e_1 x e_2 = e_1 e_1 x e_2 e_2 + e_2 e_1 x e_2 e_1 = e_1 p_{12} e_2 + e_2 p_{12} e_1 \in M_{12}$. Второе включение очевидно.

Столь же просто проверяются оставшиеся пп. в) и г):

- в) $p_{12} = e_1 x e_2 = e_1 e_1 x e_2 = e_1 p_{12}$, $p_{12} = e_1 x e_2 = e_1 x e_2 e_2 = p_{12} e_2$;
- г) $p_{12} a_1 = p_{12} e_2 a_1 = 0$, $a_2 p_{12} = a_2 e_1 p_{12} = 0$. □

Лемма 4.4. *Справедливы соотношения:*

- а) $x_{ij} y_{kl} = 0$, если $\{i, j\} \neq \{k, l\}$; б) $x_{11} y_{11} \in A_1$; в) $p_{12} x_{12} \in A_1$.

Доказательство. Пп. а) и б) доказаны в лемме 3.9.

П. в) следует из правой альтернативности и лемм 4.2, 4.3: $(p_{12} x_{12}) e_1 = -(p_{12} e_1) x_{12} + p_{12} (x_{12} \circ e_1) = p_{12} x_{12}$. □

4.2. Ветвление супералгебр

Обозначим через $V_{2|1} = V_{2|1}(e_i, e_j)$ супералгебру с четной частью $A = \Phi e_i \oplus \Phi e_j$ и нечетной $M = \Phi u_{ij}$, где ненулевыми произведениями базисных элементов e_i, e_j, u_{ij} являются только $e_i^2 = e_i, e_j^2 = e_j, e_i u_{ij} = u_{ij} e_j = u_{ij}, u_{ij}^2 = e_i$. Легко проверить, что супералгебра $V_{2|1}$ правоальтернативна; нечетная часть M совпадает с пирсовой компонентой P_{ij} ; супералгебра $V_{2|1}$ содержит единственный собственный суперидеал $\Phi e_i + \Phi u_{ij}$. Кроме того, она полупроста и WA-полупроста, но не разлагается в прямую сумму идеалов, являющихся простыми супералгебрами.

Супералгебра $V_{2|1}$ является абелевой, поскольку ее четная часть $\Phi e_i \oplus \Phi e_j$ ассоциативно-коммутативна, а нечетная часть Φu_{ij} является ассоциативным бимодулем над четной частью. Супералгебра $V_{2|1}(e_i, e_j)$ не является альтернативной, так как

$$(e_j, u_{ij}, u_{ij}) + (u_{ij}, e_j, u_{ij}) = (u_{ij} e_j) u_{ij} - u_{ij} (e_j u_{ij}) = e_i.$$

Будем изображать супералгебру $V_{2|1}(e_i, e_j)$ в виде графа (см. Рис. 4.1) и называть ее *ветвью*.

$$e_i \xrightarrow{u_{ij}} e_j$$

Легко заметить, что при $n > 1$ *циклическая супералгебра* $B_{n|n}$ (см. п. 2.1.3) раскладывается в сумму ветвей:

Рис. 4.1. $V_{2|1}(e_i, e_j)$.

$$\begin{aligned} B_{n|n} &= B_{n|n}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \\ &= V_{2|1}(e_1, e_2) + V_{2|1}(e_2, e_3) + \dots + V_{2|1}(e_{n-1}, e_n) + V_{2|1}(e_n, e_1), \end{aligned}$$

где под суммой понимается сумма соответствующих векторных пространств. Базисом супералгебры $B_{n|n}$ является система

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n; u_{12} = [e_1], \dots, u_{n-1,n} = [e_{n-1}], u_{n,1} = [e_n]\}.$$

Произведение базисных элементов в каждой из ветвей совпадает с произведением в супералгебре $B_{n|n}$, например,

$$u_{12} e_2 = [e_1] e_2 = [e_1 e_2^T] = [e_1^2] = [e_1] = u_{12},$$

где $e_1^T = e_n$ и $e_i^T = e_{i-1}$ ($i = \overline{2, n}$). Кроме того, произведение базисных элементов, не лежащих в одной ветви, равно нулю в супералгебре $B_{n|n}$.

Конструкцию, подобную этому примеру, но не допускающую заикливания ветвей рассмотрим в следующем определении.

Определение. Пусть $B = A + M$, $A = \sum_{k=1}^n A_k$ — разложение полупростой алгебры A в прямую сумму простых алгебр и $A_j = \Phi e_j$ — одномерная компонента в A . Если $B \cap$

$V_{2|1}(e_i, e_j) = \Phi e_j$, то ветвлением супералгебры B с помощью ветви $V_{2|1}(e_i, e_j)$ назовем супералгебру $B^{(j,i)} = B \boxplus V_{2|1}(e_i, e_j)$, определенную следующим образом:

1. Пространство $B^{(j,i)}$ является суммой векторных пространств B и $V_{2|1}(e_i, e_j)$. Четная часть супералгебры $B^{(j,i)}$ является суммой A и Φe_i , а нечетная часть — суммой M и $\Phi u_{i,j}$.
2. Пусть $\hat{A}_j = \sum_{k \neq j} A_k$. Тогда $(\hat{A}_j + M) * (\Phi e_i + \Phi u_{ij}) = 0$ и подпространства B и $V_{2|1}(e_i, e_j)$ являются подалгебрами в $B^{(j,i)}$.

Оператор (j, i) назовем *оператором ветвления*. Таким образом, при ветвлении $B^{(j,i)}$ к супералгебре B добавляется ветвь $V_{2|1}(e_i, e_j)$. В супералгебрах B и $V_{2|1}(e_i, e_j)$ идемпотент e_j является общим, именно этот элемент можно считать «местом крепления» ветви $V_{2|1}(e_i, e_j)$ к супералгебре B .

В качестве примера рассмотрим ветвление $B = V_{2|1}(e_1, e_2)^{(2,3)}$. По определению ветвления имеем

$$B = V_{2|1}(e_1, e_2) + V_{2|1}(e_3, e_2) = \text{span}(e_1, e_2, e_3, u_{12}, u_{32}),$$

где все ненулевые произведения базисных элементов определены так, как были определены в супералгебрах $V_{2|1}(e_1, e_2)$ и $V_{2|1}(e_3, e_2)$.

Такую супералгебру $V_{2|1}(e_1, e_2)^{(2,3)}$ можно изобразить в виде графа (см. Рис. 4.2). Обратим внимание на то, что элементы u_{12} и u_{32} связаны с направлением ребер в графе.

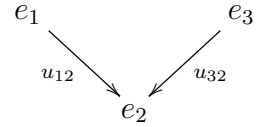


Рис. 4.2. $V_{2|1}(e_1, e_2)^{(2,3)}$.

Пусть $E(A, M)$ обозначает супералгебру с четной частью A и тривиальной нечетной частью M , т.е. $M^2 = 0$; алгебра $E(A, M)$ называется нулевым расщепляемым расширением; будем называть её, для краткости, *тривиально расщепляемой*.

Заметим, что супералгебра $V_{2|1}(e_i, e_j)$ может быть получена как ветвление $E_j^{(j,i)}$ супералгебры $E_j = E(\Phi e_j, 0)$. В самом деле, $E_j = \Phi e_j$. Далее,

$$E_j^{(j,i)} = E_j + V_{2|1}(e_i, e_j) = (\Phi e_j) + (\Phi e_i + \Phi e_j + \Phi u_{ij}) = V_{2|1}(e_i, e_j),$$

другими словами, при этом ветвлении происходит поглощение супералгебры E_j супералгеброй $V_{2|1}(e_i, e_j)$, поскольку первая является подсупералгеброй второй.

Заметим еще, что супералгебра

$$V_{2|2}(e_1, e_2) = V_{2|1}(e_1, e_2) + V_{2|1}(e_2, e_1) = \text{span}(e_1, e_2, u_{12}, u_{21})$$

по определению не является ветвлением супералгебры $V_{2|1}(e_1, e_2)$ оператором ветвления $(1, 2)$, поскольку первый индекс оператора ветвления (в данном случае 1) должен соответствовать

индексу идемпотента (e_1) , лежащего в разветвляемой супералгебре, а второй индекс — не лежащего.

Лемма 4.5. *Если центральный идемпотент $e_j \in B$ представляется в виде произведения $e_j = uv$ двух нечетных элементов u, v таких, что $e_j[u, v] \neq 0$, то ветвление $B^{(j,i)}$ не является правоальтернативной супералгеброй. В частности, ветвления супералгебр $B_{1|2}$ ($\text{char}(\Phi) = 3$), $M_{1|k}$ и $B_{2|2}(\nu)$ не являются правоальтернативными супералгебрами.*

Доказательство. Из определения ветвящейся супералгебры и условия имеем: $e_j = uv$ и $e_j[u, v] = \lambda e_j \neq 0$. Поскольку $u_{ij}u = u_{ij}v = 0$, то супералгебра $B^{(j,i)}$ не является правоальтернативной:

$$u_{ij}[u, v] = \lambda u_{ij}e_j = \lambda u_{ij} \neq 0, \quad u_{ij}u \cdot v - u_{ij}v \cdot u = 0.$$

Рассмотрим супералгебру $B_{1|2}$ с базисом $\{e_1, x, y\}$ и единицей e_1 . Тогда $e_1 = xy$ и $e_1[x, y] = 2e_1$.

Рассмотрим теперь супералгебру $M_{1|k}$ с четной частью $\Phi e_1 + M_k$ и базисом $\{e_1, e_{ij}; u_i, v_i \mid i, j = \overline{1, k}\}$, где $e_2 = \sum_{i=1}^k e_{ii}$, $u_i \in P_{12}$, $v_i \in P_{21}$. Так как $u_i v_j = \delta_{ij} e_1$, а $v_i u_j = e_{ij} \in M_k(\Phi)$, то по определению $e_1 = u_1 v_1$ и $e_1[u_1, v_1] = e_1$.

Наконец, рассмотрим супералгебру $B_{2|2}(\nu)$ с базисом $\{e_1, e_2; u_{12} = [e_1], u_{21} = [e_2]\}$ с операцией умножения нечетных элементов $u_{12}^2 = u_{12}u_{21} = e_1$, $u_{21}^2 = \nu e_2$ и $u_{21}u_{12} = e_2$, тогда $e_1[u_{12}, u_{21}] = e_1$. $\square$

Пусть B — одна из супералгебр $B_{n|n}$, в частности, $\Phi[\sqrt{1}]$ при $n = 1$, или E_i . Обозначим через η цепочку операторов ветвления $\eta = (j_1, i_1)(j_2, i_2) \dots (j_n, i_n)$ и назовем супералгебру B^η ветвлением супералгебры B . Таким образом,

$$B^{(j_1, i_1)(j_2, i_2) \dots (j_n, i_n)} = B \boxplus V_{2|1}(i_1, j_1) \boxplus V_{2|1}(i_2, j_2) \boxplus \dots \boxplus V_{2|1}(i_n, j_n).$$

Заметим, что всякое ветвление B^η абелевой супералгебры $B_{n|n}$ или E_i является абелевой супералгеброй. Поскольку четная часть этой супералгебры ассоциативно-коммутативна, а всякий нечетный базисный элемент u_{ij} , как позже будет доказано, лежит в ассоциативном бимодуле P_{ij} (теорема 4.2 и лемма 4.32).

Кроме того, никакое ветвление не является альтернативной супералгеброй, поскольку содержит ветви $V_{2|1}$, которые не являются альтернативными супералгебрами.

Лемма 4.6. *Всякое ветвление B^η супералгебры $B_{n|n}$ или E_i является правоальтернативной супералгеброй.*

Доказательство. Для единообразия терминологии будем называть *рефлексивной ветвью* супералгебру $B_{1|1}(e_k) = \Phi[\sqrt{1}](e_k) = \Phi e_k + \Phi u_{kk}$, тогда мы можем говорить, что ветвящаяся супералгебра B^η состоит только из ветвей.

Рассмотрим правый альтернатор $RA(p, q, r) = (p, q, r) + (-1)^{|q| \cdot |r|}(p, r, q)$ от однородных базисных элементов. Нас интересуют случаи, при которых хотя бы один из двух ассоциаторов в этом выражении ненулевой. Можно считать, что это ассоциатор $(p, q, r) = pq \cdot r - p \cdot qr \neq 0$. Если все три элемента лежат в одной ветви, то из правой альтернативности ветви следует, что альтернатор $RA(p, q, r)$ равен нулю. Так как произведение двух элементов, не лежащих в одной ветви, равно нулю, то осталось рассмотреть случаи, при которых элементы p, q, r лежат в двух разных ветвях, но пара элементов pq, r или p, qr лежит в одной ветви и имеет ненулевое произведение. Это возможно лишь в том случае, когда элемент из одной ветви представим в виде произведения двух элементов другой. Значит этот элемент общий для двух ветвей и является идемпотентом крепления e_j . В ветвях идемпотент e_j может быть представлен в виде произведения двух базисных элементов лишь как квадрат, причем, только двумя способами: $e_j = e_j^2$ и $e_j = u_{jk}^2$ (заметим, что в рефлексивной ветви $j = k$). Первое представление не подходит для случая, при котором хотя бы два элемента из p, q, r лежат в разных ветвях. Поэтому достаточно рассмотреть два случая: $p = q = u_{jk}, r = u_{jl}$ и $p = u_{ij}, q = r = u_{jk}$. Первый из них противоречит определению ветвления, поскольку из одной вершины e_j не могут исходить два ребра u_{jk} и u_{jl} . Во втором случае равенство $RA(p, q, r) = 0$ тривиально. $\square$

Заметим, что из лемм 4.5 и 4.6 следует критерий правой альтернативности ветвления: *при ветвлении правая альтернативность нарушается тогда и только тогда, когда идемпотент e_j крепления ветви представляется в разветвляемой супералгебре в виде произведения двух нечетных элементов u и v таких, что $e_j[u, v] \neq 0$.*

4.3. Стрoение компоненты M_{11}

4.3.1. Ассоциативный бимодуль M_{11} при $\dim_\Phi A_1 > 1$

Во-первых, так как унитарный бимодуль M_{11} ассоциативен, то по теореме 1.2 простая алгебра A_1 ассоциативна, то есть $A_1 = M_n$. Рассмотрим вначале ситуацию, при которой $n > 1$.

Пусть $A_1 = M_n(\Phi)$ и $\{e_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}\}$ — полная система матричных единиц алгебры A_1 . Пространство M_{11} и алгебра A_1 разлагаются в прямую сумму пространств относительно

полной системы ортогональных идемпотентов $\{e_{ii} \mid i = \overline{1, n}\}$:

$$M_{11} = \sum_{i,j=1}^n X_{ij}, \text{ где } X_{ij} = e_{ii}M_{11}e_{jj}.$$

$$A_1 = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}, \text{ где } A_{ij} = e_{ii}A_1e_{jj} = \Phi e_{ij}.$$

Всюду ниже в этом пункте мы используем следующие обозначения:

$$x_{ij} = e_{i1}x_{11}e_{1j}, \quad y_{ij} = e_{i1}y_{11}e_{1j},$$

считая, что элементы $x_{11}, y_{11} \in X_{11}$, вообще говоря, произвольны.

Умножение элементов модуля M_{11} на матричные единицы задается формулами

$$e_{ij}x_{kl} = x_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}x_{il}, \text{ где } x_{ij} \in X_{ij},$$

поскольку A_1 -бимодуль M_{11} ассоциативен. Отсюда вытекает следующее утверждение:

Лемма 4.7. *Верно включение $A_{ij}X_{kl} + X_{ij}A_{kl} \subseteq \delta_{jk}X_{il}$.*

Лемма 4.8. *Если $j \neq k$, то $X_{ij}X_{kl} = 0$.*

Доказательство. Пусть вначале $l = k$, тогда из правой альтернативности следует, что $(x_{ij}y_{kk})e_{kk} = 2x_{ij}y_{kk}$. Так как оператор правого умножения на идемпотент e_{ii} имеет собственные значения 0 и 1, то вектор $x_{ij}y_{kk}$ должен быть нулевым. Итак, $X_{ij}X_{kk} = 0$ при $j \neq k$.

Пусть теперь $l \neq k$; тогда $0 = 0 \cdot e_{kl} = (x_{ij}y_{kk})e_{kl} = x_{ij}y_{kl}$, что вместе с предыдущим влечёт утверждение леммы. $\square$

Лемма 4.9. *Верно равенство $x_{ij}y_{jl} = x_{ik}y_{kl}$.*

Доказательство. Поскольку при $j = k$ лемма очевидна, то будем считать, что $j \neq k$. Если $l = j$, тогда по лемме 4.8 имеем $0 = (x_{ij}y_{kj})e_{jk} = -x_{ik}y_{kj} + x_{ij}y_{jj} + x_{ij}y_{kk} = -x_{ik}y_{kj} + x_{ij}y_{jj}$, откуда следует утверждение леммы при $l = j$.

Если же $l \neq j$, то $0 = (x_{ij}y_{kl})e_{jk} = -x_{ik}y_{kl} + x_{ij}y_{jl}$. $\square$

Лемма 4.10. *Верно включение $X_{ij}X_{jk} \subseteq A_{ik}$.*

Доказательство. Пусть $l \neq k$, тогда по лемме 4.9 имеем: $(x_{ij}y_{jk})e_{ll} = (x_{ik}y_{kk})e_{ll} = 0$, это означает, что $X_{ij}X_{jk} \subseteq Ae_{kk}$.

Далее, по лемме 4.9 можно считать, что $i \neq j$, тогда по правой альтернативности

$$e_{jj}(x_{ij}y_{ji}) = e_{jj}(y_{ji}x_{ij}) - y_{ji}x_{ij}.$$

Поскольку $(x_{ij}y_{ji})e_{ii} = x_{ij}y_{ji}$, то левая часть последнего равенства содержится в $A_{ji} = \Phi e_{ji}$, а правая часть — в Ae_{jj} , поэтому обе части равны нулю. Таким образом, $X_{ij}X_{ji} \subseteq A_{ii}$, т.е. лемма доказана в случае, если $i = k$.

Пусть теперь $i \neq k$, Выбирая $l \neq i$, имеем $e_{ll}(x_{ij}y_{jk}) = e_{ll}(x_{ii}y_{ik}) = e_{ll}(y_{ik}x_{ii}) + (e_{ll}x_{ii})y_{ik} - (e_{ll}y_{ik})x_{ii} = 0$. $\square$

Лемма 4.11. Верно равенство $(M_{11}, M_{11}, A_1) = 0$.

Доказательство. По предыдущему достаточно доказать, что $(x_{ij}, y_{jk}, a_{kl}) = 0$, где $a_{kl} \in A_{kl}$. При $l = k$ выберем $m \neq k$, тогда по лемме 4.9 и правой альтернативности имеем $(x_{ij}y_{jk})a_{kk} = (x_{im}y_{mk})a_{kk} = x_{im}(y_{mk}a_{kk})$ и по лемме 4.9 продолжаем равенство $(x_{ij}y_{jk})a_{kk} = (x_{im}e_{mj})(e_{jm}y_{mk}a_{kk}) = x_{ij}(y_{jk}a_{kk})$.

Пусть теперь $l \neq k$; тогда, обозначая $z_{kk} = a_{kl}y_{lk}$, из тех же соображений получаем: $(x_{ij}y_{jk})a_{kl} = (x_{il}y_{lk})a_{kl} = x_{il}z_{kk} + x_{il}(y_{lk}a_{kl}) = x_{ij}(y_{jk}a_{kl})$. $\square$

Лемма 4.12. Верно равенство $(A_1, M_{11}, M_{11}) = 0$.

Доказательство. Пусть $m \neq j$, тогда $a_{ij}(x_{jk}y_{kl}) = a_{ij}(x_{jm}y_{ml}) = (a_{ij}x_{jm})y_{ml} = (a_{ij}x_{jk})y_{kl}$. $\square$

Лемма 4.13. Верно равенство $(M_{11}, M_{11}, M_{11}) = 0$.

Доказательство. Пусть $p \neq k$, тогда $(x_{ij}y_{jk})z_{kl} = (x_{ip}y_{pk})z_{kl} = x_{ip}(y_{pk}z_{kl}) = x_{ip}e_{pp}(y_{pk}z_{kl}) = x_{ip}e_{pj}(e_{jp}(y_{pk}z_{kl})) = x_{ij}((e_{jp}y_{pk})z_{kl}) = x_{ij}(y_{jk}z_{kl})$. $\square$

Таким образом, доказана

Лемма 4.14. Конечномерная унитарная правоальтернативная супералгебра с простой сильно ассоциативной чётной частью размерности > 1 ассоциативна.

4.3.2. Ассоциативный бимодуль M_{11} при $\dim_{\Phi} A_1 = 1$

Если $M_{11}^2 = 0$, то супералгебра $A_1 + M_{11} = E(A_1, M_{11})$ ассоциативна, поэтому далее можно считать, что $M_{11}^2 \neq 0$.

Положим $xy = \alpha$, $yx = \beta$.

Если $x^2 \neq 0$, то $0 = (x, x, y) - (x, y, x) = x^2y - 2\alpha x + \beta x$, значит, $\dim_{\Phi} M = 1$ и $B = \Phi[\sqrt{1}]$.

Если же $(\forall x \in M) x^2 = 0$, то $xy = \alpha \neq 0$, $yx = -\alpha$ для некоторых x, y , и $0 = (x, x, y) - (x, y, x) = -2\alpha x - \alpha x$, откуда следует, что $\text{char } \Phi = 3$.

Пусть $\dim_{\Phi} M \geq 2$ и $(\exists x, y \in M) xy = 1$. Если $\dim_{\Phi} M \geq 3$, то $(\exists z \in M) z \notin \Phi x + \Phi y$ и по правой альтернативности $x[y, z] = xy \cdot z - xz \cdot y = -y + z$, что невозможно. Это доказывает, что $M = \Phi x + \Phi y$ и B — супералгебра $B_{1|2}$. Отметим, что супералгебра $B_{1|2}$ альтернативна.

Таким образом, доказана

Лемма 4.15. Если бимодуль M_{11} ассоциативен, то супералгебра $A_1 + M_{11}$ либо ассоциативна, либо является супералгеброй $B_{1|2}$ ($\text{char } \Phi = 3$).

4.3.3. Стрoение ассоциативной супералгебры ёмкости 1

Теорема 4.1. Пусть $B = A \oplus M$ — ассоциативная унитарная супералгебра ёмкости 1, в которой $M^2 \neq 0$. Тогда B изоморфна супералгебре $M_n[\sqrt{1}]$, следовательно, B также проста.

Доказательство. По условию $A = M_n$, значит, бимодуль M является прямой суммой регулярных бимодулей. При $n = 1$ это очевидно, а при $n > 1$ это следует из теоремы 1.1.

Обозначим эти бимодули $M_k := \{[a]^{(k)} \mid a \in M_n\}$, тогда $M = \sum_{i=1}^m M_i$. Понятно, что

$$[e_{ij}]^{(p)}[e_{kl}]^{(q)} = e_{ii}[e_{ij}]^{(p)}e_{jj}e_{kk}[e_{kl}]^{(q)}e_{ll} \in \delta_{jk}\Phi e_{il}.$$

Так как $M^2 \neq 0$, то можно считать, что для некоторых элементов $[e_{ij}]^{(p)}$ и $[e_{jk}]^{(q)}$ их произведение ненулевое, то есть $[e_{ij}]^{(p)}[e_{jk}]^{(q)} = \lambda e_{ik}$ и $\lambda \neq 0$. Тогда для любых i', j', k' имеем

$$\begin{aligned} [e_{i'j'}]^{(p)}[e_{j'k'}]^{(q)} &= e_{i'i}[e_{ij}]^{(p)}e_{jj'}e_{j'j}[e_{jk}]^{(q)}e_{kk'} = e_{i'i}[e_{ij}]^{(p)}e_{jj}[e_{jk}]^{(q)}e_{kk'} = \\ &= e_{i'i}[e_{ij}]^{(p)}[e_{jk}]^{(q)}e_{kk'} = \lambda e_{i'i}e_{ik}e_{kk'} = \lambda e_{i'k'}. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что $[1]^{(p)}[1]^{(q)} = \lambda \cdot 1$. В самом деле,

$$[1]^{(p)}[1]^{(q)} = \sum_{i=1}^n [e_{ii}]^{(p)} \sum_{j=1}^n [e_{jj}]^{(q)} = \sum_{i=1}^n \lambda e_{ii} = \lambda \cdot 1.$$

Тогда для произвольного $[a]^{(r)}$ имеем:

$$[a]^{(r)} = [a]^{(r)} \cdot 1 = \lambda^{-1}[a]^{(r)}[1]^{(p)}[1]^{(q)} = (\lambda^{-1}[a]^{(r)}[1]^{(p)})[1]^{(q)} \in M_q,$$

значит, $M \subseteq M_q$ и бимодуль M регулярный, то есть $M = \{[a] \mid a \in M_n\}$, причем, $[1]^2 = \lambda \cdot 1$.

Так как поле алгебраически замкнуто, то можно считать, что $\lambda = 1$. Таким образом, $[a][b] = ab$. Отсюда следует, что элемент $[1]$ централизует четную часть и $[1]^2 = 1$. $\square$

В лемме 4.15 и теореме 4.1 полностью рассмотрен случай ассоциативного бимодуля M_{11} над ассоциативной алгеброй A_1 . В следующих двух пунктах мы рассмотрим случаи, когда бимодуль M_{11} неассоциативен; тогда $A_1 = M_2$ или $A_1 = C$ — алгебра Кэли—Диксона.

4.3.4. Стрoение компоненты M_{11} ; случай $A_1 = M_2$

Рассмотрим альтернативный бимодуль M_{11} над алгеброй $A_1 = M_2$. По теореме 1.1 рассмотрим разложение $M_{11} = M_a \oplus M_c$, где M_a — ассоциативный бимодуль, M_c — бимодуль Кэли.

Напомним, что ассоциативный бимодуль является прямой суммой регулярных бимодулей, а бимодуль Кэли — прямой суммой стандартных бимодулей Кэли C_2 .

Лемма 4.16. *Выполнены соотношения $e_{ij} \circ m_k = \delta_{ij} m_k$, где $\{m_1, m_2\}$ — базис стандартного бимодуля Кэли.*

Доказательство. Если $i \neq j$, то $e_{ij} + \bar{e}_{ij} = e_{ij} - e_{ij} = 0$. Тогда

$$e_{ij} \circ m_k = e_{ij} m_k + m_k e_{ij} = (e_{ij} + \bar{e}_{ij}) m_k = 0 = \delta_{ij} m_k.$$

Если же $i = j$, то $e_{ii} + \bar{e}_{ii} = e_{11} + e_{22} = e_1$ и

$$e_{ii} \circ m_k = e_{ii} m_k + m_k e_{ii} = (e_{ii} + \bar{e}_{ii}) m_k = e_1 m_k = m_k.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4.17. *Супералгебра $A_1 + M_c$ при $M_c^2 \neq 0$ имеет характеристику 3 и является супералгеброй Шестакова $S_{4|2}$.*

Доказательство. Заметим вначале по лемме 4.16 и определению бимодуля Кэли

$$m_1^{(p)} m_1^{(q)} \cdot e_{11} = -m_1^{(p)} m_1^{(q)} + m_1^{(p)} m_1^{(q)} = 0$$

для базисных элементов $m_1^{(p)}$ и $m_1^{(q)}$, лежащих в p -ой и q -ой компонентах разложения бимодуля M_c на стандартные бимодули Кэли. Это означает, что $m_1^{(p)} m_1^{(q)} = \varepsilon_{pq} e_{12} + \lambda_{pq} e_{22}$ для некоторых скаляров $\varepsilon_{pq}, \lambda_{pq}$. Умножая обе части этого равенства справа на e_{21} , получаем, что $m_2^{(p)} m_1^{(q)} = -(\varepsilon_{pq} e_{11} + \lambda_{pq} e_{21})$. Полностью аналогично имеем, что $m_2^{(p)} m_2^{(q)} = \nu_{pq} e_{21} + \mu_{pq} e_{11}$ и $m_1^{(p)} m_2^{(q)} = -(\nu_{pq} e_{22} + \mu_{pq} e_{12})$.

Вычислим ассоциаторы:

$$\begin{aligned} (m_1^{(p)}, m_1^{(q)}, m_2^{(r)}) &= (\varepsilon_{pq} e_{12} + \lambda_{pq} e_{22}) m_2^{(r)} + m_1^{(p)} (\nu_{qr} e_{22} + \mu_{qr} e_{12}) = -\varepsilon_{pq} m_1^{(r)}, \\ (m_1^{(p)}, m_2^{(r)}, m_1^{(q)}) &= -(\nu_{pr} e_{22} + \mu_{pr} e_{12}) m_1^{(q)} + m_1^{(p)} (\varepsilon_{rq} e_{11} + \lambda_{rq} e_{21}) = \\ &= -\nu_{pr} m_1^{(q)} + \varepsilon_{rq} m_1^{(p)} + \lambda_{rq} m_2^{(p)}, \end{aligned}$$

отсюда следует, что для любых r и q коэффициенты $\lambda_{rq} = 0$. Кроме того, получаем равенство

$$\varepsilon_{pq} m_1^{(r)} - \nu_{pr} m_1^{(q)} + \varepsilon_{rq} m_1^{(p)} = 0. \quad (4.1)$$

Аналогично из соотношения $(m_2^{(p)}, m_2^{(q)}, m_1^{(r)}) = (m_2^{(p)}, m_1^{(r)}, m_2^{(q)})$ имеем $\mu_{qr} = 0$ и равенство

$$\nu_{pq} m_2^{(r)} - \varepsilon_{pr} m_2^{(q)} + \nu_{rq} m_2^{(p)} = 0. \quad (4.2)$$

Докажем теперь, что если в разложении бимодуля M_c имеются хотя бы два стандартных бимодуля Кэли, то $M_c^2 = 0$. Пусть $p \neq q$. Тогда из (4.1) при $r = q$ получаем, что $\varepsilon_{pq} = \nu_{pq}$ и $\varepsilon_{qq} = 0$. А при $r = p$, что $\nu_{pp} = 0$ и $2\varepsilon_{pq} = 0$. Этим доказано, что если M_c имеет хотя бы два стандартных бимодуля, то $M_c^2 = 0$.

Пусть теперь $M_c^2 \neq 0$, тогда M_c сам является стандартным бимодулем. Тогда $\varepsilon_{pq} = \varepsilon$ и $\nu_{pq} = \nu$, а из соотношений (4.1) и (4.2) следует $2\varepsilon = \nu$ и $2\nu = \varepsilon$, то есть $3\varepsilon = 0$. Поскольку скаляры ε, ν отличны от 0 (иначе $M_c^2 = 0$), то характеристика поля Φ равна 3 и $\nu = -\varepsilon$. В силу алгебраической замкнутости основного поля можно считать, что $\varepsilon = 1$. Таким образом, супералгебра $A_1 + M_c$ является супералгеброй Шестакова $S_{4|2}$. $\square$

Лемма 4.18. *Выполнено соотношение $M_a M_c = 0$.*

Доказательство. Заметим, что поскольку алгебра $A_1 = M_2$ ассоциативна, то из равенств $ae_{1i} = ae_{2j} = 0$ при некоторых i, j и $a \in A_1$ вытекает, что $a = 0$.

Для базисных элементов $[e_{ij}]$ произвольного регулярного бимодуля в разложении ассоциативного бимодуля M_a и m_1, m_2 — в разложении бимодуля M_c , получаем, что

$$[e_{i1}]m_1 \cdot e_{11} = -[e_{i1}]m_1 + [e_{i1}]m_1 = 0,$$

$$[e_{i1}]m_1 \cdot e_{21} = -0 + 0 = 0,$$

значит, $[e_{i1}]m_1 = 0$. Далее,

$$[e_{i2}]m_1 \cdot e_{12} = -0 + 0 = 0,$$

$$[e_{i2}]m_1 \cdot e_{22} = -[e_{i2}]m_1 + [e_{i2}]m_1 = 0,$$

поэтому $[e_{i2}]m_1 = 0$. Таким образом, доказано, что $M_a m_1 = 0$, а по симметричности индексов 1 и 2 это означает, что $M_a M_c = 0$. $\square$

Лемма 4.19. *Выполнено соотношение $M_c M_a = 0$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $m_1 M_a = 0$.

1°. Докажем, что $m_1[e_{22}] = 0$. В самом деле, по правой альтернативности $m_1[e_{22}] \cdot e_{22} = -0 + 2m_1[e_{22}]$. Так как собственными значениями оператора $R_{e_{22}}$ могут быть только 0 и 1, то доказано, что $m_1[e_{22}] = 0$.

2°. Докажем, что $m_1[e_{12}] = 0$. Имеем $0 = m_1[e_{22}] \cdot e_{12} = -0 + m_1[e_{12}]$.

3°. Докажем, что $m_1[e_{11}] = 0$. По п. 2° имеем $m_1[e_{11}] \cdot e_{12} = m_1[e_{12}] = 0$. Тогда

$$0 = m_1[e_{11}] \cdot e_{12}e_{21} = m_1[e_{11}] \cdot e_{11} = -m_1[e_{11}] + 2m_1[e_{11}] = m_1[e_{11}].$$

4°. Докажем, что $m_1[e_{21}] = 0$. Используя п. 1°, получаем $m_2[e_{11}] = 0$, значит,

$$0 = m_1[e_{11}] \cdot e_{21} = -m_2[e_{11}] + m_1[e_{21}] = m_1[e_{21}]. \quad \square$$

Лемма 4.20. *Если $M_a^2 \neq 0$, то супералгебра $A_1 + M_a$ является супералгеброй $M_2[\sqrt{1}]$, причем, $M_c = 0$.*

Доказательство. Поскольку справедливо соотношение $M_a^2 \neq 0$, и бимодуль M_a ассоциативен, то по лемме 4.15 супералгебра $A_1 + M_a$ ассоциативна, и по теореме 4.1 она является супералгеброй $M_2[\sqrt{1}] = M_2 + M_2u$, где $u^2 = e_1$ — единица алгебры $A_1 = M_2$. Тогда для любого элемента $z \in M_c$ по правой альтернативности и леммам 4.18 и 4.19 имеем $z = e_1z = u^2z = uz \cdot u + u[u, z] = 0$. $\square$

Лемма 4.21. *Всякая супералгебра с четной частью M_2 либо тривиально расщепляема, либо изоморфна одной из простых супералгебр $M_2[\sqrt{1}]$ или $S_{4|2}$ ($\text{char } \Phi = 3$).*

Доказательство. Пусть $B = A_1 + M_{11}$ не тривиально расщепляема, то есть $M_{11}^2 \neq 0$. Из лемм 4.18 и 4.19 следует, что $M_a^2 \neq 0$ или $M_c^2 \neq 0$.

Пусть $M_c^2 \neq 0$; тогда по лемме 4.17 супералгебра $A_1 + M_c$ имеет характеристику 3 и является супералгеброй $S_{4|2}$. Значит, $e_1 = [m_1, m_2]$, поэтому для любого $z \in M_a$ по леммам 4.18 и 4.19 имеем $z = ze_1 = z[m_1, m_2] = zm_1 \cdot m_2 - zm_2 \cdot m_1 = 0$. Осталось воспользоваться леммой 4.20. $\square$

4.3.5. Стрoение компоненты M_{11} ; случай $A_1 = \mathbb{C}$.

Рассмотрим альтернативный бимодуль M_{11} над алгеброй Кэли—Диксона $\mathbb{C}$. По теореме 1.2 бимодуль M_{11} является прямой суммой регулярных бимодулей $[\mathbb{C}]^{(i)}$. Элемент бимодуля $[\mathbb{C}]^{(i)}$, соответствующий элементу $c \in \mathbb{C}$, будем обозначать через $[c]^{(i)}$.

Напомним таблицу умножения в алгебре $\mathbb{C} = M_2 + vM_2$:

$$\begin{aligned} v^2 &= e_1, & \bar{v} &= -v, & av &= v\bar{a}, \\ a \cdot vb &= v \cdot \bar{a}b, & vb \cdot a &= v \cdot ab, \\ va \cdot vb &= b\bar{a}; \end{aligned}$$

где $e_1 = e_{11} + e_{22}$ — единица алгебры $A_1 = \mathbb{C}$, $a, b \in M_2$.

Пусть p, q — фиксированная пара индексов и $r, s \in \mathbb{C}$. Всюду в этом пункте, для сокращения записи, выражение $[r][s]$ означает $[r]^{(p)}[s]^{(q)}$.

Лемма 4.22. *Выполнены соотношения:*

$$[e_{i1}][e_{2j}] = [e_{i2}][e_{1j}] = 0, \quad [e_{i1}][e_{1j}] = [e_{i2}][e_{2j}].$$

Доказательство. Заметим сначала, что по правой альтернативности $[e_{i2}][e_{11}] \cdot e_{22} = -[e_{i2}][e_{11}]$, значит, $[e_{i2}][e_{11}] = 0$. Отсюда получаем, что

$$0 = [e_{i2}][e_{11}] \cdot e_{12} = [e_{i2}][e_{12}].$$

Таким образом, доказано, что $[e_{i1}][e_{2j}] = [e_{i2}][e_{1j}] = 0$. Аналогично имеем

$$0 = [e_{i2}][e_{12}] \cdot e_{21} = -[e_{i1}][e_{12}] + [e_{i2}][e_{22}] + [e_{i2}][e_{11}] = -[e_{i1}][e_{12}] + [e_{i2}][e_{22}],$$

откуда следует, ввиду симметричности индексов, что $[e_{i1}][e_{1j}] = [e_{i2}][e_{2j}]$. $\square$

Лемма 4.23. *Для некоторого скалярного параметра $\varepsilon = \varepsilon_{pq}$ выполнены соотношения:*

$$[a][b] = \varepsilon ab, \text{ где } a, b \in M_2.$$

Доказательство. Достаточно проверить справедливость леммы для базисных элементов $e_{ij} \in M_2$. Так как $[e_{12}][e_{22}] \cdot e_{11} = 0$, то $[e_{12}][e_{22}] \in \text{span}(e_{12}, e_{22}, ve_{21}, ve_{22})$. Заметим, что так как по лемме 4.22 для любых p и q выполнено $[e_{22}]^{(q)}[e_{12}]^{(p)} = 0$, то $(e_{11}, [e_{12}]^{(p)}, [e_{22}]^{(q)}) = (e_{11}, [e_{22}]^{(q)}, [e_{12}]^{(p)}) = 0$, поэтому $e_{11} \cdot [e_{12}]^{(p)}[e_{22}]^{(q)} = [e_{12}]^{(p)}[e_{22}]^{(q)}$, таким образом, $[e_{12}][e_{22}] \in \text{span}(e_{12}, ve_{21}, ve_{22})$.

Если $[e_{12}][e_{22}] = \varepsilon e_{12} + \lambda ve_{21} + \mu ve_{22}$, то

$$[e_{12}][e_{21}] = [e_{12}]([e_{22}] \circ e_{21}) = [e_{12}][e_{22}] \cdot e_{21} = \varepsilon e_{11},$$

значит и $[e_{12}][e_{22}] = [e_{12}][e_{21}] \cdot e_{12} = \varepsilon e_{12}$.

Из соотношения $(e_{21}, [e_{12}]^{(p)}, [e_{22}]^{(q)}) = (e_{21}, [e_{22}]^{(q)}, [e_{12}]^{(p)}) = 0$ заключаем, что $[e_{22}][e_{22}] = e_{21}[e_{12}] \cdot [e_{22}] = e_{21} \cdot [e_{12}][e_{22}] = \varepsilon e_{22}$. Осталось заметить, что

$$[e_{22}][e_{21}] = [e_{22}]([e_{22}] \circ e_{21}) = [e_{21}][e_{22}] + [e_{22}][e_{22}] \cdot e_{21} = [e_{22}][e_{22}] \cdot e_{21} = \varepsilon e_{21}.$$

С учетом леммы 4.22 лемма доказана. $\square$

Лемма 4.24. *Выполнены соотношения:*

$$[v][v] = \varepsilon e_1, \quad [v][e_1] = [e_1][v] = \varepsilon v.$$

Доказательство. Заметим вначале, что по лемме 4.23

$$\varepsilon v = [e_1][e_1] \cdot v = -[v][e_1] + 2[e_1][v], \quad (4.3)$$

тогда, умножая обе части полученного равенства справа на v , получим, что

$$\begin{aligned}\varepsilon e_1 &= -[v][e_1] \cdot v + 2[e_1][v] \cdot v = [e_1][e_1] - 2[v][v] + 2(-[v][v] + 2[e_1][e_1]) = \\ &= \varepsilon e_1 - 4[v][v] + 4\varepsilon e_1.\end{aligned}$$

Значит, $[v][v] = \varepsilon e_1$. Далее, $[v][e_1] \cdot v = -\varepsilon e_1 + 2\varepsilon e_1 = \varepsilon e_1$, умножая обе части равенства справа на v , получим, что $\varepsilon v = ([v][e_1] \cdot v)v = [v][e_1] \cdot v^2 = [v][e_1]$. Значит, из соотношения (4.3) следует, что $[e_1][v] = \varepsilon v$. $\square$

Лемма 4.25. *Для любого $a \in M_2$ выполнены соотношения:*

$$[v][a] = \varepsilon va \quad \text{и} \quad [a][v] = \varepsilon av.$$

Доказательство. Достаточно проверить соотношения при $a \in \{e_{ij} \mid i, j = \overline{1, 2}\}$. Нам понадобятся следующие равенства:

$$e_{11} \circ v = e_{22} \circ v = v, \quad e_{12} \circ v = e_{21} \circ v = 0.$$

Теперь имеем $[e_1][e_{11}] \cdot v = -[v][e_{11}] + [e_1][v]$, откуда следует, что

$$\varepsilon e_{11}v = -[v][e_{11}] + \varepsilon v,$$

то есть, что $[v][e_{11}] = \varepsilon v - \varepsilon e_{11}v = \varepsilon e_{22}v = \varepsilon v e_{11}$. Аналогично $[v][e_{22}] = \varepsilon v e_{22}$.

Далее имеем $[e_1][e_{12}] \cdot v = -[v][e_{12}] + 0 = -[v][e_{12}]$. Отсюда заключаем, что

$$[v][e_{12}] = -\varepsilon e_{12}v = \varepsilon v e_{12}.$$

Аналогично $[v][e_{21}] = \varepsilon v e_{21}$. Из соотношения

$$\varepsilon v e_{11} = [e_1][v] \cdot e_{11} = -[e_{11}][v] + [e_1][v] = -[e_{11}][v] + \varepsilon v$$

заключаем, что $[e_{11}][v] = \varepsilon e_{11}v$. Аналогично $[e_{22}][v] = \varepsilon e_{22}v$.

Еще проще получается $\varepsilon e_{12}v = -\varepsilon v e_{12} = -[e_1][v] \cdot e_{12} = [e_{12}][v]$ и аналогично $[e_{21}][v] = \varepsilon e_{21}v$. $\square$

Лемма 4.26. *Выполнены следующие соотношения:*

$$[vb][a] = \varepsilon vb \cdot a, \quad [a][vb] = \varepsilon a \cdot vb, \quad [va][vb] = \varepsilon va \cdot vb.$$

Доказательство. На основании правой альтернативности имеем

$$\begin{aligned}0 &= ([v]^{(p)}, [a]^{(q)}, b) + ([v]^{(p)}, b, [a]^{(q)}) = [v][a] \cdot b - [v][ab] + [vb][a] - [v][ba] = \\ &= \varepsilon va \cdot b - \varepsilon v \cdot ab + [vb][a] - \varepsilon v \cdot ba = -\varepsilon vb \cdot a + [vb][a],\end{aligned}$$

откуда следует, что $[vb][a] = \varepsilon vb \cdot a$.

Используя полученный результат, заметим, что

$$\varepsilon a \cdot vb = [a][e_1] \cdot vb = -[a \cdot vb][e_1] + 2[a][vb] = -\varepsilon a \cdot vb + 2[a][vb],$$

откуда следует, что $[a][vb] = \varepsilon a \cdot vb$.

Наконец,

$$\begin{aligned} 2[va][vb] &= [va]([e_1] \circ vb) = [va][e_1] \cdot vb + [va]vb \cdot [e_1] = \\ &= \varepsilon va \cdot vb + [va \cdot vb][e_1] = 2\varepsilon va \cdot vb. \quad \square \end{aligned}$$

Из лемм 4.23 и 4.26 следует

Лемма 4.27. *Для любой пары индексов p, q существует скаляр ε_{pq} такой, что*

$$[a]^{(p)}[b]^{(q)} = \varepsilon_{pq}ab \text{ для любых } a, b \in C.$$

Лемма 4.28. *Если $A_1 = C$, то $M_{11}^2 = 0$.*

Доказательство. Из правой альтернативности заключаем, что

$$(a, [b]^{(p)}, [c]^{(q)}) = (a, [c]^{(q)}, [b]^{(p)}).$$

Отсюда имеем,

$$\varepsilon_{pq}(a, b, c) = \varepsilon_{qp}(a, c, b) = -\varepsilon_{qp}(a, b, c).$$

Так как алгебра Кэли—Диксона не ассоциативна, то $\varepsilon_{pq} = -\varepsilon_{qp}$. В частности, $\varepsilon_{pp} = 0$.

Наконец, из равенства $([a]^{(p)}, [b]^{(q)}, [c]^{(q)}) = ([a]^{(p)}, [c]^{(q)}, [b]^{(q)})$ имеем:

$$\varepsilon_{pq}ab \cdot c = \varepsilon_{pq}ac \cdot b.$$

Откуда для $a = b = e_{11}$ и $c = e_{12}$ заключаем, что $\varepsilon_{pq} = 0$. □

Теорема 4.2. *Всякая сильно альтернативная унитарная правоальтернативная супералгебра с простой четной частью является либо тривиально расщепляемой, либо одной из простых супералгебр: $B_{1|2}$, $S_{4|2}$ ($\text{char } \Phi = 3$), $M_n[\sqrt{1}]$.*

Доказательство. Пусть $B_{11} = A_1 + M_{11}$ — супералгебра, удовлетворяющая условиям теоремы. Предположим, что $M_{11}^2 \neq 0$. Тогда по лемме 4.28 алгебра A_1 не является алгеброй Кэли—Диксона, поэтому A_1 — алгебра матриц M_n . При $n = 1$ по лемме 4.1 бимодуль M_{11} ассоциативен, поэтому по лемме 4.15 либо B_{11} ассоциативна, либо является супералгеброй $B_{1|2}$. По лемме 4.21 при $n = 2$ супералгебра B_{11} ассоциативна, либо является супералгеброй $S_{4|2}$.

При $n \geq 3$ бимодуль M_{11} ассоциативен по теореме 1.1, значит, по лемме 4.15 супералгебра B_{11} ассоциативна. Ассоциативная супералгебра B_{11} по теореме 4.1 является супералгеброй $M_n[\sqrt{1}]$. $\square$

Из теоремы 4.2 в качестве следствия получаем следующие две леммы.

Лемма 4.29. *Если $M_{11}^2 \neq 0$ и для некоторого $0 \neq a_i \in A_i$ выполнено равенство $a_i * M_{11} = 0$, то $A_i * M_{11} = 0$, т.е. простая компонента A_i аннулирует M_{11} .*

Доказательство. Если $i \geq 2$, то $A_i * M_{11} = 0$ в силу леммы 4.1. Далее, по теореме 4.2 для всякого ненулевого $a_1 \in A_1$ найдется элемент $x \in M_{11}$, такой что $a_1 x \neq 0$. $\square$

Лемма 4.30. *Если $M_{11}^2 \neq 0$, тогда для любого $i > 1$ компонента P_{1i} нулевая.*

Доказательство. Если $M_{11}^2 \neq 0$, то по теореме 4.2 заключаем, что супералгебра $B_{11} = A_1 + M_{11}$ является одной из супералгебр $B_{1|2}$, $S_{4|2}$, либо $M_n[\sqrt{1}]$, а, значит, имеются такие элементы $x, y \in M_{11}$, что $xy = e_1$. Поэтому, для любого элемента $z \in P_{1i}$ по правой альтернативности и леммам 4.3 в) и 4.4 а) имеем $z = e_1 z = xy \cdot z = xz \cdot y + x[y, z] = 0$. $\square$

4.4. Строение компоненты M_{12}

4.4.1. Начальные свойства компоненты M_{12}

Ниже, как и ранее, используем обозначения $p_{ij}, q_{ij} \in P_{ij}$ и $a_i, b_i \in A_i$.

Лемма 4.31. *Если супералгебра $A_1 + A_2 + M_{12}$ ассоциативна и $M_{12}^2 \neq 0$, то она изоморфна простой ассоциативной супералгебре $M_{m|n}$.*

Доказательство. Определим размерности простых слагаемых четной части: пусть $A_1 = M_m$ и $A_2 = M_n$.

Поскольку $p_{12}q_{12} = p_{12}e_2e_1q_{12} = 0$, то $P_{12}^2 = P_{21}^2 = 0$ и $M_{12}^2 = P_{12}P_{21} + P_{21}P_{12}$. Заметим, что по лемме 4.4 в) выполнены включения $P_{12}P_{21} \subseteq A_1$, $P_{21}P_{12} \subseteq A_2$.

Поскольку $M_{12}^2 \neq 0$, то можно считать, что $P_{12}P_{21} \neq 0$, поэтому для некоторых матричных единиц $e_{ij}^{(k)} \in A_k$ имеем $e_{ss}^{(1)}P_{12}e_{tt}^{(2)}P_{21}e_{rr}^{(1)} \neq 0$. По лемме 4.3 заключаем, что $e_{ss}^{(1)}P_{12}e_{tt}^{(2)} \in P_{12}$ и $e_{tt}^{(2)}P_{21}e_{rr}^{(1)} \in P_{21}$. Это в точности означает, что можно так выбрать элементы $u \in P_{12}$ и $v \in P_{21}$, что $ue_{tt}^{(2)}v = e_{sr}^{(1)}$. Обозначим $u_k = e_{ks}^{(1)}ue_{tt}^{(2)} \in P_{12}$ и $v_l = e_{tt}^{(2)}ve_{rl}^{(1)} \in P_{21}$, тогда $u_kv_l = e_{ks}^{(1)}ue_{tt}^{(2)}ve_{rl}^{(1)} = e_{ks}^{(1)}e_{sr}^{(1)}e_{rl}^{(1)} = e_{kl}^{(1)}$.

Введем обозначения: $u_{ij} = u_ie_{tj}^{(2)}$ и $v_{ij} = e_{it}^{(2)}v_j$. Заметим, что при $j \neq k$ верно $u_{ij}v_{kl} = 0$ и $u_{ij}v_{jl} = u_ie_{tj}^{(2)}e_{jt}^{(2)}v_l = u_iv_l = e_{il}^{(1)}$.

Очевидно, что $v_{ij}u_{jk} = e_{ii}^{(2)}v_{ij}u_{jk}e_{kk}^{(2)} \in \Phi e_{ik}^{(2)}$. С другой стороны, $u_{li}v_{ij}u_{jk} = e_{lj}^{(1)}u_{jk} = u_{lk}$. Таким образом, если $v_{ij}u_{jk} = \varepsilon e_{ik}^{(2)}$, то $u_{lk} = e_{lj}^{(1)}u_{jk} = u_{li}v_{ij}u_{jk} = \varepsilon u_{li}e_{ik}^{(2)} = \varepsilon u_{lk}$, и так как $u_{lk} \neq 0$, то $\varepsilon = 1$ и $v_{ij}u_{jk} = e_{ik}^{(2)}$.

Рассмотрим произвольный элемент $y_{ij} = e_{ii}^{(2)}ye_{jj}^{(1)}$, тогда

$$y_{ij} = e_{ii}^{(2)}y_{ij}u_{ji}v_{ij} = e_{ii}^{(2)}a^{(2)}v_{ij} = e_{ii}^{(2)}a^{(2)}e_{ii}^{(2)}v_{ij} = \lambda e_{ii}^{(2)}v_{ij} = \lambda v_{ij}$$

для некоторого скаляра λ . Таким образом, $P_{21} = \text{span}(v_{ij} \mid i, j)$. Линейная независимость элементов v_{ij} над Φ очевидна. Аналогично $P_{12} = \text{span}(u_{ij} \mid i, j)$.

Этим доказано, что супералгебра $A_1 + A_2 + M_{12}$ с точностью до обозначений является супералгеброй $M_{m|n}$. $\square$

Лемма 4.32. $A_1 + A_2$ -бимодуль M_{12} ассоциативен.

Доказательство. Из альтернативности бимодуля M и леммы 4.3 г) вытекает, что $(a_1, b_1, p_{12}) = (a_1, p_{12}, b_2) = (p_{12}, a_2, b_2) = 0$. В самом деле, например, $(a_1, p_{12}, b_2) = -(p_{12}, a_1, b_2) = 0$. Равенство нулю остальных ассоциаторов от элементов a_i, b_j, p_{21} вытекает из равноправия индексов 1 и 2. $\square$

Лемма 4.33. Если $e_1 \in M_{12}^2$, то для любого $k \neq 2$, бимодуль P_{1k} нулевой.

Доказательство. Пусть $e_1 \in M_{12}^2$, тогда имеются такие элементы $x_i, y_i \in M_{12}$, что $\sum x_i y_i = e_1$. Значит, для любого элемента $z \in P_{1k}$ при $k \neq 2$ по правой альтернативности и лемме 4.4 а) имеем

$$z = e_1 z = \sum x_i y_i \cdot z = \sum (x_i z \cdot y_i + x_i [y_i, z]) = 0. \quad \square$$

4.4.2. Строеение ассоциативной супералгебры ёмкости 2

Теорема 4.3. Пусть $B = A \oplus M$ — унитарная ассоциативная супералгебра и $M^2 \neq 0$. Если четная часть $A = A_1 \oplus A_2$ — прямая сумма двух простых алгебр A_1 и A_2 , то B изоморфна одной из следующих супералгебр:

$$M_{m|n}, \quad A_1[\sqrt{1}] + A_2[\sqrt{1}], \quad A_1[\sqrt{1}] + E(A_2, P_{21} + M_{22}).$$

Доказательство. В условиях теоремы $B = A_1 + A_2 + M_{11} + M_{22} + M_{12}$.

1°. Если $M_{11}^2 \neq 0$, то по лемме 4.30 имеем $P_{12} = 0$. Если, к тому же, $M_{22}^2 \neq 0$, то и $P_{21} = 0$, значит, $M_{12} = P_{12} + P_{21} = 0$. Тогда $A_1 + M_{11} \triangleleft B$, поэтому по теореме 4.1 $A_1 + M_{11} \simeq A_1[\sqrt{1}]$ и, поэтому, $B \simeq A_1[\sqrt{1}] + A_2[\sqrt{1}]$.

2°. Рассмотрим теперь случай $M_{11}^2 \neq 0$ и $M_{22}^2 = 0$. Тогда $P_{12} = 0$. В этом случае из ассоциативности супералгебры следует, что $P_{21}^2 = 0$, а из леммы 4.4 а), что и $P_{21} * M_{22} = 0$, поэтому $B = A_1[\sqrt{1}] + E(A_2, P_{21} + M_{22})$.

3°. Осталось рассмотреть случай $M_{11}^2 = M_{22}^2 = 0$, тогда $M_{11} * M = M_{22} * M = 0$. Поэтому, $M_{12}^2 \neq 0$. По лемме 4.31 имеем $B = M_{m|n}$. $\square$

4.4.3. Случай $A_1 = \mathbb{C}$

Лемма 4.34. При $A_1 = \mathbb{C}$ бимодуль M_{12} над $A_1 + A_2$ нулевой.

Доказательство. По лемме 4.32 бимодуль M_{12} над алгеброй $A_1 + A_2$ является ассоциативным.

Рассмотрим вначале бимодуль P_{21} . Пусть $p \in P_{21}$, $a, b, c \in A_1$, тогда по лемме 4.32 имеем $(p, a, b) = (pc, a, b) = 0$, значит, по тождеству Клейнфелда (1.6)

$$0 = (pc, a, b) + (p, c, [a, b]) = p(c, a, b) + (p, a, b)c = p(c, a, b).$$

Теперь, если $c = ve_{22}$, $a = ve_{11}$ и $b = e_{12}$, то

$$(c, a, b) = e_{11}e_{11} \cdot e_{12} - ve_{22} \cdot (ve_{12})e_{11} = e_{12}.$$

Отсюда следует, что $pe_{12} = 0$, следовательно, $pe_{11} = pe_{12}e_{21} = 0$. Аналогично $pe_{22} = 0$, а значит, $p = p(e_{11} + e_{22}) = 0$. Этим доказано, что $P_{21} = 0$.

Кроме того, из тождества Клейнфелда (1.6) для $p \in P_{12}$, $a, b, c \in A_1$ следует, что

$$(a, b, c)p = -a(p, b, c) + (ap, b, c) + (a, p, [b, c]) = 0.$$

Тогда $e_{12}p = 0$, значит, $e_{22}p = e_{21}e_{12}p = 0$. Аналогично, $e_{11}p = 0$, поэтому и $p = (e_{11} + e_{22})p = 0$. Этим доказано, что $P_{12} = 0$. $\square$

4.4.4. Строение неассоциативных супералгебр ёмкости 2

Лемма 4.35. Супералгебра $A_1 + A_2 + M_{12}$ при $M_{12}^2 \neq 0$ и $\dim_{\mathbb{F}} A_1 > 1$ ассоциативна.

Доказательство. Так как $M_{12}^2 \neq 0$, то по лемме 4.34 простые алгебры A_1 и A_2 ассоциативны. Заметим, что из леммы 4.32 следует, что $(A_1 + A_2)$ -бимодуль M_{12} ассоциативен.

1°. Докажем вначале, что $P_{12}^2 = 0$. Пусть, от противного, для некоторых элементов $p, q \in P_{12}$ выполнено $pq \neq 0$, тогда по лемме 4.4 найдется такой элемент $e_{ii} \in A_1$, что $pq \cdot e_{ii} \neq 0$. Для определенности будем считать, что $i = 1$ и $pq \cdot e_{11} \neq 0$. Тогда по правой альтернативности и лемме 4.3 имеем

$$pq \cdot e_{11} = pq \cdot e_{12}e_{21}e_{11} = p \cdot e_{11}e_{21}e_{12}q = 0,$$

из полученного противоречия следует, что $P_{12}^2 = 0$.

2°. Докажем, что $P_{21}^2 = 0$. По доказанному в п. 1° можно считать, что $\dim_{\Phi} A_2 = 1$. Пусть тогда $u, v \in P_{21}$, такие что $uv = e_2 \in A_2$. Для произвольного $p \in P_{21}$ в этом случае имеем

$$p = e_2 p = uv \cdot p = up \cdot v + u[v, p] = up \cdot v.$$

Таким образом $P_{21} = \Phi v$.

Тогда для матричных единиц $e_{ij} \in A_1$ линейно зависимы элементы ve_{11} и ve_{12} из P_{21} , т.е. найдутся такие скаляры $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$, не равные нулю одновременно, что $\alpha_1 ve_{11} + \alpha_2 ve_{12} = 0$. Отсюда после умножения справа на e_{11} и e_{21} вытекает $ve_{11} = 0$. Аналогично $ve_{ii} = 0$, значит, получаем $v = ve_1 = v \sum_i e_{ii} = 0$, — противоречие.

3°. Проверим, что все ассоциаторы от однородных элементов равны 0. Пусть $a_i \in A_i$ и $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \in P_{ij}$. Из ассоциативности $A_1 + A_2$ -бимодуля M_{12} следует, что ассоциаторы, содержащие хотя бы два элемента чётной части, нулевые. Далее, легко проверить, что равны 0 ассоциаторы от элементов a_i, x_{kl}, y_{pq} . В качестве примеров рассмотрим только два из семи ассоциаторов (x_{ij}, a_i, y_{ij}) и (x_{ij}, a_j, y_{ji}) .

Для первого ассоциатора имеем

$$-(x_{ij}, a_i, y_{ij}) = (x_{ij}, y_{ij}, a_i) = (x_{ij}y_{ij})a_i - x_{ij}(y_{ij}a_i).$$

Покажем, что каждое из этих слагаемых равно нулю. В самом деле, по пп. 1° и 2°: $P_{12}^2 = P_{21}^2 = 0$, значит, первое слагаемое равно 0. По лемме 4.3 г) и второе слагаемое нуль.

При рассмотрении второго ассоциатора заметим еще, что по лемме 4.4: $P_{ij}P_{ji} \subseteq A_i$, поэтому

$$-(x_{ij}, a_j, y_{ji}) = (x_{ij}, y_{ji}, a_j) = (x_{ij}y_{ji})a_j - x_{ij}(y_{ji}a_j) = 0.$$

Наконец,

$$(x_{ij}, y_{ji}, z_{ij}) = (x_{ij}, z_{ij}, y_{ji}) = (x_{ij}z_{ij})y_{ji} - x_{ij}(z_{ij}y_{ji}) = 0,$$

$$(x_{ij}, y_{ji}, z_{ji}) = (x_{ij}y_{ji})z_{ji} - x_{ij}(y_{ji}z_{ji}) = 0,$$

$$(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) = 0. \quad \square$$

Теорема 4.4. Пусть $B = A \oplus M$ — сильно альтернативная унитарная правоальтернативная неассоциативная супералгебра. Если четная часть $A = A_1 \oplus A_2$ — прямая сумма двух простых алгебр A_1, A_2 , и $M^2 \neq 0$, то супералгебра B

1. либо разлагается в сумму тривиально расщепляемой супералгебры $E(0, M_{12})$ и двух супералгебр с простыми четными частями A_1 и A_2 , хотя бы одна из которых альтернативна;

2. либо проста и изоморфна одной из супералгебр: $V_{2|2}$ или $V_{2|2}(\nu)$

3. либо не является простой и изоморфна одной из супералгебр:

$$V_{2|1}(e_2, e_1) + E(0, P_{12} + M_{11}) \text{ или } \Phi[\sqrt{1}]^{(1,2)}.$$

Доказательство. Если $M_{12}^2 = 0$, то супералгебра B представляется в виде суммы $B = E(0, M_{12}) + (A_1 + M_{11}) + (A_2 + M_{22})$. Супералгебры с простыми четными частями были изучены в теоремах 4.1 и 4.2, поэтому далее в доказательстве будем предполагать, что $M_{12}^2 \neq 0$. Поэтому по лемме 4.35 получаем, что $A_1 \simeq A_2 \simeq \Phi$, другими словами, супералгебра B является абелевой супералгеброй. Строение унитарных простых абелевых супералгебр над полем характеристики 0 было получено в главе 2.

В лемме 2.19 доказано, что простая абелева супералгебра B с четной частью $\Phi e_1 + \Phi e_2$ изоморфна $M_{1|1}$, $V_{2|2}$ или $V_{2|2}(\nu)$, причем, супералгебра $M_{1|1}$ в этом списке ассоциативна. Рассуждения проводились для характеристики 0, но ограничение на характеристику использовалось лишь при доказательстве инвариантности радикала четной части относительно дифференцирований; для полупростой четной части рассуждения в лемме 2.19 проходят для любой характеристики, отличной от 2.

Осталось рассмотреть случаи, при которых супералгебра $B = \Phi e_1 + \Phi e_2 + M_{11} + M_{22} + M_{12}$ не является простой. Из рассуждений леммы 2.19 следует, что это возможно лишь в двух случаях:

$$1. M_{11} = M_{22} = 0, P_{12} * P_{21} = P_{12}^2 = 0 \quad \text{и} \quad 2. M_{11} \neq 0.$$

Случай 1. Пусть $M_{11} = M_{22} = 0$ и $P_{12} * P_{21} = P_{12}^2 = 0$. Тогда в силу лемм 2.14 и 2.15 либо бимодуль P_{21} одномерен, причем, $P_{21} = \Phi u_{21}$ и $u_{21}^2 = e_2$, либо $P_{21}^2 = 0$. Если $P_{21} = \Phi u_{21}$ и $u_{21}^2 = e_2$, то супералгебра $\Phi e_1 + \Phi e_2 + P_{21}$ является ветвью $V_{2|1} = V_{2|1}(e_2, e_1)$. Если $P_{12} = 0$, то $B = V_{2|1}(e_2, e_1)$, иначе $B = V_{2|1}(e_2, e_1) + E(0, P_{12})$.

Случай 2. Пусть $M_{11} \neq 0$.

2.1. Если $M_{11}^2 \neq 0$, то по теореме 4.2 супералгебра $\Phi e_1 + M_{11}$ является либо ассоциативной супералгеброй $\Phi[\sqrt{1}]$, либо альтернативной супералгеброй $V_{1|2}$ ($\text{char } \Phi = 3$). Тогда по лемме 4.30 верно $P_{12} = 0$ и $M_{12} = P_{21}$, поэтому $P_{21}^2 = M_{12}^2 \neq 0$. Значит, $e_2 \in P_{21}^2$, тогда по лемме 4.33 заключаем, что $M_{22} = 0$. Как было указано ранее, пространство P_{21} одномерно, значит

$$B = \Phi e_1 + \Phi e_2 + M_{11} + P_{21} = \Phi e_1 + M_{11} + V_{2|1}(e_2, e_1)$$

является супералгеброй $\Phi[\sqrt{1}]^{(1,2)}$ или $V_{1|2}^{(1,2)}$, но супералгебра $V_{1|2}^{(1,2)}$ по лемме 4.5 не является правоальтернативной, поэтому $B = \Phi[\sqrt{1}]^{(1,2)}$.

2.2. Пусть $M_{11}^2 = M_{22}^2 = 0$. Тогда $B = E(0, M_{11} + M_{22}) + B'$, где $B' = \Phi e_1 + \Phi e_2 + M_{12}$ — неассоциативная супералгебра, поэтому либо она проста, либо она описана ранее в первом пункте. Если она простая, то $e_1, e_2 \in M_{12}^2$, а значит, по лемме 4.33 бимодули M_{11} и M_{22} нулевые, — противоречие. Если это супералгебра $V_{2|1}(e_2, e_1) + E(0, P_{12})$, то $e_2 \in M_{12}^2$ и, поэтому $M_{22} = 0$. Теорема доказана. $\square$

Из теорем 4.3 и 4.4 непосредственно следует

Лемма 4.36. Если $P_{12}^2 + P_{12}P_{21} \neq 0$, то для любых $0 \neq a_1 \in A_1$, $0 \neq a_2 \in A_2$ существуют $p_{12}, q_{12} \in P_{12}$ такие, что $a_1 p_{12} \neq 0$ и $q_{12} a_2 \neq 0$.

Доказательство. По леммам 4.3 и 4.4 рассмотрим супералгебру $A_1 + A_2 + M_{12}$. В силу условия $P_{12}^2 + P_{12}P_{21} \neq 0$ по теореме 4.3 эта супералгебра является супералгеброй $M_{m|n}$ в ассоциативном случае, а по теореме 4.4 одной из супералгебр $V_{2|2}$, $V_{2|2}(\nu)$ или $V_{2|1}(e_1, e_2) + E(0, P_{21})$ в неассоциативном. Для трех последних случаев требуемым элементом ($p_{12} = q_{12}$) является базисный вектор u_{12} одномерной пирсовой компоненты P_{12} . В случае супералгебры $M_{m|n}$, если $a_1 = \sum \lambda_{ij} e_{ij}^{(1)}$ и $a_2 = \sum \mu_{kl} e_{kl}^{(2)}$, причем некоторые фиксированные $\lambda_{i'j'}$ и $\mu_{k'l'}$ в этих разложениях ненулевые, требуемым элементом является $u_{j'k'}$ из леммы 4.31. $\square$

4.5. WA-полупростые супералгебры

4.5.1. Теорема об отщеплении слабого аннулятора

Теорема 4.5. Пусть $B = A \oplus M$ — конечномерная сильно альтернативная унитарная правоальтернативная супералгебра с полупростой четной частью. Тогда она разлагается в прямую сумму WA-полупростой супералгебры B' и слабого аннулятора $WA(B)$: $B = B' \oplus WA(B)$. Причем, слабый аннулятор $WA(B)$ является суперидеалом супералгебры B и фактор по нему $B/WA(B)$ изоморфен прямому слагаемому B' .

Доказательство. Считая, что $P_{ii} = M_{ii}$, обозначим через M_0 сумму таких компонент P_{ij} , что $P_{ij}^2 = P_{ij} * P_{ji} = 0$ (индексы i и j могут совпадать). Поскольку каждая из P_{ij} является бимодулем над A (см. лемму 4.3 и замечание перед ней), то M_0 также A -подбимодуль в M .

Напомним, что $P_{12} + P_{21} = M_{12}$. Тогда по лемме 4.4 верно $M_0 * M = 0$. Обозначим через M_1 сумму таких бимодулей P_{ij} , что $P_{ij}^2 + P_{ij} * P_{ji} \neq 0$. Очевидно, что $M = M_0 \oplus M_1$ и $B = E(0, M_0) \oplus (A + M_1)$ — прямая сумма супералгебр.

Рассмотрим $A^{(0)} = \{a \in A \mid a * M_1 = 0\}$. Из лемм 4.29 и 4.36 следует, что $A^{(0)} \triangleleft A$, значит, $A^{(0)}$ является суммой простых алгебр из исходного списка $A_1, \dots, A_n$. Обозначим

через N множество таких индексов, что $A^{(0)} = \sum_{i \in N} A_i$. Кроме того, пусть $A^{(1)} = \sum_{i \notin N} A_i$, тогда $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$.

Очевидно, что $B = E(A^{(0)}, M_0) \oplus B'$, где $B' = A^{(1)} + M_1$.

1°. Докажем, что супералгебра B' имеет нулевой слабый аннулятор. Из теорем 4.1–4.4 следует, что для всякого $x \in P_{ij} \subseteq M_1$ найдется такой $y \in P_{ij} + P_{ji} \subseteq M$, что $xy \neq 0$ или $yx \neq 0$. А так как $M_0 * M = 0$, то можно считать, что $y \in M_1$. Поэтому нечетная часть слабого аннулятора супералгебры B' нулевая: $WA_1(B') = 0$. Далее, если $a \in WA_0(B')$, то по определению слабого аннулятора $a * M_1 \subseteq WA_1(B') = 0$, то есть $a \in A^{(0)}$ и $WA_0(B') = 0$. Таким образом, доказано, что B' является WA-полупростой.

2°. Докажем теперь, что $WA(B) = E(A^{(0)}, M_0)$. Так как $M_0 * M = 0$ и $WA_1(B') = 0$, то если $x \in WA_1(B)$ и $x = x_0 + x_1 \in M = M_0 + M_1$, тогда $x * M = 0$, значит, $x_1 * M = 0$, поэтому $x_1 * M_1 = 0$, то есть $x_1 \in WA_1(B') = 0$ и $x \in M_0$. Обратное включение очевидно, поэтому $M_0 = WA_1(B)$.

Далее, так как M_0 является бимодулем, получаем $A^{(0)} * M = A^{(0)} * (M_0 + M_1) = A^{(0)} * M_0 \subseteq M_0$, то есть $A^{(0)} \subseteq WA_0(B)$. Пусть теперь $a = a_0 + a_1 \in A = A^{(0)} + A^{(1)}$ лежит в $WA_0(B)$. Тогда $a * M \subseteq WA_1(B) = M_0$. С другой стороны, $a * M = a * M_0 + a_1 * M_1$, а так как M_1 — бимодуль, то $a_1 * M_1 = 0$ и $a_1 \in A^{(0)}$, то есть $a_1 = 0$. Доказано, что $A^{(0)} = WA_0(B)$. Итак, $WA(B) = E(A^{(0)}, M_0)$.

3°. Кроме того, слабый аннулятор $WA(B) = E(A^{(0)}, M_0)$ является суперидеалом B . В самом деле, имеем включения $A^{(0)} * A \subseteq A^{(0)}$, $A^{(0)} * M \subseteq M_0$, $M_0 * A \subseteq M_0$, $M_0 * M = 0 \subseteq A^{(0)}$. Это означает, что $WA(B)$ — идеал супералгебры B .

4°. По построению фактор по слабому аннулятору изоморфен $B' = A^{(1)} + M_1$. □

4.5.2. Основная теорема и следствия из неё

Теорема 4.6. *Всякая WA-полупростая сильно альтернативная унитарная правоальтернативная супералгебра разлагается в прямую сумму простых супералгебр $B_{1|2}$, $S_{4|2}$ ($\text{char } \Phi = 3$), $M_n[\sqrt{1}]$, $M_{m|n}$, $B_{2|2}(\nu)$, $B_{n|n}$ и ветвлений супералгебр $B_{n|n}$ и $V_{2|1}$.*

Доказательство. Заметим вначале, что нечетная часть WA-полупростой супералгебры $B = A \oplus M$ не содержит компоненты M_{ij} с нулевым квадратом. Далее, нечетная часть супералгебры B содержит ненулевые пирсовы компоненты P_{ij} трех типов, содержащиеся в M . Первый тип — при $i = j$, второй — при $i \neq j$, причем обе компоненты P_{ij} , P_{ji} — ненулевые, третий — при $i \neq j$, но лишь одна компонента из двух P_{ij} и P_{ji} ненулевая. Введем в рассмотрение следующие множества индексов, связанные с такими компонентами:

$K_1 := \{i \mid 0 \neq M_{ii}\}$ — индексы компонент первого типа,
 $K_2 := \{i \mid 0 \neq P_{ij} \ \& \ 0 \neq P_{ji} \ \& \ i \neq j\}$ — индексы компонент второго типа,
 $K_3 := \{i \mid 0 \neq P_{ij} \ \& \ P_{ji} = 0\}$ — первые индексы ненулевых компонент третьего типа,
 $K_4 := \{j \mid 0 \neq P_{ij} \ \& \ P_{ji} = 0 \ \& \ j \notin K_1 \cup K_2\}$ — вторые индексы ненулевых компонент третьего типа, не являющиеся индексами компонент первого и второго типа,
 $K_5 := \{j \mid 0 \neq P_{ij} \ \& \ P_{ji} = 0 \ \& \ j \in K_1 \cup K_2\}$ — вторые индексы ненулевых компонент третьего типа, которые являются индексами компонент первого или второго типа.

Так как B — WA-полупростая супералгебра, то если $A_i \subseteq A$, то i является индексом какой-то ненулевой нечетной пирсовой компоненты: $i \in K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$. Из лемм 4.30 и 4.33 следует, что первые три множества попарно не пересекаются.

Приступим к описанию компонент разложения супералгебры B .

1. Пусть $1 \in K_1$. По лемме 4.4 верно $M_{11}^2 \subseteq A_1$. Поэтому $B_{11} = A_1 + M_{11}$ является супералгеброй ёмкости 1 и по теореме 4.2 супералгебра B_{11} изоморфна либо одной из альтернативных супералгебр $B_{1|2}$ и $S_{4|2}$ при $\text{char } \Phi = 3$, либо ассоциативной супералгебре $M_n[\sqrt{1}]$, в частности, B_{11} является простой супералгеброй. Обозначим через $\mathfrak{B}_1 = \sum_{i \in K_1} B_{ii}$. Понятно, что эта сумма прямая.

2. Пусть P_{12} и P_{21} ненулевые, то есть $1, 2 \in K_2$. По лемме 4.4 верно $M_{12}^2 \subseteq A_1 + A_2$, поэтому $B_{12} = A_1 + A_2 + M_{12}$ является супералгеброй. По теоремам 4.3 и 4.4 супералгебра B_{12} изоморфна одной из простых супералгебр: $M_{m|n}$, $B_{2|2}$ или $B_{2|2}(\nu)$.

Покажем, что количество чисел в множестве K_2 четно и оно распадается на непересекающиеся пары индексов $\{i, j\}$, таких что бимодули P_{ij} и P_{ji} ненулевые. В самом деле, если бы две пары индексов пересекались, например, $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$, то имелись бы ненулевые бимодули P_{12} и P_{13} , что противоречило бы лемме 4.33 (необходимое условие леммы 4.33 о том, что $e_1 \in M_{12}^2$ выполнено в супералгебрах $M_{m|n}$, $B_{2|2}$ и $B_{2|2}(\nu)$). Обозначим через $\mathfrak{B}_2 = \sum_{i,j \in K_1} B_{ij}$. Понятно, что и эта сумма прямая.

3. Пусть $1 \in K_3$ и $P_{12} \neq 0$. В этом случае $P_{21} = 0$, а так как $M_{12}^2 \neq 0$, то и $P_{12}^2 \neq 0$. Тогда имеется унитарная супералгебра $B_{12} = A_1 + A_2 + P_{12}$. В теоремах 4.3 и 4.4 проведена классификация унитарных супералгебр с четной частью $A_1 + A_2$. По теореме 4.3 эта супералгебра не является ассоциативной, поскольку в списке супералгебр теоремы 4.3 единственная супералгебра вида $A_1 + A_2 + M_{12}$ это $M_{m|n}$, но в ней и P_{12} , и P_{21} ненулевые. В силу теоремы 4.4 имеется единственная супералгебра вида $A_1 + A_2 + P_{12}$, поскольку в первом пункте теоремы 4.4 перечисляются супералгебры содержащие в своем составе P_{11} и P_{22} , во втором — и P_{12} , и P_{21} , в третьем — супералгебра $\Phi[\sqrt{1}]^{(1,2)}$ содержит компоненту P_{11} , значит, по составу нечетной части ей соответствует лишь супералгебра $V_{2|1}(e_1, e_2) + E(0, P_{21} + M_{22})$, а так как

$P_{21} = M_{22} = 0$, то $B_{12} = V_{2|1}(e_1, e_2)$. Отсюда делаем вывод о том, что $P_{12}^2 = \Phi e_1$.

Рассмотрим такой набор индексов $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, содержащийся в K_3 , что компоненты $P_{i_1 i_2}, P_{i_2 i_3}, \dots, P_{i_n i_1}$ отличны от 0. Этот набор будем называть *циклом*. Ясно, что циклы состоят хотя бы из трех элементов. Заметим, что различные циклы не пересекаются. В самом деле, если циклы $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ и $(j_1, j_2, \dots, j_m)$ пересекаются так, например, что $i_1 = j_1$ и $i_2 \neq j_2$, то $P_{i_1 i_2}, P_{j_1 j_2} \neq 0$ что противоречит лемме 4.33, поскольку условие $e_1 \in M_{12}^2 = P_{12}^2$ выполнено.

Пусть $(1, 2, \dots, n)$ — цикл, тогда супералгебра $A_1 + A_2 + \dots + A_n + P_{12} + P_{23} + \dots + P_{n,1}$ является простой циклической супералгеброй $B_{n|n}$, $n \geq 3$. Обозначим сумму всех таких супералгебр, построенных по всем непересекающимся циклам через $\mathfrak{B}_3$.

Все необходимые понятия, связанные с теорией графов см. в [48].

4. Обозначим через K' подмножество всех индексов из $K_3 \cup K_4 \cup K_5$, которые не входят в циклы (в циклы могут входить только элементы из K_3). Определим орграф Γ . Вершинами графа считаем элементы K' . Пару вершин (j, i) считаем дугой графа Γ , если $P_{ij} \neq 0$. По построению этот граф ациклический и распадается на максимальные ориентированные деревья, поскольку по лемме 4.33 из каждой вершины графа исходит не более одной дуги.

Пусть i — корень дерева Γ_i . Поставим в соответствие дереву Γ_i цепочку операторов ветвления η_i , построенную следующим образом. Пусть на расстоянии 1 от вершины i находится ровно l вершин, скажем, $i_1 < i_2 < \dots < i_l$, другими словами, имеются ненулевые бимодули $P_{i_1 i}, P_{i_2 i}, \dots, P_{i_l i}$. Значит, первыми операторами ветвления в цепочке η_i являются операторы $(i, i_1)(i, i_2) \dots (i, i_l)$. Далее, будем обходить по ярусам (слоям по удаленности от корня дерева) все вершины дерева Γ_i и последовательно перечислять в цепочке следующие операторы ветвления. Так, пусть мы дошли до вершины j из которой исходят дуги в вершины $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, тогда в цепочку в этом месте добавляется последовательность операторов ветвления $(j, j_1)(j, j_2) \dots (j, j_k)$.

Другими словами, дуга (i, j) находится в дереве Γ_i тогда и только тогда, когда оператор (i, j) присутствует в произведении η_i . Порядок следования этих операторов определяется обходом вершин дерева ярусами.

Пусть имеется максимальное дерево Γ_i и $i \in K_4$. Это дерево задает почти полупростую супералгебру $E(e_i, 0)^{\eta_i}$. Обозначим через $\mathfrak{B}_0$ сумму всех супералгебр $E(e_i, 0)^{\eta_i}$ по таким максимальным Γ_i , что $i \in K_4$. Обозначая это множество индексов через N_0 , имеем $\mathfrak{B}_0 = \sum_{i \in N_0} E(e_i, 0)^{\eta_i}$.

Пусть B_j — произвольная простая супералгебра из суммы $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3$, то есть $\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_3 = \sum_{j \in N} B_j$, и пусть N_j — множество таких индексов i , что $e_i \in B_j$ и i — корень

максимального дерева Γ_i орграфа Γ . Обозначим $\nu_j = \prod_{i \in N_j} \eta_i$, причем, если множество N_j пусто, то $\nu_j = \text{Id}$ — тождественный оператор. Тогда супералгебра B представляется в виде $B = \sum_{j \in N} B_j^{\nu_j} + \sum_{i \in N_0} E(e_i, 0)^{\eta_i}$. Ясно, что эта сумма прямая, то есть $B = \bigoplus_{j \in N} B_j^{\nu_j} \oplus \bigoplus_{i \in N_0} E(e_i, 0)^{\eta_i}$, так как множества индексов простых алгебр A_i , входящих в разложение каждого слагаемого, не пересекаются. $\square$

Следствие 1. *Всякая WA-полупростая унитарная ассоциативная супералгебра разлагается в прямую сумму простых ассоциативных супералгебр $M_n[\sqrt{1}]$ и $M_{m|n}$.*

Следствие 2. *Всякая WA-полупростая унитарная альтернативная супералгебра разлагается в прямую сумму простых супералгебр $B_{1|2}$, $B_{4|2}$ ($\text{char } \Phi = 3$), $M_n[\sqrt{1}]$ и $M_{m|n}$.*

Следствие 3. *Всякая WA-полупростая унитарная альтернативная супералгебра характеристики $\neq 2, 3$ ассоциативна.*

Следствие 4. *Всякая простая унитарная правоальтернативная супералгебра с полупростой сильно альтернативной четной частью либо ассоциативна, либо абелева, либо является альтернативной супералгеброй $S_{4|2}$ ($\text{char } \Phi = 3$).*

Глава 5

Супералгебры с сильно альтернативной четной частью

5.1. Супералгебры ёмкости 1

Напомним, что четная часть супералгебры называется сильно альтернативной (сильно ассоциативной), если супералгебра является альтернативным (ассоциативным) бимодулем над ней. В главе 4 описано строение конечномерных унитарных супералгебр с полупростой сильно альтернативной четной частью.

Будем говорить, что супералгебра $B = A \oplus M$ имеет ёмкость 1, если факторалгебра четной части A по ее ниль-радикалу $\mathfrak{R}$ является простой алгеброй S . При этом алгебру S будем называть *простой компонентой четной части*, если $A = S \oplus \mathfrak{R}$.

Этот параграф посвящен доказательству следующего результата.

Теорема 5.1. *Пусть $B = A \oplus M$ — простая правоальтернативная унитарная супералгебра над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики не 2 с конечномерной альтернативной четной частью A и B — альтернативный унитарный бимодуль над A . Если факторалгебра A по ее ниль-радикалу $\mathfrak{R}$ является простой некоммутативной алгеброй, то $\mathfrak{R} = 0$.*

На самом деле, далее описана структура правоальтернативных унитарных супералгебр ёмкости 1 с конечномерной некоммутативной сильно альтернативной простой компонентой четной части — аналог теоремы Веддерберна об отщеплении радикала. Заметим, что случай коммутативной простой компоненты нулевой характеристики рассмотрен в [3], причем без ограничения сильной альтернативности на четную часть.

Параграф состоит из 2 частей. В 5.1.1 доказано, что если простая компонента S — алгебра матриц порядка $n \geq 2$, то супералгебра B является суммой простой супералгебры, $S_{4|2}$ или $M_n[\sqrt{1}]$, и некоторого своего градуированного идеала. Если простая компонента S является алгеброй Кэли—Диксона, то $M^2 \subseteq \mathfrak{R}$, следовательно супералгебра B не может быть простой.

Из теоремы 5.1 в силу классических результатов [25, 66, 73, 74] получается

Следствие. *Пусть $B = A \oplus M$ — простая унитарная правоальтернативная супералгебра ёмкости 1 над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики 0. Если A конечномерна и сильно альтернативна, то $\mathfrak{R} = 0$.*

Над алгебраически замкнутым полем Φ возможны следующие 4 случая для простой компоненты S : 1) $S = \Phi$; 2) $S = \mathbb{H}$; 3) $S = M_n$ ($n \geq 3$); 4) $S = \mathbb{C}$, где $\mathbb{H}$, $\mathbb{C}$ — расщепляемые композиционные алгебры размерности 4 и 8. Поскольку случай $S = \Phi$ следует из [3], то доказательство теоремы разобьем на 3 случая.

5.1.1. Случай $S = M_n$ при $n \geq 2$

Напомним необходимые определения. На алгебре матриц второго порядка $\mathbb{H}$ задана симплектическая инволюция $\bar{a} = \text{tr } a \cdot 1 - a$; если $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, то $\bar{a} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$. В частности, $\bar{e}_{11} = e_{22}$, $\bar{e}_{22} = e_{11}$, $\bar{e}_{12} = -e_{12}$, $\bar{e}_{21} = -e_{21}$.

Унитарный бимодуль M над $\mathbb{H}$ называется *бимодулем Кэли*, если выполнено свойство $\bar{a}x = xa$ для любых $x \in M$ и $a \in \mathbb{H}$. *Стандартным бимодулем Кэли* над алгеброй $\mathbb{H}$ называется 2-мерное пространство C_2 с базисом m_1, m_2 и действием $\bar{e}_{ij}m_k = m_ke_{ij} = \delta_{kj}m_i$. В стандартном бимодуле выполнены соотношения $e_{ij} \circ m_k = \delta_{ij}m_k$.

Так как простая компонента $S = \mathbb{H}$ супералгебры B сильно альтернативна, то B может быть рассмотрена как альтернативный бимодуль над $\mathbb{H}$. По [49, теорема 11.1] всякий альтернативный бимодуль M над $\mathbb{H}$ является прямой суммой ассоциативного бимодуля M_a и бимодуля Кэли M_c . В силу унитарности ассоциативный бимодуль является прямой суммой регулярных бимодулей, а бимодуль Кэли — прямой суммой стандартных бимодулей Кэли.

Пусть $[\mathbb{H}]_i$ — регулярные ассоциативные бимодули, а $[C_2]_i$ — стандартные бимодули Кэли в разложении супералгебры B как альтернативного $\mathbb{H}$ -бимодуля. Элементы из неприводимых компонент разложения $[\mathbb{H}]_p$ и $[C_2]_q$, соответствующие $a \in \mathbb{H}$ и $m \in C_2$, будем обозначать $[a]_p$ и $[m]_q$. Ясно, что элементы $[a]_p$ и $[m]_q$ лежат либо в A , либо в M . Чтобы подчеркнуть, что элемент $[a]_p$ лежит в A , будем использовать запись $[a]_p^0$. Если же элемент $[a]_p$ лежит в M , то будем его обозначать $[a]_p^1$. Такие же уточнения используем и для элементов $[m]_q$.

Таким образом из элементов $[e_{ij}]_k$ и $[m_i]_j$ для матричных единиц e_{ij} из базиса $\mathbb{H}$ и m_i из базиса C_2 может быть выбран базис B . Перенумеруем регулярные бимодули $[\mathbb{H}]_i$ так, что $[\mathbb{H}]_0^0 = \mathbb{H}$, а далее по порядку идут бимодули из $\mathfrak{R}$ и M :

$$[\mathbb{H}]_1^0, \dots, [\mathbb{H}]_{n'}^0 \subseteq \mathfrak{R}, \quad [\mathbb{H}]_{n'+1}^1, \dots, [\mathbb{H}]_n^1 \subseteq M.$$

Введем аналогичную нумерацию и для бимодулей Кэли:

$$[C_2]_1^0, \dots, [C_2]_{m'}^0 \subseteq \mathfrak{R}, \quad [C_2]_{m'+1}^1, \dots, [C_2]_m^1 \subseteq M.$$

Для векторов $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ и $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ используем запись

$$[e_{ij}]_\xi = \sum_{k=0}^n \xi_k [e_{ij}]_k \quad \text{и} \quad [m_i]_\vartheta = \sum_{k=1}^m \vartheta_k [m_i]_k.$$

Будем считать, что

$$[e_{ij}]_{\xi}^0 = \sum_{k=0}^{n'} \xi_k [e_{ij}]_k^0 \quad \text{и} \quad [e_{ij}]_{\xi}^1 = \sum_{k=n'+1}^n \xi_k [e_{ij}]_k^1.$$

Аналогичное соглашение принимаем и для бимодулей Кэли:

$$[m_i]_{\vartheta}^0 = \sum_{k=1}^{m'} \vartheta_k [m_i]_k^0 \quad \text{и} \quad [m_i]_{\vartheta}^1 = \sum_{k=m'+1}^m \vartheta_k [m_i]_k^1.$$

Сделаем одно замечание, которое будем использовать в дальнейшем без дополнительных пояснений. Всякий элемент $a \in B$ может быть представлен разложением по базису в виде

$$a = [e_{11}]_{\alpha} + [e_{12}]_{\beta} + [e_{21}]_{\gamma} + [e_{22}]_{\delta} + [m_1]_{\varepsilon} + [m_2]_{\zeta},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ — некоторые векторы.

По правилам действия в регулярном ассоциативном бимодуле и в стандартном бимодуле Кэли имеем $ae_{11} = [e_{11}]_{\alpha} + [e_{21}]_{\gamma} + [m_1]_{\varepsilon}$ и $ae_{21} = [e_{11}]_{\beta} + [e_{21}]_{\delta}$. Поэтому для произвольного элемента $a \in B$ имеем:

$$\text{если } ae_{11} = ae_{21} = 0, \text{ то } a = [m_2]_{\zeta}$$

для некоторого вектора ζ . Аналогично,

$$\text{если } ae_{11} = ae_{12} = 0, \text{ то } a = [e_{12}]_{\beta} + [e_{22}]_{\delta}$$

для некоторых векторов β и δ .

Рассмотрим разложение $M = M_a \oplus M_c$, где M_a — ассоциативный бимодуль, M_c — бимодуль Кэли. Также рассмотрим разложение на регулярные и стандартные бимодули Н-бимодуля $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_a \oplus \mathfrak{R}_c$.

Лемма 5.1. *Для данных чисел p, q найдется вектор $\xi = \xi_{pq}$ такой, что*

$$[m_i]_p^1 [e_{jk}]_q^1 = -[\bar{e}_{jk}]_q^1 [m_i]_p^1 = [m_i e_{jk}]_{\xi}^0,$$

для любых $i, j, k = 1, 2$. В частности, $M_c M_a + M_a M_c \subseteq \mathfrak{R}_c$.

Доказательство представим в виде последовательности пунктов.

1. Докажем, что $[m_1]_p^1 [e_{22}]_q^1 = [m_1]_p^1 [e_{12}]_q^1 = 0$.

Если ясно о каких верхних индексах или нижних индексах идет речь, то мы будем их опускать для сокращения записи.

По правой альтернативности $[m_1][e_{22}] \cdot e_{22} = 2[m_1][e_{22}]$. Так как собственными значениями оператора правого умножения на e_{22} могут быть только 0 и 1, то доказано, что $[m_1][e_{22}] = 0$.

Умножая это равенство справа на e_{12} и используя правую альтернативность, получаем и $[m_1][e_{12}] = 0$.

Из двух доказанных равенств переименованием индексов получаем еще два равенства $[m_2]_p^1[e_{11}]_q^1 = [m_2]_p^1[e_{21}]_q^1 = 0$. Далее мы не будем указывать равенства, которые получаются из доказанных переименованием индексов.

2. Докажем, что для некоторого вектора $\xi = \xi_{pq}$ выполнено $[m_1]_p^1[e_{i1}]_q^1 = [m_2]_p^1[e_{i2}]_q^1 = [m_i]_\xi^0$.

Из п. 1 и правой альтернативности вытекает $0 = [m_1][e_{12}] \cdot e_{21} = -[m_2][e_{12}] + [m_1][e_{11}] + [m_1][e_{22}]$. Следовательно, с учетом замены индексов,

$$[m_1][e_{11}] = [m_2][e_{12}], \quad [m_2][e_{22}] = [m_1][e_{21}]. \quad (5.1)$$

Так как в силу правой альтернативности $[m_1][e_{11}] \cdot e_{22} = 0$ и $[m_1][e_{11}] \cdot e_{12} = [m_1][e_{12}] = 0$, то для некоторого вектора ξ имеем $[m_1][e_{11}] = [m_2][e_{12}] = [m_1]_\xi^0$. Тогда $[m_2]_\xi^0 = [m_1]_\xi^0 e_{21} = [m_2][e_{12}] \cdot e_{21} = -[m_2]e_{21} \cdot [e_{12}] + [m_2][e_{11}] + [m_2][e_{22}]$. В силу п. ?? и (5.1) получаем, что $[m_2]_\xi^0 = [m_2][e_{22}] = [m_1][e_{21}]$.

3. Так как $[e_{i1}][m_1] \cdot e_{11} = [e_{i1}][m_1] \cdot e_{21} = 0$, то для некоторых векторов α_i выполнено $[e_{i1}][m_1] = [m_2]_{\alpha_i}^0$. Аналогично $[e_{i2}][m_1] \cdot e_{12} = [e_{i2}][m_1] \cdot e_{22} = 0$, значит, $[e_{i2}][m_1] = [m_1]_{\beta_i}^0$.

Продолжая вычисления, получаем: $[m_1]_{\alpha_1}^0 = 0$; $[m_2]_{\alpha_2}^0 = [m_2]_\xi^0$; $[m_1]_{\beta_1}^0 = 0$; $[m_2]_{\beta_2}^0 = -[m_2]_\xi^0$.

Таким образом, доказано, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \xi$, $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = -\xi$. □

Лемма 5.2. Для данных p, q найдется $\xi = \xi_{pq}$ такой, что

$$[m_i]_p^1[e_{jk}]_q^0 = [\bar{e}_{jk}]_q^0[m_i]_p^1 = [m_i e_{jk}]_\xi^1.$$

Доказательство представим в виде последовательности пунктов.

1. Докажем, что $[m_1]_p^1[e_{22}]_q^0 = [m_1]_p^1[e_{12}]_q^0 = 0$.

Имеем $[m_1][e_{22}] \cdot e_{22} = 2[m_1][e_{22}]$, значит, $[m_1][e_{22}] = 0$. Откуда $0 = [m_1][e_{22}] \cdot e_{12} = [m_1][e_{12}]$.

2. Докажем, что $[e_{11}]_q^0[m_1]_p^1 = [e_{12}]_q^0[m_1]_p^1 = 0$.

В силу левой альтернативности A -бимодуля M : $e_{11} \cdot [e_{11}][m_1] = 2[e_{11}][m_1]$, поэтому $[e_{11}][m_1] = 0$. Далее, $0 = [e_{11}][m_1] \cdot e_{12} = -[e_{12}][m_1]$.

3. Докажем, что для некоторого вектора ξ выполнены равенства $[m_1]_p^1[e_{i1}]_q^0 = [m_2]_p^1[e_{i2}]_q^0 = [m_i]_\xi^1$.

По п. 1 имеем $0 = [m_1][e_{22}] \cdot e_{21} = -[m_2][e_{22}] + [m_1][e_{21}]$. Далее, $[m_2][e_{22}] \cdot e_{11} = 0$ и по п. 1 получаем, что $[m_2][e_{22}] \cdot e_{21} = [m_2][e_{21}] = 0$, что в точности означает, что $[m_2][e_{22}] = [m_2]_\xi^1$.

Требуемое равенство доказано при $i = 2$. Для доказательства при $i = 1$ достаточно умножить его справа на e_{12} .

4. Аналогично п. 3 из п. 2 следует, что для некоторого вектора α выполнены равенства $[e_{11}]_q^0[m_2]_p^1 = -[e_{21}]_q^0[m_1]_p^1 = [m_2]_\alpha^1$.

5. Докажем, что $\alpha = \xi$.

По пп. 1 и 3 имеем $(e_{21}, [m_1]_p^1, [e_{22}]_q^0) = -[m_2]_p^1[e_{22}]_q^0 = -[m_2]_\xi^1$. По п. ?? : $(e_{21}, [e_{22}]_q^0, [m_1]_p^1) = -e_{21}[m_1]_\alpha^1 = [m_2]_\alpha^1$. $\square$

Лемма 5.3. Для данных p, q найдется $\xi = \xi_{pq}$ такой, что

$$[m_i]_p^0[e_{jk}]_q^1 = [\bar{e}_{jk}]_q^1[m_i]_p^0 = [m_i e_{jk}]_\xi^1.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 5.2.

Лемма 5.4. Для данных p, q найдется $\xi = \xi_{pq}$ такой, что

$$[m_i]_p^1[m_j]_q^0 = -[m_i]_q^0[m_j]_p^1 = (-1)^i[e_{jk}]_\xi^1,$$

где $k = i^{(12)}$, (12) — транспозиция.

Доказательство. По правой альтернативности $[m_2]_p^1[m_1]_q^0 \cdot e_{11} = [m_2]_p^1[m_1]_q^0$, и по левой альтернативности $e_{11} \cdot [m_2]_p^1[m_1]_q^0 = [m_2]_p^1[m_1]_q^0$. Отсюда немедленно следует, что для некоторого вектора ξ выполнено $[m_2]_p^1[m_1]_q^0 = [e_{11}]_\xi^1$. Умножая это равенство справа на e_{12} , получаем по правой альтернативности $-[m_1]_p^1[m_1]_q^0 = [e_{12}]_\xi^1$. Умножим теперь оба этих равенства слева на e_{21} и по левой альтернативности получим $[m_2]_p^1[m_2]_q^0 = [e_{21}]_\xi^1$ и $-[m_1]_p^1[m_2]_q^0 = [e_{22}]_\xi^1$.

Абсолютно аналогично для некоторого вектора η имеем $[m_2]_q^0[m_1]_p^1 = [e_{11}]_\eta^1$, $-[m_1]_q^0[m_1]_p^1 = [e_{12}]_\eta^1$, $[m_2]_q^0[m_2]_p^1 = [e_{21}]_\eta^1$ и $-[m_1]_q^0[m_2]_p^1 = [e_{22}]_\eta^1$. Тогда из равенства

$$(e_{22}, [m_1]_p^1, [m_1]_q^0) = -(e_{22}, [m_1]_q^0, [m_1]_p^1)$$

получаем, что $-[e_{12}]_\xi^1 = [e_{12}]_\eta^1$. Значит, $\eta = -\xi$, что и требовалось. $\square$

Лемма 5.5. Для данных p, q найдется $\xi = \xi_{pq}$ такой, что

$$[m_i]_p^1[m_j]_q^1 = [m_i]_q^1[m_j]_p^1 = (-1)^{i+1}[e_{jk}]_\xi^0, \quad \text{где } k = i^{(12)}.$$

Доказательство представим в виде трех пунктов.

1. Докажем, что найдутся ξ_{pq} , η_{pq} , α_{pq} , γ_{pq} , для которых выполнены равенства:

$$\begin{aligned} [m_1]_p^1[m_1]_q^1 &= [e_{12}]_{\xi_{pq}}^0 + [e_{22}]_{\alpha_{pq}}^0, & -[m_1]_p^1[m_2]_q^1 &= [e_{22}]_{\eta_{pq}}^0 + [e_{12}]_{\gamma_{pq}}^0, \\ -[m_2]_p^1[m_1]_q^1 &= [e_{11}]_{\xi_{pq}}^0 + [e_{21}]_{\alpha_{pq}}^0, & [m_2]_p^1[m_2]_q^1 &= [e_{21}]_{\eta_{pq}}^0 + [e_{11}]_{\gamma_{pq}}^0. \end{aligned}$$

Так как по определению бимодуля Кэли $[m_1][m_1] \cdot e_{11} = 0$, то получаем равенство $[m_1]_p^1[m_1]_q^1 = [e_{12}]_{\xi_{pq}}^0 + [e_{22}]_{\alpha_{pq}}^0 + [m_2]_{\beta_{pq}}^0$. Умножая обе части этого равенства справа на e_{21} , получаем третье. Умножая третье равенство на e_{12} , получаем первое.

Полностью аналогично получаем второе и четвертое.

2. Докажем, что $\eta_{pq} = -\xi_{qp}$ и $\alpha_{qp} = 0$. В силу правой альтернативности выполнено $(e_{12}, [m_1]_p^1, [m_2]_q^1) = (e_{12}, [m_2]_q^1, [m_1]_p^1)$. Вычислим эти ассоциаторы: $(e_{12}, [m_1]_p^1, [m_2]_q^1) = -e_{12} \cdot [m_1]_p^1[m_2]_q^1 = e_{12}([e_{22}]_{\eta_{pq}}^0 + [e_{12}]_{\gamma_{pq}}^0) = [e_{12}]_{\eta_{pq}}^0$ и $(e_{12}, [m_2]_q^1, [m_1]_p^1) = -[m_1]_q^1[m_1]_p^1 - e_{12} \cdot [m_2]_q^1[m_1]_p^1 = -[e_{12}]_{\xi_{qp}}^0 - [e_{22}]_{\alpha_{qp}}^0 + e_{12}([e_{11}]_{\xi_{qp}}^0 + [e_{21}]_{\alpha_{qp}}^0) = -[e_{12}]_{\xi_{qp}}^0 - [e_{22}]_{\alpha_{qp}}^0 + [e_{11}]_{\alpha_{qp}}^0$. Сравнивая полученные выражения, видим, что искомые равенства выполняются.

3. Далее докажем, что $\xi_{pq} = \xi_{qp}$. Для этого вычислим ассоциатор $(e_{11}, [m_1]_p^1, [m_1]_q^1) = (e_{11}, [m_1]_q^1, [m_1]_p^1)$. Пользуясь пп. 1 и 2 имеем $(e_{11}, [m_1]_p^1, [m_1]_q^1) = e_{11}[m_1]_p^1 \cdot [m_1]_q^1 - e_{11}[e_{12}]_{\xi_{pq}}^0 = -[e_{12}]_{\xi_{pq}}^0$. $\square$

Лемма 5.6. Для любых векторов α и β найдется $\xi = \xi_{\alpha\beta}$ такой, что

$$[e_{ij}]_{\alpha}[e_{kl}]_{\beta} = [e_{ij}e_{kl}]_{\xi}.$$

Доказательство представим в виде последовательности пунктов. Считаем, что $i, j, k, l = 1, 2$.

1. Докажем равенство $[e_{ij}]_{\alpha}[e_{kl}]_{\beta} = 0$ при $j \neq k$.

Заметим сначала, что $[e_{i1}]_{\alpha}[e_{22}]_{\beta} \cdot e_{22} = 2[e_{i1}]_{\alpha}[e_{22}]_{\beta}$, значит, $[e_{i1}]_{\alpha}[e_{22}]_{\beta} = 0$. Тогда $0 = [e_{i1}]_{\alpha}[e_{22}]_{\beta} \cdot e_{21} = [e_{i1}]_{\alpha}[e_{21}]_{\beta}$.

2. Докажем, что $[e_{11}]_{\alpha}[e_{1j}]_{\beta} = [e_{1j}]_{\xi}$ для некоторого ξ .

Так как $[e_{11}]_{\alpha}[e_{11}]_{\beta} \cdot e_{22} = [e_{11}]_{\alpha}[e_{11}]_{\beta} \cdot e_{21} = 0$ (второе равенство получается в силу правой альтернативности и п. 1), то для некоторых $\xi = \xi_{\alpha\beta}$ и $\eta = \eta_{\alpha\beta}$ выполнено $[e_{11}]_{\alpha}[e_{11}]_{\beta} = [e_{11}]_{\xi} + [e_{21}]_{\eta}$.

Далее, по п. 1 имеем $[e_{11}]_{\alpha}[e_{12}]_{\beta} = [e_{11}]_{\alpha}[e_{11}]_{\beta} \cdot e_{12} = ([e_{11}]_{\xi} + [e_{21}]_{\eta})e_{12} = [e_{12}]_{\xi} + [e_{22}]_{\eta}$.

Значит, $[e_{22}]_{\eta} = e_{22} \cdot [e_{11}]_{\alpha}[e_{12}]_{\beta} = e_{22} \cdot [e_{12}]_{\beta}[e_{11}]_{\alpha} + e_{22}[e_{11}]_{\alpha} \cdot [e_{12}]_{\beta} - e_{22}[e_{12}]_{\beta} \cdot [e_{11}]_{\alpha} = 0$, то есть $\eta = 0$.

3. Докажем, что $[e_{21}]_{\alpha}[e_{1j}]_{\beta} = [e_{2j}]_{\xi}$.

Из пп. 2 и 1, используя тождество правой альтернативности, имеем $[e_{22}]_{\xi} = e_{21}[e_{12}]_{\xi} = e_{21} \cdot [e_{11}]_{\alpha}[e_{12}]_{\beta} = e_{21}[e_{11}]_{\alpha} \cdot [e_{12}]_{\beta} = [e_{21}]_{\alpha}[e_{12}]_{\beta}$. Кроме того, $[e_{21}]_{\xi} = [e_{22}]_{\xi}e_{21} = [e_{21}]_{\alpha}[e_{12}]_{\beta} \cdot e_{21} = [e_{21}]_{\alpha}[e_{11}]_{\beta}$.

4. Докажем, что $[e_{i1}]_{\alpha}[e_{1j}]_{\beta} = [e_{i2}]_{\alpha}[e_{2j}]_{\beta}$.

В самом деле, по пп. 1 и 2 имеем $0 = [e_{i1}]_{\alpha}[e_{2j}]_{\beta} \cdot e_{12} = -[e_{i2}]_{\alpha}[e_{2j}]_{\beta} + [e_{i1}]_{\alpha}[e_{1j}]_{\beta} + \delta_{1j}[e_{i1}]_{\alpha}[e_{22}]_{\beta} = -[e_{i2}]_{\alpha}[e_{2j}]_{\beta} + [e_{i1}]_{\alpha}[e_{1j}]_{\beta}$. $\square$

Заметим, что из лемм 5.1–5.3, 5.6 следует, что умножение на $[e_{ij}]_\alpha$ элементов $[m_k]_\beta$ происходит так же, как в стандартном бимодуле Кэли, а элементов $[e_{kl}]_\gamma$ — как в регулярном бимодуле.

Лемма 5.7. *Супералгебра B_a с четной частью $H + \mathfrak{A}_a$ и нечетной частью M_a ассоциативна.*

Доказательство. В силу леммы 5.6 B_a — подсупералгебра. Далее, по той же лемме 5.6 при $l \neq m$ имеем $([e_{ij}]_\alpha, [e_{kl}]_\beta, [e_{mn}]_\gamma) = 0$. Рассмотрим ассоциатор

$$([e_{ij}]_\alpha, [e_{jk}]_\beta, [e_{kl}]_\gamma) = ([e_{ij'}]_\alpha, [e_{j'k}]_\beta, [e_{kl}]_\gamma).$$

Можно считать, что $j' \neq l$, тогда $([e_{ij}]_\alpha, [e_{jk}]_\beta, [e_{kl}]_\gamma) = \pm([e_{ij'}]_\alpha, [e_{kl}]_\gamma, [e_{j'k}]_\beta) = 0$ по правой альтернативности. $\square$

Предложение 5.1. *Супералгебра B при $S = H$ и $M_c^2 \not\subseteq \mathfrak{A}$ имеет характеристику 3 и является прямой суммой простой супералгебры $\bar{B} = S_{4|2}$ и супералгебры $\mathfrak{B} = \bar{B}\mathfrak{A}$. При этом $\mathfrak{B}$ является идеалом B и фактор $B/\mathfrak{B} \simeq \bar{B}$.*

Доказательство. Пусть $M_c^2 \not\subseteq \mathfrak{A}$. Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности пунктов, считая, что p, q произвольные.

1. Заметим, что по лемме 5.5 для некоторого $\varepsilon = \varepsilon_{pq} = \varepsilon_{qp}$

$$\begin{aligned} [m_1]_p^1 [m_1]_q^1 &= [e_{12}]_\varepsilon^0, & [m_1]_p^1 [m_2]_q^1 &= [e_{22}]_\varepsilon^0, \\ [m_2]_p^1 [m_1]_q^1 &= -[e_{11}]_\varepsilon^0, & [m_2]_p^1 [m_2]_q^1 &= -[e_{21}]_\varepsilon^0. \end{aligned}$$

2. Докажем, что $[m_1]_q^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{pp}}^0 = -2[m_1]_p^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{pq}}^0$.

Достаточно вычислить ассоциаторы, применяя лемму 5.2:

$$\begin{aligned} ([m_1]_p^1, [m_1]_q^1, [m_2]_p^1) &= [e_{12}]_{\varepsilon_{pq}}^0 [m_2]_p^1 - [m_1]_p^1 [e_{22}]_{\varepsilon_{pq}}^0 = -[m_1]_p^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{pq}}^0, \\ ([m_1]_p^1, [m_2]_p^1, [m_1]_q^1) &= [e_{22}]_{\varepsilon_{pp}}^0 [m_1]_q^1 + [m_1]_p^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{pq}}^0 = \\ &= [m_1]_q^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{pp}}^0 + [m_1]_p^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{pq}}^0. \end{aligned}$$

3. Докажем, что если $[e_{11}]_{\varepsilon_{pp}}^0 \notin \mathfrak{A}$ и $[e_{11}]_{\varepsilon_{qq}}^0 \notin \mathfrak{A}$, то $[e_{11}]_{\varepsilon_{pq}}^0 \notin \mathfrak{A}$.

Пусть $[e_{11}]_{\varepsilon_{pp}}^0 = \lambda e_{11} + r$ и $[e_{11}]_{\varepsilon_{qq}}^0 = \nu e_{11} + s$, где $\lambda, \nu \neq 0$ и $r, s \in \mathfrak{A}$, $[e_{11}]_{\varepsilon_{pq}}^0 \in \mathfrak{A}$. По п. 2 имеем

$$[m_1]_q^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{pp}}^0 = -2[m_1]_p^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{pq}}^0, \quad [m_1]_p^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{qq}}^0 = -2[m_1]_q^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{pq}}^0. \quad (5.2)$$

Тогда для $r', s', r'', s'' \in \mathfrak{A}$ имеем

$$[m_1]_q^1 = [m_1]_q^1 r' + [m_1]_p^1 r'', \quad [m_1]_p^1 = [m_1]_q^1 s' + [m_1]_p^1 s''.$$

Поскольку алгебра $\mathfrak{A}$ нильпотентна, то нильпотентна и порожденная четырьмя операторами правого умножения алгебра $\langle R_r \mid r \in \{r', s', r'', s''\} \subseteq \mathfrak{A} \rangle$, поэтому, итерируя, имеем $[m_1]_q^1 = [m_1]_q^1 R_{r'} + [m_1]_p^1 R_{r''} = ([m_1]_q^1 R_{r'} + [m_1]_p^1 R_{r''}) R_{r'} + ([m_1]_q^1 R_{s'} + [m_1]_p^1 R_{s''}) R_{r''} = [m_1]_q^1 (R_{r'} R_{r'} + R_{s'} R_{r''}) + [m_1]_p^1 (R_{r''} R_{r'} + R_{s''} R_{r''}) = ([m_1]_q^1 R_{r'} + [m_1]_p^1 R_{r''}) (R_{r'} R_{r'} + R_{s'} R_{r''}) + ([m_1]_q^1 R_{s'} + [m_1]_p^1 R_{s''}) (R_{r''} R_{r'} + R_{s''} R_{r''}) = \dots = 0$, — противоречие.

4. Докажем, что если $[e_{11}]_{\varepsilon pp}^0 \in \mathfrak{A}$ и $[e_{11}]_{\varepsilon qq}^0 \in \mathfrak{A}$, то $[e_{11}]_{\varepsilon pq}^0 \in \mathfrak{A}$. Пусть $[e_{11}]_{\varepsilon pq}^0 \notin \mathfrak{A}$, тогда $[e_{11}]_{\varepsilon pq}^0 = \lambda e_{11} + r$, где $\lambda \neq 0$, $r \in \mathfrak{A}$. Значит, из (5.2) имеем $[m_1]_p^1 = [m_1]_q^1 s' + [m_1]_p^1 s''$, $[m_1]_q^1 = [m_1]_q^1 r' + [m_1]_p^1 r''$. Вновь получаем противоречие.

5. Докажем, что если $[m_2]_p^1 [m_1]_p^1 = [e_{11}]_{\varepsilon pp}^0 \notin \mathfrak{A}$, то можно так выбрать базис в M_c , что $[C_2]_p^1 = \text{span}(x, y)$ и

$$x^2 = e_{12}, \quad xy = e_{22}, \quad yx = -e_{11}, \quad y^2 = -e_{21}.$$

По п. 1 $[m_2]_p^1 [m_1]_p^1 = -[e_{11}]_{\varepsilon pp}^0$. Если $[e_{11}]_{\varepsilon pp}^0 \notin \mathfrak{A}$, то компонента ε_0 вектора $\varepsilon = \varepsilon_{pp}$ не равна нулю: $\varepsilon_0 \neq 0$. Нормируя элементы $[m_1]_p^1, [m_2]_p^1$, полагаем $\varepsilon_0 = 1$.

Обозначим $x = [m_1]_p^1$, $y = [m_2]_p^1$, тогда $yx = -[e_{11}]_{\varepsilon}^0$. Введем обозначения $r_{11} = [e_{11}]_{\rho}^0 = [e_{11}]_{\varepsilon}^0 - e_{11} \in \mathfrak{A}$, то есть, в векторе ρ компонента, отвечающая за Н, нулевая, а остальные такие же, как в ε . Тогда $yx = -e_{11} - r_{11}$.

В этих обозначениях имеем: $-r_{11} - r_{11}^2 = yx \cdot r_{11} = -yr_{11} \cdot x + y(x \circ r_{11})$. По лемме 5.2: $yr_{11} = [m_2]_p^1 [e_{11}]_{\rho}^0 = 0$ и $r_{11}x = 0$, поэтому $y \cdot xr_{11} = -r_{11} - r_{11}^2$.

Далее, обозначим $r_{22} = [e_{22}]_{\rho}^0$ и вычислим $yr_{22} \cdot x$. По лемме 5.2: $yr_{22} = [m_2]_p^1 [e_{22}]_{\rho}^0 = [e_{11}]_{\rho}^0 [m_2]_p^1 = r_{11}y$, поэтому $yr_{22} \cdot x = r_{11}y \cdot x = r_{11}x \cdot y + r_{11} \cdot yx - r_{11} \cdot xy = [e_{11}]_{\rho}^0 [m_1]_p^1 \cdot y + r_{11} \cdot yx - [e_{11}]_{\rho}^0 [e_{22}]_{\varepsilon}^0 = r_{11} \cdot yx$ (по п. 1 и леммам 5.2 и 5.6), т.е.

$$yr_{22} \cdot x = -r_{11} - r_{11}^2 = y \cdot xr_{11}. \quad (5.3)$$

Наконец, $yr_{22} \cdot xr_{11} = r_{11}y \cdot xr_{11} = (r_{11} \cdot xr_{11})y + r_{11}(y \cdot xr_{11}) - r_{11}(xr_{11} \cdot y)$. По лемме 5.2 $r_{11} \cdot xr_{11} = [e_{11}]_{\rho}^0 [m_1]_{\xi}^1 = 0$, кроме того, $xr_{11} \cdot y = [m_1]_{\xi}^1 [m_2]_p^1 = [e_{22}]_{\sigma}^0$ для некоторого σ (по п. 1). Тогда по лемме 5.6 $r_{11}(xr_{11} \cdot y) = [e_{11}]_{\rho}^0 [e_{22}]_{\sigma}^0 = 0$, значит,

$$yr_{22} \cdot xr_{11} = -r_{11}^2 - r_{11}^3. \quad (5.4)$$

Пусть $y' = y - \frac{1}{2}yr_{22}$ и $x' = x - \frac{1}{2}xr_{11}$. Далее, по (5.3) и (5.4) $y'x' = (y - \frac{1}{2}yr_{22})(x - \frac{1}{2}xr_{11}) = (-e_{11} - r_{11}) + (r_{11} + r_{11}^2) - \frac{1}{4}(r_{11}^2 - r_{11}^3) = -e_{11} + \frac{1}{4}(3r_{11}^2 - r_{11}^3)$.

Значит, элементы x' и y' ненулевые. Заметим, что $y' = [m_2]_p^1 - \frac{1}{2}[m_2]_p^1 [e_{22}]_{\rho}^0 = [m_2]_{\alpha}^1$ и, аналогично, $x' = [m_1]_{\alpha}^1$. Другими словами, элементы x', y' порождают стандартный бимодуль Кэли.

Обозначая $r'_{11} = -\frac{1}{4}(3r_{11}^2 - r_{11}^3)$, получим $y'x' = -e_{11} - r'_{11}$. Далее, если $y'' = y' - \frac{1}{2}y'r'_{22}$ и $x'' = x' - \frac{1}{2}x'r'_{11}$, то $r''_{11} = -\frac{1}{4}(3(r'_{11})^2 - (r'_{11})^3)$. Продолжая этот процесс, получим на N -ом шаге $r_{11}^{(N)} = 0$ и $y^{(N)}x^{(N)} = -e_{11}$.

Таким образом, можно считать, что $yx = -e_{11}$. Отсюда, в силу п. 1, $\varepsilon = (1, 0, 0, \dots)$ и получаем требуемое.

6. Покажем, что можно выбрать базисы стандартных бимодулей Кэли в разложении бимодуля M_c так, чтобы для фиксированного элемента p выполнялось $([C_2]_p^1)^2 \subseteq \mathfrak{H}$ и $[e_{11}]_{\varepsilon_{kl}}^0 \notin \mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда $k = l = p$.

По п. 4 если для любого p элемент $[e_{11}]_{\varepsilon_{pp}}^0 \in \mathfrak{R}$, то $M_c^2 \subseteq \mathfrak{R}$. Поэтому зафиксируем некоторый p так, чтобы $[e_{11}]_{\varepsilon_{pp}}^0 \notin \mathfrak{R}$. Далее, выберем бимодуль $[C_2]_p^1 = \text{span}(x, y)$, чтобы выполнялись условия п. 5.

Покажем теперь, что в B можно выбрать базис так, чтобы для любого $k \neq p$ выполнялось $[e_{11}]_{\varepsilon_{pk}}^0 \in \mathfrak{R}$. В самом деле, если для некоторого k выполнено $[e_{11}]_{\varepsilon_{pk}}^0 = \lambda e_{11} + s$, где $s \in \mathfrak{R}$, то замена базиса $[m_i]_{k'}^1 = [m_i]_k^1 - \lambda[m_i]_p^1$ приводит по пп. 1 и 5 к $[e_{11}]_{\varepsilon_{pk'}}^0 = -[m_2]_p^1[m_1]_{k'}^1 = -[m_2]_p^1([m_1]_k^1 - \lambda[m_1]_p^1) = [e_{11}]_{\varepsilon_{pk}}^0 - \lambda[e_{11}]_{\varepsilon_{pp}}^0 = s \in \mathfrak{R}$.

Итак, можно считать, что $[e_{11}]_{\varepsilon_{pk}}^0 \in \mathfrak{R}$ для любого $k \neq p$, тогда так как $[e_{11}]_{\varepsilon_{pp}}^0 \notin \mathfrak{R}$, то $[e_{11}]_{\varepsilon_{kk}}^0 \in \mathfrak{R}$ по п. 3. Так как $\varepsilon_{pk} = \varepsilon_{kp}$ по п. 1, то по п. 4 для любых k, l , таких что $k \neq p$ или $l \neq p$, выполнено $[e_{11}]_{\varepsilon_{kl}}^0 \in \mathfrak{R}$.

Для выбранного p введем обозначения

$$C_2 := [C_2]_p^1 \quad \text{и} \quad \mathfrak{M} := C_2\mathfrak{R}.$$

7. Докажем, что $M = C_2 \oplus \mathfrak{M}$.

Во-первых, по пп. 5 и 2 для $k \neq p$ имеем $[m_1]_k^1 = [m_1]_k^1 e_{11} = [m_1]_k^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{pp}}^0 = -2[m_1]_p^1 [e_{11}]_{\varepsilon_{pk}}^0 = -2x[e_{11}]_{\varepsilon_{pk}}^0 \in x\mathfrak{R}_a$. Аналогично, $[m_2]_k^1 = -2y[e_{22}]_{\varepsilon_{pk}}^0 \in y\mathfrak{R}_a$. Таким образом, $M_c \subseteq C_2 + C_2\mathfrak{R}_a$.

Далее докажем, что $M_a \subseteq C_2\mathfrak{R}_c$.

Рассмотрим $z = [e_{11}]_k^1 \in M_a$. Тогда $z = e_{11}z = -yx \cdot z = -yz \cdot x - y[x, z]$. По лемме 5.1 $yz = [m_2]_p^1 [e_{11}]_k^1 = 0$ и $[x, z] = xz = [m_1]_\xi^0 \in \mathfrak{R}_c$, значит, $z = -y[m_1]_\xi^0 \in C_2\mathfrak{R}_c$.

Пусть теперь $z' = [e_{12}]_k^1 \in M_a$, тогда $z' = ze_{12} = -y[m_1]_\xi^0 \cdot e_{12} = x[m_1]_\xi^0 \in C_2\mathfrak{R}_c$. Остальные случаи получаются по симметрии индексов 1 и 2. Таким образом, доказано, что $M = M_c + M_a = C_2 + C_2\mathfrak{R}_a + C_2\mathfrak{R}_c$, то есть $M = C_2 + \mathfrak{M}$.

Осталось доказать, что $C_2 \cap \mathfrak{M} = 0$. Пусть $c = \lambda x + \mu y \in C_2$ таков, что $c \in \mathfrak{M} = C_2\mathfrak{R}_a + C_2\mathfrak{R}_c$. Так как $c \in M_c$, то $c \in C_2\mathfrak{R}_a$. Поскольку $x = [m_1]_p^1$, $y = [m_2]_p^1$ — базис C_2 , $[e_{ij}]_k^0$ — базис $\mathfrak{R}_a$, то, учитывая, что для любого ξ по лемме 5.2 $x[e_{11}]_\xi^0 = y[e_{12}]_\xi^0$ и $x[e_{21}]_\xi^0 = y[e_{22}]_\xi^0$, имеем $c = x([e_{11}]_\alpha^0 + [e_{21}]_\beta^0)$ для некоторых α, β и $[e_{11}]_\alpha^0, [e_{21}]_\beta^0 \in \mathfrak{R}_a$.

Тогда $\lambda x = ce_{11} = x([e_{11}]_\alpha^0 + [e_{21}]_\beta^0) \cdot e_{11} = x[e_{11}]_\alpha^0 \in x\mathfrak{R}_a$. Итерируя это равенство по x , получаем, что $\lambda^N x = 0$, то есть $\lambda = 0$. Аналогично и $\mu = 0$.

Заметим, что по доказанному множество $\mathfrak{M}$ является суммой $\mathbb{H}$ -бимодулей, поэтому и само — $\mathbb{H}$ -бимодуль.

Если U, V — подмножества в B , то обозначим через $U * V$ подпространство над Φ , порожденное элементами uv и vu , где $u \in U, v \in V$.

8. Докажем, что $M * \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$.

В п. 7 доказано, что $M = C_2 \oplus \mathfrak{M}$. По леммам 5.2 и 5.4 $\mathfrak{R}C_2 \subseteq C_2\mathfrak{R} = \mathfrak{M}$, поэтому осталось доказать, что $\mathfrak{M} * \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$. Так как в п. 7 доказано, что $M_a \subseteq \mathfrak{M}$, то доказательство можно проводить только для элементов $(c'r) * s \in M_c$, где $c' \in C_2, r, s \in \mathfrak{R}$.

По леммам 5.2 и 5.4 можно считать, что либо $r, s \in \mathfrak{R}_a$, либо $r, s \in \mathfrak{R}_c$. Докажем сначала, что $c'r \cdot s \in \mathfrak{M}$ для базисных элементов из $C_2, \mathfrak{R}_a$ и $\mathfrak{R}_c$.

$$\text{a) } x[e_{11}]_k^0 \cdot [e_{11}]_l^0 = y[e_{12}]_k^0 \cdot [e_{11}]_l^0 = y([e_{12}]_k^0 \circ [e_{11}]_l^0) \in \mathfrak{M}.$$

b) $x[e_{11}]_k^0 \cdot [e_{21}]_l^0 = -x[e_{21}]_l^0 \cdot [e_{11}]_k^0 + x([e_{21}]_l^0 \circ [e_{11}]_k^0) \in \mathfrak{M}$, так как первое слагаемое равняется 0 по лемме 5.2.

$$\text{c) } x[e_{11}]_k^0 \cdot [e_{12}]_l^0 = 0 \text{ и } x[e_{11}]_k^0 \cdot [e_{22}]_l^0 = 0.$$

$$\text{d) } x[m_1]_k^0 \cdot [m_1]_l^0 = -[e_{12}]_\alpha^1 [m_1]_l^0 = 0 \text{ и } x[m_2]_k^0 \cdot [m_2]_l^0 = -[e_{22}]_\alpha^1 [m_2]_l^0 = 0.$$

e) $x[m_1]_k^0 \cdot [m_2]_l^0 = -[e_{12}]_\alpha^1 [m_2]_l^0 = [m_1]_\beta^1 \in M_c$. Так как $M_c = C_2 \oplus C_2\mathfrak{R}_a$ по п. 7, то $[m_1]_\beta^1 = \lambda x + xr$, где $r \in \mathfrak{R}_a$. Отсюда $\lambda x = x[m_1]_k^0 \cdot [m_2]_l^0 - xr$. Итерируя это равенство, получаем, что $\lambda = 0$. Значит, $[m_1]_\beta^1 \in C_2\mathfrak{R}_a$ и $x[m_1]_k^0 \cdot [m_2]_l^0 \in \mathfrak{M}$.

f) $x[m_2]_k^0 \cdot [m_1]_l^0 = -[e_{22}]_\alpha^1 [m_1]_l^0 = -[m_1]_l^0 [e_{11}]_\alpha^1 = -[m_2]_l^0 [e_{12}]_\alpha^1 = [e_{12}]_\alpha^1 [m_2]_l^0 = -x[m_1]_k^0 \cdot [m_2]_l^0 \in \mathfrak{M}$ по леммам 5.4 и 5.3.

Итак, доказано, что $\mathfrak{M}\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$. Осталось доказать, что $\mathfrak{R}\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$.

Так как по лемме 5.2 $[e_{ij}]_k^0 M_c = M_c [\bar{e}_{ij}]_k^0$, то $\mathfrak{R}_a M_c \subseteq M_c \mathfrak{R}_a \subseteq \mathfrak{M}$. Точно так же из леммы 5.3 следует, что $\mathfrak{R}_c M_a \subseteq M_a \mathfrak{R}_c \subseteq \mathfrak{M}$.

9. Докажем, что $M * \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$.

По лемме 5.1 и п. 6 остается доказать, что $M_a^2 \subseteq \mathfrak{R}$. Поскольку в п. 7 доказано, что $M_a = C_2\mathfrak{R}_c$, то на основании леммы 5.1 для $c', c'', c''' \in C_2$ и $r', r'' \in \mathfrak{R}_c$ имеем $(c'r' \cdot c''r'')c''' = (c'r' \cdot c''')c''r'' + c'r'[c''r'', c'''] \in \mathfrak{R} \cdot c''r'' + c'r' \cdot \mathfrak{R}$.

Значит, по п. 8 $M_a^2 C_2 \subseteq \mathfrak{M}$. Так как $M_a^2 \subseteq \mathbb{H} \oplus \mathfrak{R}_a$, $\mathbb{H}C_2 \subseteq C_2$, $\mathfrak{R}_a C_2 \subseteq \mathfrak{M}$, $M = C_2 \oplus \mathfrak{M}$, то $M_a^2 \subseteq \mathfrak{R}$.

10. Обозначим $P = \mathbb{H} \oplus C_2$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{M}$.

По пп. 8, 9 $\mathfrak{B}$ — идеал B . Очевидно, что $B/\mathfrak{B} \simeq P$. Наконец, по п. 2 при $q = p$ имеем $x = -2x$, значит, $\text{char } \Phi = 3$. Легко понять, что $P = S_{4|2}$. $\square$

Предложение 5.2. *Супералгебра B при $S = \mathbb{H}$ и $M_a^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$ является прямой суммой простой супералгебры $\bar{B} = \mathbb{H}[\sqrt{1}]$ и супералгебры $\mathfrak{B} = \bar{B}\mathfrak{R}$. При этом супералгебра $\mathfrak{B}$ является идеалом B и фактор $B/\mathfrak{B} \simeq \bar{B}$.*

Доказательство представим в виде последовательности пунктов.

1. Докажем, что $[e_{11}]_{\xi_{pq}}^0 [e_{11}]_r^1 = [e_{11}]_p^1 [e_{11}]_{\xi_{qr}}^0$ для любых p, q и r .

По лемме 5.7 $([e_{11}]_p^1, [e_{12}]_q^1, [e_{21}]_r^1) = 0$, поэтому $[e_{12}]_{\xi_{pq}}^0 [e_{21}]_r^1 - [e_{11}]_p^1 [e_{11}]_{\xi_{qr}}^0 = 0$, тогда по лемме 5.6 $[e_{11}]_{\xi_{pq}}^0 [e_{11}]_r^1 - [e_{11}]_p^1 [e_{11}]_{\xi_{qr}}^0 = 0$.

2. Докажем, что если $([\mathbb{H}]_p^1)^2 \subseteq \mathfrak{R}_a$ и $([\mathbb{H}]_q^1)^2 \subseteq \mathfrak{R}_a$, то $[\mathbb{H}]_p^1 * [\mathbb{H}]_q^1 \subseteq \mathfrak{R}_a$.

По п. 1 имеем $[e_{11}]_{\xi_{pp}}^0 [e_{11}]_q^1 = [e_{11}]_p^1 [e_{11}]_{\xi_{pq}}^0$. Обозначим $s = [e_{11}]_{\xi_{pp}}^0 \in \mathfrak{R}_a$, и $[e_{11}]_{\xi_{pq}}^0 = \lambda e_{11} - r$, где $r \in \mathfrak{R}_a$, тогда

$$\lambda [e_{11}]_p^1 = s [e_{11}]_q^1 + [e_{11}]_p^1 r. \quad (5.5)$$

Аналогично $[e_{11}]_{\xi_{pq}}^0 [e_{11}]_q^1 = [e_{11}]_p^1 [e_{11}]_{\xi_{qq}}^0$ и

$$\lambda [e_{11}]_q^1 = r [e_{11}]_q^1 + [e_{11}]_p^1 s'. \quad (5.6)$$

Так как по лемме 5.7 произведение всех элементов равенств (5.5) и (5.6) ассоциативно, то итерируя эти равенства получаем, что $\lambda = 0$ и $[e_{11}]_{\xi_{pq}}^0 \in \mathfrak{R}_a$.

3. Докажем, что если $([\mathbb{H}]_p^1)^2 \not\subseteq \mathfrak{R}_a$ и $([\mathbb{H}]_q^1)^2 \not\subseteq \mathfrak{R}_a$, то $[\mathbb{H}]_p^1 * [\mathbb{H}]_q^1 \not\subseteq \mathfrak{R}_a$.

Пусть $[e_{11}]_{\xi_{pq}}^0 = [e_{11}]_p^1 [e_{11}]_q^1 = t$, $[e_{11}]_{\xi_{pp}}^0 = ([e_{11}]_p^1)^2 = \lambda e_{11} + r$ и $[e_{11}]_{\xi_{qq}}^0 = ([e_{11}]_q^1)^2 = \mu e_{11} + s$, где $t, r, s \in \mathfrak{R}_a$ и $\lambda, \mu \neq 0$. Тогда по п. 1 имеем

$$[e_{11}]_{\xi_{pq}}^0 [e_{11}]_q^1 = [e_{11}]_p^1 [e_{11}]_{\xi_{qq}}^0, \quad [e_{11}]_{\xi_{pq}}^0 [e_{11}]_p^1 = [e_{11}]_p^1 [e_{11}]_{\xi_{pq}}^0.$$

Другими словами,

$$\mu [e_{11}]_p^1 = -[e_{11}]_p^1 s + t [e_{11}]_q^1, \quad \lambda [e_{11}]_q^1 = [e_{11}]_p^1 t - r [e_{11}]_q^1.$$

Итерируя эти равенства, приходим к противоречию: $\mu [e_{11}]_p^1 = 0$.

4. Из п. 2 следует, что для некоторого p выполнено $([\mathbb{H}]_p^1)^2 \not\subseteq \mathfrak{R}_a$. Зафиксируем эту компоненту и будем ее обозначать $[\mathbb{H}] := [\mathbb{H}]_p^1$. Докажем, что можно так выбрать базис в B_a , что

$$[e_{ij}][e_{kl}] = e_{ij}e_{kl}.$$

Обозначим $[e_{11}] = [e_{11}]_p^1$ и $g_{11} = [e_{11}]_{\xi_{pp}}^0$, причем $\gamma = (\xi_{pp})_0 \neq 0$. Нормируя векторы $[e_{ij}]$ на $\sqrt{\gamma}$, можно считать, что $g_{11} = e_{11} - r_{11}$, где $-r_{11} = [e_{11}]_p^0 = g_{11} - e_{11} \in \mathfrak{R}_a$.

Далее, по лемме 5.7: $r_{11} - r_{11}^2 = [e_{11}][e_{11}]r_{11}$.

Так как $g_{11}[e_{11}] = [e_{11}]g_{11}$ по п. 1, то $r_{11}[e_{11}] = [e_{11}]r_{11}$. Тогда $[e_{11}]r_{11}[e_{11}] = [e_{11}][e_{11}]r_{11} = r_{11} - r_{11}^2$.

Вычислим $[e_{11}]r_{11}[e_{11}]r_{11} = [e_{11}]r_{11}[e_{11}] \cdot r_{11} = r_{11}^2 - r_{11}^3$.

Изменим базис: $[e_{11}]' = [e_{11}] + \frac{1}{2}[e_{11}]r_{11}$, тогда $([e_{11}]')^2 = ([e_{11}] + \frac{1}{2}[e_{11}]r_{11})^2 = (e_{11} - r_{11}) + (r_{11} - r_{11}^2) + \frac{1}{4}(r_{11}^2 - r_{11}^3) = e_{11} - \frac{1}{4}(3r_{11}^2 + r_{11}^3)$.

Обозначая $r'_{11} = \frac{1}{4}(3r_{11}^2 + r_{11}^3)$, получим $([e_{11}]')^2 = e_{11} - r'_{11}$. Далее, если $[e_{11}]'' = [e_{11}]' + \frac{1}{2}[e_{11}]'r'_{11}$, то $r''_{11} = \frac{1}{4}(3(r'_{11})^2 + (r'_{11})^3)$. Продолжая этот процесс, на N -ом шаге получим $r_{11}^{(N)} = 0$ и $[e_{11}]^{(N)}[e_{11}]^{(N)} = e_{11}$.

Таким образом, можно считать, что $[e_{11}][e_{11}] = e_{11}$. По лемме 5.6 получаем, что и $[e_{ij}][e_{kl}] = e_{ij}e_{kl}$. Что и требовалось.

5. Докажем, что при фиксированной в п. 4 p -ой компоненте можно так выбрать остальные компоненты, чтобы для любого $q \neq p$ выполнялось $[e_{11}][e_{11}]_q^1 \in \mathfrak{R}_a$.

Итак, $[e_{11}]^2 = e_{11}$. И пусть $[e_{11}][e_{11}]_q^1 = \mu e_{11} + s_{11}$, тогда, обозначая $[e_{11}]_{q'} = [e_{11}]_q^1 - \mu[e_{11}]$, получим, что $[e_{11}][e_{11}]_{q'} = s_{11} \in \mathfrak{R}_a$.

6. Из пп. 2 и 3 следует, что для выбранного в пп. 5 и 4 базиса $[e_{11}]_{\xi_{kl}}^0 \notin \mathfrak{R}_a$ тогда и только тогда, когда $k = l = p$. Достаточно заметить, что по п. 1 $[e_{11}]_{\xi_{pq}}^0[e_{11}] = [e_{11}][e_{11}]_{\xi_{qp}}^0$, то есть, если $q \neq p$, то и $[e_{11}]_{\xi_{qp}}^0 \in \mathfrak{R}_a$.

7. Обозначим $\mathfrak{M} := [\mathbf{H}]\mathfrak{R}$ и докажем, что $M = [\mathbf{H}] \oplus \mathfrak{M}$.

Если $q \neq p$, то по пп. 4 и 1 $[e_{11}]_q^1 = e_{11}[e_{11}]_q^1 = [e_{11}][e_{11}][e_{11}]_q^1 = [e_{11}][e_{11}]_{\xi_{pq}}^0 \in \mathfrak{M}$, то есть $[\mathbf{H}]_q^1 \subseteq \mathfrak{M}$, значит, $M_a \subseteq [\mathbf{H}] + \mathfrak{M}$.

Пусть теперь $[m_2]_k \in M_c$, тогда по леммам 5.1 и 5.3 имеем $[m_2]_k = e_{11}[m_2]_k = [e_{11}]^2[m_2]_k = [e_{11}][m_2]_k \cdot [e_{11}] + [e_{11}] \cdot [e_{11}][m_2]_k = [m_2]_{\vartheta}^0[e_{11}] + [e_{11}][m_2]_{\vartheta}^0 = [e_{11}][m_2]_{\vartheta}^0 \in \mathfrak{M}$.

Итак, доказано, что $M = [\mathbf{H}] + \mathfrak{M}$.

Рассмотрим теперь такой элемент $[a] = \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij}[e_{ij}] \in [\mathbf{H}]$, что $[a] \in \mathfrak{M} = [\mathbf{H}]\mathfrak{R}$. В этом случае по леммам 5.6 и 5.2–5.4 $[a] \in [\mathbf{H}]\mathfrak{R}_a$. Другими словами, $[a] = \sum_{i,j=1}^2 [e_{ii}][e_{ij}]_{\vartheta_{ij}}^0$ для таких ϑ_{ij} , что $[e_{ij}]_{\vartheta_{ij}}^0 \in \mathfrak{R}_a$.

Тогда по лемме 5.7 $\alpha_{ij}[e_{ij}] = e_{ii}[a]e_{jj} = [e_{ii}][e_{ij}]_{\vartheta_{ij}}^0 = [e_{ij}][e_{jj}]_{\vartheta_{ij}}^0$, откуда, итерируя, получаем, что $\alpha_{ij} = 0$. Значит, $[a] = 0$.

8. Докажем, что $\mathfrak{R}_a * M_a \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть $r_{ij} = [e_{ij}]_q^0 \in \mathfrak{R}_a$. По лемме 5.6 $r_{ij}[e_{jk}]_l^1 = r_{ij'}[e_{j'k}]_l^1 = [e_{ik}]_{\xi}$. Теперь пусть $[e_{ik}]_{\xi} = \mu[e_{ik}] - [e_{ik}]s_{kk}$, где $s_{kk} \in \mathfrak{R}_a$. Если $l = p$, то $\mu[e_{ik}] = r_{ij}[e_{jk}] + [e_{ik}]s_{kk} = r_{ii}[e_{ik}] + [e_{ik}]s_{kk}$ и $\mu = 0$. Если же $l \neq p$, то $\mu[e_{ik}] = r_{ij}[e_{jk}]_l^1 + [e_{ik}]s_{kk} = r_{ii}[e_{ik}]s'_{kk} + [e_{ik}]s_{kk}$, то есть снова $\mu = 0$. Таким образом, доказано, что $\mathfrak{R}_a M_a \subseteq \mathfrak{M}$. Кроме того, по лемме 5.7 $M_a \mathfrak{R}_a \subseteq ([\mathbf{H}] + [\mathbf{H}]\mathfrak{R}_a)\mathfrak{R}_a \subseteq \mathfrak{M}$.

9. Докажем, что $M * \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$.

Из п. 7 следует, что $M = [H] \oplus \mathfrak{M}$, $M_a = [H] + [H]\mathfrak{R}_a$ и $M_c = [H]\mathfrak{R}_c \subseteq \mathfrak{M}$.

По леммам 5.2 и 5.3 $\mathfrak{R}_a * M_c + \mathfrak{R}_c * M_a \subseteq M_c \subseteq \mathfrak{M}$. По п. 8 $\mathfrak{R}_a * M_a \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, остается доказать, что $\mathfrak{R}_c * M_c \subseteq \mathfrak{M}$. По лемме 5.4 для этого достаточно доказать, что $M_c \mathfrak{R}_c \subseteq \mathfrak{M}$.

В силу симметрии индексов достаточно рассмотреть два случая, связанных с выбором базисных элементов M_c и $\mathfrak{R}_c$:

а) По лемме 5.4 $[m_1]_k^1 [m_1]_l^0 = \mu[e_{12}] - [e_{12}]r_{22}$. По п. 7 $[m_1]_k^1 [m_1]_l^0 = [e_{22}][m_1]_\alpha^0 \cdot [m_1]_l^0$, где $[m_1]_\alpha^0 \in \mathfrak{R}_c$. Далее, по лемме 5.3 $[m_1]_k^1 [m_1]_l^0 = [m_1]_\alpha^0 [e_{11}] \cdot [m_1]_l^0 = [m_2]_\alpha^0 [e_{12}] \cdot [m_1]_l^0 = -[e_{12}][m_2]_\alpha^0 \cdot [m_1]_l^0$, значит, $\mu[e_{12}] = [e_{12}]r_{22} - [e_{12}][m_2]_\alpha^0 \cdot [m_1]_l^0$, откуда следует, что $\mu = 0$.

б) По лемме 5.4 $[m_1]_k^1 [m_2]_l^0 = \mu[e_{22}] - [e_{22}]r_{22}$. По п. 7 $[m_1]_k^1 [m_2]_l^0 = [e_{22}][m_1]_\alpha^0 \cdot [m_2]_l^0$, значит, $\mu[e_{22}] = [e_{22}]r_{22} + [e_{22}][m_1]_\alpha^0 \cdot [m_2]_l^0$, то есть $\mu = 0$.

10. Докажем, что $M * \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}$.

Понятно, что $M_c^2 \subseteq \mathfrak{R}$. В самом деле, если $M_c^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$, то по пп. 7 и 8 предложения 5.1 $M_a^2 \subseteq \mathfrak{R}$.

По лемме 5.1 $M_a * M_c \subseteq \mathfrak{R}$. Значит, осталось доказать, что $([H] + [H]\mathfrak{R}_a) * [H]\mathfrak{R}_a \subseteq \mathfrak{R}$, а это следует непосредственно из п. 8 и леммы 5.7.

11. Заметим, что $H[\sqrt{1}] = H + [H]$, и обозначим $\mathfrak{B} = \mathfrak{R} + \mathfrak{M}$. По пп. 9, 10 $\mathfrak{B}$ — идеал B . Очевидно, что $B/\mathfrak{B} \simeq H[\sqrt{1}]$. □

Поскольку по [49, теорема 11.1] всякий M_n -бимодуль при $n \geq 3$ ассоциативен, а, значит, является прямой суммой регулярных бимодулей, то доказательство следующего предложения полностью аналогично доказательству предложения 5.2, учитывая, что в этом случае $M_c = \mathfrak{R}_c = 0$.

Предложение 5.3. *Супералгебра B при $S = M_n$ ($n \geq 3$) и $M^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$ является прямой суммой простой супералгебры $\bar{B} = M_n[\sqrt{1}]$ и супералгебры $\mathfrak{B} = \bar{B}\mathfrak{R}$. При этом супералгебра $\mathfrak{B}$ является идеалом B и фактор $B/\mathfrak{B} \simeq \bar{B}$.*

5.1.2. Случай $S = \mathbb{C}$ — алгебра Кэли—Диксона

Пусть четная часть A супералгебры B является суммой расщепляемой алгебры Кэли—Диксона $\mathbb{C}$ и радикала $\mathfrak{R} = \text{Nil } A$: $A = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{R}$. Так как четная часть супералгебры B сильно альтернативна, то B может быть рассмотрена как альтернативный бимодуль над полупростой компонентой четной части $S = \mathbb{C}$. По [49, теорема 18.1] унитарные альтернативные $\mathbb{C}$ -бимодули A и M являются прямыми суммами регулярных бимодулей $[C]_i$. Элемент бимодуля $[C]_i$, соответствующий элементу $c \in \mathbb{C}$, обозначим через $[c]_i$.

Перенумеруем регулярные бимодули $[C]_i$ так, что $[C]_0 = C$, а далее по порядку идут бимодули из $\mathfrak{A}$ и M :

$$[C]_1, \dots, [C]_m \subseteq \mathfrak{A}, \quad [C]_{m+1}, \dots, [C]_n \subseteq M.$$

Тем самым, если $\{c_i \mid i = \overline{1, 8}\}$ — базис алгебры C , то $\{[c_i]_j \mid i = \overline{1, 8}, j = \overline{0, n}\}$ — базис супералгебры B .

Как и в предыдущем разделе, чтобы подчеркнуть, что элемент $[c]_i$ лежит в четной части A , будем писать $[c]_i^0$, если же элемент $[c]_i$ лежит в нечетной части, то используем запись $[c]_i^1$.

Обозначим через $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ вектор с компонентами из Φ и используем запись $[c]_\varepsilon = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i [c]_i$. Также будем писать $[c]_\varepsilon^0 = \sum_{i=0}^m \varepsilon_i [c]_i$ и $[c]_\varepsilon^1 = \sum_{i=m+1}^n \varepsilon_i [c]_i$.

Напомним таблицу умножения в алгебре $C = H \oplus vH$:

$$\begin{aligned} v^2 &= 1, & \bar{v} &= -v, & av &= v\bar{a}, \\ a \cdot vb &= v \cdot \bar{a}b, & vb \cdot a &= v \cdot ab, & va \cdot vb &= b\bar{a}, \end{aligned}$$

где $1 = e_{11} + e_{22}$ — единица алгебры C , H — алгебра матриц 2-го порядка, $a, b \in H$, e_{ij} — матричные единицы H . Кроме того, нам понадобятся следующие равенства:

$$e_{11} \circ v = e_{22} \circ v = v, \quad e_{12} \circ v = e_{21} \circ v = 0.$$

Полностью аналогично лемме 5.6 доказывается

Лемма 5.8. *Для всякой пары векторов α и β имеется такой вектор $\xi = \xi_{\alpha\beta}$, что для любых $a, b \in H$ выполнено $[a]_\alpha [b]_\beta = [ab]_\xi$.*

Лемма 5.9. *Если $[1]_\alpha [1]_\beta = [1]_\xi$, то $[v]_\alpha [v]_\beta = [1]_\xi$ и $[v]_\alpha [1]_\beta = [1]_\alpha [v]_\beta = [v]_\xi$.*

Доказательство. Заметим вначале, что

$$[v]_\xi = [1]_\xi v = [1]_\alpha [1]_\beta \cdot v = -[v]_\alpha [1]_\beta + 2[1]_\alpha [v]_\beta. \quad (5.7)$$

Тогда, умножая обе части полученного равенства справа на v , получаем $[1]_\xi = -[v]_\alpha [1]_\beta \cdot v + 2[1]_\alpha [v]_\beta \cdot v = [1]_\alpha [1]_\beta - 2[v]_\alpha [v]_\beta + 2(-[v]_\alpha [v]_\beta + 2[1]_\alpha [1]_\beta) = [1]_\xi - 4[v]_\alpha [v]_\beta + 4[1]_\xi$. Значит, $[v]_\alpha [v]_\beta = [1]_\xi$.

Далее, $[v]_\alpha [1]_\beta \cdot v = -[1]_\xi + 2[1]_\xi = [1]_\xi$. Умножая обе части равенства справа на v , получим, что $[v]_\xi = ([v]_\alpha [1]_\beta \cdot v)v = [v]_\alpha [1]_\beta \cdot v^2 = [v]_\alpha [1]_\beta$. Из соотношения (5.7) следует, что $[1]_\alpha [v]_\beta = [v]_\xi$. $\square$

Лемма 5.10. *Если $[1]_\alpha [1]_\beta = [1]_\xi$, то для любого $a \in H$ выполнено $[v]_\alpha [a]_\beta = [va]_\xi$ и $[a]_\alpha [v]_\beta = [av]_\xi$.*

Доказательство. Достаточно проверить соотношения при $a \in \{e_{ij} \mid i, j = 1, 2\}$.

Сначала получаем, что $[1]_\alpha[e_{11}]_\beta \cdot v = -[v]_\alpha[e_{11}]_\beta + [1]_\alpha[v]_\beta$. Откуда по леммам 5.8 и 5.9 следует, что $[e_{11}v]_\xi = -[v]_\alpha[e_{11}]_\beta + [v]_\xi$. Итак, $[v]_\alpha[e_{11}]_\beta = [v]_\xi - [e_{11}v]_\xi = [e_{22}v]_\xi = [ve_{11}]_\xi$. Аналогично, $[v]_\alpha[e_{22}]_\beta = [ve_{22}]_\xi$.

Далее имеем $[1]_\alpha[e_{12}]_\beta \cdot v = -[v]_\alpha[e_{12}]_\beta$. Отсюда заключаем, что $[v]_\alpha[e_{12}]_\beta = -[e_{12}]_\xi v = -[e_{12}v]_\xi = [ve_{12}]_\xi$. Аналогично, $[v]_\alpha[e_{21}]_\beta = [ve_{21}]_\xi$.

Из соотношения $[ve_{11}]_\xi = [v]_\xi e_{11} = [1]_\alpha[v]_\beta \cdot e_{11} = -[e_{11}]_\alpha[v]_\beta + [1]_\alpha[v]_\beta = -[e_{11}]_\alpha[v]_\beta + [v]_\xi$ заключаем, что $[e_{11}]_\alpha[v]_\beta = [v]_\xi - [ve_{11}]_\xi = [e_{11}v]_\xi$. Аналогично, $[e_{22}]_\alpha[v]_\beta = [e_{22}v]_\xi$.

Еще проще получается $[e_{12}v]_\xi = -[ve_{12}]_\xi = -[1]_\alpha[v]_\beta \cdot e_{12} = [e_{12}]_\alpha[v]_\beta$ и, аналогично, $[e_{21}]_\alpha[v]_\beta = [e_{21}v]_\xi$. $\square$

Лемма 5.11. Если $[1]_\alpha[1]_\beta = [1]_\xi$, то $[vb]_\alpha[a]_\beta = [vb \cdot a]_\xi$, $[a]_\alpha[vb]_\beta = [a \cdot vb]_\xi$, $[va]_\alpha[vb]_\beta = [va \cdot vb]_\xi$.

Доказательство. На основании правой альтернативности и леммы 5.10 имеем $0 = ([v]_\alpha, [a]_\beta, b) + ([v]_\alpha, b, [a]_\beta) = [v]_\alpha[a]_\beta \cdot b - [v]_\alpha[ab]_\beta + [vb]_\alpha[a]_\beta - [v]_\alpha[ba]_\beta = [va \cdot b]_\xi - [v \cdot ab]_\xi + [vb]_\alpha[a]_\beta - [v \cdot ba]_\xi = -[vb \cdot a]_\xi + [vb]_\alpha[a]_\beta$, откуда следует, что $[vb]_\alpha[a]_\beta = [vb \cdot a]_\xi$.

Используя полученный результат, заметим, что $[a \cdot vb]_\xi = [a]_\xi \cdot vb = [a]_\alpha[1]_\beta \cdot vb = -[a \cdot vb]_\alpha[1]_\beta + 2[a]_\alpha[vb]_\beta = -[a \cdot vb]_\xi + 2[a]_\alpha[vb]_\beta$, откуда следует, что $[a]_\alpha[vb]_\beta = [a \cdot vb]_\xi$.

Наконец, $2[va]_\alpha[vb]_\beta = [va]_\alpha([1]_\beta \circ vb) = [va]_\alpha[1]_\beta \cdot vb + [va]_\alpha vb \cdot [1]_\beta = [va \cdot vb]_\xi + [va \cdot vb]_\alpha[1]_\beta = 2[va \cdot vb]_\xi$. $\square$

Из лемм 5.8 и 5.11 следует

Лемма 5.12. Для любых α, β найдется $\xi = \xi_{\alpha\beta}$ такой, что

$$[a]_\alpha[b]_\beta = [ab]_\xi \text{ для } a, b \in \mathbb{C}.$$

Предложение 5.4. Если $A = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{A}$, то $M^2 \subseteq \mathfrak{A}$.

Доказательство. Из правой альтернативности заключаем, что $(a, [b]_p^1, [c]_q^1) = (a, [c]_q^1, [b]_p^1)$. Отсюда по лемме 5.12 имеем, $[(a, b, c)]_{\xi_{pq}}^0 = [(a, c, b)]_{\xi_{qp}}^0 = -[(a, b, c)]_{\xi_{qp}}^0$. Так как алгебра Кэли–Диксона не ассоциативна, то $\xi_{pq} = -\xi_{qp}$. В частности, $\xi_{pp} = 0$. Значит, для любого p выполнено $([C]_p^1)^2 = 0$.

Наконец, из равенства $([a]_p^1, [b]_q^1, [c]_q^1) = ([a]_p^1, [c]_q^1, [b]_q^1)$ имеем:

$$[1]_{\xi_{pq}}^0 [ab \cdot c]_q^1 = [1]_{\xi_{pq}}^0 [ac \cdot b]_q^1.$$

Откуда для $a = b = e_{11}$ и $c = e_{12}$ заключаем, что $[1]_{\xi_{pq}}^0 [e_{12}]_q^1 = 0$. Если $(\xi_{pq})_0 = \lambda$, то $[1]_{\xi_{pq}}^0 = \lambda + r$, где $r \in \mathfrak{A}$. Отсюда следует, что $\lambda[e_{12}]_q^1 = -r[e_{12}]_q^1$.

По лемме Алберта [25, лемма 5], если в правоальтернативной алгебре элемент r нильпотентен, то нильпотентен и оператор левого умножения L_r на этот элемент. Поэтому, итерируя последнее равенство, получаем, что $\lambda = 0$, то есть $[a]_p^1[b]_q^1 = [ab]_{\xi_{pq}}^0 \in \mathfrak{A}$. $\square$

Из предложений 5.1–5.4 вытекает теорема.

В самом деле, сначала заметим, что если B — простая унитарная супералгебра, то $M^2 \not\subseteq \mathfrak{A}$. Иначе $\mathfrak{A} + M$ — градуированный идеал в B .

Значит, из предложения 5.4 следует, что если простая компонента четной части есть расщепляемая алгебра Кэли—Диксона, то супералгебра B не проста.

В остальных двух случаях по предложениям 5.1–5.3 супералгебра B разлагается в сумму простой супералгебры $\bar{B}$ и градуированного идеала $\bar{B}\mathfrak{A}$, значит, из простоты B следует, что $\mathfrak{A} = 0$.

5.2. Основная теорема Веддерберна для супералгебр ёмкости 1

В предыдущем параграфе изучалось строение правоальтернативных унитарных супералгебр $B = A \oplus M$ ёмкости 1. Простая компонента S конечномерной четной части $A = S \oplus \mathfrak{A}$ предполагалась некоммутативной. Там было доказано, что такая супералгебра B над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики не 2 разлагается в прямую сумму $B = \check{B} \oplus \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{M}$ — градуированный идеал супералгебры с четной частью $\mathfrak{A}$ и нечетной — $\mathfrak{M}$, а $\check{B}$ — простая альтернативная супералгебра, в частности простая алгебра, являющаяся супералгеброй с нулевой четной частью.

В этом параграфе доказано, что отщепленный идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен:

Теорема 5.2. Пусть $B = A \oplus M$ — правоальтернативная супералгебра с сильно альтернативной четной частью ёмкости 1 над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики не 2; S — простая конечномерная некоммутативная компонента алгебры A , причем единица алгебры S является единицей в B ; B — альтернативный унитарный бимодуль над A . Тогда $B = \check{B} \oplus \mathfrak{B}$, где $\check{B}$ — простая супералгебра, а $\mathfrak{B}$ — нильпотентный градуированный идеал супералгебры B .

Над алгебраически замкнутым полем Φ возможны следующие 3 случая для простой некоммутативной компоненты S : 1) $S = M_n$ ($n \geq 3$); 2) $S = C$; 3) $S = H$, где H, C — расщепляемые композиционные алгебры размерности 4 и 8. Доказательство теоремы 5.2 разобьем на три предложения в соответствии с указанными случаями.

Предложение 5.5. Если S -бимодуль B ассоциативен, то идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен.

Доказательство. Пусть S -бимодуль B ассоциативен. Поскольку по [49, теорема 18.1] унитарный альтернативный S -бимодуль B является прямой суммой регулярных S -бимодулей, то S не может быть алгеброй Кэли C , а значит, $S = M_n$ при $n \geq 2$. Тогда по лемме 5.7 супералгебра B ассоциативна и по предложениям 5.2, 5.3 представляется в виде $B = \check{B} + \mathfrak{B}$, где $\check{B}$ — простая супералгебра $M_n[\sqrt{1}]$ или простая алгебра M_n , а $\mathfrak{B} = \mathfrak{R} + \mathfrak{M}$ — градуированный идеал B с четной частью $\mathfrak{R}$ и нечетной $\mathfrak{M}$. Следовательно, в этом случае $\mathfrak{M}^2 \subseteq \mathfrak{R}$.

Докажем, что идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен. Пусть ρ — индекс нильпотентности радикала $\mathfrak{R}$. Рассмотрим произведение $\rho' = 2\rho^2 - 2\rho + 1 = (\rho - 1)2\rho + 1$ однородных элементов идеала $\mathfrak{B}$. Если в этом произведении встретились ρ четных элементов, идущих подряд, то оно равно нулю. Значит, можно считать, что ρ четных элементов не идут подряд. Откуда следует, что в произведении найдется хотя бы 2ρ нечетных элементов.

Так как произведение четного и нечетного элемента — нечетный элемент, то данное произведение совпадает с произведением не менее 2ρ нечетных элементов. А так как произведение двух нечетных элементов является четным, то и в этом случае мы получаем, что оно равно нулю. $\square$

В следующем предложении рассмотрим случай $S = C$, где C — расщепляемая алгебра Кэли.

Предложение 5.6. *Если $S = C$, то идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен.*

Доказательство. По 5.1.2 идеал $\mathfrak{B}$ является прямой суммой неприводимых регулярных S -бимодулей $[C]_i$

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{i=1}^t [C]_i,$$

каждый из которых — линейная копия алгебры Кэли C . Элемент бимодуля $[C]_i$, соответствующий $a \in C$ обозначается $[a]_i$.

С этой прямой суммой связан набор невырожденных линейных отображений $\mathbf{c}_i: C \rightarrow [C]_i: a \mapsto [a]_i$. Тогда $a^{\mathbf{c}_i} = [a]_i$. Пусть $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^t \beta_i \mathbf{c}_i$ — линейная комбинация $\mathbf{c}_i$. Тогда $a^{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^t \beta_i a^{\mathbf{c}_i} = \sum_{i=1}^t \beta_i [a]_i$. В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные линейные комбинации $\mathbf{b}$, то есть такие, что все элементы $\mathbf{c}_i$ линейной комбинации имеют одну четность. Четность однородного элемента $a^{\mathbf{b}}$ обозначим $|\mathbf{b}|$, то есть $|\mathbf{b}| = 0$, если $a^{\mathbf{b}} \in A$ и $|\mathbf{b}| = 1$, если $a^{\mathbf{b}} \in M$.

В лемме 5.12 доказано, что для произвольных комбинаций $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеется такая комбинация $\mathbf{ab}$, что для любых $a, b \in C$ выполнено

$$a^{\mathbf{a}} b^{\mathbf{b}} = (ab)^{\mathbf{ab}}. \quad (5.8)$$

Пусть ρ — индекс нильпотентности радикала $\mathfrak{R}$, $\rho' = 2\rho^2 - 2\rho + 1$ как и в предложении 5.5. Рассмотрим w — произведение $2\rho'$ элементов идеала $\mathfrak{B}$. Так как элементы $e_{ij}^{c_k}$ и $(ve_{ij})^{c_k}$ при $k = \overline{1, t}$, $i, j \in \{1, 2\}$ образуют базис идеала $\mathfrak{B}$, то можно считать, что в рассматриваемом произведении все сомножители — базисные элементы. В этом случае по (5.8) имеется такая комбинация $\mathfrak{d}$, что $w = a^{\mathfrak{d}}$, где либо $a = e_{ij}$, либо $a = ve_{ij}$.

Пусть w имеет вид $e_{11}^{\mathfrak{d}}$. Если $ab = e_{11}$, то по (5.8) $a^{\mathfrak{d}}b^{\mathfrak{d}} = e_{11}^{\mathfrak{d}} = e_{11}^{\mathfrak{a}}e_{11}^{\mathfrak{b}}$, поэтому можно считать, что все сомножители в w имеют вид $e_{11}^{c_i}$. В этом случае произведение w ассоциативно. В самом деле, по (5.8) и правой альтернативности имеем

$$\begin{aligned} e_{11}^{\mathfrak{a}}e_{11}^{\mathfrak{b}} \cdot e_{11}^{\mathfrak{c}} &= e_{12}^{\mathfrak{a}}e_{22}^{\mathfrak{b}} \cdot e_{21}^{\mathfrak{c}} = \\ &= e_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot e_{22}^{\mathfrak{b}}e_{21}^{\mathfrak{c}} - (-1)^{|\mathfrak{b}||\mathfrak{c}|}(e_{12}^{\mathfrak{a}}e_{21}^{\mathfrak{c}} \cdot e_{22}^{\mathfrak{b}} - e_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot e_{21}^{\mathfrak{c}}e_{22}^{\mathfrak{b}}) = \\ &= e_{12}^{\mathfrak{a}} \cdot e_{22}^{\mathfrak{b}}e_{21}^{\mathfrak{c}} = e_{11}^{\mathfrak{a}} \cdot e_{11}^{\mathfrak{b}}e_{11}^{\mathfrak{c}}. \end{aligned}$$

Так как произведение w ассоциативно, то на основании рассуждений предложения 5.5 заключаем, что $e_{11}^{\mathfrak{d}} = 0$. Из регулярности S -бимодулей $[C]_k$ следует, что

$$w = e_{ij}^{\mathfrak{d}} = e_{i1}^{\mathfrak{d}}e_{1j} = e_{i1}e_{11}^{\mathfrak{d}} \cdot e_{1j} = 0.$$

Пусть теперь w имеет вид $(ve_{ij})^{\mathfrak{d}}$, тогда по (5.8) можно считать, что в этом произведении лишь один сомножитель имеет вид $(ve_{ij})^{c_k}$, а все остальные — вид $e_{ij}^{c_k}$. Так как w представляется в виде $w'w''$, то считаем, что сомножитель вида $(ve_{ij})^{c_k}$ входит в самое короткое из произведений w' или w'' . Тогда длинное произведение имеет длину не меньше, чем ρ' , и ассоциативно. Поэтому $w = 0$. $\square$

Для доказательства теоремы осталось рассмотреть случай $S = H$. В этом случае представим идеал $\mathfrak{B}$ в виде суммы неприводимых H -бимодулей $[H]_i$ и $[C_2]_j$:

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{i=1}^{t'} [H]_i \oplus \bigoplus_{i=t'+1}^t [C_2]_i,$$

где $[H]_i$ — регулярные ассоциативные бимодули, их элементы обозначаются $[a]_i$ для $a \in H$; $[C_2]_j$ — стандартные бимодули Кэли, их элементы обозначаются $[c]_j$ для $c \in C_2$. Обозначим через $\mathfrak{B}_a$ сумму регулярных ассоциативных бимодулей $[H]_i$, а через $\mathfrak{B}_c$ — бимодулей Кэли $[C_2]_j$. То есть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_a + \mathfrak{B}_c$.

С рассмотренным разложением $\mathfrak{B}$ в сумму неприводимых бимодулей связан набор невырожденных линейных отображений $\mathfrak{h}_i: H \rightarrow [H]_i: a \mapsto [a]_i$ и $\mathfrak{c}_j: C_2 \rightarrow [C_2]_j: c \mapsto [c]_j$. Можно считать, что $C_2^{\mathfrak{h}_i} = H^{\mathfrak{c}_j} = 0$.

Рассмотрим линейные комбинации $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{t'} \beta_i \mathbf{h}_i$ и $\mathbf{c} = \sum_{i=t'+1}^t \gamma_i \mathbf{c}_i$. Как и ранее, $a^{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{t'} \beta_i [a]_i$ для элемента $a \in \mathbf{H}$; $c^{\mathbf{c}} = \sum_{i=t'+1}^t \gamma_i [c]_i$ для $c \in \mathbf{C}_2$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только однородные линейные комбинации, то есть такие, что берутся только по четным или только по нечетным компонентам. Четность однородного элемента $a^{\mathbf{b}}$ обозначим $|\mathbf{b}|$, то есть $|\mathbf{b}| = 0$, если $a^{\mathbf{b}} \in A$ и $|\mathbf{b}| = 1$, если $a^{\mathbf{b}} \in M$.

Два элемента x и y из $\mathfrak{B}$ назовем *однотипными* ($x \sim y$), если они лежат в одном неприводимом $\mathbf{H}$ -бимодуле, то есть если один может быть получен из другого цепочкой умножений на элементы из $\mathbf{H}$.

Введем умножение элементов бимодуля Кэли $\mathbf{C}_2$ подобно тому, как это делалось в супералгебре Шестакова $S_{4|2}$. А именно:

$$\overline{m}_i m_j = e_{ji},$$

где

$$\overline{m}_1 = m_2, \quad \overline{m}_2 = -m_1.$$

Тем самым могут быть вычислены произведения любых элементов из $\mathbf{C}_2$, например, $m_1 m_2 = -\overline{m}_2 m_2 = -e_{22}$ или $m_1 m_1 = -\overline{m}_2 m_1 = -e_{12}$.

В следующей лемме перечислим свойства умножения элементов бимодулей, доказанные в 5.1.

Лемма 5.13. *Выполнены свойства:*

- а) $m_i^{\mathbf{a}} e_{jk}^{\mathbf{b}} = (-1)^{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \overline{e}_{jk}^{\mathbf{b}} m_i^{\mathbf{a}} = (m_i e_{jk})^{\mathbf{ab}}$;
- б) $m_i^{\mathbf{a}} m_j^{\mathbf{b}} = -(-1)^{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} m_i^{\mathbf{b}} m_j^{\mathbf{a}} = (m_i m_j)^{\mathbf{ab}}$;
- в) $e_{ij}^{\mathbf{a}} e_{kl}^{\mathbf{b}} = (e_{ij} e_{kl})^{\mathbf{ab}}$.

В этой лемме через $\mathbf{ab}$ обозначается некоторая новая линейная комбинация отображений $\mathbf{h}_i$ или $\mathbf{c}_j$, определяемая комбинациями $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Заметим, что пункт а) леммы при $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ доказан в лемме 5.1; при $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = 1$ — в леммах 5.2 и 5.3; а при $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 0$ может быть доказан полностью аналогично лемме 5.2. Пункт б) леммы при $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ доказан в лемме 5.5; при $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = 1$ — в лемме 5.4; а при $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 0$ может быть доказан полностью аналогично. Пункт в) доказан в лемме 5.6.

Лемма 5.14. *Если $x, y \in \mathfrak{B}_a$, $z \in \mathfrak{B}_c$, то $xy \cdot z = (-1)^{|y||z|} xz \cdot \overline{y}$.*

Доказательство. По лемме 5.13 произведение $e_{ij}^{\mathbf{a}} e_{jk}^{\mathbf{b}} \cdot m_1^{\mathbf{c}} = e_{ik}^{\mathbf{ab}} m_1^{\mathbf{c}}$ может быть ненулевым только в двух случаях: $e_{22}^{\mathbf{ab}} m_1^{\mathbf{c}}$ и $e_{21}^{\mathbf{ab}} m_1^{\mathbf{c}}$.

Первый случай возможен в двух вариантах, которые мы и рассмотрим.

По правой альтернативности имеем

$$e_{21}^a e_{12}^b \cdot m_1^c = -(-1)^{|b||c|} e_{21}^a m_1^c \cdot e_{12}^b + e_{21}^a (e_{12}^b \circ m_1^c),$$

где $p \circ q = pq + (-1)^{|p||q|} qp$ для однородных элементов p, q идеала $\mathfrak{B}$. Тогда по лемме 5.13 а)

$$e_{12}^b \circ m_1^c = e_{12}^b m_1^c + \bar{e}_{12}^b m_1^c = e_{12}^b m_1^c - e_{12}^b m_1^c = 0.$$

То есть

$$e_{21}^a e_{12}^b \cdot m_1^c = -(-1)^{|b||c|} e_{21}^a m_1^c \cdot e_{12}^b = (-1)^{|b||c|} e_{21}^a m_1^c \cdot \bar{e}_{12}^b.$$

Далее,

$$\begin{aligned} e_{22}^a e_{22}^b \cdot m_1^c &= e_{21}^a e_{12}^b \cdot m_1^c = (-1)^{|b||c|} e_{21}^a m_1^c \cdot \bar{e}_{12}^b = \\ &= (-1)^{|b||c|+|a||c|} m_1^c \bar{e}_{21}^a \cdot \bar{e}_{12}^b = (-1)^{|b||c|+|a||c|} m_1^c e_{21}^a \cdot e_{12}^b = \\ &= (-1)^{|b||c|+|a||c|} m_2^{ca} e_{12}^b = (-1)^{|b||c|+|a||c|} m_1^{ca} e_{11}^b = \\ &= (-1)^{|b||c|+|a||c|} m_1^c e_{11}^a \cdot e_{11}^b = (-1)^{|b||c|} e_{22}^a m_1^c \cdot e_{11}^b = \\ &= (-1)^{|b||c|} e_{22}^a m_1^c \cdot \bar{e}_{22}^b. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй случай: $e_{22}^a e_{21}^b \cdot m_1^c$. Аналогично рассуждениям первого случая, имеем $e_{21}^b \circ m_1^c = 0$, то есть

$$e_{22}^a e_{21}^b \cdot m_1^c = (-1)^{|b||c|} e_{22}^a m_1^c \cdot \bar{e}_{21}^b.$$

Далее,

$$\begin{aligned} e_{21}^a e_{11}^b \cdot m_1^c &= e_{22}^a e_{21}^b \cdot m_1^c = (-1)^{|b||c|} e_{22}^a m_1^c \cdot \bar{e}_{21}^b = \\ &= (-1)^{|b||c|+|a||c|} m_1^c e_{11}^a \cdot \bar{e}_{21}^b = -(-1)^{|b||c|+|a||c|} m_1^c e_{11}^a \cdot e_{21}^b = \\ &= -(-1)^{|b||c|+|a||c|} m_1^c e_{21}^a \cdot e_{22}^b = (-1)^{|b||c|} e_{21}^a m_1^c \cdot e_{22}^b = \\ &= (-1)^{|b||c|} e_{21}^a m_1^c \cdot e_{22}^b = (-1)^{|b||c|} e_{21}^a m_1^c \cdot \bar{e}_{11}^b. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.15. Если $x, z \in \mathfrak{B}_c$, $y \in \mathfrak{B}_a$, то $xy \cdot z = (-1)^{|y||z|} xz \cdot \bar{y}$.

Доказательство. Рассмотрим произведение $m_1^a e_{21}^b \cdot m_1^c$. В лемме 5.14 было доказано, что $e_{21}^b \circ m_1^c = 0$. Значит, по правой альтернативности имеем

$$m_1^a e_{21}^b \cdot m_1^c = -(-1)^{|b||c|} m_1^a m_1^c \cdot e_{21}^b = (-1)^{|b||c|} m_1^a m_1^c \cdot \bar{e}_{21}^b.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
m_2^a e_{22}^b \cdot m_1^c &= m_1^a e_{21}^b \cdot m_1^c = (-1)^{|b||c|} m_1^a m_1^c \cdot \bar{e}_{21}^b = \\
&= -(-1)^{|b||c|} m_1^a m_1^c \cdot e_{21}^b = (-1)^{|b||c|} \bar{m}_2^a m_1^c \cdot e_{21}^b = \\
&= (-1)^{|b||c|} e_{12}^{ac} e_{21}^b = (-1)^{|b||c|} e_{11}^{ac} e_{11}^b = (-1)^{|b||c|} \bar{m}_1^a m_1^c \cdot \bar{e}_{22}^b = \\
&= (-1)^{|b||c|} m_2^a m_1^c \cdot \bar{e}_{22}^b.
\end{aligned}$$

Рассмотрим второй случай:

$$m_2^a e_{12}^b \cdot m_1^c = -(-1)^{|b||c|} m_2^a m_1^c \cdot e_{12}^b = (-1)^{|b||c|} m_2^a m_1^c \cdot \bar{e}_{12}^b.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
m_1^a e_{11}^b \cdot m_1^c &= m_2^a e_{12}^b \cdot m_1^c = -(-1)^{|b||c|} m_2^a m_1^c \cdot e_{12}^b = \\
&= -(-1)^{|b||c|} e_{11}^{ac} e_{12}^b = -(-1)^{|b||c|} e_{12}^{ac} e_{22}^b = \\
&= (-1)^{|b||c|} m_1^a m_1^c \cdot e_{22}^b = (-1)^{|b||c|} m_1^a m_1^c \cdot \bar{e}_{11}^b.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.16. Для всяких элементов $x \in \mathfrak{B}_a$, $y, z \in \mathfrak{B}_c$ имеются такие элементы $\tilde{x} \sim x$, $\tilde{y} \sim y$ и $\tilde{z} \sim z$, что $x \cdot yz = \tilde{y}\tilde{z} \cdot \tilde{x}$.

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$e_{12}^a \cdot m_1^b m_2^c = -e_{12}^a \cdot \bar{m}_2^b m_2^c = -e_{12}^a e_{22}^{bc}.$$

Так как

$$e_{12}^a \cdot m_2^c m_1^b = e_{12}^a \cdot \bar{m}_1^c m_1^b = e_{12}^a e_{11}^{cb} = 0,$$

то

$$\begin{aligned}
e_{12}^a \cdot m_1^b m_2^c &= e_{12}^a (m_1^b \circ m_2^c) = e_{12}^a m_1^b \cdot m_2^c + (-1)^{|b||c|} e_{12}^a m_2^c \cdot m_1^b = \\
&= (-1)^{|b||c|} e_{12}^a m_2^c \cdot m_1^b \stackrel{\text{л. 5.13}}{=} (-1)^{|a||c|+|b||c|} m_2^c \bar{e}_{12}^a \cdot m_1^b \stackrel{\text{л. 5.15}}{=} \\
&= (-1)^{|a||b|+|a||c|+|b||c|} m_2^c m_1^b \cdot e_{12}^a \stackrel{\text{л. 5.13}}{=} (-1)^{|a||b|+|a||c|} m_2^b m_1^c \cdot e_{12}^a.
\end{aligned}$$

Что и требовалось в этом случае.

Далее, отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
-e_{12}^a e_{22}^{bc} &= -(-1)^{|a||b|+|a||c|} m_2^b m_1^c \cdot e_{12}^a = \\
&= -(-1)^{|a||b|+|a||c|} \bar{m}_1^b m_1^c \cdot e_{12}^a = -(-1)^{|a||b|+|a||c|} e_{11}^{bc} e_{12}^a.
\end{aligned}$$

Таким образом, по лемме 5.13 в) заключаем, что для любых $a, b \in \mathbf{H}$ выполнено

$$a^a b^{bc} = (-1)^{|a||b|+|a||c|} a^{bc} b^a,$$

если $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — линейные комбинации $\mathbf{c}_i$.

Из полученного равенства легко следуют остальные случаи. Например,

$$e_{11}^a \cdot m_2^b m_1^c = e_{11}^a e_{11}^{bc} = (-1)^{|a||b|+|a||c|} e_{11}^{bc} e_{11}^a = (-1)^{|a||b|+|a||c|} m_2^b m_1^c \cdot e_{11}^a.$$

Лемма доказана. □

Предложение 5.7. Если $S = \mathbf{H}$, то идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен.

Доказательство. Рассмотрим w — произведение 2^N однородных элементов идеала $\mathfrak{B}$. Так как произведение однородных элементов является однородным, то имеется представление

$$w = w_1 T_{w_2} T_{w_3} \cdots T_{w_N},$$

где w_i — однородные элементы из $\mathfrak{B}$, $T_a \in \{R_a, L_a\}$, R_a и L_a — операторы правого и левого умножения: $xR_a = xa$, $xL_a = ax$.

Можно считать, что $w_1 \in \mathfrak{B}_c$. В самом деле, если $w_i \in \mathfrak{B}_a$ при $i = \overline{1, \rho'}$, где $\rho' = 2\rho^2 - 2\rho + 1$, ρ — индекс нильпотентности радикала $\mathfrak{R}$, то $w = 0$. Поэтому, если $w \neq 0$, то найдется $w_j \in \mathfrak{B}_c$ при $j \leq \rho'$. Пусть j — минимальный индекс с таким свойством, тогда в силу ассоциативности $\mathfrak{B}_a$ после некоторой перенумерации индексов $i = \overline{1, j-1}$ имеем

$$w = w_1 R_{w_2} \cdots R_{w_{j-1}} T_{w_j} \cdots T_{w_N}.$$

Если $T_{w_j} = L_{w_j}$, то по лемме 5.13 а)

$$w = \tilde{w}_1 R_{\tilde{w}_2} \cdots R_{\tilde{w}_{j-1}} R_{w_j} \cdots T_{w_N}$$

для некоторых элементов $\tilde{w}_i \sim w_i$ того же типа, и можно считать, что $T_{w_j} = R_{w_j}$.

Если $T_{w_j} = R_{w_j}$, то, последовательно применяя лемму 5.14, получаем, что

$$w = (-1)^{(|w_2|+|w_3|+\cdots+|w_{j-1}|)|w_j|} w_1 R_{w_j} R_{\overline{w_2}} \cdots R_{\overline{w_{j-1}}} T_{w_{j+1}} \cdots T_{w_N}.$$

Далее, применяя лемму 5.13 а), получим, что

$$w = (-1)^{(|w_1|+|w_2|+\cdots+|w_{j-1}|)|w_j|} w_j R_{\overline{w_1}} \cdots R_{\overline{w_{j-1}}} T_{w_{j+1}} \cdots T_{w_N}.$$

Итак, можно считать, что

$$w = w_1 R_{w_2} \cdots R_{w_{l-1}} L_{w_l} T_{w_{l+1}} \cdots T_{w_N},$$

где $w_1 \in \mathfrak{B}_c$. Заметим, что по леммам 5.13 а), 5.14 и 5.15 элементы w_i при $i = \overline{1, l-1}$ в этой цепочке перестановочны с заменой на однотипные элементы.

Очевидно, что при замене элементов w_i ($i = \overline{1, l}$) на однотипные оператор L_{w_l} может быть заменен на R_{w_l} . Если $w_l \in \mathfrak{B}_c$, то это следует из леммы 5.13 а), б). Если же $w_l \in \mathfrak{B}_a$, то из леммы 5.16.

Таким образом, двигаясь по цепочке слева направо, можно последовательно преобразовывать все операторы левого умножения в операторы правого и получить цепочку $w = w_1 R_{w_2} \cdots R_{w_N}$. Причем, по леммам 5.13 а), 5.14 и 5.15 все элементы w_i в цепочке перестановочны с заменой на элементы того же типа. Поэтому, если среди w_i элементов из $\mathfrak{B}_a$ много (больше ρ'), то можно считать, что они стоят первыми, а тогда их произведение равно 0. Если же их мало, то много (т.е. больше, чем $2\rho'$) элементов из $\mathfrak{B}_c$. Тогда, уменьшая количество элементов из $\mathfrak{B}_c$ на 2, увеличиваем количество элементов из $\mathfrak{B}_a$ на 1 следующим образом. Переставляем w_i так, чтобы $w_1, w_2 \in \mathfrak{B}_c$. По лемме 5.13 б) произведение $w_1 R_{w_2} = w_1 w_2 \in \mathfrak{B}_a$. Вводим замену

$$w_1 w_2 \mapsto w_1, w_3 \mapsto w_2, \dots, w_N \mapsto w_{N-1}.$$

Применяя эту операцию несколько раз, мы увеличим количество $w_i \in \mathfrak{B}_a$ до ρ' и получим, что $w = 0$. Предложение доказано. $\square$

Этим предложением заканчивается доказательство теоремы.

В заключение приведем пример, показывающий существование супералгебр B с максимальным нильпотентным отщепляемым идеалом $\mathfrak{B}$. Пусть $B = A \oplus M$ — супералгебра с четной частью $A = [\mathbb{H}]_1 \oplus [\mathbb{H}]_2$ и нечетной $M = [\mathbb{C}_2]_3 \oplus [\mathbb{C}_2]_4$; характеристика B равна 3. Ненулевое умножение базисных элементов в B зададим по правилам, описанным в лемме 5.13:

$$\begin{aligned} [e_{ij}]_1 [e_{jk}]_n &= [e_{ij}]_n [e_{jk}]_1 = [e_{ik}]_n & (n \in \{1, 2\}), \\ [\bar{e}_{ij}]_1 [m_j]_n &= [m_j]_n [e_{ij}]_1 = [m_i]_n & (n \in \{3, 4\}), \\ [m_i]_3 [m_j]_3 &= [m_i m_j]_1, \\ [m_j]_3 [e_{ij}]_2 &= [\bar{e}_{ij}]_3 [m_j]_2 = [m_i]_4, \\ [m_i]_3 [m_j]_4 &= [m_i]_4 [m_j]_3 = [m_i m_j]_2. \end{aligned}$$

Можно проверить, что такая супералгебра B является унитарной правоальтернативной супералгеброй емкости 1. В наших обозначениях $S = [\mathbb{H}]_1$, $\mathfrak{K} = [\mathbb{H}]_2$, $\check{B} = S_{4|2} = [\mathbb{H}]_1 + [\mathbb{C}_2]_3$, $\mathfrak{B} = [\mathbb{H}]_2 \oplus [\mathbb{C}_2]_4$. Заметим, что идеал $\mathfrak{B}$ нильпотентен индекса 2, а сама супералгебра B — альтернативна.

Точно также могут быть построены аналогичные примеры для других простых компонент $\check{B}$ и нильпотентного идеала $\mathfrak{B}$ индекса 2. Все построенные примеры являются альтернативными супералгебрами. Нам не известно существует ли пример не альтернативной супералгебры с сильно альтернативной четной частью емкости 1.

5.3. Супералгебры произвольной ёмкости

Этот параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема 5.3. *Четная часть конечномерной простой правоальтернативной унитарной супералгебры над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики 0 полупроста в случае ее сильной альтернативности.*

Из этой теоремы и результатов глава 4 следует классификация простых конечномерных правоальтернативных унитарных супералгебр над полем характеристики 0, четная часть которых сильно альтернативна.

Параграф состоит из 5 частей. Сначала доказываются некоторые предварительные результаты. Далее последовательно обсуждаются свойства произведений пирсовых компонент нечетной части. Более точно, доказываем, что произведения вида $(M * \mathfrak{R}) * M$ содержатся в радикале $\mathfrak{R} = \text{Nil } A$. Используя полученные результаты, в конце параграфа доказано, что идеал супералгебры, порожденный радикалом $\mathfrak{R}$ является собственным, что и завершает доказательство теоремы.

Пусть $B = A \oplus M$ — простая конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра над Φ . Поскольку четная часть A — конечномерная альтернативная алгебра, обозначим $A = S \oplus \mathfrak{R}$, где $S = \bigoplus_{i=1}^t S_i$ — прямая сумма минимальных идеалов S_i , изоморфных простым альтернативным алгебрам, $\mathfrak{R} = \text{Nil } A$ — ниль-радикал алгебры A . Число t назовем ёмкостью алгебры A (или супералгебры B).

Пусть e_i — единица алгебры S_i . $1 = \sum_{i=1}^t e_i$ — единица алгебры A . Набор $E = \{e_i \mid i = \overline{1, t}\}$ представляет собой полную систему центральных ортогональных идемпотентов полупростой алгебры S .

5.3.1. Пирсовы разложения.

Доказательство следующих двух лемм дословно повторяет доказательство лемм 4.1 и 4.2.

Лемма 5.17. *Тройка множеств B, E, S ассоциативна, т.е. любой ассоциатор от элементов $p \in B, e \in E, a \in S$ равен нулю.*

Лемма 5.18. *Единица e_i алгебры S_i обладает свойством $(e_i, M, M) \subseteq \mathfrak{R}$.*

Рассмотрим пирсово разложение модуля M :

$$M = \sum_{i,j=1}^t P_{ij}, \text{ где } P_{ij} = e_i M e_j.$$

По лемме 5.17 расстановка скобок в указанных произведениях не существенна. Точно так же возникает пирсово разложение радикала

$$\mathfrak{R} = \sum_{i,j=1}^t \mathfrak{R}_{ij}, \text{ где } \mathfrak{R}_{ij} = e_i \mathfrak{R} e_j.$$

Инвариантность радикала относительно почти-дифференцирований.

Обозначим через R_a оператор правого умножения на элемент a , то есть $xR_a = xa$. Положим также $R_{x,y}: a \mapsto (a, x, y)$.

Следуя [79, 80], напомним определение почти-дифференцирования. Пусть A — алгебра, $M(A) = \text{alg}\langle R_a, L_a \mid a \in A \rangle$ — её алгебра умножений. Элемент $\delta \in \text{End}_{\Phi} A$ называется *почти-дифференцированием* алгебры A , если существуют такие элементы $W_1, W_2 \in M(A)$, что для любых $a, b \in A$:

$$(ab)^{\delta} = a^{\delta_1} b + ab^{\delta_2}, \text{ где } \delta_1 = \delta + W_1, \delta_2 = \delta + W_2.$$

Множество почти-дифференцирований алгебры A обозначается $\text{NDer } A$.

Следующая лемма немедленно вытекает из тождества Клейнфелда (1.6).

Лемма 5.19 ([80]). *Пусть $B = A + M$ — правоальтернативная супералгебра и $x, y \in M$. Тогда $R_{x,y} \in \text{NDer } A$.*

Лемма 5.20. *Пусть $I \triangleleft A$, $\delta \in \text{NDer } A$. Тогда $I + I^{\delta} \triangleleft A$.*

Доказательство. Если $\delta_1 = \delta + W_1, \delta_2 = \delta + W_2$, то для любых $i \in I, a \in A$ имеем:

$$\begin{aligned} i^{\delta} a &= i^{\delta_1} a - i W_1 \cdot a \equiv i^{\delta_1} a = (ia)^{\delta} - ia^{\delta_2} \equiv 0 \pmod{I + I^{\delta}}, \\ ai^{\delta} &= ai^{\delta_2} - a \cdot i W_2 \equiv ai^{\delta_2} = (ai)^{\delta} - a^{\delta_1} i \equiv 0 \pmod{I + I^{\delta}}. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 5.21. *Пусть A — правоальтернативная алгебра над полем Φ характеристики нуль. Если $\mathfrak{R} = \text{Nil } A$, $\delta \in \text{NDer } A$, то $\mathfrak{R}^{\delta} \subseteq \mathfrak{R}$.*

Доказательство. Приводимые ниже рассуждения следуют работе [58]. Поскольку в силу леммы 5.20 имеем $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}^\delta \triangleleft A$, то достаточно понять, что для любого $x \in \mathfrak{R}$ найдется $n = n(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $(x^\delta)^n \in \mathfrak{R}$. Поскольку $x \in \mathfrak{R}$, то $x^n = 0$ для некоторого n . Тогда

$$0 = (x^n)^{\delta^n} = \sum_{\xi_i \in \{\delta_1, \delta_2\}} x^{\xi_1} x^{\xi_2} \dots x^{\xi_n} + \sum x^{\eta_1} x^{\eta_2} \dots x^{\eta_n},$$

где η_i являются словами от букв δ_1, δ_2 , причем среди слов η_i имеется хотя бы одно пустое, то есть хотя бы один из элементов $x^{\eta_1}, x^{\eta_2}, \dots, x^{\eta_n}$, а, значит, и все слово $x^{\eta_1} x^{\eta_2} \dots x^{\eta_n}$, содержится в радикале $\mathfrak{R}$. Итак, по модулю $\mathfrak{R}$ верно сравнение

$$0 = (x^n)^{\delta^n} \equiv \sum_{\xi_i \in \{\delta_1, \delta_2\}} x^{\xi_1} x^{\xi_2} \dots x^{\xi_n} \pmod{\mathfrak{R}}.$$

Поскольку $x^{\xi_i} = x^{\delta_i} \equiv x^\delta \pmod{\mathfrak{R}}$, то $x^{\xi_1} x^{\xi_2} \dots x^{\xi_n} \equiv (x^\delta)^n \pmod{\mathfrak{R}}$, значит, $0 = (x^n)^{\delta^n} \equiv \sum (x^\delta)^n = n!(x^\delta)^n \pmod{\mathfrak{R}}$. Отсюда в силу ограничений на характеристику поля Φ вытекает, что $(x^\delta)^n \in \mathfrak{R}$. $\square$

Из лемм 5.19 и 5.21 следует

Лемма 5.22. *Если характеристика поля нулевая, то выполнено соотношение $\mathfrak{R}M \cdot M \subseteq \mathfrak{R}$.*

Свойства произведения $P_{ij} * \mathfrak{R}_{kl}$.

Обозначим $V_{ij} = P_{ij} \cup \mathfrak{R}_{ij}$. Везде далее по умолчанию мы считаем, что $r_{ij} \in \mathfrak{R}_{ij}$, $x_{ij} \in P_{ij}$ и $f_{ij}, g_{ij} \in V_{ij}$.

Лемма 5.23. *Если $j \notin \{k, l\}$, то $V_{ij}V_{kl} = 0$.*

Доказательство. По правой альтернативности $f_{ij}f_{kl} \cdot e_j = -f_{ij}f_{kl}$. Так как собственными значениями оператора правого умножения R_{e_j} являются только 0 и 1, то $f_{ij}f_{kl} = 0$. $\square$

Отметим, что по правой альтернативности произведения вида $f_{ij}f_{kl}$ при $j \in \{k, l\}$ представляются в виде

$$f_{ij}g_{kj} = f_{ij}g_{kj} \cdot e_k, \quad f_{ij}g_{jk} = f_{ij}g_{jk} \cdot e_k. \quad (5.9)$$

Из левой альтернативности A -бимодуля непосредственно следует, что если один из сомножителей лежит в $\mathfrak{R}$, то выполнены соотношения

$$f_{ij}g_{kl} = 0 \ (k \in \{i, j\}), \quad f_{kj}g_{ij} = e_k \cdot f_{kj}g_{ij}, \quad f_{ik}g_{ij} = e_k \cdot f_{ik}g_{ij}. \quad (5.10)$$

Из соотношений (5.9) и (5.10) непосредственно следует

Лемма 5.24. *Выполнены следующие включения*

$$\mathfrak{R}_{ij}P_{jk} + P_{ij}\mathfrak{R}_{jk} \subseteq P_{ik}, \quad \mathfrak{R}_{ij} * P_{ij} \subseteq P_{ji}.$$

Все остальные произведения компонент радикала и бимодуля M нулевые.

Простейшие свойства произведения компонент $P_{ij}P_{kl}$

Всюду ниже считаем, что $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \in P_{ij}$. В силу леммы 5.17 доказательство следующих двух лемм дословно повторяет доказательства лемм 4 и 5 из работы [5].

Лемма 5.25. *Выполнено свойство $P_{ij}P_{kl} \subseteq S_i + \mathfrak{R}$.*

Обозначим $A_1 = e_1 A e_1 = S_1 + \mathfrak{R}_{11}$.

Лемма 5.26. *Если $i \neq j$, то $P_{ij}P_{ji} \subseteq A_i = S_i + \mathfrak{R}_{ii}$.*

Лемма 5.27. *Если $P_{ij}P_{kl} \not\subseteq \mathfrak{R}$, то $P_{kl} = P_{ij}$ или $P_{kl} = P_{ji}$*

Доказательство. По лемме 5.25 если $P_{ij}P_{kl} \subseteq S_1 + \mathfrak{R}$ и $P_{ij}P_{kl} \not\subseteq \mathfrak{R}$, то $i = 1$. По правой альтернативности имеем $x_{1j}x_{kl} \cdot e_1 = (-\delta_{1j} + \delta_{1k} + \delta_{1l})x_{1j}x_{kl}$. Таким образом, $x_{1j}x_{kl}$ — собственный вектор оператора R_{e_1} , но в правоальтернативной алгебре этот оператор имеет собственными значениями только 0 и 1. Так как можно считать, что $x_{1j}x_{kl} \notin \mathfrak{R}$, то 0 не является его собственным значением, значит, $-\delta_{1j} + \delta_{1k} + \delta_{1l} = 1$, что возможно в следующих трех случаях:

$$\text{а) } j = k = l = 1; \quad \text{б) } k = 1, j, l \neq 1; \quad \text{в) } l = 1, j, k \neq 1.$$

Если $j \neq 1$, то при $j \notin \{k, l\}$ по лемме 5.23 $x_{1j}x_{kl} = 0$, т.е. $j \in \{k, l\}$, но это означает требуемое в лемме. $\square$

Лемма 5.28. *Выполнены следующие свойства:*

- а) $(P_{12}, P_{21}, A_1) = (A_1, P_{12}, P_{21}) = 0$;
- б) $(P_{12}, \mathfrak{R}_{22}, P_{21}) = 0$;
- в) $(P_{11}, P_{12}, P_{21}) \subseteq \mathfrak{R}M$;
- г) $(A_1, A_1, V_{12}) = (A_1, V_{12}, A_2) = (V_{12}, A_2, A_2) = 0$.

Кроме того, справедливы равенства, получающиеся из указанных переименованием индексов 1 и 2.

Доказательство. а) Для всякого элемента $a_1 \in A_1 = S_1 + \mathfrak{R}_{11}$ выполнено

$$(x_{12}, y_{21}, a_1) = -(x_{12}, a_1, y_{21}) = -x_{12}a_1 \cdot y_{21} + x_{12} \cdot a_1 y_{21} = 0,$$

поскольку $x_{12}S_1 = S_1 y_{21} = 0$ по лемме 5.17, $x_{12}\mathfrak{R}_{11} = \mathfrak{R}_{11}y_{21} = 0$ по лемме 5.24. Аналогично, с использованием леммы 5.26 получаем, что

$$(a_1, x_{12}, y_{21}) = (a_1, y_{21}, x_{12}) = a_1 y_{21} \cdot x_{12} - a_1 \cdot y_{21} x_{12} = 0.$$

б) Имеем по леммам 5.26 и 5.23

$$(x_{12}, r_{22}, y_{21}) = -(x_{12}, y_{21}, r_{22}) = -x_{12}y_{21} \cdot r_{22} + x_{12} \cdot y_{21}r_{22} = 0.$$

в) Так как по лемме 5.27 $x_{11}x_{21} \in \mathfrak{R}$ и по лемме 5.26 $x_{21}x_{12} \in A_2 = S_2 + \mathfrak{R}_{22}$, то по лемме 5.23

$$(x_{11}, x_{12}, x_{21}) = (x_{11}, x_{21}, x_{12}) = x_{11}x_{21} \cdot x_{12} - x_{11} \cdot x_{21}x_{12} \in \mathfrak{R}x_{12}.$$

г) По леммам 5.17 и 5.24 заключаем

$$(A_1, A_1, V_{12}) = (A_1, V_{12}, A_1) \subseteq A_1V_{12} \cdot A_1 + A_1 \cdot V_{12}A_1 \subseteq V_{12}A_1 = 0,$$

$$(A_1, V_{12}, A_2) = (A_1, A_2, V_{12}) \subseteq A_1 \cdot A_2V_{12} = 0,$$

$$(V_{12}, A_2, A_2) = (A_2, V_{12}, A_2) \subseteq A_2 \cdot V_{12}A_2 \subseteq A_2V_{12} = 0. \quad \square$$

5.3.2. Свойства произведения P_{11}^2 .

Отметим сначала, что по лемме 5.17 компонента P_{11} является унитарным S_1 -бимодулем.

В силу сильной альтернативности алгебры A этот бимодуль альтернативен. Строение альтернативных бимодулей над простой альтернативной некоммутативной алгеброй S_1 хорошо известно [49]. Если $S_1 = M_n$ и $n > 2$ или $S_1 = C$, то $P_{11} = \bigoplus_i [S_1]_i$ — прямая сумма регулярных S_1 -бимодулей $[S_1]_i$; если $S_1 = M_2$, то $P_{11} = \bigoplus_i [S_1]_i \oplus \bigoplus_j [C_2]_j$ — прямая сумма регулярных S_1 -бимодулей $[S_1]_i$ и стандартных бимодулей Кэли $[C_2]_j$.

Элементы i -ого регулярного S_1 -бимодуля, соответствующие $a \in S_1$ будем обозначать $[a]_i$. Напомним, что умножение в этом бимодуле определяется по правилам

$$a[b]_i = [a]_ib = [ab]_i$$

для $a, b \in S_1$.

Для унификации обозначений элементы i -ого стандартного бимодуля Кэли в разложении P_{11} будем обозначать $[c]_i$ для $c \in C_2$, поэтому

$$a[c]_i = [ac]_i \text{ и } [c]_ia = [ca]_i$$

для $a \in H$ и $c \in C_2$.

Лемма 5.29. Если $\dim S_1 > 1$, то $A_1 + P_{11}$ — подсупералгебра B .

Доказательство. Заметим, что $P_{11}^2 \subseteq Ae_1$ по лемме 5.19. Дальнейшее доказательство представим в виде последовательности пунктов.

1. Для матричных единиц $e_{ij} \in M_n$ ($n \geq 2$) докажем, что $[e_{ij}]_p[e_{kl}]_q \in A_1$.

В самом деле,

$$[e_{1i}]_p[e_{2j}]_q = e_{11}[e_{1i}]_p \cdot [e_{2j}]_q = e_{11}[[e_{1i}]_p, [e_{2j}]_q] \in e_{11}Ae_1 \subseteq A_1$$

по лемме 5.17. Далее,

$$[e_{1i}]_p[e_{2j}]_q \cdot e_{12} = -\delta_{1i}[e_{12}]_p[e_{2j}]_q + \delta_{1j}[e_{1i}]_p[e_{22}]_q + [e_{1i}]_p[e_{1j}]_p,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Первые три выражения в последнем равенстве лежат в A_1 , значит, и последнее лежит в A_1 .

2. Из п. 1 следует, что при $S_1 = M_n$ и $n > 2$ выполнено $P_{11}^2 \subseteq A_1$. Поэтому $B_{11} = A_1 + P_{11}$ — подсупералгебра B .

3. Докажем, что $P_{11}^2 \subseteq A_1$ и при $S_1 = C$ — расщепляемая алгебра Кэли–Диксона.

Напомним таблицу умножения в алгебре $C = H \oplus vH$:

$$\begin{aligned} v^2 &= e_1, & \bar{v} &= -v, & av &= v\bar{a}, \\ a \cdot vb &= v \cdot \bar{a}b, & vb \cdot a &= v \cdot ab, & va \cdot vb &= b\bar{a}, \end{aligned}$$

где $e_1 = e_{11} + e_{22}$ — единица алгебры $S_1 = C$, H — алгебра матриц 2-го порядка, $a, b \in H$, e_{ij} — матричные единицы H , $a \mapsto \bar{a}$ — симплектическая инволюция матрицы a . В алгебре Кэли–Диксона выполнены соотношения:

$$e_{ij} \circ v = \delta_{ij}v.$$

Понятно, что п. 1 выполнен и для $e_{ij} \in H \subseteq C$. Поэтому по п. 1 при $k \neq l$

$$\begin{aligned} [e_{ij}v]_p[e_{kl}]_q &= [e_{ij}]_pv \cdot [e_{kl}]_q = \\ &= -[e_{ij}]_p[e_{kl}]_q \cdot v + [e_{ij}]_p(v \circ [e_{kl}]_q) = -[e_{ij}]_p[e_{kl}]_q \cdot v \in A_1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$[e_{ij}v]_p[e_1]_q = [e_{ij}v]_p([e_{12}]_q \circ e_{21}) = [e_{ij}v]_p[e_{12}]_q \cdot e_{21} + [e_{ij}v \cdot e_{21}]_p[e_{12}]_q \in A_1.$$

Наконец,

$$[e_{ij}v]_p[e_{kk}]_q = \frac{1}{2}[e_{ij}v]_p([e_1]_q \circ e_{kk}) = \frac{1}{2}[e_{ij}v]_p[e_1]_q \cdot e_{kk} + \frac{1}{2}[e_{ij}v \cdot e_{kk}]_p[e_1]_q \in A_1.$$

Тем самым доказано, что $[e_{ij}v]_p[e_{kl}]_q \in A_1$ для любых $i, j, k, l \in \{1, 2\}$.

Далее по доказанному

$$[e_{ij}]_p[e_{kl}v]_q = e_{ii}[e_{ij}]_p \cdot [e_{kl}v]_q = [e_{ii} \cdot e_{kl}v]_q[e_{ij}]_p + e_{ii}[[e_{ij}]_p, [e_{kl}v]_q] \in A_1.$$

Наконец,

$$[e_{ij}v]_p[e_{kl}v]_q = [e_{ij}]_p v \cdot [e_{kl}v]_q = -[e_{ij}]_p[e_{kl}v]_q \cdot v + [e_{ij}]_p[e_{kl} + \bar{e}_{kl}]_q \in A_1.$$

Тем самым доказано, что $P_{11}^2 \subseteq A_1$ при $S_1 = \mathbb{C}$. Таким образом, и в этом случае $A_1 + P_{11}$ — подсупералгебра B .

4. Докажем, что $P_{11}^2 \subseteq A_1$ и при $S_1 = \mathbb{H}$.

Доказательство представим в виде последовательности пунктов.

а) По пункту 1 имеем $[\mathbb{H}]_p[\mathbb{H}]_q \subseteq A_1$.

б) Докажем следующее включение $[\mathbb{C}_2]_p[\mathbb{C}_2]_q \subseteq A_1$.

Имеем

$$[m_1]_p[m_1]_q = -e_{12}[m_2]_p \cdot [m_1]_q = -e_{12}[[m_2]_p, [m_1]_q] \in A_1.$$

Аналогично получаем, что

$$[m_1]_p[m_2]_q = e_{22}[m_1]_p \cdot [m_2]_q = e_{22}[[m_1]_p, [m_2]_q] \in A_1.$$

Откуда по симметрии индексов заключаем требуемое.

в) Теперь покажем, что $[\mathbb{C}_2]_p[\mathbb{H}]_q \subseteq A_1$.

Проверим сначала, что $[m_i]_p[e_{ij}]_q \in A_1$. В самом деле,

$$[m_1]_p[e_{1i}]_q = e_{22}[m_1]_p \cdot [e_{1i}]_q = e_{22}[[m_1]_p, [e_{1i}]_q] \in A_1.$$

Далее, $[m_1]_p[e_{22}]_q \cdot e_{11} = -[m_1]_p[e_{22}]_q$, то есть $[m_1]_p[e_{22}]_q = 0$.

По доказанному имеем

$$[m_1]_p[e_{21}]_q = [m_1]_p([e_{22}]_q \circ e_{21}) = [m_2]_p[e_{22}]_q \in A_1.$$

г) Осталось проверить, что $[\mathbb{H}]_p[\mathbb{C}_2]_q \subseteq A_1$.

По пункту в) заключаем, что

$$[e_{ij}]_p[m_k]_q = e_{ii}[e_{ij}]_p \cdot [m_k]_q = e_{ii}[m_k]_q \cdot [e_{ij}]_p + e_{ii}[[e_{ij}]_p, [m_k]_q] \in A_1.$$

□

Лемма 5.30. Если $S_1 = \Phi e_1$ и $P_{11}^2 \not\subseteq \mathfrak{A}$, то имеется неизотропный вектор $x \in P_{11}$, то есть $x^2 \notin \mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть для любого $x \in P_{11}$ выполнено $x^2 \in \mathfrak{A}$. Дальнейшие рассуждения представим в виде трех пунктов.

1. Для произвольных $x, y \in P_{11}$ из равенства

$$(x + y)^2 - x^2 - y^2 = x \circ y$$

следует, что $x \circ y \in \mathfrak{R}$.

2. Понятно, что существуют такие элементы $x, y \in P_{11}$, что $xy = e_1 + r_1$, тогда $yx = -e_1 + r_2$.

3. Из (1.2) следует, что

$$xy \cdot x - x \cdot yx = x^2y - x \cdot xy.$$

Считая, что $x^2 = r_3 \in \mathfrak{R}$, имеем равенство

$$(x + r_1x) - (-x + xr_2) = r_3y - (x + xr_1),$$

т.е. $x \in x * \mathfrak{R} + \mathfrak{R}y$.

Аналогично из $yx \cdot y - y \cdot xy = y^2x - y \cdot yx$ получаем,

$$(-y + r_2y) - (y + yr_1) = r_4x - (-y + yr_2),$$

т.е. $y \in \mathfrak{R}x + y * \mathfrak{R}$. Итерируя полученные включения, заключаем, что $x = 0$, — противоречие. $\square$

Лемма 5.31. Если $S_1 = \Phi e_1$, то $P_{11} * (P_{11} * \mathfrak{R}_{11}) \subseteq \mathfrak{R}$.

Доказательство. Так как $P_{11} * \mathfrak{R}_{11} \subseteq P_{11}$ по лемме 5.24, то при $P_{11}^2 \subseteq \mathfrak{R}$ все доказано. Поэтому можно считать, что $P_{11}^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$. Заметим, что по (5.9) $P_{11}^2 \subseteq S_1 + \sum_{i=1}^t \mathfrak{R}_{i1}$. Тогда по лемме 5.30 для некоторого элемента $x \in P_{11}$ выполнено

$$x^2 = e_1 + \sum_i r_{i1},$$

где $r_{i1} \in \mathfrak{R}_{i1}$.

Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности из семи пунктов.

1. Сначала докажем, что имеется разложение $P_{11} = \Phi x \oplus \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X} = x * \mathfrak{R}_{11}$.

Для любого $y \in P_{11}$ в силу правой альтернативности имеем

$$x^2y = xy \cdot x + x[x, y].$$

Умножим это равенство слева на e_1 и по лемме 5.24 получим

$$(e_1 + r_{11})y \in e_1 \cdot (\Phi e_1 + \sum_i \mathfrak{R}_{i1})x + x(\Phi e_1 + \sum_i \mathfrak{R}_{i1}) \subseteq \Phi x + \mathfrak{X}.$$

В силу невырожденности на P_{11} оператора $L_{e_1+r_{11}}$ (см. [3, леммы 2, 3]) получаем, что $P_{11} = \Phi x + \mathfrak{X}$.

Если $x \in \mathfrak{X} = x * \mathfrak{R}_{11}$, то в силу сильной альтернативности, итерируя, получим, что $x = 0$.

2. Далее, покажем, что $P_{11} * \mathfrak{R}_{11} = \mathfrak{X}$ и $A_1 * \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

Так как

$$P_{11} * \mathfrak{R}_{11} = (\Phi x + \mathfrak{X}) * \mathfrak{R}_{11} = \mathfrak{X} + \mathfrak{X} * \mathfrak{R}_{11},$$

$$A_1 * \mathfrak{X} = (\Phi e_1 + \mathfrak{R}_{11}) * \mathfrak{X} = \mathfrak{X} + \mathfrak{X} * \mathfrak{R}_{11},$$

то достаточно доказать, что $\mathfrak{X} * \mathfrak{R}_{11} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть $xT'_{r'_{11}}T''_{r''_{11}} \in \lambda x + x * \mathfrak{R}_{11}$, где $T_a \in \{R_a, L_a\}$, $r'_{11}, r''_{11} \in \mathfrak{R}_{11}$. Тогда

$$\lambda x \in x * \mathfrak{R}_{11} + (x * \mathfrak{R}_{11}) * \mathfrak{R}_{11}.$$

Отсюда для некоторого k получаем, что $\lambda^k x = 0$, значит, $\lambda = 0$.

3. Докажем, что $\mathfrak{X}^2 \subseteq \mathfrak{R}$.

Пусть $y, z \in \mathfrak{X}$ и $yz \equiv \lambda e_1 \pmod{\sum_i \mathfrak{R}_{i1}}$, тогда по п. 2 заключаем, что

$$\begin{aligned} \lambda x &= e_1 \cdot \lambda e_1 x = e_1(yz \cdot x) + e_1 \cdot \sum_i r'_{i1} x \equiv e_1(yz \cdot x) = \\ &= e_1(yx \cdot z + y[z, x]) = (e_1 \cdot yx)z + y \cdot e_1[z, x] \equiv 0 \pmod{\mathfrak{X}}, \end{aligned}$$

поскольку $e_1 \cdot y[z, x] = y[z, x] = y \cdot \sum_i e_i[z, x] = y \cdot e_1[z, x]$ по лемме 1.8. Тогда $\lambda = 0$ по п. 1.

4. Если $y \in \mathfrak{X}$, то $2xy \equiv yx \pmod{\mathfrak{R}}$.

Пусть $xy \equiv \lambda e_1 \pmod{\sum_i \mathfrak{R}_{i1}}$ и $yx \equiv \mu e_1 \pmod{\sum_i \mathfrak{R}_{i1}}$, тогда

$$\lambda x \equiv e_1(xy \cdot x) \equiv x \cdot e_1[y, x] \equiv (\mu - \lambda)x \pmod{\mathfrak{X}}.$$

Значит, $\mu = 2\lambda$ и получаем требуемое.

5. Докажем, что $x \cdot xt \equiv x \cdot tx \pmod{\mathfrak{R}}$ для $t \in \mathfrak{R}_{11}$.

По п. 4 имеем

$$0 \equiv x^2 \cdot t = -xt \cdot x + x \cdot xt + x \cdot tx \equiv x \cdot tx - x \cdot xt \pmod{\mathfrak{R}}.$$

6. Осталось доказать включение $P_{11} * \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{R}$.

По лемме 5.22 имеем $\mathfrak{R}x \cdot x \subseteq \mathfrak{R}$, тогда по пп. 3, 4 и 5 имеем $P_{11} * \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{R}$.

7. Так как $\mathfrak{X} = P_{11} * \mathfrak{R}_{11}$ по п. 2, то лемма доказана. □

Лемма 5.32. Верно включение $P_{11} * (P_{11} * \mathfrak{R}_{11}) \subseteq \mathfrak{R}$.

Доказательство. По лемме 5.31 достаточно рассмотреть случай $\dim S_1 > 1$. В этом случае по лемме 5.29 в B имеется подсупералгебра $A_1 + P_{11}$. Для таких супералгебр в параграфе 5.1 доказано, что в них либо $P_{11}^2 \subseteq \mathfrak{R}_{11}$, либо имеется градуированный идеал $\mathfrak{R}_{11} + P_{11} * \mathfrak{R}_{11}$, значит, $P_{11} * (P_{11} * \mathfrak{R}_{11}) \subseteq \mathfrak{R}_{11}$. $\square$

5.3.3. Свойства произведения $P_{12}P_{21}$

Лемма 5.33. *При $S_1 = \mathbb{C}$ бимодули V_{12} и V_{21} нулевые: $V_{12} = V_{21} = 0$.*

Доказательство. Пусть $x \in V_{12}$, $a, b, c \in S_1$, тогда по лемме 5.28 г) $(a, b, x) = (a, b, cx) = 0$, значит, по тождеству пяти ассоциаторов (1.4) получаем, что $(a, b, c)x = 0$. Теперь, если $a = ve_{22}$, $b = ve_{11}$ и $c = e_{12}$, то

$$(a, b, c) = e_{11}e_{11} \cdot e_{12} - ve_{22} \cdot v(e_{12}e_{11}) = e_{12}.$$

Отсюда следует, что $e_{12}x = 0$, следовательно, $e_{11}x = e_{12}e_{21}x = 0$. Аналогично $e_{22}x = 0$, а значит, $x = (e_{11} + e_{22})x = 0$. Этим доказано, что $V_{12} = 0$.

Аналогично доказывается, что $V_{21} = 0$. $\square$

Лемма 5.34. *Если $S_1 = M_n$ и $P_{12}P_{21} \not\subseteq \mathfrak{R}$, то найдутся такие элементы $x_{12}^{(i)} \in P_{12}$, $y_{21}^{(j)} \in P_{21}$, что выполнены свойства: $x_{12}^{(i)}y_{21}^{(j)} = e_{ij}$, $x_{12}^{(i)} = e_{ij}x_{12}^{(j)}$, $y_{21}^{(i)} = y_{21}^{(j)}e_{ji}$, $e_1 = \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)}y_{21}^{(i)}$.*

Доказательство. Пусть для некоторых $x_{12} \in P_{12}$ и $y_{21} \in P_{21}$ выполнено $x_{12}y_{21} \notin \mathfrak{R}$; тогда запишем разложение по лемме 5.26: $x_{12}y_{21} = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}e_{ij} + r$, где $e_{ij} \in S_1$, $r \in \mathfrak{R}_{11}$ и $\alpha_{pq} \neq 0$. Тогда в силу леммы 5.28 а) имеем для $e_{1p}, e_{q1} \in S_1$

$$(e_{1p}x_{12})(y_{21}e_{q1}) = (e_{1p} \cdot x_{12}y_{21})e_{q1} = \alpha_{pq}e_{11} + e_{1p}r \cdot e_{q1}.$$

По лемме 5.17 $r' = e_{1p}r \cdot e_{q1} \in \mathfrak{R}_{11}$. Значит, можно подобрать такие элементы $u_{12} \in P_{12}$ и $v_{21} \in P_{21}$, что

$$u_{12}v_{21} = e_{11} + r_1,$$

где $r_1 \in \mathfrak{R}_{11}$. Тогда, так как по лемме 5.24 $P_{12}\mathfrak{R}_{11} = \mathfrak{R}_{11}P_{21} = 0$, то по лемме 5.28 а)

$$u_{12} \cdot v_{21}r_1 = u_{12}v_{21} \cdot r_1 = e_{11}r_1 + r_1^2 = r_1 + r_1^2.$$

Таким образом, $u_{12}(v_{21} - v_{21}r_1) = e_{11} - r_1^2$. Рассуждая аналогично, можно подобрать такой $v'_{21} \in P_{21}$, что $u_{12}v'_{21} = e_{11} + (-1)^m r_1^{m'}$, где $m' = 2^m$, и, значит, ввиду нильпотентности элемента r_1 можно считать, что $x_{12}^{(1)}y_{21}^{(1)} = e_{11}$ для подходящих $x_{12}^{(1)}, y_{21}^{(1)}$.

Обозначая $x_{12}^{(i)} = e_{i1}x_{12}^{(1)}$, $y_{21}^{(i)} = y_{21}^{(1)}e_{1i}$, мы получаем, что $x_{12}^{(i)}y_{21}^{(j)} = e_{ij}$, а значит, $e_1 = \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)}y_{21}^{(i)}$. Кроме того, из леммы 5.28 г) следует, что $x_{12}^{(i)} = e_{ij}x_{12}^{(j)}$, $y_{21}^{(i)} = y_{21}^{(j)}e_{ji}$. $\square$

Лемма 5.35. Если $n = \dim_{\Phi} S_1 > 1$, то $\mathfrak{R}_{12}^2 = \mathfrak{R}_{12} * P_{12} = 0$ и $P_{12}^2 \subseteq \mathfrak{R}_{11}$. Если $n > 2$, то $P_{12}^2 = 0$.

Доказательство. По лемме 5.33 достаточно рассмотреть случай $S_1 = M_n$. Рассмотрим пирсово разложение левого модуля V_{12} по идемпотентам $e_{ii} \in S_1 = M_n$: $V_i = e_{ii}V_{12}$. Заметим, что по лемме 5.28 г) матричные единицы $e_{ij} \in S_1$ действуют на компоненты V_k ассоциативно, причем, справа нулевым образом. Тогда для $l \neq j$ и $f_i, g_i \in V_i$ имеем по правой альтернативности

$$f_i g_j \cdot e_{kl} = 0.$$

Если $f_i g_j$ — произведение элементов из $\mathfrak{R}_{12}$, то из (5.9) и (5.10) следует, что $f_i g_j \in e_2 \mathfrak{R} e_1 = \mathfrak{R}_{21}$.

Если в произведении $f_i g_j$ ровно один из сомножителей лежит в $\mathfrak{R}_{12}$, то по лемме 5.24 $f_i g_j \in P_{21}$. Поэтому по лемме 5.28 г) в этих двух случаях имеем

$$0 = (f_i g_j \cdot e_{kl}) e_{lk} = f_i g_j \cdot e_{kk}$$

для произвольного индекса k . Отсюда заключаем, что

$$f_i g_j = f_i g_j \cdot e_1 = f_i g_j \cdot \sum_{k=1}^n e_{kk} = 0.$$

Если $f_i g_j$ — произведение элементов из P_{12} , то по лемме 5.27 и (5.9)

$$f_i g_j \in (S_1 + \mathfrak{R})e_1 = S_1 + \sum_{p=1}^n \mathfrak{R}_{p1}.$$

Если $n > 2$, то бимодуль $S_1 + \mathfrak{R}$ ассоциативен над S_1 . И снова проходят предыдущие рассуждения. Если же $n = 2$, то достаточно провести эти же рассуждения по модулю $\mathfrak{R}_{11}$, поскольку бимодуль $S_1 + \sum_{p=2}^n \mathfrak{R}_{p1}$ ассоциативен над S_1 . $\square$

Лемма 5.36. Если $P_{12}^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$, то P_{12} неизотропно, т.е. $(\exists x \in P_{12}) x^2 \notin \mathfrak{R}$.

Доказательство. Если $P_{12}^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$, то по лемме 5.35 $\dim_{\Phi} S_1 = 1$ и $S_1 = \Phi e_1$.

Пусть $(\forall x \in P_{12}) x^2 \in \mathfrak{R}$, тогда $(\forall x, y \in P_{12}) x \circ y \in \mathfrak{R}$. Отсюда следует, что существуют такие элементы $x, y \in P_{12}$, что $xy = e_1 + r$, тогда $yx = -e_1 + r'$, где по лемме 5.26 $r, r' \in \mathfrak{R}_{11}$. Далее, правой альтернативности, учитывая, что $x(S_1 + \mathfrak{R}_{11}) = 0$, получаем $xy \cdot x = x^2 y$. Считая, что $x^2 = r''$, имеем $x + rx = r''y$, т.е. $x \in \mathfrak{R}x + \mathfrak{R}y$. Обозначим $L_{\mathfrak{R}} = \{L_a \mid a \in \mathfrak{R}\}$, тогда $x \in xL_{\mathfrak{R}} + yL_{\mathfrak{R}}$. После итераций получаем, что

$$\begin{aligned} x &\in xL_{\mathfrak{R}}^2 + yL_{\mathfrak{R}}^2 + yL_{\mathfrak{R}} \subseteq \cdots \subseteq \\ &\subseteq xL_{\mathfrak{R}}^N + yL_{\mathfrak{R}}^N + yL_{\mathfrak{R}}^{N-1} + \cdots + yL_{\mathfrak{R}}. \end{aligned}$$

Так как для некоторого N выполнено $L_{\mathfrak{R}}^N = 0$, то $x \in y(L_{\mathfrak{R}}^{N-1} + \dots + L_{\mathfrak{R}})$.

Так как в этих рассуждениях x и y симметричны, то имеется и соотношение $y \in x(L_{\mathfrak{R}}^{N-1} + \dots + L_{\mathfrak{R}})$. Подставляя это включение в предыдущее, получаем: $x \in x(L_{\mathfrak{R}}^{N-1} + \dots + L_{\mathfrak{R}}^2)$, откуда $x = 0$, — противоречие. $\square$

Лемма 5.37. *Если $P_{12}^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$, то найдется такой элемент u , что $u^2 \equiv e_1 \pmod{\mathfrak{R}}$ и $P_{12} \subseteq \Phi u \oplus \mathfrak{R}_{11}u$.*

Доказательство. Если $P_{12}^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$, то по лемме 5.35 $S_1 = \Phi e_1$.

Заметим вначале, что по (5.9) и (5.10) $P_{12}^2 \subseteq \Phi e_1 + \sum_{k=1}^t \mathfrak{R}_{k1}$. Теперь докажем, что

$$(e_1, P_{12}^2, P_{12}) = 0. \quad (5.11)$$

По лемме 5.28 $(A_1, A_1, P_{12}) = 0$. Осталось доказать, что

$$(e_1, \mathfrak{R}_{k1}, P_{12}) = 0. \quad (5.12)$$

В самом деле,

$$(e_1, r_{k1}, x_{12}) = -(r_{k1}, e_1, x_{12}) = -r_{k1}e_1 \cdot x_{12} + r_{k1} \cdot e_1 x_{12} = 0.$$

Теперь, используя полученные результаты, приступим к доказательству леммы. Если $P_{12}^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$, то по лемме 5.36, так как поле Φ алгебраически замкнуто, найдется такой элемент $u \in P_{12}$, что $u^2 = e_1 + r$. По доказанному $r = \sum_{k=1}^t r_{k1} \in \sum_{k=1}^t \mathfrak{R}_{k1}$. Для произвольного элемента $x \in P_{12}$ получаем

$$x = u^2 x - r x = u x \cdot u + u[u, x] - r x.$$

Сразу отметим, что $u[u, x] = u(\lambda' e_1 + \sum_{k=1}^t r'_{k1}) = u r'_{21} \in P_{11}$.

Далее, по (5.11) и (5.12)

$$x = e_1 x = (e_1 \cdot u x) u + u r'_{21} - e_1 r \cdot x = (e_1 \cdot u x) u + u r'_{21} - r_{11} \cdot x.$$

Теперь, если $u x = \lambda e_1 + \sum_{k=1}^t r''_{k1}$, то

$$x = \lambda u + r''_{11} u + u r'_{21} - r_{11} \cdot x.$$

В этом равенстве все слагаемые, кроме $u r'_{21} \in P_{11}$, лежат в P_{12} , поэтому

$$x = \lambda u + r''_{11} u - r_{11} \cdot x \in \Phi u + \mathfrak{R}_{11} u + \mathfrak{R}_{11} x.$$

Итерируя последнее равенство по x и пользуясь леммой 5.28 г), получаем, что $x \in \Phi u + \mathfrak{R}_{11} u$.

Наконец, если $u \in \mathfrak{R}_{11} u$, то $u = 0$, что невозможно. $\square$

Лемма 5.38. *Выполнено условие $u\mathfrak{R}_{22} \subseteq \mathfrak{R}_{11}u$.*

Доказательство. Так как $u\mathfrak{R}_{22} \subseteq P_{12}$, то по лемме 5.37 $ur_{22} = \lambda u + r_{11}u$. Если $\lambda \neq 0$, то $u \in uT_{\mathfrak{R}}$. После итераций получаем, что $u = 0$. Таким образом $\lambda = 0$ и $ur_{22} = r_{11}u$. $\square$

Лемма 5.39. *Если $P_{12}P_{21} \not\subseteq \mathfrak{R}$, то $P_{11} \subseteq \mathfrak{R}M$ и $P_{11}M \subseteq \mathfrak{R}$.*

Доказательство. Используя представление e_1 из леммы 5.34, на основании лемм 5.28 в), 5.25 и 5.27 получаем, что

$$x_{11} = x_{11} \cdot \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} y_{21}^{(i)} \equiv \sum_{i=1}^n x_{11} x_{12}^{(i)} \cdot y_{21}^{(i)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{R}M}.$$

Откуда ввиду леммы 5.22 имеем $x_{11}y \in \mathfrak{R}M \cdot M \subseteq \mathfrak{R}$, т.е. $P_{11}M \subseteq \mathfrak{R}$. $\square$

Лемма 5.40. *Выполнено соотношение $x_{12}^{(i)}\mathfrak{R}_{22} \cdot y_{21}^{(j)} \subseteq \mathfrak{R}_{11}$.*

Доказательство. По лемме 5.24 $x_{12}^{(i)}r_{22} \in P_{12}$, поэтому в силу леммы 5.26 обозначим $x_{12}^{(i)}r_{22} \cdot y_{21}^{(j)} = a_1 + r$, где $a_1 \in S_1$, $r \in \mathfrak{R}_{11}$. Тогда по леммам 5.34 и 5.28 а), г)

$$\begin{aligned} a_1 + r &= x_{12}^{(i)}r_{22} \cdot y_{21}^{(j)} = (e_{ii}x_{12}^{(i)} \cdot r_{22})(y_{21}^{(j)}e_{jj}) = \\ &= (e_{ii}x_{12}^{(i)} \cdot r_{22})y_{21}^{(j)} \cdot e_{jj} = (e_{ii} \cdot x_{12}^{(i)}r_{22})y_{21}^{(j)} \cdot e_{jj} = \\ &= e_{ii}(x_{12}^{(i)}r_{22} \cdot y_{21}^{(j)}) \cdot e_{jj} = e_{ii}a_1e_{jj} + e_{ii}r \cdot e_{jj}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $a_1 = e_{ii}a_1e_{jj}$, а значит, $a_1 = \lambda e_{ij}$.

Докажем, что $\lambda = 0$. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда, во-первых, имеем

$$(x_{12}^{(i)}r_{22} \cdot y_{21}^{(j)})x_{12}^{(j)} = (\lambda e_{ij} + r)x_{12}^{(j)} = \lambda x_{12}^{(i)} + rx_{12}^{(j)} = \lambda x_{12}^{(i)} + r \cdot e_{ji}x_{12}^{(i)},$$

т.е. по лемме 5.28 г)

$$(\exists r \in \mathfrak{R}_{11}) (x_{12}^{(i)}r_{22} \cdot y_{21}^{(j)})x_{12}^{(j)} = \lambda x_{12}^{(i)} + rx_{12}^{(i)}. \quad (5.13)$$

С другой стороны, по правой альтернативности

$$\begin{aligned} (x_{12}^{(i)}r_{22} \cdot y_{21}^{(j)})x_{12}^{(j)} &= (x_{12}^{(i)}r_{22} \cdot x_{12}^{(j)})y_{21}^{(j)} + x_{12}^{(i)}r_{22} \cdot [y_{21}^{(j)}, x_{12}^{(j)}] \in \\ &\in (S_1 + \mathfrak{R})y_{21}^{(j)} + x_{12}^{(i)}r_{22} \cdot (A_1 + A_2) \subseteq \\ &\subseteq \mathfrak{R}M + x_{12}^{(i)}r_{22} \cdot A_2 \subseteq \mathfrak{R}M + x_{12}^{(i)}\mathfrak{R}_{22}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из (5.13) и (5.14) получаем, что $x_{12}^{(i)} \equiv x_{12}^{(i)}r'_{22} \pmod{\mathfrak{R}M}$. Итерируя, получаем, что $x_{12}^{(i)} \in \mathfrak{R}M$, а отсюда следует, что $x_{12}^{(i)}r_{22} \cdot y_{21}^{(j)} \in \mathfrak{R}$. $\square$

Лемма 5.41. *Выполнено равенство $P_{12} \circ \mathfrak{R}_{12} = 0$.*

Доказательство. Так как $x_{12} \circ r_{12} \in P_{21}$ по лемме 5.24, то по правой альтернативности $x_{12} \circ r_{12} = e_2(x_{12} \circ r_{12}) = e_2x_{12} \cdot r_{12} + e_2r_{12} \cdot x_{12} = 0$. $\square$

Лемма 5.42. *Выполнено включение $P_{12} \cdot \mathfrak{R}_{12}P_{12} \subseteq \mathfrak{R}_{11}$.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $x_{12} \cdot r_{12}y_{12} \in P_{12} \cdot \mathfrak{R}_{12}P_{12}$. Если $r_{12}y_{12} = 0$, то все доказано, поэтому можно считать, что $r_{12}y_{12} \neq 0$. В этом случае по лемме 5.35 $S_1 = \Phi e_1$. Предположим, что $x_{12} \cdot r_{12}y_{12} \notin \mathfrak{R}$, тогда можно считать, что $x_{12} \cdot r_{12}y_{12} \equiv e_1 \pmod{\mathfrak{R}}$. Отсюда получаем

$$x_{12} \equiv (x_{12} \cdot r_{12}y_{12})x_{12} \equiv x_{12}^2 \cdot r_{12}y_{12} + x_{12}(r_{12}y_{12} \cdot x_{12}) - x_{12}(x_{12} \cdot r_{12}y_{12}) \pmod{\mathfrak{R}M}.$$

Если обозначить $x_{12}^2 = \lambda e_1 + r$, то по лемме 5.24

$$x_{12}^2 \cdot r_{12}y_{12} = r \cdot r_{12}y_{12} \in \mathfrak{R}M.$$

Произведение $r_{12}y_{12} \cdot x_{12} \in \mathfrak{R}$ по лемме 5.22, поэтому по лемме 5.26 $x_{12}(r_{12}y_{12} \cdot x_{12}) \in x_{12}\mathfrak{R}_{22}$.

Далее, $x_{12} \cdot r_{12}y_{12} \in A_1 = S_1 + \mathfrak{R}_{11}$, поэтому $x_{12}(x_{12} \cdot r_{12}y_{12}) = 0$.

Отсюда следует, что $x_{12} \equiv x_{12}r_{22} \pmod{\mathfrak{R}M}$. Замечая, что $\mathfrak{R}M \cdot \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}M$, итерируем последнее сравнение и получаем, что $x_{12} \in \mathfrak{R}M$, что противоречит предположению $x_{12} \cdot r_{12}y_{12} \notin \mathfrak{R}$. Что и требовалось. $\square$

Лемма 5.43. *Верно включение $\mathfrak{P}_{12}P_{21} + P_{12}\mathfrak{P}_{21} \subseteq \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{P}_{ij} = (M * \mathfrak{R}) \cap P_{ij}$.*

Доказательство. Если $P_{12}P_{21} \subseteq \mathfrak{R}$, то доказывать нечего, поэтому будем считать, что $P_{12}P_{21} \not\subseteq \mathfrak{R}$. Тогда по лемме 5.34: $e_1 = \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)}y_{21}^{(i)}$.

Дальнейшие рассуждения удобно разбить на ряд пунктов.

1°. Докажем, что $P_{12} \subseteq \sum_{i=1}^n \mathfrak{R}_{21}y_{21}^{(i)} + \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)}A_2$. В самом деле,

$$\begin{aligned} z_{12} = e_1 z_{12} &= \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)}y_{21}^{(i)} \cdot z_{12} = \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)}z_{12} \cdot y_{21}^{(i)} + \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)}[y_{21}^{(i)}, z_{12}] \in \\ &\in \sum_{i=1}^n A e_1 \cdot y_{21}^{(i)} + \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)}(A_1 + A_2) \subseteq \\ &\subseteq \sum_{i=1}^n \left(S_1 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{R}_{k1} \right) \cdot y_{21}^{(i)} + \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)}A_2 \subseteq \sum_{i=1}^n \mathfrak{R}_{21}y_{21}^{(i)} + \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)}A_2. \end{aligned}$$

2°. Докажем далее, что $P_{21} \subseteq \sum_{i=1}^n A_2y_{21}^{(i)} + \sum_{i=1}^n \mathfrak{R}_{12}x_{12}^{(i)}$:

$$\begin{aligned} z_{21} = z_{21}e_1 &= z_{21} \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)}y_{21}^{(i)} = z_{21} \sum_{i=1}^n [x_{12}^{(i)}, y_{21}^{(i)}] = \\ &= \sum_{i=1}^n z_{21}x_{12}^{(i)} \cdot y_{21}^{(i)} - \sum_{i=1}^n z_{21}y_{21}^{(i)} \cdot x_{12}^{(i)} \in \sum_{i=1}^n A_2y_{21}^{(i)} + \sum_{i=1}^n \mathfrak{R}_{12}x_{12}^{(i)}. \end{aligned}$$

3°. Докажем, что $P_{13} \subseteq \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} \mathfrak{R}_{23}$. В самом деле, в силу леммы 5.23 $P_{12}P_{13} = P_{13}P_{21} = 0$, кроме того, по правой альтернативности $P_{21}P_{13} = P_{21}P_{13} \cdot e_3 \subseteq Ae_3$, поэтому

$$\begin{aligned} x_{13} &= e_1 x_{13} = \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} y_{21}^{(i)} \cdot x_{13} = \sum_{i=1}^n (x_{12}^{(i)} x_{13} \cdot y_{21}^{(i)} + x_{12}^{(i)} [y_{21}^{(i)}, x_{13}]) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} \cdot y_{21}^{(i)} x_{13} \in \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} \cdot Ae_3 \subseteq \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} \left(S_3 + \sum_{k=1}^n \mathfrak{R}_{k3} \right) = \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} \mathfrak{R}_{23}. \end{aligned}$$

4°. Далее докажем, что если $x_{12} \in \mathfrak{P}_{12}$, то $x_{12}y_{21} \in \mathfrak{R}$. Заметим, что в этом случае по лемме 5.24 $x_{12} \in \sum_{i=1}^n (P_{1i}\mathfrak{R}_{i2} + \mathfrak{R}_{1i}P_{i2}) + P_{21} * \mathfrak{R}_{21}$. Значит, достаточно понять, что $x_{12}y_{21} \in \mathfrak{R}$, если $x_{12} \in P_{11}\mathfrak{R}_{12} \cup P_{12}\mathfrak{R}_{22} \cup P_{13}\mathfrak{R}_{32} \cup P_{21}\mathfrak{R}_{21} \cup \mathfrak{R}_{11}P_{12} \cup \mathfrak{R}_{12}P_{22} \cup \mathfrak{R}_{13}P_{32} \cup \mathfrak{R}_{21}P_{21}$.

i. Из леммы 5.22 следует, что $(\mathfrak{R}_{11}P_{12} \cup \mathfrak{R}_{12}P_{22} \cup \mathfrak{R}_{13}P_{32} \cup \mathfrak{R}_{21}P_{21})P_{21} \subseteq \mathfrak{R}$, поэтому осталось рассмотреть случаи

$$x_{12} \in P_{11}\mathfrak{R}_{12} \cup P_{12}\mathfrak{R}_{22} \cup P_{13}\mathfrak{R}_{32} \cup P_{21}\mathfrak{R}_{21}.$$

ii. Если $x_{12} \in P_{11}\mathfrak{R}_{12}$, то обозначим $x_{12} := x_{11}r_{12}$; тогда по лемме 5.39

$$x_{12}y_{21} = x_{11}r_{12} \cdot y_{21} = -x_{11}y_{21} \cdot r_{12} + x_{11}(r_{12} \circ y_{21}) \in \mathfrak{R}.$$

iii. Если $x_{12} \in P_{12}\mathfrak{R}_{22}$, то обозначим $x_{12} := z_{12}r_{22}$; тогда по пунктам 1° и 2° обозначим

$$z_{12} = u + u' = \sum_{i=1}^n r_i y_{21}^{(i)} + \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} a_i, \quad y_{21} = v + v' = \sum_{i=1}^n b_i y_{21}^{(i)} + \sum_{i=1}^n r'_i x_{12}^{(i)},$$

где $a_i, b_i \in A_2$, $r_i \in \mathfrak{R}_{21}$, $r'_i \in \mathfrak{R}_{12}$. Заметим, что $u, u' \in P_{12}$, $v, v' \in P_{21}$. Тогда

$$x_{12}y_{21} = z_{12}r_{22} \cdot y_{21} = (ur_{22} + u'r_{22})(v + v') = ur_{22} \cdot (v + v') + u'r_{22} \cdot v + u'r_{22} \cdot v'.$$

Разберем последовательно все слагаемые. По леммам 5.22 и 5.28 б) первое слагаемое лежит в $\mathfrak{R}$:

$$ur_{22} \cdot (v + v') = u \cdot r_{22}(v + v') = \sum_{i=1}^n r_i y_{21}^{(i)} \cdot r_{22} y_{21} \in \mathfrak{R}.$$

Далее, из лемм 5.28 б), г) и 5.40 для второго слагаемого получаем, что

$$\begin{aligned} u'r_{22} \cdot v &= \left(\sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} a_i \right) r_{22} \cdot \sum_{i=1}^n b_i y_{21}^{(i)} = \left(\sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} a_i \cdot r_{22} \right) \cdot \sum_{i=1}^n b_i y_{21}^{(i)} = \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} r_{22}^{(i)} \cdot \sum_{j=1}^n b_i y_{21}^{(j)} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_{12}^{(i)} r_{22}^{(i)} \cdot b_j y_{21}^{(j)} = \sum_{i,j=1}^n x_{12}^{(i)} (r_{22}^{(i)} \cdot b_j y_{21}^{(j)}) = \sum_{i,j=1}^n x_{12}^{(i)} \cdot r_{22}^{(i,j)} y_{21}^{(j)} = \sum_{i,j=1}^n x_{12}^{(i)} r_{22}^{(i,j)} \cdot y_{21}^{(j)} \in \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Для дальнейших вычислений заметим, что $\mathfrak{R}_{22} \cdot \mathfrak{R}_{12}P_{12} = -\mathfrak{R}_{12} \cdot \mathfrak{R}_{22}P_{12} + (\mathfrak{R}_{22} \circ \mathfrak{R}_{12})P_{12} = \mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{22} \cdot P_{12}$. Используя это наблюдение, рассмотрим третье слагаемое по леммам 5.40, 5.24

и 5.42

$$\begin{aligned}
u'r_{22} \cdot v' &= \left(\sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} a_i \right) r_{22} \cdot \sum_{i=1}^n r'_i x_{12}^{(i)} = \sum_{i,j=1}^n x_{12}^{(i)} r_{22}^{(i)} \cdot r'_j x_{12}^{(j)} = \\
&= \sum_{i,j=1}^n x_{12}^{(i)} (r_{22}^{(i)} \cdot r'_j x_{12}^{(j)}) = \sum_{i,j=1}^n x_{12}^{(i)} (r'_j r_{22}^{(i)} \cdot x_{12}^{(j)}) = \sum_{i,j=1}^n x_{12}^{(i)} \cdot r_{12}^{(i,j)} x_{12}^{(j)} \in \mathfrak{R}.
\end{aligned}$$

iv. Если $x_{12} \in P_{13}\mathfrak{R}_{32}$, то обозначим $x_{12} := z_{13}r_{32}$; тогда по пунктам 3° и 4° iii

$$x_{12}y_{21} = z_{13}r_{32} \cdot y_{21} = \left(\sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} r_{23}^{(i)} \cdot r_{32} \right) y_{21} = \sum_{i=1}^n x_{12}^{(i)} (r_{22}^{(i)} + r_{33}^{(i)}) \cdot y_{21} \in \mathfrak{R}.$$

v. Если $x_{12} \in P_{21}\mathfrak{R}_{21}$, то по лемме 5.41 $x_{12} \in \mathfrak{R}_{21}P_{21}$, и этот случай следует из случая i.

5°. Продолжим рассуждения предыдущего пункта теперь в случае $y_{21} \in \mathfrak{P}_{21}$. Без ограничения общности, можно считать, что $y_{21} \in P_{21}\mathfrak{R}_{11} \cup P_{22}\mathfrak{R}_{21} \cup P_{23}\mathfrak{R}_{31} \cup P_{12}\mathfrak{R}_{12} \cup \mathfrak{R}_{21}P_{11} \cup \mathfrak{R}_{22}P_{21} \cup \mathfrak{R}_{23}P_{31} \cup \mathfrak{R}_{12}P_{12}$.

i. Если $y_{21} \in P_{21}\mathfrak{R}_{11}$, то обозначим $y_{21} = z_{21}r_{11}$; тогда,

$$x_{12}y_{21} = x_{12} \cdot z_{21}r_{11} = x_{12}(z_{21} \circ r_{11}) = x_{12}z_{21} \cdot r_{11} + x_{12}r_{11} \cdot z_{21} \in \mathfrak{R}.$$

ii. Если $y_{21} \in P_{22}\mathfrak{R}_{21}$, то обозначим $y_{21} = y_{22}r_{21}$

$$x_{12}y_{21} = x_{12} \cdot y_{22}r_{21} = x_{12}(y_{22} \circ r_{21}) = x_{12}y_{22} \cdot r_{21} + x_{12}r_{21} \cdot y_{22} \in \mathfrak{R}.$$

iii. Если $y_{21} \in P_{23}\mathfrak{R}_{31}$, то обозначим $y_{21} = y_{23}r_{31}$; тогда

$$x_{12}y_{21} = x_{12} \cdot y_{23}r_{31} = x_{12}(y_{23} \circ r_{31}) = x_{12}y_{23} \cdot r_{31} + x_{12}r_{31} \cdot y_{23} \in \mathfrak{R}$$

iv. Если $y_{21} \in P_{12}\mathfrak{R}_{12} = \mathfrak{R}_{12}P_{12}$, то по лемме 5.42 $x_{12}y_{21} \in \mathfrak{R}$.

v. Если $y_{21} \in \mathfrak{R}_{21}P_{11}$, то обозначим $y_{21} = r_{21}y_{11}$; тогда, так как $x_{12}r_{21} \in P_{11}$, по лемме 5.39

$$x_{12}y_{21} = x_{12} \cdot r_{21}y_{11} = x_{12}(r_{21} \circ y_{11}) = x_{12}r_{21} \cdot y_{11} + x_{12}y_{11} \cdot r_{21} \in \mathfrak{R}.$$

vi. Если $y_{21} \in \mathfrak{R}_{22}P_{21}$, то обозначим $y_{21} = r_{22}z_{21}$; тогда по лемме 5.28 и п. 4° iii

$$x_{12}y_{21} = x_{12} \cdot r_{22}z_{21} = x_{12}r_{22} \cdot z_{21} \in \mathfrak{R}.$$

vii. Если $y_{21} \in \mathfrak{R}_{23}P_{31}$, то обозначим $y_{21} = r_{23}z_{31}$; тогда по п. 4° iv

$$x_{12}y_{21} = x_{12} \cdot r_{23}z_{31} = x_{12}(r_{23} \circ z_{31}) = x_{12}r_{23} \cdot z_{31} + x_{12}z_{31} \cdot r_{23} \in \mathfrak{R}. \quad \square$$

Лемма 5.44. Верно включение $\mathfrak{P}_{11} * P_{11} \subseteq \mathfrak{R}$.

Доказательство. Если $P_{11}^2 \subseteq \mathfrak{R}$, то доказывать нечего, поэтому мы предполагаем, что $P_{11}^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$. Так как $\mathfrak{P}_{11} = \sum_{i=1}^{n_1} (\mathfrak{R}_{1i}P_{i1} + P_{1i}\mathfrak{R}_{i1})$, то по лемме 5.32 получаем, что $(P_{11} * \mathfrak{R}_{11}) * P_{11} \subseteq \mathfrak{R}$. Таким образом, осталось рассмотреть случаи $\mathfrak{R}_{12}P_{21} \cup P_{12}\mathfrak{R}_{21}$ для элементов из $\mathfrak{P}_{11}$.

Переберем все 4 возможных варианта; во 2-ом и 3-ем вариантах воспользуемся леммой 5.43:

$$\begin{aligned} r_{12}x_{21} \cdot x_{11} &= r_{12}x_{11} \cdot x_{21} + r_{12}[x_{21}, x_{11}] \in \mathfrak{R}, \\ x_{11} \cdot r_{12}x_{21} &= -x_{11} \cdot x_{21}r_{12} + x_{11}r_{12} \cdot x_{21} + x_{11}x_{21} \cdot r_{12} = x_{11}r_{12} \cdot x_{21} \in \mathfrak{R}, \\ x_{12}r_{21} \cdot x_{11} &= -x_{12}x_{11} \cdot r_{21} + x_{12}(r_{21} \circ x_{11}) = x_{12} \cdot r_{21}x_{11} \in \mathfrak{R}, \\ x_{11} \cdot x_{12}r_{21} &= -x_{11} \cdot r_{21}x_{12} + x_{11}x_{12} \cdot r_{21} + x_{11}r_{21} \cdot x_{12} = x_{11}x_{12} \cdot r_{21} \in \mathfrak{R}. \quad \square \end{aligned}$$

5.3.4. Свойства произведения P_{12}^2

Лемма 5.45. *Верно включение $\mathfrak{P}_{12} * P_{12} \subseteq \mathfrak{R}$.*

Доказательство. Если $S_1 \neq \Phi e_1$, то по лемме 5.35 лемма выполнена. Поэтому будем считать, что $S_1 = \Phi e_1$. Если $P_{12}^2 \subseteq \mathfrak{R}$, то и $\mathfrak{P}_{12} * P_{12} \subseteq \mathfrak{R}$, поэтому будем считать, что $P_{12}^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$. В этом случае по лемме 5.37 найдется такой элемент u , что $u^2 \equiv e_1 \pmod{\mathfrak{R}}$ и $P_{12} \subseteq \Phi u \oplus \mathfrak{R}_{11}u$.

Заметим, что $\mathfrak{P}_{12} = \sum_{i=1}^t (\mathfrak{R}_{1i}P_{i2} + P_{1i}\mathfrak{R}_{i2}) + \mathfrak{R}_{21} * P_{21}$, и разобьем дальнейшее доказательство по этапам в соответствии с этим разложением. Заметим, что по лемме 5.22 справедливо включение $\mathfrak{R}M \cdot M \subseteq \mathfrak{R}$.

- 1°. Пусть $x_{12} = r_{11}z_{12}$; тогда $y_{12}x_{12} = y_{12} \cdot r_{11}z_{12} = y_{12}(r_{11} \circ z_{12}) = y_{12}r_{11} \cdot z_{12} + y_{12}z_{12} \cdot r_{11} \in \mathfrak{R}$.
- 2°. Пусть $x_{12} = r_{12}z_{22}$; тогда $y_{12}x_{12} = y_{12} \cdot r_{12}z_{22} = y_{12}(r_{12} \circ z_{22}) = y_{12}r_{12} \cdot z_{22} + y_{12}z_{22} \cdot r_{12} \in \mathfrak{R}$.
- 3°. Пусть $x_{12} = r_{13}z_{32}$; тогда $y_{12}x_{12} = y_{12} \cdot r_{13}z_{32} = y_{12}(r_{13} \circ z_{32}) = y_{12}r_{13} \cdot z_{32} + y_{12}z_{32} \cdot r_{13} \in \mathfrak{R}$.
- 4°. Пусть $x_{12} = z_{11}r_{12}$; тогда $x_{12}y_{12} = z_{11}r_{12} \cdot y_{12} = -z_{11}y_{12} \cdot r_{12} + z_{11}(r_{12} \circ y_{12}) \in \mathfrak{R}$ и $y_{12}x_{12} = y_{12} \cdot z_{11}r_{12} = y_{12}(z_{11} \circ r_{12}) = y_{12}z_{11} \cdot r_{12} + y_{12}r_{12} \cdot z_{11} \in \mathfrak{R}$.

5°. Пусть $x_{12} = z_{12}r_{22}$. Тогда по лемме 5.38 $u\mathfrak{R}_{22} \subseteq \mathfrak{R}_{11}u$, кроме того, $\mathfrak{R}_{11}u \cdot \mathfrak{R}_{22} \subseteq \mathfrak{R}_{11} \cdot u\mathfrak{R}_{22}$ по лемме 5.28. Поэтому $x_{12} = r_{11}z'_{12}$ и этот случай полностью сводится к случаю 1°.

6°. Пусть $x_{12} = z_{13}r_{32}$, тогда $x_{12}y_{12} = z_{13}r_{32} \cdot y_{12} = -z_{13}y_{12} \cdot r_{32} + z_{13}(r_{32} \circ y_{12}) \in \mathfrak{R}$ и $y_{12}x_{12} = y_{12} \cdot z_{13}r_{32} = y_{12}(z_{13} \circ r_{32}) = y_{12}z_{13} \cdot r_{32} + y_{12}r_{32} \cdot z_{13} \in \mathfrak{R}$.

7°. Пусть $x_{12} = -z_{21}r_{21} = r_{21}z_{21} \in \mathfrak{R}M$. Докажем, что и в этом случае произведение $y_{12}x_{12}$ лежит в $\mathfrak{R}$. По леммам 5.37 и 5.22 достаточно проверить случай $y_{12} = u$, тогда если $ux_{12} \equiv \lambda e_1 \pmod{\mathfrak{R}}$, то $\lambda u \equiv ux_{12} \cdot u = u^2x_{12} + u[x_{12}, u] \pmod{\mathfrak{R}M}$. Далее, так как $x_{12} \in \mathfrak{R}M$, то $u^2x_{12} \in \mathfrak{R}M$, кроме того, $[x_{12}, u] \in \Phi e_1 + \mathfrak{R}_{11}$, поэтому $u[x_{12}, u] = 0$. Таким образом, $\lambda = 0$. □

5.3.5. Завершение доказательства основной теоремы

Пусть $I = \mathfrak{R} + M * \mathfrak{R}$. Понятно, что $I * A \subseteq I$. Рассмотрим произведение $I * M$. Имеем:

$$I * M = (\mathfrak{R} + M * \mathfrak{R}) * M = \mathfrak{R} * M + (M * \mathfrak{R}) * M.$$

Докажем, что $(M * \mathfrak{R}) * M \subseteq \mathfrak{R}$. В самом деле, если $\mathfrak{P}_{ij} = (M * \mathfrak{R}) \cap P_{ij}$, то

$$(M * \mathfrak{R}) * M \subseteq \mathfrak{R} + \sum_{i=1}^t \mathfrak{P}_{ii} * P_{ii} + \sum_{i,j=1}^t \mathfrak{P}_{ij} * P_{ij} + \sum_{i,j=1}^t \mathfrak{P}_{ij} * P_{ji}.$$

Применяя к отдельным слагаемым леммы 5.44, 5.43 и 5.45, получаем, что все они лежат в $\mathfrak{R}$.

Следовательно, если $\mathfrak{R} \neq 0$, то I — собственный идеал супералгебры $B = A + M$, — противоречие. Теорема 5.3 доказана.

Глава 6

Правоальтернативные бимодули над простыми алгебрами

В этой главе изучаются унитарные правоальтернативные бимодули над простыми алгебрами (основное поле предполагается алгебраически замкнутым). Доказано, что всякий такой бимодуль над алгеброй Кэли—Диксона является прямой суммой регулярных бимодулей, в частности, он альтернативен. Для бимодулей над алгебрами матриц $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$, получены аналоги результатов Л.И. Мураками и И.П. Шестакова о структуре бимодулей над алгеброй $M_2(\Phi)$. Кроме того, построены примеры неприводимых неассоциативных бимодулей минимальной размерности над алгеброй $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$.

6.1. Бимодули над алгеброй Кэли—Диксона

6.1.1. Неприводимые йордановы бимодули над C^+ .

В этом пункте перечислим все неприводимые йордановы бимодули над C^+ . Рассмотрим в качестве $V = C_0 = \{v \in C \mid \text{tr } v = v + \bar{v} = 0\}$ — пространство бесследных элементов алгебры Кэли—Диксона $C = C(\Phi)$. На этом пространстве определены формы $f_0(x, y) = x\bar{y} + y\bar{x}$ и $f = -\frac{1}{2}f_0$. Обе эти формы невырождены. Если основное поле алгебраически замкнуто, то они эквивалентны. Пусть $C = H + wH$, где $H = M_2(\Phi)$. Напомним, что на алгебре C определена инволюция: $\overline{a + wb} = \bar{a} - wb$, в частности, $\bar{w} = -w$. Кроме того, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} w^2 &= 1, & aw &= w\bar{a}, \\ a \cdot wb &= w \cdot \bar{a}b, & wa \cdot b &= w \cdot ba, \\ wa \cdot wb &= b\bar{a}. \end{aligned}$$

Сохраняя принятые ранее обозначения $u_1 = e_{11} - e_{22}$, $u_2 = e_{12}$, $u_3 = e_{21}$, положим

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1, & v_2 &= u_2 + u_3, & v_3 &= u_2 - u_3, & v_4 &= w, \\ v_5 &= wv_1, & v_6 &= wv_2, & v_7 &= wv_3. \end{aligned}$$

Замечание. Заметим, что пространство wH является прямой суммой четырех 1-мерных йордановых бимодулей над алгеброй H^+ . В самом деле, если $a, b \in H_0$, то

$$\begin{aligned} w \circ a &= wa + aw = wa + w\bar{a} = \text{tr } a \cdot w, \\ (wa) \circ b &= (wa)b + b(wa) = \text{tr } b \cdot wa. \end{aligned}$$

Можно показать, что не существует альтернативных бимодулей M над матричной алгеброй H , для которых бимодуль M^+ содержит 3-мерный йорданов бимодуль типа N .

Лемма 6.1. *Справедливы следующие равенства:*

$$\text{а) } f_0(w, H) = 0; \quad \text{б) } f_0(wa, wb) = -f_0(a, b), \text{ где } a, b \in H.$$

Доказательство. Пункт а) следует из процесса Кэли—Диксона.

б) Заметим сначала, что $\overline{wa} = -wa$. Тогда имеем: $f_0(wa, wb) = wa \cdot \overline{wb} + wb \cdot \overline{wa} = -(wa \cdot wb + wb \cdot wa) = -(b\overline{a} + a\overline{b}) = -f_0(a, b)$. $\square$

Из этой леммы вытекают соотношения:

1. векторы $v_1, v_2, \dots, v_7$ попарно ортогональны относительно формы f ;
2. если $\beta_i = f(v_i, v_i)$, то $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_7 = 1$, $\beta_3 = \beta_5 = \beta_6 = -1$;
3. если $\pi = v_1 v_2 \dots v_7$, то $\pi \in Z(Cl(V))$ и $\pi^2 = (-1)^3 v_1^2 v_2^2 \dots v_7^2 = 1$.

Согласно теореме о структуре неприводимых бимодулей йордановой алгебры C^+ симметрической билинейной формы на 7-мерном пространстве бесследных элементов существуют следующие 6 типов таких бимодулей: W_s ($k = 0, 1, 2, 3$), W_4^+ , W_4^- , которые рассматриваются в алгебре Клиффорда $Cl(V')$, где $V' = V \oplus \Phi v_0$:

$$\begin{aligned} W_0 &= \Phi v_0, & W_1 &= C^+, \\ W_2 &= \text{span}(v_0 v_i, v_0 v_i v_j \mid 1 \leq i < j \leq 7), \\ W_3 &= \text{span}(v_i v_j, v_i v_j v_k \mid 1 \leq i < j < k \leq 7), \\ W_4 &= \text{span}(v_0 v_i v_j v_k, v_0 v_i v_j v_k v_l \mid 1 \leq i < j < k < l \leq 7), \\ W_4^+ &= W_4(1 + \pi), & W_4^- &= W_4(1 - \pi), \quad \pi = v_1 v_2 \dots v_7. \end{aligned}$$

6.1.2. Подбимодули типа N'

Лемма 6.2. *Каждый из йордановых бимодулей W_2 , W_3 , W_4^+ , W_4^- над C^+ содержит подбимодуль типа N' над алгеброй M_2^+ .*

Доказательство. В каждом из бимодулей W_2 , W_3 , W_4^+ , W_4^- выберем векторы e_i ($i = 1, 2, 3$) следующим образом:

- а) W_2 : $e_i = v_0 v_i$;
- б) W_3 : $e_i = v_i v_4$;
- в) W_4^+ : $e_i = v_0 v_i v_4 v_5 (1 + \pi)$;
- г) W_4^- : $e_i = v_0 v_i v_4 v_5 (1 - \pi)$.

В качестве бимодуля над M_2^+ рассмотрим пространство $U = \text{span}(n_i := e_i(1 - \sigma) \mid i = 1, 2, 3)$. Проверим, что для векторов выполнены соотношения, определяющие бимодуль типа N' :

$$\begin{aligned} n_1.v_1 &= 0, & n_1.v_2 &= n_3, & n_1.v_3 &= n_2; \\ n_2.v_1 &= -n_3, & n_2.v_2 &= 0, & n_2.v_3 &= -n_1; \\ n_3.v_1 &= -n_2, & n_3.v_2 &= n_1, & n_3.v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Пусть $1 \leq i, j \leq 3$. Тогда в каждом из случаев а)–г) имеем:

- а) W_2 : $n_i.v_j = (e_i(1 - \sigma)).v_j = ((v_0v_i).v_j)(1 - \sigma) = v_0v_iv_j(1 - \sigma)$;
- б) W_3 : $n_i.v_j = (e_i(1 - \sigma)).v_j = ((v_iv_4).v_j)(1 - \sigma) = -v_iv_jv_4(1 - \sigma)$;
- в) W_4^+ : если $\xi = (1 + \pi)(1 - \sigma)$, то имеем

$$n_i.v_j = (e_i(1 - \sigma)).v_j = ((v_0v_iv_4v_5).v_j)\xi = v_0v_iv_jv_4v_5\xi;$$

- г) W_4^- : если $\zeta = (1 - \pi)(1 - \sigma)$, то имеем

$$n_i.v_j = (e_i(1 - \sigma)).v_j = ((v_0v_iv_4v_5).v_j)\zeta = v_0v_iv_jv_4v_5\zeta.$$

Это доказывает, что в каждом из случаев пространство U является бимодулем над M_2^+ .

Справедливость необходимых соотношений очевидна, поскольку элементы v_i ($i = 1, 2, 3$) в алгебре Клиффорда $Cl(V')$ перестановочны с элементами π, σ . $\square$

Из леммы 6.2 и второй леммы Мураками—Шестакова вытекает

Следствие. *Бимодуль M^J над алгеброй C^+ содержит только компоненты изоморфные Φ и C^+ .*

6.1.3. Правоальтернативные бимодули над C .

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 6.1. *Всякий правоальтернативный бимодуль M над алгеброй Кэли—Диксона $C = C(\Phi)$ альтернативен.*

Предварительно докажем две леммы. Первая из них является аналогом третьей леммы Мураками—Шестакова.

Лемма 6.3. *Пусть M — правоальтернативный бимодуль над расщепляемой алгеброй Кэли—Диксона $C = C(\Phi)$ и V — йорданов подбимодуль в M^J над алгеброй C^+ , изоморфный регулярному бимодулю C^+ . Тогда V является регулярным бимодулем над C .*

Доказательство. По условию: $C = H + qH$, где $H = M_2(\Phi)$, и выполнены равенства:

$$\begin{aligned} q^2 &= 1, & \bar{q} &= -q, & aq &= q\bar{a}, \\ a \cdot qb &= q \cdot \bar{a}b, & qa \cdot b &= q \cdot ba, & a \cdot qb &= b\bar{a}. \end{aligned}$$

По теореме Джекобсона 1.2 бимодуль V регулярен над алгеброй C^+ , значит, может быть записан в виде $V = [C]$, при этом если $x, y \in C$, то $[x] \cdot y = [x \cdot y]$.

Положим $H_0 = \{a \in H \mid \text{tr}(a) = 0\}$. Напомним [57], что $[H]$ является регулярным бимодулем над H , поскольку H и C имеют общую единицу 1, в частности, для любых $a, b \in H$ верно

$$[a]b = a[b] = [ab]. \quad (6.1)$$

Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1°. Отметим сначала, что справедливы равенства

$$H_0 \circ (qH) = 0 \quad \text{и} \quad [1] \circ (qa) = 2[qa].$$

2°. Проверим, что $q[1] = [1]q = [q]$.

Поскольку $(ab)a$ йорданов многочлен от a, b и $q^2 = 1$, то $(q[1])q = [q1 \cdot q] = [q^2] = [1]$, значит, $q[1] = (q[1])q \cdot q = [1]q$. Отсюда следует, что

$$2q[1] = 2[1]q = q \circ [1] = 2[q].$$

3°. Точно также доказывается $q[q] = [q]q = [1]$. В самом деле, во-первых,

$$(q[q])q = [qq \cdot q] = [q], \quad q[q] = [q]q.$$

Кроме того, $[q] \circ q = 2[q^2] = 2[1]$, откуда и получаем требуемое.

4°. Докажем теперь, что $[q](qa) = [a]$, где $a \in H_0$. Действительно, учитывая равенства $[q] \circ (qa) = [q] \circ a = 0$, п. 3° и соотношения (6.1), получаем

$$[q](qa) = -(qa)[q] = (q[q])a = [1]a = [a].$$

5°. Докажем, что $([1], q, a) = 0$, где $a \in H_0$. Аналогично предыдущему, имеем

$$\begin{aligned} [1]a &= [a] = [q](qa) = [1]q \cdot (qa) = -[1](qa) \cdot q = \\ &= ([1], q, a)q - ([1]q \cdot a)q = ([1], q, a)q - [1](q \cdot aq) = \\ &= ([1], q, a)q + [1](aqq) = ([1], q, a)q + [1]a. \end{aligned}$$

Следовательно, $([1], q, a)q = 0$ и умножая на q справа в силу правой альтернативности получаем требуемое.

6°. Докажем, что $(q, [1], a)^+ = 0$, где $a \in H_0$. Ясно, что

$$(q, [1], a)^+ = (q \cdot [1]) \cdot a - q \cdot ([1] \cdot a) = [q] \cdot a - q \cdot [a] = 0.$$

7°. Докажем теперь, что $[1](qa) = (qa)[1] = [qa]$, где $a \in H_0$.

Из пп. 5° и 6° и тождества (1.12) следует, что $0 = [[1], [q, a]] = 2[[1], qa]$, значит, $[1](qa) = (qa)[1]$. Заметив, что $[1] \cdot (qa) = [(qa) \cdot 1] = [qa]$, получаем требуемое.

8°. Докажем теперь, что $[q]a = [qa]$, $[a]q = [aq]$, где $a \in H_0$.

В силу равенства (6.1) и пп. 1°, 2°, 5° и 7° имеем последовательно

$$[q]a = [1]q \cdot a = [1] \cdot qa = [qa],$$

$$[a]q = [1]a \cdot q = [1] \cdot aq = -[1] \cdot qa = -[qa] = [aq].$$

9°. Докажем, что $[qa] \cdot b = [q \cdot ba]$ и $[a] \cdot qb = -[q \cdot ab]$, где $a, b \in H_0$.

Элемент ab представим в виде $ab = \gamma 1 + c$, где $\gamma \in \Phi$, $c \in C_0$. Тогда, аналогично предыдущему, имеем

$$[qa]b = -a[q] \cdot b = ab \cdot [q] = (\gamma 1 + c)[q] = \gamma[q] + c[q] =$$

$$= \gamma[q] - [q]c = [q](\gamma 1 - c) = [q]\overline{ab} = [q] \cdot ba = [q \cdot ba],$$

$$[a] \cdot qb = [1]a \cdot qb = -[1]qb \cdot a = -[qb]a = -[q \cdot ab].$$

10°. Наконец, докажем, что $[qa] \cdot qb = -[ba]$, где $a, b \in H_0$. В самом деле, в силу п. 4°, имеем $[qa] \cdot qb = [q]a \cdot qb = -([q] \cdot qb)a = -[b]a = -[ba]$. $\square$

Лемма 6.4. *Правоальтернативный бимодуль M над расщепляемой алгеброй Кэли—Диксона $C = C(\Phi)$ не может быть представлен в виде суммы 1-мерных йордановых бимодулей над алгеброй C^+ .*

Доказательство. $C^+ = J(\Phi \cdot 1, C_0)$ — йорданова алгебра симметрической билинейной формы. Если Φp одномерный унитарный йорданов C^+ -бимодуль, то $\Phi \cdot 1$ действует унитарно, а C_0 — нулевым образом, то есть $p \cdot 1 = p$, а $p \cdot C_0 = 0$.

Допустим, что $M^J = \sum_i \Phi p_i$ и $p \in M$. Пусть $a, b \in C_0$. Заметим, что $a \circ p = 0$, $\bar{a} = -a$. Тогда имеем $ap = -pa = p \cdot \bar{a}$, откуда $rp = p \cdot \bar{r}$, стало быть,

$$(ab)p = p \cdot \overline{ab} = p(\bar{b}\bar{a}) = p((-b)(-a)) = p(ba).$$

Далее, в силу правой альтернативности:

$$pa \cdot b = -ap \cdot b = ab \cdot p = p(ba),$$

$$b \cdot pa = pa \cdot \bar{b} = -pa \cdot b = -p(ba).$$

Отсюда следует, что pC – бимодуль над C , причем, как легко понять, неприводимый. Легко видеть, что этот бимодуль альтернативен:

$$(a, b, p) = (ab)p - a(bp) = p(ba) + (bp)a = p(ba) - (pb)a = -(p, b, a) = (p, a, b).$$

По теореме Джекобсона 1.2 всякий альтернативный C -бимодуль изоморфен регулярному. Однако, бимодуль pC не является регулярным, поскольку $(pC).C_0 = 0$, – противоречие. $\square$

Теперь можем приступить к доказательству теоремы. Йорданов бимодуль M^J представим в виде суммы неприводимых бимодулей $M^J = \sum_i M_i + \sum_i \Phi p_i$, где $\dim_{\Phi} M_i = 8$, $\dim_{\Phi} \Phi p_i = 1$. По лемме 6.3 пространство $M' = \sum_i M_i$ является C -подбимодулем в M , значит, если фактор-модуль M/M' отличен от нуля, то он представим в виде суммы одномерных неприводимых йордановых бимодулей, что невозможно по лемме 6.4. Следовательно, $M = M'$ и в силу леммы 6.3 правоальтернативный C -бимодуль M' альтернативен. Теорема 6.1 доказана.

6.2. Бимодули над алгебрами $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$

Введем обозначения для бимодулей по действиям на элементы, указанным в классификации Джекобсона (см. теорему 1.3):

$$\begin{aligned} (N_0) : \quad & x \mapsto \frac{1}{2}(xa + ax), \quad x \in A, \quad a \in A; \\ (N_1^+) : \quad & x \mapsto \frac{1}{2}(xa + a^t x), \quad x \in H, \quad a \in A; \\ (N_2^+) : \quad & x \mapsto \frac{1}{2}(ax + xa^t), \quad x \in H, \quad a \in A; \\ (N_1^-) : \quad & x \mapsto \frac{1}{2}(xa + a^t x), \quad x \in S, \quad a \in A; \\ (N_2^-) : \quad & x \mapsto \frac{1}{2}(ax + xa^t), \quad x \in S, \quad a \in A. \end{aligned}$$

Целью этого параграфа является описание йордановых неприводимых бимодулей над алгеброй A^+ , где $A = M_n(\Phi)$, $n \geq 3$, входящих в разложение правоальтернативного бимодуля M над алгеброй A . Докажем сначала, что ни один из бимодулей (N_0) , $(N_1^{\pm})$ не может входить в разложение йорданова бимодуля M^J . Каждый из случаев выделим в виде отдельной леммы. Элементы бимодулей будем обозначать через $[x]$; для действий элементов алгебры в бимодуле M^J , как и прежде, будем использовать символ $\circ$, т.е. $a \circ x = 2ax$.

6.2.1. Бимодули типа (N_0)

Лемма 6.5. *Если бимодуль N типа (N_0) входит в разложение бимодуля M^J , то он является ассоциативным бимодулем над алгеброй A .*

Доказательство. Бимодуль N имеет базис $[e_{ij}]$ и рассматривается относительно действия: $a \circ [x] = [a \circ x]$, где $x, a \in A$.

Заметим, что если множество индексов $\{i, j, k, l\}$ состоит не более чем из двух элементов, то в силу третьей леммы Мураками—Шестакова справедливы равенства $e_{ij}[e_{kl}] = [e_{ij}]e_{kl} = [e_{ij}e_{kl}]$, которые будем использовать без дополнительных пояснений. Дальнейшие рассмотрения представим в виде последовательности пунктов.

1°. Докажем, что $[e_{ij}]e_{kl} = 0$, если $j \notin \{k, l\}$. В самом деле,

$$([e_{ij}]e_{kl})e_{jj} = -([e_{ij}]e_{jj})e_{kl} + [e_{ij}](e_{kl} \circ e_{jj}) = -[e_{ij}]e_{kl}.$$

Поскольку оператор $R_{e_{jj}}$ является идемпотентом, то его собственные значения равны 0 и 1, значит, $[e_{ij}]e_{kl} = 0$.

2°. Докажем, что $[e_{ij}]e_{jk} = [e_{ik}]$. Можно считать, что индексы i, j, k различны (или, сокращенно, $\neq i, j, k$). Рассмотрим сначала элемент $e_{jk}[e_{ij}]$:

$$(e_{jk}[e_{ij}])e_{kk} = -(e_{jk}e_{kk})[e_{ij}] + e_{jk}([e_{ij}] \circ e_{kk}) = -e_{jk}[e_{ij}],$$

значит, $e_{jk}[e_{ij}] = 0$. Тогда $[e_{ij}]e_{jk} = [e_{ij}] \circ e_{jk} = [e_{ij} \circ e_{jk}] = [e_{ik}]$.

3°. Докажем, что $e_{ij}[e_{jk}] = [e_{ik}]$. Можно считать, что $\neq i, j, k$. Аналогично п. 2°, имеем $([e_{jk}]e_{ij})e_{kk} = -[e_{jk}]e_{ij}$, значит, $[e_{jk}]e_{ij} = 0$ и $e_{ij}[e_{jk}] = [e_{ik}]$.

Точно также доказываются и остальные два пункта

4°. Верны равенства $e_{ij}[e_{ik}] = e_{ij}[e_{ki}] = [e_{ij}]e_{ik} = [e_{ij}]e_{kj} = 0$, если $\neq i, j, k$.

5°. Верны равенства $e_{ij}[e_{kl}] = [e_{ij}]e_{kl} = 0$, если $\neq i, j, k, l$. □

6.2.2. Бимодули типа (N_1^+)

Лемма 6.6. Бимодуль N типа (N_1^+) не может входить в разложение бимодуля M^J .

Доказательство. Бимодуль N имеет базис $[e_{ii}]$, $[u_{ij}]$, $u_{ij} = e_{ij} + e_{ji}$, где $u_{ij} = e_{ij} + e_{ji}$ ($i \neq j$), и рассматривается относительно действия:

$$[h] \circ a = [ha + a^t h], \quad \text{где } h \in H, \quad a \in A.$$

Тогда справедливы равенства:

$$[e_{11}] \circ e_{11} = 2[e_{11}], \quad [e_{11}] \circ e_{12} = [u_{12}], \quad [e_{11}] \circ e_{2i} = 0, \quad (6.2)$$

$$[u_{12}] \circ e_{11} = [u_{12}], \quad [u_{12}] \circ e_{13} = [u_{23}], \quad [u_{12}] \circ e_{12} = 2[e_{22}]. \quad (6.3)$$

Хорошо известно, что в правоальтернативной алгебре верно соотношение, которое будет использоваться без дополнительных пояснений:

$$2(ax)a = (a \circ x) \circ a - x \circ a^2.$$

В самом деле, ввиду правой альтернативности имеем:

$$\begin{aligned} (a \circ x) \circ a - x \circ a^2 &= (ax + xa)a + a(a \circ x) - x \circ a^2 = \\ &= \{(ax)a + xa^2\} + \{a^2x + (ax)a\} - x \circ a^2 = 2(ax)a. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения удобно представить в виде последовательности пунктов.

1°. Докажем, что $e_{11}[e_{11}] = [e_{11}] = [e_{11}]e_{11}$. Во-первых, в силу (6.2) верно

$$2(e_{11}[e_{11}])e_{11} = (e_{11} \circ [e_{11}]) \circ e_{11} - [e_{11}] \circ e_{11}^2 = 4[e_{11}] - [e_{11}] \circ e_{11} = 2[e_{11}],$$

т.е. $(e_{11}[e_{11}])e_{11} = [e_{11}]$. Во-вторых,

$$2e_{11}[e_{11}] = e_{11}([e_{11}] \circ e_{11}) = (e_{11}[e_{11}])e_{11} + e_{11}^2[e_{11}] = [e_{11}] + e_{11}[e_{11}],$$

значит, $e_{11}[e_{11}] = [e_{11}]$, т.е. доказано первое равенство. Отсюда в силу (6.2) верно и второе равенство $[e_{11}]e_{11} = [e_{11}]$.

2°. Докажем, что $e_{11}[e_{22}] = [e_{22}]e_{11} = 0$. Действительно, в силу правой альтернативности и (6.2) имеем $e_{11}[e_{22}] = (e_{11}e_{11})[e_{22}] = -(e_{11}[e_{22}])e_{11}$. Поскольку оператор $R_{e_{11}}$ является идемпотентом, то его собственные значения равны 0 и 1, значит, $e_{11}[e_{22}] = 0$. Отсюда и из равенства $e_{11} \circ [e_{22}] = 0$ получаем требуемое.

3°. Докажем, что $e_{12}[e_{11}] = 0$, $[e_{11}]e_{12} = [u_{12}]$. Имеем:

$$e_{12}[e_{11}] = (e_{12}e_{22})[e_{11}] = -(e_{12}[e_{11}])e_{22}.$$

Отсюда аналогично п. 2° получаем первое равенство. Второе вытекает на основании (6.2).

4°. Докажем, что $[u_{12}] = 0$. В силу правой альтернативности и пп. 3°, 1° имеем

$$[u_{12}]e_{11} = ([e_{11}]e_{12})e_{11} = -([e_{11}]e_{11})e_{12} + [e_{11}]e_{12} = -[e_{11}]e_{12} + [e_{11}]e_{12} = 0.$$

Далее, в силу (6.3): $[u_{12}] \circ e_{11} = [u_{12}]$, следовательно, $e_{11}[u_{12}] = [u_{12}]$. Продолжая вычисления, и учитывая равенства $e_{11}[u_{12}] = e_{22}[u_{12}] = [u_{12}]$, $[u_{12}]e_{22} = 0$, получаем

$$(e_{11}, [u_{12}], e_{22}) = (e_{11}[u_{12}])e_{22} - e_{11}([u_{12}]e_{22}) = [u_{12}]e_{22} = 0$$

и

$$(e_{11}, e_{22}, [u_{12}]) = -e_{11}(e_{22}[u_{12}]) = -[u_{12}],$$

значит, в силу правой альтернативности получаем требуемое.

Поскольку равенство $[u_{12}] = 0$ не может быть выполнено, то лемма доказана. $\square$

6.2.3. Бимодуль типа (N_1^-)

Лемма 6.7. *Бимодуль N типа (N_1^-) не может входить в разложение бимодуля M^J .*

Доказательство. Пусть бимодуль N типа (N_1^-) имеет умножение

$$[s] \circ a = [sa + a^t s], \quad s \in S, \quad a \in A.$$

1°. Пространство $\Phi[e_{12} - e_{21}]$ является йордановым бимодулем над алгеброй M_2^+ , что легко можно подтвердить прямым вычислением:

$$[e_{12} - e_{21}] \circ e_{11} = [(e_{12} - e_{21})e_{11} + e_{11}(e_{12} - e_{21})] = [e_{12} - e_{21}],$$

$$[e_{12} - e_{21}] \circ e_{22} = [(e_{12} - e_{21})e_{22} + e_{22}(e_{12} - e_{21})] = [e_{12} - e_{21}],$$

значит, $[e_{12} - e_{21}] \circ (e_{11} - e_{22}) = 0$. Кроме того,

$$[e_{12} - e_{21}] \circ e_{12} = [(e_{12} - e_{21})e_{12} + e_{21}(e_{12} - e_{21})] = [-e_{22} + e_{22}] = 0.$$

Аналогично, $[e_{12} - e_{21}] \circ e_{21} = 0$. Значит, в силу [57] верно, что $N \subseteq M_l^{RA}$.

2°. Пусть $s_{12} = [e_{12} - e_{21}]$, $s_{23} = [e_{23} - e_{32}]$, $s_{31} = [e_{31} - e_{13}]$. Докажем, что справедливы равенства: $s_{21} \circ e_{13} = s_{23}$, $(\forall k) s_{12} \circ e_{3k} = 0$. В самом деле,

$$s_{21} \circ e_{13} = [(e_{21} - e_{12})e_{13} + e_{31}(e_{21} - e_{12})] = [e_{23} - e_{32}] = s_{23},$$

$$s_{12} \circ e_{3k} = [(e_{12} - e_{21})e_{3k} + e_{k3}(e_{12} - e_{21})] = 0.$$

3°. Докажем, что $e_{22}s_{23} = 0$. Сначала покажем, что $e_{21}s_{23} = 0$. Поскольку $e_{21}s_{23} = (e_{21}e_{11})s_{23} = -(e_{21}s_{23})e_{11}$, то $e_{21}s_{23} = 0$. Далее, учитывая $s_{23} \circ e_{12} = 0$, имеем $0 = (e_{21}s_{23})e_{12} = -e_{22}s_{23}$.

4°. Докажем, что $s_{23} = 0$. В силу п. 3° верно $e_{22}s_{23} = 0$. Точно также $e_{33}s_{23} = 0$. Наконец, $e_{11}s_{23} = e_{11}^2s_{23} = -(e_{11}s_{23})e_{11}$, откуда $e_{11}s_{23} = 0$, т.е. $(\forall k) e_{kk}s_{23} = 0$. Следовательно, ввиду унитарности бимодулей $s_{23} = 1 \cdot s_{23} = (\sum_{k=1}^n e_{kk})s_{23} = 0$. $\square$

6.2.4. Бимодули типа (N_2^+)

Всюду ниже предполагается, что все рассматриваемые йордановы A^+ -бимодули N содержатся в правоальтернативном A -бимодуле M .

Лемма 6.8. *Бимодуль N типа (N_2^+) удовлетворяет следующим свойствам:*

$$\text{а)} \quad e_{11}[e_{11}] = [e_{11}]e_{11} = e_{11}[1] = [1]e_{11} = [e_{11}], \quad e_{12}[u_{12}] = [u_{12}]e_{12} = [e_{11}];$$

$$\text{б)} \quad e_{11}[e_{22}] = [e_{11}]e_{22} = [e_{11}]e_{23} = e_{12}[e_{11}] = [e_{11}]e_{12} = 0;$$

$$\text{в)} \quad e_{21}[u_{23}] = [u_{23}]e_{21} = [u_{23}]e_{11} = e_{11}[u_{23}] = 0;$$

$$\text{г)} \quad e_{22}[u_{23}] = e_{21}[u_{13}], \quad e_{12}[u_{23}] = e_{13}[e_{33}], \quad e_{12}[e_{22}] = [e_{11}]e_{21}.$$

Доказательство. Напомним, что бимодуль N имеет базис $[e_{ii}]$, $[u_{ij}]$, $u_{ij} = e_{ij} + e_{ji}$, и рассматривается относительно действия:

$$a \circ [h] = [ah + ha^t], \quad h \in H, \quad a \in A$$

Тогда $a \circ [1] = [a + a^t]$, а также справедливы равенства:

$$e_{11} \circ [e_{11}] = 2[e_{11}], \quad e_{21} \circ [e_{11}] = [u_{21}], \quad (6.4)$$

$$e_{12} \circ [e_{11}] = e_{22} \circ [e_{11}] = e_{23} \circ [e_{11}] = 0,$$

$$e_{11} \circ [u_{12}] = [u_{12}], \quad e_{12} \circ [u_{21}] = 2[e_{11}], \quad e_{13} \circ [u_{21}] = 0. \quad (6.5)$$

Дальнейшие рассмотрения удобно представить в виде последовательности пунктов. Заметим, что первые 3 пункта доказываются как и в лемме 6.5.

1°. Докажем, что $e_{11}[e_{11}] = [e_{11}] = [e_{11}]e_{11}$. Кроме того, $e_{11}[1] = [e_{11}] = [1]e_{11}$.

Во-первых, в силу (6.4) верно

$$2(e_{11}[e_{11}])e_{11} = (e_{11} \circ [e_{11}]) \circ e_{11} - [e_{11}] \circ e_{11}^2 = 4[e_{11}] - [e_{11}] \circ e_{11} = 2[e_{11}],$$

т.е. $(e_{11}[e_{11}])e_{11} = [e_{11}]$. Во-вторых,

$$2e_{11}[e_{11}] = e_{11}([e_{11}] \circ e_{11}) = (e_{11}[e_{11}])e_{11} + e_{11}^2[e_{11}] = [e_{11}] + e_{11}[e_{11}],$$

значит, $e_{11}[e_{11}] = [e_{11}]$, т.е. доказано первое равенство. Отсюда в силу (6.4) верно и второе равенство $[e_{11}]e_{11} = [e_{11}]$. Заметим теперь, что $e_{11} \circ [1] = 2[e_{11}]$. Значит,

$$2[e_{11}] = e_{11}(e_{11} \circ [1]) = e_{11}[1] + (e_{11}[1])e_{11}.$$

Далее,

$$2(e_{11}[1])e_{11} = (e_{11} \circ [1]) \circ e_{11} - [1] \circ e_{11} = 4[e_{11}] - 2[e_{11}] = 2[e_{11}].$$

Следовательно, $(e_{11}[1])e_{11} = [e_{11}]$ и $2[e_{11}] = e_{11}[1] + [e_{11}]$ и $e_{11}[1] = [e_{11}]$.

2°. Докажем, что $e_{11}[e_{22}] = [e_{11}]e_{22} = 0$. Действительно, в силу правой альтернативности и (6.4) имеем $e_{11}[e_{22}] = (e_{11}e_{11})[e_{22}] = -(e_{11}[e_{22}])e_{11}$. Поскольку оператор $R_{e_{11}}$ является идемпотентом, то его собственные значения равны 0 и 1, значит, $e_{11}[e_{22}] = 0$. Поскольку $e_{11} \circ [e_{22}] = 0$, то верно и второе равенство.

3°. Докажем, что $e_{12}[e_{11}] = 0 = [e_{11}]e_{12}$. Имеем: $e_{12}[e_{11}] = (e_{12}e_{22})[e_{11}] = -(e_{12}[e_{11}])e_{22}$. Отсюда аналогично п. 2° получаем первое равенство. Второе вытекает на основании (6.4): $e_{12} \circ [e_{11}] = 0$.

4°. Докажем, что $e_{21}[u_{12}] = [e_{22}] = [u_{12}]e_{21}$.

Из п. 1° следует $(e_{11}, e_{11}, [1]) = (e_{11}e_{11})[1] - e_{11}(e_{11}[1]) = e_{11}[1] - e_{11}[e_{11}] = [e_{11}] - [e_{11}] = 0$.

Из п. 3°: $(e_{12}, e_{11}, [1]) = 0$. Тогда в силу тождества Клейнфелда:

$$0 = (e_{12}e_{21}, e_{11}, [1]) = e_{12}(e_{21}, e_{11}, [1]) + (e_{12}, e_{11}, [1])e_{21} = e_{12}(e_{21}, e_{11}, [1]).$$

Аналогично, $(e_{21}, e_{11}, [1])e_{12} = 0$. Значит, в силу 3° и (6.4):

$$(e_{21}[1])e_{12} = (e_{21}[e_{11}])e_{12} = -e_{22}[e_{11}] + e_{22}([e_{11}] \circ e_{12}) = 0.$$

Далее, $0 = (e_{21}[1])e_{12} = -e_{22}[1] + e_{21}([1] \circ e_{12}) = -[e_{22}] + e_{21}[u_{12}]$, т.е. доказано первое равенство. Второе равенство получается теперь ввиду (6.5): $e_{21} \circ [u_{12}] = 2[e_{22}]$.

Из пп. 1° и 4° вытекает п. а).

5°. Докажем, что $e_{12}[e_{22}] = [e_{11}]e_{21}$. Сначала заметим, что $(e_{21}[e_{11}])e_{21} = [e_{22}]$:

$$2(e_{21}[e_{11}])e_{21} = (e_{21} \circ [e_{11}]) \circ e_{21} = [u_{12}] \circ e_{21} = 2[e_{22}].$$

Используя это равенство и правое тождество Муфанг, имеем:

$$e_{12}[e_{22}] = e_{12}((e_{21}[e_{11}])e_{21}) = (e_{11}[e_{11}])e_{21} = [e_{11}]e_{21}.$$

6°. Докажем, что $[e_{11}]e_{23} = e_{23}[e_{11}] = 0$. В силу п. 1° имеем

$$[e_{11}]e_{23} = ([e_{11}]e_{11})e_{23} = -([e_{11}]e_{23})e_{11} + [e_{11}](e_{11} \circ e_{23}) = -([e_{11}]e_{23})e_{11}.$$

Поскольку оператор $R_{e_{11}}$ является идемпотентом, то его собственные значения 0 и 1, следовательно, верно первое равенство. Из него следует второе в силу (6.4): $e_{23} \circ [e_{11}] = 0$.

Из пп. 2°, 3°, 6° вытекает п. б).

7°. Докажем, что $e_{21}[u_{23}] = 0 = [u_{23}]e_{21}$. Имеем:

$$e_{21}[u_{23}] = (e_{21}e_{11})[u_{23}] = -(e_{21}[u_{23}])e_{11} + e_{21}(e_{11} \circ [u_{23}]) = -(e_{21}[u_{23}])e_{11},$$

откуда аналогично п. 6° получаем требуемое.

8°. Докажем, что $[u_{23}]e_{11} = e_{11}[u_{23}] = 0$, $e_{22}[u_{23}] = e_{21}[u_{13}]$.

Ясно, что $(e_{11}[u_{23}])e_{11} = 0$. Значит, в силу правой альтернативности $e_{11}[u_{23}] = 0$ и $[u_{23}]e_{11} = 0$. Далее, ввиду п. 7°:

$$e_{22}[u_{23}] = (e_{21}e_{12})[u_{23}] = -(e_{21}[u_{23}])e_{12} + e_{21}(e_{12} \circ [u_{23}]) = e_{21}[u_{13}].$$

П. в) следует из пп. 7° и 8°.

9°. Докажем, что $e_{12}[u_{23}] = e_{13}[e_{33}]$. Поскольку справедливы равенства:

$$(e_{12}[e_{22}])e_{32} = e_{12}([e_{22}] \circ e_{32}) = e_{12}[u_{23}],$$

$$([e_{11}]e_{21})e_{32} = [e_{11}](e_{21} \circ e_{32}) = [e_{11}]e_{31}.$$

то в силу п. 5° получаем $e_{12}[u_{23}] = [e_{11}]e_{31} = e_{13}[e_{33}]$.

П. г) следует из пп. 5°, 8° и 9°. □

Лемма 6.9. Бимодуль N типа (N_2^+) содержится в компоненте M_l^R .

Доказательство. Напомним, что если $m_1 \in M_r^R$ и $m_2 \in M_l^R$. Тогда для любых $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ имеем $(m_1 e_{ij})e_{kl} = m_1(e_{ij}e_{kl})$, $(m_2 e_{ij})e_{kl} = m_2(e_{kl}e_{ij})$.

Пусть $[e_{11}] = m_1 + m_2$, где $m_1 \in M_r^R$ и $m_2 \in M_l^R$. Тогда $[e_{11}]e_{21} = m_1 e_{21} + m_2 e_{21}$, и

$$([e_{11}]e_{21})e_{11} = m_1 e_{21} \cdot e_{11} + m_2 e_{21} \cdot e_{11} = m_1 e_{21}.$$

Однако, в силу леммы 6.8 а) и в силу правого тождества Муфанг

$$([e_{11}]e_{21})e_{11} = ([e_{11}]e_{11} \cdot e_{21})e_{11} = [e_{11}](e_{11}e_{21}e_{11}) = 0,$$

значит, $m_1 e_{21} = 0$ и $m_1 e_{2j} = 0$, т.е. $(\forall i \neq 1, j = \overline{1, n}) m_1 e_{ij} = 0$. Кроме того, $[e_{11}]e_{12} = 0$ по лемме 6.8 б), значит, $m_1 e_{12} = m_2 e_{12} = 0$ и $\dim m_1 A \leq 1$, что возможно только в случае $m_1 = 0$. Итак, $(\forall i) [e_{ii}] \in M_l^R$.

Пусть теперь $[u_{12}] = m_1 + m_2$. Тогда в силу леммы 6.8 а):

$$[e_{11}] = [u_{12}]e_{12} = m_1 e_{12} + m_2 e_{12},$$

значит, $m_1 e_{12} = 0$, поскольку $[e_{11}] \in M_l^R$. Точно также $[e_{22}] = [u_{12}]e_{21} = m_1 e_{21} + m_2 e_{21}$ и $m_1 e_{21} = 0$. Значит, $m_1 e_{1i} = m_1 e_{2i} = 0$. Наконец, в силу леммы 6.8 в): $[u_{12}]e_{33} = 0$, следовательно, $m_1 e_{33} = 0$ и $m_1 e_{3i} = 0$. Это означает, что $m_1 A = 0$ и в силу унитарности бимодуля $m_1 = 0$. Лемма доказана. □

Лемма 6.10. Для бимодуля N типа (N_2^+) справедливы равенства:

$$[u_{23}]e_{12} = [1]e_{13}, \quad u_{12}[1] = u_{12}[1] = [u_{12}].$$

Доказательство. В силу лемм 6.9 и 6.8 а) имеем:

$$\begin{aligned} [u_{23}]e_{12} &= [u_{23}](e_{13}e_{32}) = ([u_{23}]e_{32})e_{13} = \\ &= [e_{33}]e_{13} = ([1]e_{33})e_{13} = [1](e_{13}e_{33}) = [1]e_{13}. \end{aligned}$$

Первое равенство доказано.

Поскольку $e_{12} \circ [1] = [u_{12}]$, то $u_{12} \circ [1] = 2[u_{12}]$. Значит, для проверки остальных равенств достаточно проверить только одно из них. Умножая справа на e_{21} обе части равенства $[u_{23}]e_{12} = [1]e_{13}$, получаем ввиду леммы 6.9: $([u_{23}]e_{12})e_{21} = ([1]e_{13})e_{21}$, $[u_{23}]e_{22} = [1]e_{23}$. Аналогично, $[u_{23}]e_{33} = [1]e_{32}$. Складывая два последних равенства, получим $[u_{23}](e_{22} + e_{33}) = [1]u_{23}$. Поскольку $[u_{23}]e_{11} = 0$ в силу леммы 6.8 в), то

$$[u_{23}] = [u_{23}] \cdot 1 = [u_{23}](e_{11} + e_{22} + e_{33} + \dots) = [u_{23}](e_{22} + e_{33}) = [1]u_{23}. \quad \square$$

6.2.5. Бимодули типа (N_2^-)

Напомним, что йорданов бимодуль типа (N_2^-) имеет умножение

$$a \circ [s] = [as + sa^t], \quad s \in S, \quad a \in A.$$

Лемма 6.11. *Для бимодуля N типа (N_2^-) справедливы равенства:*

$$\begin{aligned} e_{13}s_{21} &= 0, & e_{33}s_{12} &= s_{12}e_{33} = 0, & e_{13} \circ s_{12} &= 0, \\ e_{31} \circ s_{12} &= s_{32}, & e_{11} \circ s_{12} &= s_{12}, & e_{12} \circ s_{12} &= 0, \end{aligned}$$

где $s_{12} = [e_{12} - e_{21}]$.

Доказательство. Поскольку, $e_{13}s_{12} = (e_{13}e_{33})s_{12} = -(e_{13}s_{12})e_{33}$, то $e_{13}s_{21} = 0$. Аналогично, $e_{33}s_{12} = e_{33}^2s_{12} = -(e_{33}s_{12})e_{33}$, значит, $e_{33}s_{12} = 0$. Учитывая, что $e_{33} \circ s_{12} = 0$, получаем $s_{12}e_{33} = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} e_{13} \circ s_{12} &= e_{13} \circ [e_{12} - e_{21}] = [e_{13}(e_{12} - e_{21}) + (e_{12} - e_{21})e_{31}] = 0, \\ e_{31} \circ s_{12} &= e_{31} \circ [e_{12} - e_{21}] = [e_{31}(e_{12} - e_{21}) + (e_{12} - e_{21})e_{13}] = \\ &= [e_{32} - e_{23}] = s_{32}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} e_{11} \circ s_{12} &= e_{11} \circ [e_{12} - e_{21}] = \\ &= [e_{11}(e_{12} - e_{21}) + (e_{12} - e_{21})e_{11}] = [e_{12} - e_{21}] = s_{12}, \\ e_{12} \circ s_{12} &= e_{12} \circ [e_{12} - e_{21}] = \\ &= [e_{12}(e_{12} - e_{21}) + (e_{12} - e_{21})e_{21}] = [-e_{11} + e_{11}] = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 6.12. *Если бимодуль N типа (N_2^-) входит в разложение бимодуля M^J , то $N \subseteq M_l^R$.*

Доказательство. Пусть $s_{12} = m_1 + m_2$, где $m_1 \in M_r^R$, $m_2 \in M_l^R$. Отсюда, следуя [57], по правой альтернативности имеем

$$\begin{aligned} -e_{11}(s_{12}e_{12}) &= e_{11}(e_{12}s_{12}) = e_{11}(e_{12} \circ s_{12}) - e_{11}(s_{12}e_{12}) = \\ &= e_{12}s_{12} + (e_{11}s_{12})e_{12} - e_{11}(s_{12}e_{12}) = \\ &= -s_{12}e_{12} + (s_{12} - s_{12}e_{11})e_{12} - e_{11}(s_{12}e_{12}) = \\ &= -((m_1 + m_2)e_{11})e_{12} - e_{11}(s_{12}e_{12}) = -m_1e_{12} - e_{11}(s_{12}e_{12}), \end{aligned}$$

поэтому $m_1e_{12} = 0$. Аналогично, рассматривая $-e_{22}(s_{12}e_{21})$, получаем $m_1e_{21} = 0$.

Тогда $m_1e_{11} = (m_1e_{12})e_{21} = 0$ и $m_1e_{22} = (m_1e_{21})e_{12} = 0$.

Далее, поскольку $m_1 e_{33} \in M_r^R$, $m_2 e_{33} \in M_l^R$ и $0 = s_{12} e_{33} = m_1 e_{33} + m_2 e_{33}$, то $m_1 e_{33} = 0$, значит, для любого i выполнено $m_1 e_{ii} = 0$. Таким образом, $m_1 = m_1 \sum_i e_{ii} = 0$, что и требовалось. $\square$

Лемма 6.13. *Если $M^J = N \oplus \dots$, где N — йорданов бимодуль типа (N_2^-) , то справедливы равенства:*

$$s_{12} e_{12} = s_{13} e_{13}, \quad s_{12} e_{11} = s_{32} e_{13}.$$

Доказательство. Используя тождество (1.1) и лемму 6.11, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= [e_{13} \circ s_{12}, e_{32}] + [e_{13} \circ e_{32}, s_{12}] + [e_{32} \circ s_{12}, e_{13}] = \\ &= [e_{12}, s_{12}] - [e_{32} \circ s_{21}, e_{13}] = [e_{12}, s_{12}] - [s_{31}, e_{13}] = \\ &= -[s_{12}, e_{12}] + [s_{13}, e_{13}] = -2s_{12} e_{12} + 2s_{13} e_{13}, \end{aligned}$$

значит, верно первое равенство. Аналогично,

$$\begin{aligned} 0 &= [e_{13} \circ s_{12}, e_{31}] + [e_{13} \circ e_{31}, s_{12}] + [e_{31} \circ s_{12}, e_{13}] = \\ &= [e_{11} + e_{33}, s_{12}] + [s_{32}, e_{13}] = [e_{11}, s_{12}] + [s_{32}, e_{13}]. \end{aligned}$$

Поскольку $e_{11} s_{12} = s_{12} - s_{12} e_{11}$, $e_{13} s_{32} = s_{12} - s_{32} e_{13}$, то

$$\begin{aligned} 0 &= [e_{11}, s_{12}] + [s_{32}, e_{13}] = e_{11} s_{12} - s_{12} e_{11} + s_{32} e_{13} - e_{13} s_{32} = \\ &= s_{12} - s_{12} e_{11} - s_{12} e_{11} + s_{32} e_{13} - (s_{12} - s_{32} e_{13}) = \\ &= -2s_{12} e_{11} + 2s_{32} e_{13}. \quad \square \end{aligned}$$

6.2.6. Скрученные бимодули над матричными алгебрами.

Пусть $A = M_n(\Phi)$, $n \geq 2$. Допустим, что M является левым ассоциативным A -модулем, т.е. $(xa)b = x(ba)$ для любых $x \in M$, $a, b \in A$.

Определение. Бимодуль M над A называется *скрученным*, если для любых $x \in M$, $a, b \in A$ выполнены равенства:

$$a(bx) = (ab)x, \quad (ax)b = a(xb), \quad (xa)b = x(ba).$$

Легко видеть, что *всякий скрученный бимодуль правоальтернативен*. В самом деле,

$$(a, x, b) = (a, b, x) = 0, \quad (x, a, b) = -x[a, b].$$

Заметим, что скрученный бимодуль не может быть альтернативен. Действительно, если такой бимодуль альтернативен, то $x[a, b] = 0$, откуда следует $xA' = 0$, т.е. $x = 0$.

Рассмотрим универсальную мультипликативную алгебру $U(A)$ бипредставлений, удовлетворяющую соотношениям: $L_a L_b = L_{ba}$, $[L_a, R_b] = 0$, $R_a R_b = R_{ba}$. Значит, $U(A) \cong A^\circ \otimes A^\circ$, где A° — алгебра противоположная к A . Поскольку тензорное произведение центральных простых является простой, то $\dim U(A) = (n^2)^2$ и алгебра $U(A)$ имеет единственный (с точностью до изоморфизма) правый модуль размерности n^2 . Рассмотрим бимодуль относительно действий: $a[x] = [ax]$, $[x]a = [xa^t]$, который назовем *стандартным*. Этот бимодуль правоальтернативен и является суммой двух неприводимых йордановых бимодулей типа (N_2^+) и (N_2^-) . Ясно также, что всякий скрученный бимодуль вполне приводим и является суммой стандартных бимодулей.

6.3. Симметрические и косые бимодули с одной йордановой компонентой

6.3.1. Компоненты N_2^+

Напомним, что йорданов бимодуль типа (N_2^+) имеет умножение

$$a \circ [h] = [ah + ha^t], \quad h \in H, \quad a \in A.$$

Лемма 6.14. Для $a \in M_n$ и $b \in H(M_n)$ выполнено соотношение $a[b] = [1] \cdot ba^t$.

Доказательство. Докажем равенство для базисных элементов.

1° ($a = b = e_{ii}$). Следует из леммы 6.8.

2° ($a = e_{ii}, b = u_{ij}$). Имеем $e_{ii}[u_{ij}] = [u_{ij}]e_{jj} = [1]u_{ij} \cdot e_{jj} = [1] \cdot e_{jj}u_{ij} = [1] \cdot u_{ij}e_{ii} = [1] \cdot u_{ij}e_{ii}^t$.

3° ($a = e_{ij}, b = e_{jj}$). Имеем $e_{ij}[e_{jj}] = [e_{ii}]e_{ji} = [1]e_{ii} \cdot e_{ji} = [1]e_{ji} = [1] \cdot e_{jj}e_{ij}^t$.

4° ($a = e_{ij}, b = u_{jk}$). Имеем $e_{ij}[u_{jk}] = e_{ik}[e_{kk}] = [1] \cdot e_{kk}e_{ki} = [1] \cdot e_{kj}e_{ji} = [1] \cdot u_{jk}e_{ji} = [1] \cdot u_{jk}e_{ij}^t$. □

Предложение 6.1. Йорданов симметрический бимодуль $[H(A)]$ не может быть правоальтернативным бимодулем над $A = M_n(\Phi)$.

Доказательство. Допустим, от противного, что $[H]$ является правоальтернативным A -бимодулем. Заметим, что $\dim[H] = \frac{n(n+1)}{2}$. Далее, $[H]$ как правый модуль является прямой суммой правых бимодулей вида $M_i = [e_{ii}]A$. Допустим, что сумма правых модулей вида $M_i = [e_{ii}]A$ является прямой для $i = 1, \dots, k$. Пусть $M' = \sum_{i=1}^k M_i$. Заметим, что $[1]e_{mi} = [1]e_{ii} \cdot e_{mi} \in M'$ для всех $m = 1, \dots, n$ и $i = 1, \dots, k$. Кроме того, $\dim M' = k \dim M_1 = kn$.

Если $[e_{jj}] \in M'$ для всех $j = k+1, \dots, n$, то $[1]e_{jj} \in M'$ и $[1]e_{mj} = [1]e_{jj} \cdot e_{mj} \in M'$. Следовательно, $[1]e_{pq} \in M'$. Учитывая, что пространство $[H]$ имеет базис из элементов вида $[e_{ii}] = [1]e_{ii}$, $[u_{ij}] = [1]e_{ij} + [1]e_{ji}$, получаем $[H] = M'$.

Тем самым доказано, что $[H] = M'$ и $k = \frac{n+1}{2}$, т.е. $n = 2k - 1$.

Положим $x_{ij} = [1]e_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, k}$. Считая $\nu = k+1$, запишем разложение

$$[e_{\nu\nu}] = [1]\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{i1}e_{i1} + \dots + \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}e_{ik}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} [e_{\nu\nu}] &= [1]\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{i1}e_{i1} + \dots + \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}e_{ik}\right)e_{\nu\nu} = \\ &= [1]\left(\sum_{i=1}^n \alpha_{i1}e_{\nu\nu}e_{i1} + \dots + \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}e_{\nu\nu}e_{ik}\right) = \\ &= [1](\alpha_{\nu 1}e_{\nu 1} + \dots + \alpha_{\nu k}e_{\nu k}). \end{aligned}$$

Считая $\alpha_1 = \alpha_{\nu 1}, \dots, \alpha_k = \alpha_{\nu k}$, имеем

$$[e_{\nu\nu}] = \alpha_1 x_{\nu 1} + \dots + \alpha_k x_{\nu k}.$$

Тогда

$$[1]e_{i\nu} = \alpha_1 x_{i1} + \dots + \alpha_k x_{ik}, \quad i = \overline{1, \nu}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} [e_{ii}] &= x_{ii}, \quad i = \overline{1, k}, & [u_{ij}] &= x_{ij} + x_{ji}, \quad 1 \leq i < j \leq k, \\ [e_{\nu\nu}] &= \sum_{p=1}^k \alpha_p x_{\nu p}, & [u_{i\nu}] &= x_{\nu i} + \sum_{p=1}^k \alpha_p x_{ip}, \quad i = \overline{1, k}. \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим факторизацию по подпространству W , порожденному элементами

$$\begin{aligned} [e_{ii}] &= x_{ii}, & i &= \overline{1, k}, \\ [u_{ij}] &= x_{ij} + x_{ji}, & 1 &\leq i < j \leq k \end{aligned}$$

Значит, по модулю W справедливы равенства

$$x_{11} = \dots = x_{kk} = 0, \quad x_{ji} = -x_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq k.$$

Покажем, что элемент $w = (\sum_{q=1}^k \alpha_q [u_{q\nu}]) - [e_{\nu\nu}]$ лежит в пространстве W . В самом деле,

$$\begin{aligned} w &= \left(\sum_{q=1}^k \alpha_q [u_{q\nu}]\right) - [e_{\nu\nu}] = \left(\sum_{q=1}^k \alpha_q (x_{\nu q} + \sum_{p=1}^k \alpha_p x_{qp})\right) - \sum_{p=1}^k \alpha_p x_{\nu p} \\ &\equiv \sum_{q=1}^k \alpha_q \sum_{p=1}^k \alpha_p x_{qp} = \sum_{p,q=1}^k \alpha_p \alpha_q x_{qp} \equiv 0 \pmod{W}. \end{aligned}$$

Это означает, что базисные элементы пространства $[H(A)]$ линейно зависимы, — противоречие. $\square$

6.3.2. Компоненты N_2^-

Напомним, что йорданов бимодуль типа (N_2^-) имеет умножение

$$a \circ [s] = [as + sa^t], \quad s \in S, \quad a \in A.$$

Предложение 6.2. *Йорданов косой бимодуль $[S(A)]$ не может быть правоальтернативным бимодулем над $A = M_n(\Phi)$.*

Доказательство. Рассмотрим строение бимодуля $[S]$ над M_n ($n > 2$). Его размерность — $\frac{n(n-1)}{2}$. Из строения правых модулей (см. раздел 1.2.5) и леммы 6.12 следует, что он распадается в сумму $\frac{n-1}{2}$ правых n -мерных модулей I_n^l . Отсюда сразу следует, что $n = 2n' + 1$, где n' — количество модулей.

Обозначим $w = -[s_{12}]e_{12} - [s_{23}]e_{23} - \dots - [s_{n-1,n}]e_{n-1,n} - [s_{n1}]e_{n1}$. Непосредственно проверяется, что $ws_{ij} = [s_{ij}]$. Введем еще одно обозначение:

$$x_{ij} = we_{ij}.$$

Так как $ws_{ij} = [s_{ij}]$, то $\dim wA = \dim[S] = \frac{n(n-1)}{2}$. Заметим, что $x_{ij}e_{kl} = \delta_{il}x_{kj}$, поэтому можно так выбрать базис в A , чтобы множество $X = \{x_{ij} \mid i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n'}\}$ стало базисом $[S]$.

Пусть $W = \text{span}([s_{ij}] \mid i = \overline{1, n'}, j = \overline{1, n'+2})$.

Очевидно разложение $[s_{ij}] = ws_{ij} = x_{ij} - x_{ji}$, поэтому при $i, j = \overline{1, n'}$ имеем

$$x_{ij} \equiv x_{ji} \pmod{W}.$$

Так как X является базисом $[S]$, то имеются разложения $x_{i, n'+1} = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j x_{ij}$ и $x_{i, n'+2} = \sum_{j=1}^{n'} \beta_j x_{ij}$, причем, α_j и β_j не зависят от выбора $i = \overline{1, n}$. Поскольку $[s_{i, n'+1}] = x_{i, n'+1} - x_{n'+1, i}$ и $[s_{i, n'+2}] = x_{i, n'+2} - x_{n'+2, i}$ лежат в W при $i = \overline{1, n'}$, то и выполнены сравнения

$$x_{n'+1, i} \equiv \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j x_{ij} \pmod{W}, \quad x_{n'+2, i} \equiv \sum_{j=1}^{n'} \beta_j x_{ij} \pmod{W}.$$

Отсюда следует, что для элемента $[s_{n'+1, n'+2}]$, не лежащего в W , имеем

$$\begin{aligned} [s_{n'+1, n'+2}] &= x_{n'+1, n'+2} - x_{n'+2, n'+1} = \sum_{j=1}^{n'} \beta_j x_{n'+1, j} - \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j x_{n'+2, j} \equiv \\ &\equiv \sum_{j=1}^{n'} \beta_j \sum_{i=1}^{n'} \alpha_i x_{ji} - \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j \sum_{i=1}^{n'} \beta_i x_{ji} \equiv \sum_{i, j=1}^{n'} \beta_j \alpha_i x_{ji} - \sum_{i, j=1}^{n'} \alpha_j \beta_i x_{ji} \equiv 0 \pmod{W}. \end{aligned}$$

Противоречие. $\square$

6.4. Косые бимодули

Правоальтернативный A -бимодуль M назовем *косым*, если он является суммой косых йордановых компонент $[S(A)]$: $M = \bigoplus_k [S(A)]_k$.

Правый A -модуль M мы называем *модулем Грейвса*, если $ta \cdot b = t \cdot ba$ для любых $t \in M$, $a, b \in A$.

6.4.1. Критерий правой альтернативности

Лемма 6.15 (Критерий правой альтернативности). *Пусть M — A -бимодуль является суммой косых йордановых бимодулей над A^+ и правым A -модулем Грейвса. Тогда M правоальтернативен в том и только том случае, если для каждой йордановой компоненты $[S]$ имеется такой элемент $w \in M$, что для любого $s \in S$ выполнено*

$$[s] = ws. \quad (6.6)$$

Доказательство. Пусть выполнено свойство (6.6).

Для любого $a \in A$ имеем $a \circ [s] = [as + sa^t] = w(as + sa^t)$, кроме того, $[s]a = ws \cdot a = w \cdot as$. Отсюда следует, что

$$a[s] = w \cdot sa^t. \quad (6.7)$$

Осталось доказать свойство

$$a([s] \circ b) = ab \cdot [s] + a[s] \cdot b. \quad (6.8)$$

Имеем $a([s] \circ b) = a[bs + sb^t] = w \cdot (bs + sb^t)a^t$, $ab \cdot [s] = w \cdot s(ab)^t$, $a[s] \cdot b = (w \cdot sa^t)b = w \cdot bsa^t$, откуда вытекает (6.8).

Теперь предположим, что M — правоальтернативный A -бимодуль и докажем (6.6). Покажем, что в качестве элемента w можно взять элемент

$$w = -([s_{12}]e_{12} + [s_{23}]e_{23} + \cdots + [s_{n-1,n}]e_{n-1,n} + [s_{n1}]e_{n1}).$$

В самом деле, $we_{ij} = -[s_{j,j+1}]e_{i,j+1}$, тогда по леммам 6.11 и 6.13 $ws_{12} = -[s_{23}]e_{13} + [s_{12}]e_{22} = [s_{12}]e_{11} + [s_{12}]e_{22} = [s_{12}]$, что и требовалось. $\square$

6.4.2. Сумма двух косых

Пусть

$$f_{ij} = e_{i,j+1} - e_{j,i+1},$$

тогда определим систему элементов: $F = \{e_{i1}, s_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}, i < j\} \cup \{e_{n, i+1}, f_{ij} \mid i, j = \overline{1, n-1}, i < j\}$. Покажем, что система F образует базис пространства M_n . Во-первых, F состоит из n^2 элементов:

$$n + \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) + \frac{(n-2)(n-1)}{2} = 2n - 1 + (n-1)^2 = n^2.$$

Во-вторых, из соотношений $e_{ij} = s_{ij} + e_{ji}$ ($i < j$) и $e_{ji} = -f_{i-1, j} + e_{i-1, j+1}$ ($i \leq j$) следует, что

$$e_{ij} = s_{ij} - f_{i-1, j} + e_{i-1, j+1} = s_{ij} - f_{i-1, j} + s_{i-1, j+1} - f_{i-2, j+1} + \dots,$$

причем, это сумма обрывается либо на элементе e_{k1} , либо на e_{nk} , значит, всякая матричная единица линейно выражается через систему F .

1°. Определим правый A -модуль M . Рассмотрим векторное пространство M размерности $(n-1)n$ с базисом из формальных слов ve_{ij} при $j \neq 1$. Умножение базисных слов справа на матричные единицы зададим формулой

$$ve_{ij} \cdot e_{kl} = \delta_{li} ve_{kj}.$$

Обозначим $w = \sum_{i=2}^n ve_{ii}$. Покажем, что $M = wA$. Включение $wA \subseteq M$ очевидно. Докажем обратное включение. Для каждого базисного элемента M имеем $ve_{ij} = (\sum_{k=2}^n ve_{kk})e_{ij} = we_{ij} \in wA$.

Кроме того, докажем, что выполнены соотношения

$$w \cdot 1 = w, \quad wa \cdot b = w \cdot ba, \quad we_{i1} = 0.$$

Первое: $w \cdot 1 = (\sum_{i=2}^n ve_{ii}) \cdot \sum_{j=1}^n e_{jj} = \sum_{i,j} ve_{ii} \cdot e_{jj} = \sum_{i=2}^n ve_{ii} = w$.

Второе: $we_{ij} \cdot e_{kl} = (ve_{22} + \dots + ve_{nn})e_{ij} \cdot e_{kl} = ve_{ij} \cdot e_{kl} = \delta_{li} ve_{kj} = \delta_{li} we_{kj} = w \cdot e_{kl}e_{ij}$.

И третье: $we_{i1} = \sum_{j=2}^n ve_{jj} \cdot e_{i1} = \sum_{j=2}^n \delta_{1j} ve_{ij} = 0$.

Значит, M является правым модулем Грейвса.

2°. Определим на пространстве M бимодульную структуру. Введем обозначения для ненулевых элементов из wF :

$$s_{ij}^1 = ws_{ij}, \quad s_{in}^2 = -we_{n, i+1}, \quad s_{ij}^2 = wf_{ij}. \quad (6.9)$$

Будем считать, что элементы s_{ij}^k при фиксированном k образуют стандартный базис косого йорданового бимодуля над A^+ , который обозначим $[S]_k$. Тем самым $M = wA = [S]_1 \oplus [S]_2$ превращается в A -бимодуль.

3°. Покажем, что бимодуль M правоальтернативен. Заметим, что в силу (6.9) элемент w удовлетворяет соотношениям (6.6) для йордановой косой компоненты $[S]_1$.

Рассмотрим жорданову клетку $g = \sum_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1}$ и докажем, что элемент wg удовлетворяет соотношениям (6.6) для йордановой косой компоненты $[S]_2$.

В самом деле, если $j = n$, то

$$wg \cdot s_{in} = w \cdot s_{in}g = w(e_{in}g - e_{ni}g) = -we_{n,i+1} = s_{in}^2.$$

Если $j < n$, то

$$wg \cdot s_{ij} = w \cdot s_{ij}g = w(e_{ij}g - e_{ji}g) = w(e_{i,j+1} - e_{j,i+1}) = wf_{ij} = s_{ij}^2.$$

Тем самым по критерию правой альтернативности бимодуль M правоальтернативен.

4°. Докажем неприводимость бимодуля M . Рассмотрим подбимодуль N , порожденный некоторым элементом t . Разложим t по йордановому базису: $t = \sum_{i < j} \alpha_{ij}s_{ij}^1 + \sum_{i < j} \beta_{ij}s_{ij}^2$. Тогда $(t \circ e_{ii}) \circ e_{jj} = \alpha_{ij}s_{ij}^1 + \beta_{ij}s_{ij}^2$, поэтому для некоторых i и j найдутся α и β ($\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$), такие что $t' = \alpha s_{ij}^1 + \beta s_{ij}^2 \in N$. Если $i \neq 1$, то $t'' = t' \circ e_{1i} = \alpha s_{1j}^1 + \beta s_{1j}^2 \in N$. Если $j \neq n$, то $t''' = t'' \circ e_{nj} = \alpha s_{1n}^1 + \beta s_{1n}^2 \in N$.

Так как $s_{1n}^1 = we_{1n}$ и $s_{1n}^2 = -we_{n2}$, то $t'''e_{11} = \alpha s_{1n}^1 \in N$ и $t'''e_{nn} = \beta s_{1n}^2 \in N$.

Если $s_{1n}^1 \in N$, то $[S]_1 \subseteq N$. Поскольку $-s_{12}^1 e_{12} = -ws_{12} \cdot e_{12} = -w \cdot e_{12}s_{12} = we_{11}$, то

$$-(s_{12}^1 e_{12} + s_{23}^1 e_{23} + \cdots + s_{n1}^1 e_{n1}) = w(e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{nn}) = w \in N,$$

т.е. $M \subseteq N$.

Если же $s_{1n}^2 \in N$, то $s_{1n}^2 = -we_{n2} \in N$, значит, $s_{12}^1 = we_{12} \in N$. Отсюда следует, что $[S]_1 \subseteq N$, и снова $M \subseteq N$.

Так как в обоих случаях $M \subseteq N$, то неприводимость доказана. Тем самым доказано

Предложение 6.3. Для всякого $n \geq 3$ имеется неприводимый правоальтернативный косой бимодуль $M = [S]_1 + [S]_2$.

Простые супералгебры с полупростой четной частью

7.1. Простые супералгебры с четной частью M_2

Этот параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема 7.1. *Всякая простая унитарная правоальтернативная супералгебра $B = A \oplus M$ над полем Φ характеристики, отличной от 2, у которой чётная часть совпадает с алгеброй матриц $A = M_2(\Phi)$ порядка 2, изоморфна либо ассоциативной супералгебре Уолла $W_{2|2}(\omega)$, либо альтернативной супералгебре Шестакова $S_{4|2}(\sigma)$ ($\text{char } \Phi = 3$), либо асимметричному дублю: 8-мерной супералгебре, зависящей от четырех параметров.*

Если основное поле алгебраически замкнуто, то ассоциативная супералгебра, указанная в теореме, изоморфна супералгебре Уолла $M_2[\sqrt{1}]$, являющейся удвоением алгебры $M_2(\Phi)$ (см. [72]); супералгебра $S_{4|2}(\sigma)$ изоморфна $S_{4|2}$; асимметричный дубль изоморфен супералгебре Силва—Мураками—Шестакова (см. [34]).

Всюду ниже $B = A \oplus M$ — простая правоальтернативная унитарная супералгебра, у которой чётная часть $A = M_2(\Phi)$ — матричная алгебра 2-го порядка над полем Φ . В силу результатов главы 4 можно считать, что бимодуль M над A не является альтернативным.

Кроме того, всюду ниже через N обозначается 3-мерный неприводимый йорданов A^+ -бимодуль, определенный равенствами из леммы 1.1; $R = M_r^R$, $L = M_l^R$ (см. раздел 1.2.6).

7.1.1. Канонический базис

Пусть $A = M_2(\Phi)$ и M — правоальтернативный A -бимодуль. Из пп. 1.2.5 и 1.2.6 следует, что $M = R \oplus L$, где R — сумма всех правых A -модулей типа I_2^r ; L — сумма всех правых A -модулей типа I_2^l . Известно, что компоненты разложения M^J типа Φr и N содержатся в L (лемма 1.3); а также, что M^J не имеет компонент изоморфных N' (лемма 1.4). Если M^J имеет компоненту изоморфную регулярному бимодулю над A^+ , то канонические порождающие йорданова A^+ -бимодуля n_1, n_2, n_3, n_4 порождают ассоциативный бимодуль над A , изоморфный регулярному бимодулю над A (лемма 1.5).

Следовательно, R и L являются A -подбимодулями в M . Кроме того, R является ассоциативным A -бимодулем, а L как йорданов A^+ -бимодуль является суммой неприводимых компонент типа Φr и N .

Далее, если модуль N содержится в M^J , то согласно [57] для базисных элементов n_1, n_2, n_3 модуля N выполнены равенства:

$$\begin{aligned} n_1 e_{12} &= (e_{12} n_2) e_{12}, & n_1 e_{21} &= -(e_{21} n_2) e_{21}, \\ e_{12} n_1 &= n_1 e_{12}, & e_{21} n_1 &= n_1 e_{21}, & e_{11} n_3 &= n_3 e_{11}, & e_{22} n_3 &= n_3 e_{22}, \\ 2n_1 e_{12} &= -(n_2 + n_3), & 2n_1 e_{21} &= n_2 - n_3. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Наряду со стандартным базисом n_1, n_2, n_3 введем в N канонический базис:

$$n = n_1, \quad n^+ = n_2 + n_3, \quad n^- = n_2 - n_3,$$

состоящий из базисных элементов йордановых пирсовых компонент.

В терминах канонического базиса равенства (7.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} 0) \quad & n \circ e_{11} = n \circ e_{22} = n, \\ & 2ne_{12} = 2e_{12}n = -n^+, \quad 2ne_{21} = 2e_{21}n = n^-, \\ 1) \quad & n^+ e_{12} = e_{12} n^+ = n^+ e_{22} = e_{22} n^+ = 0, \\ & n^+ e_{11} = e_{11} n^+ = n^+, \quad n^+ \circ e_{21} = -2n, \\ 2) \quad & n^- e_{11} = e_{11} n^- = n^- e_{21} = e_{21} n^- = 0, \\ & n^- e_{22} = e_{22} n^- = n^-, \quad n^- \circ e_{12} = 2n. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Отметим специально, что в [57] символ $n \circ a$ обозначал вдвое меньший элемент, чем наш.

7.1.2. Две леммы о 3-мерном йордановом бимодуле N

Лемма 7.1. Пусть $x \in N$. Тогда если $xe_{12} = xe_{21} = 0$, то $x = 0$.

Доказательство. Напомним, что $N \subseteq L$. Тогда $0 = (xe_{21})e_{12} = x(e_{12}e_{21}) = xe_{11}$. Аналогично, $xe_{22} = 0$. Значит, $x = x \cdot 1 = xe_{11} + xe_{22} = 0$. $\square$

Лемма 7.2. Элементы канонического базиса n, n^+, n^- удовлетворяют равенствам:

$$2e_{11}n + n^+ e_{21} = 0 = 2e_{22}n - n^- e_{12},$$

в частности,

$$2n = n^- e_{12} - n^+ e_{21}.$$

Доказательство. Докажем только первое равенство, поскольку второе доказывается совершенно аналогично. В силу леммы 7.1 и равенства $(n^+ e_{21})e_{21} = n^+ e_{21}^2 = 0$ достаточно проверить, что $(e_{11}n)e_{21} = 0$ и $(2e_{11}n + n^+ e_{21})e_{12} = 0$. В силу (7.2) имеем:

$$(e_{11}n)e_{21} = e_{11}(n \circ e_{21}) = e_{11}n^- = 0,$$

а также

$$\begin{aligned}(2e_{11}n + n^+e_{21})e_{12} &= 2(e_{11}n)e_{12} + n^+(e_{12}e_{21}) = \\ &= -2e_{12}n + 2e_{11}(n \circ e_{12}) + n^+e_{11} = n^+ - 2e_{11}n^+ + n^+e_{11} = 0. \quad \square\end{aligned}$$

7.1.3. Критерий альтернативности A -бимодуля M

Лемма 7.3. Пусть M — правоальтернативный бимодуль над $A = M_2(\Phi)$. Если в M^J присутствуют только 1-мерные йордановы компоненты, то M является альтернативным A -бимодулем Кэли.

Доказательство. В силу леммы 1.3 верно равенство $M = L$, т.е. M является суммой правых A -модулей C типа I_2^l , т.е. $C = \Phi m_1 + \Phi m_2$, $m_i e_{jk} = \delta_{ik} m_j$. Если $j \neq k$, то, учитывая свойства 1-мерных йордановых компонент $p \circ e_{jk} = 0$ и $p \circ e_{ii} = p$, имеем:

$$e_{jk}p = -pe_{jk} = \overline{pe_{jk}} \quad \text{и} \quad e_{jj}p = p - pe_{jj} = \overline{pe_{jj}}.$$

Используя правую альтернативность и указанные равенства, получаем

$$e_{jj}m_i = (e_{jk}e_{kj})m_i = -(e_{jk}m_i)e_{kj} = (m_i e_{jk})e_{kj} = m_i(e_{kj}e_{jk}) = m_i e_{kk} = m_i \overline{e_{jj}}.$$

Отсюда вытекает, что C является бимодулем над A и выполнено равенство $am = m\bar{a}$, т.е. C является бимодулем Кэли. Значит, M также альтернативный бимодуль Кэли. $\square$

Лемма 7.4. Выполнены равенства $R * L = 0$.

Доказательство. Пусть $a, b \in A$, $r \in R$, $l \in L$; $w = [a, b]$. Тогда $(l, a, b) = (la)b - l(ab) = l(ba - ab) = -l[a, b] = -lw$. Далее, в силу тождества Клейнфелда имеем:

$$\begin{aligned}(rl, a, b) + (r, l, w) &= r(l, a, b) + (r, a, b)l, \\ (lr, a, b) + (l, r, w) &= l(r, a, b) + (l, a, b)r.\end{aligned}$$

Откуда в силу ассоциативности алгебры A , ассоциативности A -бимодуля R и равенства $(l, a, b) = -lw$ имеем

$$(r, l, w) = r(l, a, b) = -r(lw), \quad (l, r, w) = (l, a, b)r = -(lw)r.$$

Отсюда на основании равенства $A' = \text{idl}_A([A, A]) = [A, A]A = A$ получаем

$$(rl)w - r(lw) = -r(lw), \quad (rl)w = 0, \quad rl = 0,$$

и аналогично, $(l, w, r) = (lw)r$, $(lw)r - l(wr) = (lw)r$, $l(wr) = 0$. Поскольку ввиду ассоциативности A -бимодуля R выполнено $A'R = [A, A]A \cdot R = [A, A] \cdot AR \subseteq [A, A]R$, то $l(A'r) = 0$ и $lr = 0$. Тем самым, $R * L = 0$. $\square$

Лемма 7.5. *Если $R^2 \neq 0$, то M^J не содержит 3-мерных йордановых неприводимых бимодулей. Далее, если $R \neq 0$, то M является альтернативным A -бимодулем.*

Доказательство. Допустим, что $R^2 \neq 0$. Поскольку R^2 — правый идеал в A , то R^2 содержит идемпотент и, без ограничения общности, можно считать, что $e = e_{11} \in R^2$. В самом деле, в качестве e_{11} можно взять идемпотент, лежащий в каком-нибудь минимальном правом идеале, а в качестве e_{22} взять $1 - e_{11}$. Матричные единицы e_{12} и e_{21} выбираются в соответствующих пирсовых компонентах ассоциативной алгебры A .

Итак, для некоторых $x_i, y_i \in R$ верно $e = e_{11} = \sum_i x_i y_i$.

Рассмотрим йорданову пирсову компоненту $M_1 = M_1(e)$ относительно идемпотента e , т.е. $M_1 = \{m \in M \mid m.e = m\}$. Тогда для любого $m \in M_1$ верно

$$me + em = 2m, \quad me + (em)e = 2me, \quad me = (em)e.$$

Используя запись квадратичного оператора U_e в правоальтернативной алгебре $A \oplus M$ — расщепляемое нулевое расширение, получаем

$$2(em)e = (e \circ m) \circ e - m \circ e^2 = 4m - 2m = 2m,$$

откуда $m = me$ и $m = em$. Значит,

$$m = em = \left(\sum_i x_i y_i \right) m = \sum_i (x_i m \cdot y_i + x_i [y_i, m]) \in R.$$

Учитывая, что 3-мерный йордановый неприводимый бимодуль из L содержит свои одномерные пирсовы компоненты (см. раздел 1.2.3), получаем, что в разложении M^J не может быть 3-мерных йордановых неприводимых бимодулей типа N .

Тогда L — альтернативный A -бимодуль по лемме 7.3, значит, $M = R + L$ также альтернативный A -бимодуль.

Если же $R^2 = 0$, то учитывая равенство $R * L = 0$, доказанное в лемме 7.4, получаем $R * M = 0$. Тогда $R \triangleleft B$ (идеал), откуда в силу простоты супералгебры заключаем, что $M = R$ — ассоциативный A -бимодуль или $R = 0$.

Тем самым, в каждом из рассмотренных случаев $R^2 \neq 0$ и $R^2 = 0$ доказано, что M является альтернативным A -бимодулем. $\square$

Лемма 7.6 (Критерий альтернативности). *Бимодуль M над A альтернативен тогда и только тогда, когда он не содержит неприводимых 3-мерных йордановых бимодулей над A^+ .*

Доказательство. В силу леммы 7.3 достаточно проверить, что альтернативный A -бимодуль M не содержит 3-мерных неприводимых йордановых бимодулей над A^+ .

Пусть n, n^+, n^- — канонический базис йорданова модуля N и бимодуль M альтернативен. В силу (7.2) и альтернативности имеем

$$\begin{aligned} 2ne_{11} &= (n^- \circ e_{12})e_{11} = e_{12}(n^-e_{11}) + n^-(e_{12}e_{11}) = 0, \\ -2ne_{22} &= (n^+ \circ e_{21})e_{22} = e_{21}(n^+e_{22}) + n^+(e_{21}e_{22}) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает $n = 0$, что невозможно. $\square$

7.1.4. 3-мерные йордановы компоненты в M^J

M_2 -супералгебры произвольной размерности с сильно альтернативной четной частью были описаны в лемме 4.21, поэтому далее можно считать, что M не является альтернативным A -бимодулем; тогда M^J по лемме 7.5 содержит только 1-мерные и 3-мерные неприводимые йордановы компоненты и верно равенство $M = L$.

Лемма 7.7. *Если $B = A + M$ — простая супералгебра над $A = M_2(\Phi)$ и N — 3-мерный неприводимый йорданов A^+ -подбимодуль в M , то $MN = 0$.*

Доказательство. Поскольку $M = L$, то достаточно понять, что выполнены равенства $m_i x = 0$ ($i = 1, 2$) для стандартного базиса m_i ($i = 1, 2$) правого бимодуля L_2^l и некоторого $0 \neq x \in N$. Отсюда следует, что $Mx = 0$. Тогда $M(xR_{a_1}^+ \dots R_{a_k}^+) = 0$ для любых $a_1, \dots, a_k \in A$ и $R_a^+ : m \mapsto m.a$. В силу неприводимости N имеем $MN = 0$.

Пусть n, n^+, n^- — канонический базис N . Тогда имеем $(m_1 n)e_{22} = m_1(n \circ e_{22}) = m_1 n$. Умножая обе части этого равенства справа на e_{12} , получаем $(m_1 n)e_{12} = (m_1 n)e_{22}e_{12} = 0$; и далее ввиду правой альтернативности

$$0 = (m_1 n)e_{12} = -(m_1 e_{12})n + m_1(n \circ e_{12}) = m_1(n \circ e_{12}) = -m_1 n^+.$$

Итак, $m_1 n^+ = 0$. С другой стороны, ввиду (7.2) и правой альтернативности имеем

$$2m_2 n^+ = m_2(n^+ \circ e_{11}) = (m_2 n^+)e_{11},$$

откуда $m_2 n^+ = 0$, поскольку оператор правого умножения $R_{e_{11}}$ является проектированием. Итак, $m_i n^+ = 0$ ($i = 1, 2$). $\square$

7.1.5. Компоненты разложения нечетной части

Из леммы 7.7 следует, что M^J не может быть суммой 3-мерных йордановых бимодулей типа N . В силу леммы 7.3 M^J не может быть суммой 1-мерных йордановых бимодулей типа P . Значит,

$$M^J = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_l, \quad \text{причем, } k, l \geq 1.$$

Наша ближайшая цель доказать $N_i P_j \neq 0$, т.е. 3-мерная и 1-мерная компоненты не могут аннулироваться.

Лемма 7.8. Пусть $M^J = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_l$, где все слагаемые неприводимы и имеют размерности 3 и 1 соответственно. Если $N_i M = 0$ для некоторого i , то $N_j M = 0$ для любого j .

Доказательство. В силу правой альтернативности, леммы 7.7 и условия имеем

$$-N_i(N_j M) = (N_i, N_j, M) = (N_i, M, N_j) = 0.$$

Поскольку $M = L$, то $N_i(A \cdot N_j M) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= N_i(A[N_j, M]) = N_i((AN_j)M) = -N_i((N_j A)M) + N_i((N_j \circ A)M) = \\ &= -N_i((N_j A)M) = N_i((N_j M)A) - N_i(N_j(A \circ M)) = N_i((N_j M)A), \end{aligned}$$

откуда $N_i((N_j M)A) \cdot A = N_i(A(N_j M)A) = 0$. Поскольку $A(N_j M)A$ — идеал в простой алгебре A , то $N_j M = 0$, иначе, $A(N_j M)A = A$ и $N_i = 0$, что невозможно. $\square$

Лемма 7.9. Пусть P, N — неприводимые йордановы бимодули над A^+ , причем $P = \Phi p$ и $\dim N = 3$. Если $Np = 0$, то $Mp = 0$.

Доказательство. Имеем в силу правой альтернативности и леммы 7.7

$$\begin{aligned} (M, p, N) &= (M, N, p) = (MN)p - M(Np) = 0, \\ 0 &= (M, p, N) = (Mp)N - M(pN) = (Mp)N. \end{aligned}$$

Пусть $a \in Mp \subseteq A$; тогда $aN = 0$. Для произвольных элементов $b \in A$, $x \in N$ имеем

$$(ab)x = -(ax)b + a(b \circ x) \subseteq (aN)A = 0.$$

Поскольку aA — правый идеал в A , то можно считать, что $aA = \Phi e_{11} + \Phi e_{12}$ и $e_{12}N = 0$, откуда ввиду (7.2) получаем противоречие: $n^+ = -2e_{12}n = 0$. $\square$

7.1.6. Согласованность йордановых компонент

Лемма 7.10. Пусть $N = \text{span}(n, n^+, n^-)$, $P = \Phi p$ — неприводимые йордановы бимодули над A^+ . Тогда для подходящего $\gamma \in \Phi$ справедливы равенства:

$$np = \gamma(e_{11} - e_{22}), \quad n^+p = 2\gamma e_{12}, \quad n^-p = 2\gamma e_{21}.$$

Доказательство. Пусть $J = G(B^+)$ — грассманова оболочка супералгебры B^+ . Так как в силу (7.2) $n^+.e_{11} = n^+$, $n^-.e_{11} = 0$, то $n^+ \otimes g_i \in J_1(e_{11})$, $n^- \otimes g_i \in J_0(e_{11})$. Учитывая, что $p \otimes g_i \in J_{\frac{1}{2}}(e_{11})$ и используя свойства пирсовых компонент йордановой алгебры J , имеем $(n^+ \otimes g_1) \cdot (p \otimes g_2) \in J_{\frac{1}{2}}(e_{11})$, откуда $[n^+, p] \in A_{\frac{1}{2}}(e_{11})$. Учитывая равенство $pN = 0$, вытекающее из леммы 7.7, получаем $n^+p = \alpha_{12}e_{12} + \alpha_{21}e_{21}$. Поскольку

$$(n^+p)e_{11} = -(n^+e_{11})p + n^+p = -n^+p + n^+p = 0,$$

то $\alpha_{21}e_{21} = 0$, значит, $\alpha_{21} = 0$ и $n^+p = \alpha_{12}e_{12}$. Аналогично, $n^-p = \beta_{21}e_{21}$. Далее, поскольку $np = \gamma_{11}e_{11} + \gamma_{22}e_{22}$ и $-2ne_{12} = n^+$, то

$$2\gamma_{11}e_{11}e_{12} = 2(np)e_{12} = -2(ne_{12})p = n^+p = \alpha_{12}e_{12},$$

откуда $\alpha_{12} = 2\gamma_{11}$. Аналогично, ввиду $2ne_{21} = n^-$ имеем

$$2\gamma_{22}e_{22}e_{21} = 2(np)e_{21} = -2(ne_{21})p = -n^-p = -\beta_{21}e_{21},$$

откуда $\beta_{21} = -2\gamma_{22}$. Тогда имеем

$$2e_{12}[n, p] = 2e_{12}(np) = 2e_{12}(\gamma_{11}e_{11} + \gamma_{22}e_{22}) = 2\gamma_{22}e_{12}$$

и

$$2(e_{12}n)p - 2(e_{12}p)n = -n^+p = -\alpha_{12}e_{12} = -2\gamma_{11}e_{12},$$

значит, $\gamma_{22} = -\gamma_{11}$. Полагая $\gamma_{11} = \gamma$, получаем требуемое. $\square$

Определение. Канонические базисы неприводимых йордановых бимодулей N , P , размерности которых 3 и 1, назовем *согласованными*, если выполнены соотношения из леммы 7.10 при $\gamma \neq 0$.

7.1.7. Коммутатор 1-мерных компонент

Лемма 7.11. Пусть N , $P = \Phi p$, $Q = \Phi q$ — три неприводимых йордановых бимодуля над A^+ и $\dim_{\Phi} N = 3$. Если N, P согласованы, то $[p, q] = \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22} \neq 0$.

Доказательство. Пусть, как и прежде, $J = G(B^+)$ — грассманова оболочка B^+ . Поскольку $p \otimes g_i, q \otimes g_j \in J_{\frac{1}{2}}(e_{11})$, то $(p \otimes g_i) \cdot (q \otimes g_j) \in J_0(e_{11}) + J_1(e_{11})$, значит, $[p, q] = \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22}$. Допустим, что $[p, q] = 0$. В силу леммы 7.10 можно считать, что выполнены равенства:

$$\begin{aligned} np &= e_{11} - e_{22}, & n^+p &= 2e_{12}, & n^-p &= 2e_{21}, \\ nq &= \delta(e_{11} - e_{22}), & n^+q &= 2\delta e_{12}, & n^-q &= 2\delta e_{21}. \end{aligned}$$

Тогда $(\forall x \in N)(xp)q = (xq)p$, значит, $(n^+p)q = (n^+q)p$, $(n^-p)q = (n^-q)p$ и

$$2e_{12}q = 2\delta e_{12}p, \quad 2e_{21}q = 2\delta e_{21}p.$$

Полагая $u = q - \delta p$, имеем $e_{12}u = e_{21}u = 0$, значит, $ue_{12} = ue_{21} = 0$, $ue_{11} = ue_{22} = 0$ и $u = 0$, т.е. p, q линейно зависимы, что невозможно. Итак, доказано, что $[p, q] \neq 0$. $\square$

7.1.8. Согласованность 1-мерной компоненты с 3-мерными

Лемма 7.12. *Одномерный бимодуль P не может быть согласован с двумя различными 3-мерными бимодулями N и K .*

Доказательство. Допустим противное, т.е. что модуль P согласован с модулями N и K , т.е. выполнены равенства: $np = kp = e_{11} - e_{22}$.

Поскольку $(n, p, k) = (n, k, p)$, то $(np)k + n(kp) = 0$. Значит, замечая, что $k \circ (e_{11} - e_{22}) = 0$ в силу (7.2), имеем

$$0 = (np)k + n(kp) = (e_{11} - e_{22})k + n(e_{11} - e_{22}) = (-k + n)(e_{11} - e_{22}).$$

Поскольку $(e_{11} - e_{22})^2 = 1$, то $k = n$, — противоречие. $\square$

7.1.9. Кратности согласованных компонент

Из лемм 7.12 и 7.9 следует $M^J = N \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_l$. Покажем, что на самом деле $l = 1$.

Лемма 7.13. *Если $M^J = N \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_l$, то $l = 1$.*

Доказательство. Пусть $l \geq 2$ и положим что $P = P_1$ согласован с 3-мерным модулем N . Положим $Q = P_2$. Тогда $N + P + Q = N \oplus P \oplus Q$ и имеет место один из случаев:

$$\text{а) } np = nq = e_{11} - e_{22}, \quad n^+p = n^+q = 2e_{12}, \quad n^-p = n^-q = 2e_{21}$$

или

$$\text{б) } np = e_{11} - e_{22}, \quad n^+p = 2e_{12}, \quad n^-p = 2e_{21}, \quad nq = n^+q = n^-q = 0.$$

Заметим, что случай а) сводится к б), если положить $q := q - p$.

Итак, пусть выполнен случай б). Тогда $x[p, q] = (xp)q$ для любого $x \in N$ и, значит, выполнены равенства:

$$\begin{aligned} n[p, q] &= (np)q = (e_{11} - e_{22})q = -q(e_{11} - e_{22}), \\ n^+[p, q] &= (n^+p)q = 2e_{12}q = -2qe_{12}, \\ n^-[p, q] &= (n^-p)q = 2e_{21}q = -2qe_{21}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Отсюда, считая $a = [p, q] = \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22}$, имеем

$$na = -q(e_{11} - e_{22}), \quad n^+a = -2qe_{12}, \quad n^-a = -2qe_{21}$$

или

$$\begin{aligned} 2na &= -2q(e_{11} - e_{22}) = -2qe_{11} + 2qe_{22}, \\ n^+(e_{21}a) &= -2qe_{22}, \quad n^-(e_{12}a) = -2qe_{11}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 2na + n^+(e_{21}a) - n^-(e_{12}a) &= 0, \\ 2n(\lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22}) + \lambda_1 n^+e_{21} - \lambda_2 n^-e_{12} &= 0. \end{aligned}$$

После умножения справа обеих частей последнего равенства на e_{11} , получаем:

$$2\lambda_1 ne_{11} - \lambda_2 n^-e_{12} = 0. \tag{7.4}$$

Из леммы 7.2 имеем $2n + n^+e_{21} - n^-e_{12} = 0$ и умножая справа на e_{11} , имеем

$$2ne_{11} - n^-e_{12} = 0. \tag{7.5}$$

Сравнивая равенства (7.4) и (7.5), получаем $(\lambda_1 - \lambda_2)n^-e_{12} = 0$. Поскольку $n^-e_{12} \neq 0$ (иначе $0 = (n^-e_{12})e_{21} = n^-e_{22} = n^-$), то $\lambda_1 = \lambda_2$ и $a = \lambda_1 \cdot 1$. Так как $a \neq 0$ (иначе $q = 0$), то, заменяя q на $\lambda_1^{-1}q$, можно считать, что $a = [p, q] = 1$. Тогда равенства (7.3) принимают вид:

$$n = -q(e_{11} - e_{22}), \quad n^+ = -2qe_{12}, \quad n^- = -2qe_{21}. \tag{7.6}$$

Кроме того, из равенства (7.6) следует $-q = n(e_{11} - e_{22})$. Значит,

$$-qp = n(e_{11} - e_{22}) \cdot p = -np \cdot (e_{11} - e_{22}) = -(e_{11} - e_{22})^2 = -1,$$

т.е. $qp = 1$. Отсюда следует, что $1 = [p, q] = pq - qp = pq - 1$, т.е. $pq = 2$.

Далее, поскольку $[n, q] = 0$ и $pn = 0$, то $0 = p[n, q] = (pn)q - (pq)n = -2n$. Получили противоречие. $\square$

Из леммы 7.13 следует, что M — неприводимый 4-мерный A -бимодуль.

7.2. Асимметричные дубли

Простые неальтернативные правоальтернативные супералгебры с чётной частью M_2 называются *асимметричными дублями* и обозначаются $B_{4|4}(w)$, где $w = p^2 \in M_2$.

7.2.1. Операции в $B_{4|4}(w)$ относительно канонического базиса

В лемме 7.13 доказано, что всякая простая неальтернативная правоальтернативная супералгебра с четной частью M_2 имеет четырёхмерную нечётную часть $M = P + N$, где $P = \Phi p$ и $N = \text{span}(n, n^+, n^-)$ — неприводимые бимодули над йордановой алгеброй M_2^+ невырожденной симметрической билинейной формы на пространстве бесследных матриц, т.е.

$$p \circ e_{11} = p \circ e_{22} = p, \quad p \circ e_{12} = p \circ e_{21} = 0. \quad (7.7)$$

Кроме того, йордановы бимодули P и N должны быть согласованы, т.е. справедливы равенства:

$$np = e_{11} - e_{22}, \quad n^+p = 2e_{12}, \quad n^-p = 2e_{21}. \quad (7.8)$$

Из согласованности йордановых компонент P и N и леммы 7.10 следует, что $\text{span}(e_{11} - e_{22}, e_{12}, e_{21}) = NP \subseteq M^2$. А так как M^2 является правым модулем в M_2 , то

$$(P + N)P = M^2 = M_2,$$

значит, $w = p^2$ имеет ненулевой след: $\text{tr } w \neq 0$.

Поскольку $M^2 = M_2$, то можно так выбрать векторы x_{ij} , чтобы выполнялись соотношения

$$x_{ij}p = e_{ij}. \quad (7.9)$$

Так как при действии линейного оператора R_p образами векторов x_{ij} являются четыре линейно независимых вектора, то эти векторы будут базисом нечетной части $M = P + N$. Этот базис является «двойственным» по отношению к стандартному базису e_{ij} четной части M_2 , назовем его *каноническим*.

Обозначим $\eta = \text{tr}^{-1}w$ и $w = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}$. Используя соотношения (7.8), проверим, что следующие элементы образуют канонический базис

$$\begin{aligned} x_{12} &= \frac{n^+}{2}, & x_{21} &= \frac{n^-}{2}, \\ x_{11} &= \eta \left(\omega_{22}n - \frac{\omega_{12}}{2}n^+ - \frac{\omega_{21}}{2}n^- + p \right), \\ x_{22} &= \eta \left(-\omega_{11}n - \frac{\omega_{12}}{2}n^+ - \frac{\omega_{21}}{2}n^- + p \right). \end{aligned}$$

Соответствующие равенства для элементов x_{12} и x_{21} очевидны. Далее,

$$\begin{aligned} x_{11}p &= \eta \left(\omega_{22}np - \frac{\omega_{12}}{2}n^+p - \frac{\omega_{21}}{2}n^-p + p^2 \right) = \\ &= \eta(\omega_{22}(e_{11} - e_{22}) - \omega_{12}e_{12} - \omega_{21}e_{21} + \\ &+ \omega_{11}e_{11} + \omega_{12}e_{12} + \omega_{21}e_{21} + \omega_{22}e_{22}) = \\ &= \eta(\omega_{22}e_{11} + \omega_{11}e_{11}) = (\eta \cdot \text{tr } w)e_{11} = e_{11}. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется и последнее равенство $x_{22}p = e_{22}$.

Отсюда непосредственно получаем, что

$$\begin{aligned} x_{11}x_{22} &= x_{11}^2 = \eta e_{11}, \\ x_{22}x_{11} &= x_{22}^2 = \eta e_{22}, \\ x_{12}x_{11} &= x_{12}x_{22} = \eta e_{12}, \\ x_{21}x_{11} &= x_{21}x_{22} = \eta e_{21}, \\ Mx_{12} &= Mx_{21} = 0. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Из формул (7.9) следует, что оператор R_p обратим, кроме того, координаты произвольного вектора $x \in M$ в каноническом базисе x_{ij} совпадают с координатами вектора $xp \in M_2$ в базисе e_{ij} .

Пусть $a = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, обозначим через $[a] = \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij}x_{ij}$, другими словами, $[a]p = a$ и $[a] = aR_p^{-1}$.

Из формул (7.10) следует равенство

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\beta_{11} + \beta_{22}) & \alpha_{12}(\beta_{11} + \beta_{22}) \\ \alpha_{21}(\beta_{11} + \beta_{22}) & \alpha_{22}(\beta_{11} + \beta_{22}) \end{pmatrix}.$$

Другими словами, выполнено равенство

$$[a][b] = ab^\nu, \tag{7.11}$$

где $b^\nu = \frac{\text{tr } b}{\text{tr } w}$. Заметим, кстати, что $w^\nu = 1$.

Далее получаем $[e_{ij}]e_{kl} \cdot p = -[e_{ij}]p \cdot e_{kl} + [e_{ij}](p \circ e_{kl}) = -e_{ij}e_{kl} + \delta_{kl}e_{ij} = e_{ij}(\text{tr } e_{kl} - e_{kl}) = e_{ij}\overline{e_{kl}}$, значит, $[e_{ij}]e_{kl} = [e_{ij}\overline{e_{kl}}]$. Из этого соотношения следует, что для любых матриц $a, b \in M_2$ выполнено свойство

$$[a]b = [a\overline{b}]. \tag{7.12}$$

Используя (7.7), получим вспомогательное равенство

$$e_{ij}p = e_{ij} \circ p - pe_{ij} = \delta_{ij}p - pe_{ij} = p(\text{tr } e_{ij} - e_{ij}) = p\overline{e_{ij}}.$$

Применяя это равенство, получаем:

$$\begin{aligned} e_{ij}p \cdot p &= p\overline{e_{ij}} \cdot p = -p^2\overline{e_{ij}} + p(\overline{e_{ij}} \circ p) = -p^2\overline{e_{ij}} + p \cdot \delta_{ij}p = \\ &= p^2(\delta_{ij} - \overline{e_{ij}}) = we_{ij}, \end{aligned}$$

значит, из соответствия базисов при действии оператора R_p получаем, что $e_{ij}p = [we_{ij}]$.

Таким образом, получена формула

$$ap = [wa].$$

Заметим, что $p \cdot p = w$, значит, $p = [w]$; тогда ввиду нечетности элементов $[b]$ и p получаем $a[b] \cdot p = ap \cdot [b] + a \cdot [b]D_p = [wa][b] + a \cdot [b]D_{[w]} = wa \cdot b^\nu + a(bw^\nu - wb^\nu) = ab - aD_w b^\nu$, таким образом,

$$a[b] = [ab - aD_w b^\nu]. \quad (7.13)$$

7.2.2. Конструкция дублей

Пусть ν — обобщенный след на M_2 , т.е. линейный функционал такой, что существует $\mu \in \Phi^\times$: $(\forall a) a^\nu = \mu \cdot \text{tr}(a)$. Допустим, что $[M_2]$ — линейная копия M_2 . Если D — дифференцирование на M_2 , то обозначим через $B(M_2, \nu, D)$ супералгебру с четной частью M_2 , нечетной частью $[M_2]$ и следующим умножением однородных элементов:

$$[a][b] = a \cdot b^\nu, \quad [a]b = [a\bar{b}], \quad a[b] = [ab - aD \cdot b^\nu].$$

Знак « $-$ » поставлен в соответствии с формулой (7.13). Известно, что всякое дифференцирование на M_2 внутреннее, значит, для любого $a \in M_2$ верно

$$(a^D)^\nu = 0. \quad (7.14)$$

Кроме того, поскольку ядра функционалов ν и tr совпадают, то для любых $a, b \in M_2$ верно

$$a^\nu \cdot \text{tr}(b) = b^\nu \cdot \text{tr}(a). \quad (7.15)$$

Предложение 7.1. *Дубль $B(M_2, \nu, D)$ является правоальтернативной супералгеброй.*

Доказательство. Поскольку $\overline{b^2} = \bar{b}^2$, то $([a], b, b) = ([a]b)b - [a]b^2 = [a\bar{b}^2] - [a \cdot \bar{b}^2] = 0$. Значит, для доказательства предложения необходимо рассмотреть следующие 4 случая.

$$\begin{aligned}
1^\circ (a, b, [c]) &= (ab)[c] - a(b[c]) = \\
&= [abc - (ab)^D c^\nu] - a[bc - b^D c^\nu] = \\
&= [abc - (ab)^D c^\nu] - [a(bc - b^D c^\nu) - a^D (bc - b^D c^\nu)^\nu] = \\
&= [abc - (ab)^D c^\nu - abc + ab^D c^\nu + a^D (bc)^\nu] \quad \text{ввиду (7.14)} \\
&= [-a^D b c^\nu + a^D (bc)^\nu]
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
(a, [c], b) &= (a[c])b - a([c]b) = [ac - a^D c^\nu] b - a[c\bar{b}] = \\
&= [ac\bar{b} - a^D c^\nu \bar{b}] - [ac\bar{b} - a^D (c\bar{b})^\nu] = [a^D (-\bar{b}c^\nu + (c\bar{b})^\nu)].
\end{aligned}$$

Поскольку на основании (7.15) верно равенство

$$bc^\nu - (bc)^\nu + \bar{b}c^\nu - (c\bar{b})^\nu = c^\nu \cdot \text{tr}(b) - ((b + \bar{b})c)^\nu = c^\nu \cdot \text{tr}(b) - (c \cdot \text{tr}(b))^\nu = 0,$$

то $(a, b, [c]) + (a, [c], b) = 0$.

$$\begin{aligned}
2^\circ ([a], b, [c]) &= ([a]b)[c] - [a](b[c]) = \\
&= [a\bar{b}][c] - [a][bc - b^D c^\nu] = a\bar{b} \cdot c^\nu - a \cdot (bc - b^D c^\nu)^\nu = \\
&= a\bar{b} \cdot c^\nu - a \cdot (bc)^\nu = a(\bar{b} \cdot c^\nu - (bc)^\nu),
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
([a], [c], b) &= ([a][c])b - [a]([c]b) = \\
&= ac^\nu b - [a][c\bar{b}] = a(c^\nu b - (c\bar{b})^\nu).
\end{aligned}$$

На основании (7.14) имеем

$$\bar{b} \cdot c^\nu - (bc)^\nu + c^\nu b - (c\bar{b})^\nu = \bar{b} \cdot c^\nu + c^\nu b - (bc)^\nu - (c\bar{b})^\nu = c^\nu \cdot \text{tr}(b) - (c \cdot \text{tr}(b))^\nu = 0,$$

значит, $([a], b, [c]) + ([a], [c], b) = 0$.

$$\begin{aligned}
3^\circ \text{ Поскольку } (a, [b], [c]) &= (a[b])[c] - a([b][c]) = \\
&= [ab - a^D b^\nu][c] - abc^\nu = (ab - a^D b^\nu)c^\nu - abc^\nu = -a^D b^\nu c^\nu,
\end{aligned}$$

то $(a, [b], [c]) = (a, [c], [b])$.

$$\begin{aligned}
4^\circ \text{ Поскольку } ([a], [b], [c]) &= ([a][b])[c] - [a]([b][c]) = \\
&= ab^\nu[c] - [a]bc^\nu = [ab^\nu c - a^D b^\nu c^\nu] - [a\bar{b}c^\nu] = [ab^\nu c - a^D b^\nu c^\nu - a\bar{b}c^\nu],
\end{aligned}$$

то достаточно понять, что $b^\nu c - \bar{b}c^\nu = c^\nu b - c\bar{b}^\nu$. Последнее равенство равносильно следующим: $b^\nu c + c\bar{b}^\nu = c^\nu b + \bar{b}c^\nu$, $b^\nu \cdot \text{tr}(c) = c^\nu \cdot \text{tr}(b)$. Осталось заметить, что последняя формула совпадает с (7.15). □

Предложение 7.2. *Дубль $B = B(M_2, \nu, D)$ является простой супералгеброй тогда и только тогда, когда $\nu \neq 0$.*

Доказательство. Если $\nu = 0$, то нечетная часть имеет нулевое умножение, и, значит, является собственным идеалом в B .

Допустим, что $\nu \neq 0$. Пусть $A = M_2$, $M = [M_2]$. Если $0 \neq [I]$ — подбимодуль в M , то I — правый идеал в M_2 , удовлетворяющий свойствам:

$$a[i] = [ai - a^D i^\nu], \quad [a][i] = a \cdot i^\nu \text{ для любых } a \in A, i \in I.$$

Если $I^\nu \neq 0$, то идеал J , порожденный в B множеством $[I]$, содержит 1, значит, совпадает с B . Если же $I^\nu = 0$, то $a[i] = [ai]$, т.е. I — двусторонний идеал в A , значит, $I = A$ и $\nu = 0$, — противоречие. $\square$

7.3. Супералгебры с полупростой четной частью

Все супералгебры в этом параграфе рассматриваются над полем Φ характеристики $\neq 2$; без ограничения общности основное поле можно считать алгебраически замкнутым.

7.3.1. Центральные идемпотенты

Всюду ниже $B = A \oplus M$ — конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра с полупростой четной частью.

По теореме Альберта [26] всякая конечномерная полупростая правоальтернативная алгебра альтернативна, значит, по теореме Цорна (см. [73]) является суммой идеалов, изоморфных матричным алгебрам над алгебрами с делением и алгебрам Кэли—Диксона над центром.

Пусть $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, где A_i — простая альтернативная алгебра с единицей e_i . Обозначим через $E = \{e_i \mid i = \overline{1, n}\}$ полную ортогональную систему центральных идемпотентов; число n назовем ёмкостью алгебры A .

Лемма 7.14. *Выполнены соотношения $(B, A, E) = (B, E, A) = 0$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.2.

Лемма 7.15. *Справедливы равенства: $[E, A] = 0$, $(E, M, M) = 0$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.2.

7.3.2. Предварительные леммы

Рассмотрим компоненты M_{ii} и M_{ij} ($i \neq j$) относительно полной системы центральных идемпотентов E :

$$M_{ii} = \{x_{ii} := (e_i x) e_i \mid x \in M\},$$

$$M_{ij} = \{x_{ij} := (e_i x) e_j + (e_j x) e_i \mid x \in M\}.$$

Легко видеть, что имеет место разложение:

$$M = \bigoplus_{i,j=1}^n M_{ij}.$$

Заметим, что указанные пространства M_{ii} и M_{ij} являются йордановыми компонентами пространства M относительно E в присоединенной супералгебре B^+ (см. [50]).

Далее в этом параграфе используются обозначения $a_i, b_i \in A_i$, $x_{ij} \in M_{ij}$.

Перечислим свойства йордановых компонент, доказанные в главе 3.

Лемма 7.16 (лемма 3.5). *Для элементов компоненты M_{11} выполнены соотношения:*

- а) $e_1 x_{11} = x_{11} e_1 = x_{11}$;
- б) $a_2 x_{11} = x_{11} a_2 = 0$;
- в) $x_{11} \circ a_1 \in M_{11}$, $(x_{11} a_1) e_1 = x_{11} a_1$, $(a_1 x_{11}) e_1 = a_1 x_{11}$.

Лемма 7.17 (лемма 3.6). *Справедливы следующие равенства:*

- а) $x_{12} \circ e_1 = x_{12}$;
- б) $e_1 x_{12} = e_1 x_{12} \cdot e_2 = x_{12} e_2$, $e_1 x_{12} \cdot e_2 + e_2 x_{12} \cdot e_1 = x_{12}$;
- в) $(e_1 + e_2) x_{12} = x_{12} (e_1 + e_2) = x_{12}$;
- г) $e_1 x_{12} \cdot e_1 = 0$.

Лемма 7.18 (лемма 3.7). *Если $i \notin \{j, k\}$, то $a_i x_{jk} = x_{jk} a_i = 0$.*

Лемма 7.19 (лемма 3.8). *Выполнены следующие равенства:*

- а) $x_{12} \circ a_1 \in M_{12}$;
- б) $a_1 x_{12} \cdot e_1 = 0$.

Лемма 7.20. *Если $x, y \in M_{12}$, $a, b \in A_1$, $e = e_1$, то*

- а) $ax \cdot b = 0$;
- б) $ab \cdot x = a(b \circ x)$;
- в) $ax = e(a \circ x)$, $xa = (x \circ a)e$;
- г) если $a \circ x = 0$, то $ax = xa = 0$;
- д) $(xa \cdot y)b = 0$.

Доказательство. **а)** Имеем по лианеризованному тождеству Муфанг (1.9): $ax \cdot b = a(ex \cdot e_2 + e_2x \cdot e) \cdot b = (ax \cdot e_2)b$. Значит, по лемме 7.14 $ax \cdot b = 0$.

б) По п. **а)**: $ab \cdot x = -ax \cdot b + a(b \circ x)$.

в) Первое равенство непосредственно следует из п. **б)**. Далее, по лемме 7.14 и п. **а)**: $xa = xae = (x \circ a)e - ax \cdot e = (x \circ a)e$.

г) Прямое следствие п. **в)**.

д) Пусть $z = x \circ a$, тогда по п. **в)** и леммам 7.17 б), 7.15 имеем $(xa \cdot y)b = (ze \cdot y)b = (e_2zy)b = e_2(zy) \cdot b = 0$. $\square$

Лемма 7.21 (лемма 3.9). *Справедливы соотношения:*

а) $x_{ij}y_{kl} = 0$, если $\{i, j\} \neq \{k, l\}$; **б)** $x_{11}y_{11} \in A_1$; **в)** $x_{12}y_{12} \in A_1 + A_2$.

7.3.3. Йордановы бимодули

По [50, теорема 2.15] всякий йорданов бимодуль M над йордановой алгеброй J с единицей 1 представляется в виде суммы трех бимодулей: $M = M_1 \oplus M_{\frac{1}{2}} \oplus M_0$, где $m_i \cdot 1 = im_i$ ($i \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$). Неприводимые компоненты бимодуля M_1 задаются как неприводимые компоненты универсальной унитарной мультипликативной обертывающей алгеброй $U_1(J)$ с отображением $J \rightarrow J_1$. Неприводимые компоненты бимодуля $M_{\frac{1}{2}}$ задаются как неприводимые компоненты унитарной специальной обертывающей алгебры $S_1(J)$ с отображением $J \rightarrow 2J_{\frac{1}{2}}$.

Если йорданов бимодуль совпадает со своей i -ой компонентой: $M = M_i$ ($i \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$), то говорим, что бимодуль *принадлежит собственному значению i* .

Рассмотрим неприводимые йордановы бимодули над M_n^+ и C^+ , принадлежащие значению $\frac{1}{2}$.

1°. При $n = 1$ йорданова алгебра $J = M_n^+ = \Phi e$ является одномерной ассоциативно-коммутативной алгеброй с 1, поэтому мы имеем $ab = a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, следовательно, тождественное отображение $a \mapsto a$ — унитарная мультипликативная специализация J в J . В частности, это означает, что J и тождественное отображение составляет унитарную специальную обертывающую $S_1(J)$ алгебры J (ср., например, [50, §2.3(1)]). Таким образом, неприводимый йорданов J -бимодуль, принадлежащий значению $\frac{1}{2}$, с точностью до изоморфизма один; он одномерен и удовлетворяет соотношению $s \cdot 1 = \frac{1}{2}s$, где 1 — единица J .

2°. Если $n = 2$, то $J = M_2^+ = J(V, f)$ — 4-мерная йорданова алгебра симметричной билинейной формы f на 3-мерном пространстве $V = \Phi(v_1, v_2, v_3)$, где $v_1 = e_{11} - e_{22}$, $v_2 = e_{12} + e_{21}$ и $v_3 = e_{12} - e_{21}$. В этом случае $v_i^2 = v_i^2 = \beta_i$, $v_i \cdot v_j = 0$ ($i \neq j$), $\beta_1 = \beta_2 = 1$ и $\beta_3 = -1$.

Обозначим $Cl(V)$ алгебру Клиффорда для J . Рассмотрим вложение (ассоциативная

специализация) J в $Cl(V)$: $v_i \mapsto v_i$. Известно [50, §2.3 (4)], что с такой специализацией алгебра $Cl(V)$ является унитарной специальной обертывающей алгебры J : $S_1(J) \simeq Cl(V)$.

Обозначим $c = v_1 v_2 v_3$ (произведения рассматриваются в алгебре Клиффорда). Так как $c^2 = v_1 v_2 v_3 v_1 v_2 v_3 = -\beta_1 \beta_2 \beta_3 = 1$, то по [50, теорема 7.2] $Cl(V)$ распадается в прямую сумму двух изоморфных простых алгебр $\frac{1-c}{2}Cl(V) \oplus \frac{1+c}{2}Cl(V)$ (поскольку $\frac{1\pm c}{2} \in Cl(V)$ — центральные идемпотенты). Таким образом, с точностью до изоморфизма имеется ровно два неприводимых йордановых M_2^+ -бимодуля. Их размерность равна 2, поскольку $\frac{1\pm c}{2}Cl(V) \simeq M_2$. В качестве таких бимодулей выберем J -бимодули $[M_2]_r = \Phi r_1 + \Phi r_2$ с действием $r_i \cdot e_{jk} = \frac{1}{2} \delta_{ij} r_k$ и $[M_2]_l = \Phi l_1 + \Phi l_2$ с действием $l_i \cdot e_{jk} = \frac{1}{2} \delta_{ik} l_j$. Очевидно, что это неизоморфные неприводимые йордановы бимодули и, поскольку $r_i \cdot 1 = \frac{1}{2} r_i$, $l_i \cdot 1 = \frac{1}{2} l_i$, значит, принадлежащие значению $\frac{1}{2}$.

3°. По следствию 2 из [50, теорема 3.6] унитарной специальной обертывающей алгебры M_n^+ при $n \geq 3$ является алгебра $M_n + M_n^c$ со специализацией $a \mapsto (a, a)$. Таким образом, с точностью до изоморфизма имеется ровно два неприводимых йордановых M_n^+ -бимодуля. Их размерности равны n . В качестве таких бимодулей выберем J -бимодули $[M_n]_r = \text{span}(r_i \mid i = \overline{1, n})$ с действием $r_i \cdot e_{jk} = \frac{1}{2} \delta_{ij} r_k$ и $[M_n]_l = \text{span}(l_i \mid i = \overline{1, n})$ с действием $l_i \cdot e_{jk} = \frac{1}{2} \delta_{ik} l_j$.

Введем обозначения для базисных элементов M_n -бимодулей «строк» и «столбцов» ($n \geq 2$):

$$r_j := [e_{ij}]_r, \quad l_i := [e_{ij}]_l,$$

в этих обозначениях бимодульные операции запишутся для $a, b \in M_n$ как

$$[a]_r \circ b = [ab]_r, \quad [a]_l \circ b = [ba]_l.$$

4°. Пусть теперь $J = C^+$, где $C = M_2 + vM_2$ — расщепляемая алгебра Кэли—Диксона. Так как J является алгеброй симметрической билинейной формы на 7-мерном пространстве V бесследных элементов алгебры C , то $S_1(J) = Cl(V) \simeq M_8 \otimes \Phi[c]$, где c централен в $S_1(J)$ и $c^2 = 1$. Другими словами, имеется ровно два, с точностью до изоморфизма, неприводимых J -бимодуля, причем, эти бимодули 8-мерны. В качестве таких бимодулей можно взять следующие два J -бимодуля, построенные на базисе регулярного альтернативного C -бимодуля $[C]$. Бимодуль $[C]_r := \{[a]_r \mid a \in C\}$ и бимодуль $[C]_l := \{[a]_l \mid a \in C\}$ с действиями

$$[a]_r \circ b = [ab]_r, \quad [a]_l \circ b = [ba]_l,$$

для $a, b \in C$.

Таким образом, йордановы неприводимые бимодули над M_n^+ и C^+ являются реализациями «правого регулярного» и «левого регулярного» модулей. В случае M_1^+ эти бимодули совпадают. Над M_n^+ они имеют размерность n , а над C^+ — 8.

В правоальтернативном A -бимодуле M , где A есть либо M_n , либо S , отметим неприводимые йордановы компоненты N_i следующим образом: рассмотрим в соответствующем A^+ -бимодуле M^J , состоящем из тех же элементов, что и M , разложение на неприводимые йордановы бимодули: $M^J = \bigoplus_i N_i^J$; *неприводимой йордановой компонентой* бимодуля M назовем подпространство N_i , состоящее из тех же элементов, что и неприводимый йорданов подбимодуль N_i^J бимодуля M^J . Если A^+ -бимодуль N_i^J принадлежит собственному значению $k \in \{1, \frac{1}{2}, 0\}$, то будем считать, что йорданова компонента N_i *принадлежит йорданову значению k* . Понятно, что всякий A -бимодуль M разлагается в прямую сумму неприводимых йордановых компонент. Если каждая из этих компонент принадлежит одному значению k , будем говорить, что и весь бимодуль M *принадлежит этому значению k* .

7.3.4. $\frac{1}{2}$ -бимодули

Обозначим $J_i = A_i^+$ и $J = J_1 \oplus J_2$. По [50, теорема 2.16] унитарная универсальная обертывающая $U(J)$ алгебры J является прямой суммой трех идеалов: $U(J) = U_{11} \oplus U_{22} \oplus U_{12}$. Первые два изоморфны унитарным универсальным обертывающим алгебр J_1 и J_2 , третий идеал U_{12} — тензорному произведению унитарных специальных обертывающих этих алгебр: $U_{12} \simeq S_1(J_1) \otimes S_1(J_2)$. Причем, если $a \in J$, $a_i \in J_i$ и $a = a_1 + a_2$, то имеется вложение алгебр $\sigma: J \rightarrow S_1(J_1) \otimes S_1(J_2): a \mapsto \frac{1}{2}(a_1^\sigma \otimes 1 + 1 \otimes a_2^\sigma)$.

Таким образом, всякий неприводимый J -бимодуль N^J , соответствующий идеалу U_{12} , изоморфен тензорному произведению $T^{J_1} \otimes T^{J_2}$, где T^{J_i} — неприводимые J_i -бимодули, принадлежащие значению $\frac{1}{2}$. Также

$$(t_1 \otimes t_2).a_1 = (t_1.a_1) \otimes t_2, \quad (t_1 \otimes t_2).a_2 = t_1 \otimes (t_2.a_2), \quad (7.16)$$

где $t_i \in T^{J_i}$, $a_i \in J_i$. В частности $(t_1 \otimes t_2).1 = (t_1 \otimes t_2).(e_1 + e_2) = \frac{1}{2}t_1 \otimes t_2 + t_1 \otimes \frac{1}{2}t_2 = t_1 \otimes t_2$, где e_i — единица J_i .

Из структуры неприводимых J -бимодулей, соответствующих идеалу U_{12} , следует, что в правоальтернативном A -бимодуле M_{12} имеются йорданово неприводимые компоненты $T_1 \otimes T_2$, где T_i являются компонентами типа $[A_i]_r$ или $[A_i]_l$ над алгеброй A_i .

Далее рассмотрим возможные случаи строения таких компонент. Заметим здесь, что все компоненты M_{ii} принадлежат значению 1, а M_{ij} ($i \neq j$) — значению $\frac{1}{2}$.

7.3.5. Йордановы M_n -компоненты $n \neq 1$

Лемма 7.22. *Если $A = M_n$ ($n \neq 1$), то*

$$[a]_r b = [ab]_r, \quad b[a]_r = 0,$$

т.е. A -компонента $[A]_r$ является правоальтернативным A -бимодулем, в котором левый нулевой, а правый регулярен.

Доказательство. Заметим, что по лемме 7.20 г) $r_i * e_{jk} = 0$ при $i \neq j$, поскольку $r_i \circ e_{jk} = 0$.

Осталось доказать, что $e_{ij}r_i = 0$ и $r_ie_{ij} = r_j$. В самом деле, по лемме 7.20 а) $0 = e_{11}r_1 \cdot e_{12} = -e_{12}r_1 + e_{11}r_2 = -e_{12}r_1$. Тогда $r_1e_{12} = r_1 \circ e_{12} = r_2$. Далее, $0 = e_{12}r_1 \cdot e_{21} = -e_{11}r_1$. И $r_1e_{11} = r_1 \circ e_{11} = r_1$. $\square$

Лемма 7.23. В $[M_n]_l$ выполнены соотношения $e_{11}l_1 = e_{12}l_2$ и $l_1e_{11} = l_2e_{12}$.

Доказательство. По лемме 7.20 в) $e_{12}l_2 = e_1(e_{12} \circ l_2) = e_1l_1 = e_1(e_{11} \circ l_1) = e_{11}l_1$. Аналогично проверяется и второе равенство. $\square$

7.3.6. Йордановы S -компоненты

Пусть $A = S$. Напомним таблицу умножения в алгебре $S = M_2 + vM_2$:

$$\begin{aligned} v^2 &= e, \quad \bar{v} = -v, \quad av = v\bar{a}, \\ a \cdot vb &= v \cdot \bar{a}b, \quad vb \cdot a = v \cdot ab, \\ va \cdot vb &= b\bar{a}; \end{aligned}$$

где $e = e_{11} + e_{22}$ — единица алгебры S , $a, b \in M_2$.

Заметим, что $\text{span}([e_{11}]_r, [e_{12}]_r)$ и $\text{span}([e_{21}]_r, [e_{22}]_r)$ являются неприводимыми йордановыми M_2 -компонентами типа $[M_2]_r$, а, значит, к ним применима лемма 7.22.

Лемма 7.24. Для $[C] = [C]_r$ имеют место свойства

- а) $va \cdot [vb] = 0$, $[va] \cdot vb = [va \cdot vb]$;
- б) $a[vb] = 0$, $[va]b = [va \cdot b]$;
- в) $va \cdot [b] = 0$, $[a] \cdot vb = [a \cdot vb]$.

Другими словами, $[C]_r$ является нулевым слева и регулярным справа S -бимодулем.

Доказательство. а) По леммам 7.20 и 7.22: $0 = (va \cdot [v])b = -(v \cdot ba)[v] + va \cdot [vb] = -e[v(v \cdot ba)] + va \cdot [vb] = va \cdot [vb]$.

б) По лемме 7.20 г) $e_{12}[ve_{1i}] = e_{11}[ve_{2i}] = 0$. Далее, по лемме 7.20 б)

$$e_{11}[ve_{1i}] = (e_{11} \cdot ve_{1i})[e] = (v \cdot e_{22}e_{1i})[e] = 0,$$

$$e_{12}[ve_{2i}] = e_{11}e_{12} \cdot [ve_{2i}] = e_{11}[v \cdot e_{12}e_{2i}] = 0.$$

Этим доказана первая формула. Вторая следует из нее.

в) По пп. а) и б) имеем: $0 = (va \cdot [v\bar{b}])v = -\bar{a}[v\bar{b}] + va \cdot [b] = va \cdot [b]$. $\square$

Лемма 7.25. Для $[C] = [C]_l$ имеют место свойства

$$\text{а) } a[vb] = 0 \text{ и } [vb]a = [a \cdot vb]; \quad \text{б) } va \cdot [b] = 0 \text{ и } [b] \cdot va = [va \cdot b].$$

Доказательство. а) Так как $[ve_{1i}] \circ e_{11} = 0$, то $e_{11}[ve_{1i}] = 0$. Аналогично $e_{12}[ve_{1i}] = 0$. Далее,

$$e_{11}[ve_{2i}] = e_{12}e_{21} \cdot [ve_{2i}] = e_{12}[e_{21} \cdot ve_{2i}] = 0,$$

$$e_{12}[ve_{2i}] = e_{12}e_{22} \cdot [ve_{2i}] = e_{12}[e_{22} \cdot ve_{2i}] = 0.$$

б) По лемме 7.20 и п. а) $va \cdot [b] = e[va \cdot b] = 0$. □

7.4. Строение йордановой M_n -компоненты M_{11}

Пусть $A_1 = M_n$ при $n \geq 3$. По [50] йорданова компонента M_{11} раскладывается в прямую сумму неприводимых йордановых компонент. По классификации Джекобсона [50, теорема 7.7] имеется пять типов таких неприводимых компонент:

$$(N_0) : [x] \circ a = [xa + ax], \quad x \in A_1, \quad a \in A_1;$$

$$(N_1^+) : [x] \circ a = [xa + a^t x], \quad x \in H, \quad a \in A_1;$$

$$(N_2^+) : [x] \circ a = [ax + xa^t], \quad x \in H, \quad a \in A_1;$$

$$(N_1^-) : [x] \circ a = [xa + a^t x], \quad x \in S, \quad a \in A_1;$$

$$(N_2^-) : [x] \circ a = [ax + xa^t], \quad x \in S, \quad a \in A_1.$$

В параграфе 6.2 доказаны свойства этих компонент, в частности доказаны ассоциативность компоненты (N_0) , отсутствие компонент (N_1^+) и (N_1^-) и некоторые свойства компонент (N_2^+) и (N_2^-) . Заметим, что почти все доказательства главы 6 проведены для произвольных йордановых компонент, поэтому могут быть применены к йордановой компоненте M_{11} . В остальных случаях (леммы 6.9 и 6.12) используется унитарность правого модуля, но для правого модуля, порожденного M_{11} , она следует из лемм 7.14 и 7.16.

Обозначим через M_r сумму неприводимых йордановых компонент типа (N_0) , а через M_l — типа (N_2^+) и (N_2^-) . Заметим, что по леммам 6.9 и 6.12 компонента M_l является правым модулем Грейвса, т.е. для $l \in M_l$ и $a, b \in M_n$ выполнено

$$la \cdot b = l \cdot ba,$$

в частности,

$$(l, a, b) = l \cdot ba - l \cdot ab = -l[a, b].$$

7.4.1. Наличие ассоциативного подбимодуля R над M_n

Лемма 7.26. *Если M_{11} содержит неприводимый ассоциативный бимодуль R над A_1 , то R аннулируется компонентой M_l .*

Доказательство. Положим $w = [a, b]$, $r \in R \subseteq M_r$, $l \in M_l$. Тогда по (1.6) имеем:

$$(rl, a, b) + (r, l, w) = r(l, a, b) + (r, a, b)l,$$

$$(lr, a, b) + (l, r, w) = l(r, a, b) + (l, a, b)r,$$

откуда в силу ассоциативности алгебры A_1 и ассоциативности бимодуля R верно

$$(r, l, w) = r(l, a, b) = -r \cdot lw,$$

$$(l, r, w) = (l, a, b)r = -lw \cdot r.$$

Итак, поскольку $[A_1, A_1]A_1 = A_1$, то

$$(r, l, w) = -r \cdot lw, \quad rl \cdot w - r \cdot lw = -r \cdot lw, \quad rl \cdot w = 0, \quad rl = 0 \quad \text{и}$$

$$(l, r, w) = -lw \cdot r, \quad (l, w, r) = lw \cdot r, \quad lw \cdot r - l \cdot wr = lw \cdot r, \quad l \cdot wr = 0,$$

значит, $l \cdot [A_1, A_1]r = 0$. Ввиду регулярности бимодуля R и произвольности r получаем, что $l \cdot [A_1, A_1]A_1r = 0$, т.е. $lr = 0$. $\square$

Лемма 7.27. *Если $M_{11}^2 \neq 0$, то либо $M_r = 0$, либо $M_l = 0$ и $A_1 + M_{11}$ является супералгеброй $M_n[\sqrt{1}]$.*

Доказательство. По лемме 7.26 $M_r * M_l = 0$, поэтому $M_r^2 \neq 0$ или $M_l^2 \neq 0$.

Пусть вначале $M_l^2 \neq 0$, тогда для некоторых $l_1, l_2 \in M_l$ выполнено $l_1 l_2 = a \neq 0$. По лемме 7.21 б) $a \in A_1$. В этом случае для всякого регулярного $R \subseteq M_r$ имеем

$$[a] = a[1] = l_1 l_2 \cdot [1] = l_1 [1] \cdot l_2 + l_1 [l_2, [1]] = 0,$$

значит, $M_r = 0$.

Пусть теперь $M_r^2 \neq 0$, тогда $A_1 + M_r$ сильно ассоциативная супералгебра и по теореме 4.2: $A_1 + M_r = M_n[\sqrt{1}]$, тогда для $v \in M_r$ выполнено $e_1 = v^2$. Для любого $l \in M_l$ по лемме 7.16 а) имеем

$$l = e_1 l = v^2 l = vl \cdot v + v[v, l] = 0,$$

т.е. $M_l = 0$ и $A_1 + M_{11} = M_n[\sqrt{1}]$. $\square$

Везде далее в этом параграфе теперь будем считать, что $M_r = 0$.

7.4.2. Йордановы компоненты типа (N_2^+) в M_{11}

Лемма 7.28. Пусть N — неприводимый йорданов бимодуль из M_l . Если $Mx = 0$ для некоторого $0 \neq x \in N$, то $MN = 0$.

Доказательство. Пусть $R_a^+ : t \mapsto t \circ a$. Тогда $M(xR_{a_1}^+ \dots R_{a_k}^+) = 0$ для любых $a_1, \dots, a_k \in A$. Поскольку бимодуль N порождается элементом x , т.е. всякий элемент из N линейно выражается через элементы $xR_{a_1}^+ \dots R_{a_k}^+$, то лемма доказана. $\square$

Лемма 7.29. Если N — неприводимый йорданов бимодуль типа (N_2^+) , то верно равенство $MN = 0$.

Доказательство. Так как $M_{11} = M_l$, то по лемме 6.9 правый модуль, порожденный M_{11} , является модулем Грейвса. Таким образом, достаточно найти такой $0 \neq x \in N$, что выполнены равенства $m_i x = 0$ для стандартного базиса m_i ($i = \overline{1, n}$) правого модуля I_l . В самом деле, если это так, то $M_{11}x = 0$, тогда в силу лемм 7.28 и 7.21 получаем $MN = 0$.

Пусть $x = [e_{11}]$; тогда в силу леммы 6.8 б) выполнены равенства: $e_{12} \circ x = e_{22} \circ x = 0$. Значит,

$$m_2 x \cdot e_{22} = -m_2 e_{22} \cdot x + m_2(x \circ e_{22}) = -m_2 x.$$

Поскольку оператор $R_{e_{ii}}$ является проектированием, то $m_2 x = 0$. Далее,

$$m_1 x = m_2 e_{12} \cdot x = -m_2 x \cdot e_{12} + m_2(e_{12} \circ x) = 0.$$

Итак, $m_i x = 0$ ($i = \overline{1, n}$). $\square$

Лемма 7.30. Пусть $M_{11} = N_1 \oplus \dots \oplus N_k \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_l$, где все слагаемые неприводимы и имеют тип (N_2^+) и (N_2^-) соответственно. Если $N_i M = 0$ для некоторого i , то $N_j M = 0$ для любого j .

Доказательство. В силу правой альтернативности, леммы 7.29 и условия имеем

$$-N_i(N_j M) = (N_i, N_j, M) = (N_i, M, N_j) = 0.$$

Поскольку $M_{11} = M_l$, то $N_i(A \cdot N_j M) = (N_i \cdot N_j M)A = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} 0 &= N_i \cdot A[N_j, M] = N_i(AN_j \cdot M) = -N_i(N_j A \cdot M) + N_i \cdot (N_j \circ A)M = \\ &= -N_i(N_j A \cdot M) = N_i(N_j M \cdot A) - N_i \cdot N_j(A \circ M) = N_i(N_j M \cdot A), \end{aligned}$$

откуда $N_i \cdot A(N_j M)A = 0$. Стало быть, $N_j M = 0$, иначе $A(N_j M)A = A$ и $N_i = 0$, что невозможно. $\square$

Пара бимодулей (P, L) типа (N_2^-) и (N_2^+) , входящих в разложение M_l , называется *согласованной*; отметим, что $\dim P < \dim L$.

Лемма 7.31. Пусть (P, L) — пара согласованных йордановых неприводимых бимодулей. Если для некоторого $p \in P$ верно равенство $Lp = 0$, то $MP = 0$.

Доказательство. Имеем в силу правой альтернативности и леммы 7.29

$$(M, p, L) = (M, L, p) = ML \cdot p - M \cdot Lp = 0,$$

откуда

$$0 = (M, p, L) = Mp \cdot L - M \cdot pL = Mp \cdot L.$$

Положим $a \in Mp \subseteq A$; тогда $aL = 0$. Для произвольных элементов $b \in A$, $l \in L$ имеем

$$ab \cdot l = -al \cdot b + a(b \circ l) \subseteq aL \cdot A = 0.$$

Поскольку aA — правый идеал в A , то можно считать, что $aA = \Phi e_{11} + \dots + \Phi e_{1n}$ и $e_{11}L = 0$, откуда ввиду леммы 6.8 а) получаем противоречие: $0 = e_{11}[1] = [e_{11}]$.

Итак, $Mp = 0$. Применяя лемму 7.28, получаем требуемое. $\square$

Лемма 7.32. Пусть (P, L) — пара согласованных йордановых неприводимых бимодулей. Тогда справедливы следующие равенства:

$$[e_{11}][s_{12}] = [e_{22}][s_{12}] = [u_{12}][s_{12}] = 0.$$

Доказательство. Пусть G — ассоциативная алгебра Грассмана с единицей от стандартных порождающих $g_1, g_2, \dots$ и $J = G(B^{+s})$ — грассманова оболочка йордановой супералгебры B^{+s} . Так как $[e_{11}]g_1 \in J_{11}$, $[u_{12}]g_1, [s_{12}]g_2 \in J_{12}$, то $[e_{11}]g_1 \circ [s_{12}]g_2 \in J_{12}$ и $[u_{12}]g_1 \circ [s_{12}]g_2 \in J_{11} + J_{22}$, значит, в силу леммы 7.29 верно

$$[e_{11}][s_{12}] \in \Phi e_{12} + \Phi e_{21}, \quad [u_{12}][s_{12}] \in \Phi e_{11} + \Phi e_{22}.$$

Поскольку $[e_{11}][s_{12}] \cdot e_{22} = [e_{11}]([s_{12}] \circ e_{22}) = [e_{11}][s_{12}]$, то $[e_{11}][s_{12}] = \alpha e_{12}$. Точно также

$$[e_{22}][s_{12}] = \beta e_{21}, \quad [u_{12}][s_{12}] = \lambda e_{11} + \mu e_{22}.$$

Далее, применяя леммы 6.8, 6.11 и 7.29, получаем

$$\begin{aligned} \alpha e_{11} &= [e_{11}][s_{12}] \cdot e_{21} = -[e_{11}]e_{21} \cdot [s_{12}] + [e_{11}]([s_{12}] \circ e_{21}) = -[e_{11}]e_{21} \cdot [s_{12}] = \\ &= -e_{12}[e_{22}] \cdot [s_{12}] = -e_{12} \cdot [e_{22}][s_{12}] = -\beta e_{12}e_{21} = -\beta e_{11}, \end{aligned}$$

откуда следует $\beta = -\alpha$. Далее,

$$\begin{aligned}\lambda e_{12} &= (\lambda e_{11} + \mu e_{22})e_{12} = [u_{12}][s_{12}] \cdot e_{12} = \\ &= -[u_{12}]e_{12} \cdot [s_{12}] = -[e_{11}][s_{12}] = -\alpha e_{12},\end{aligned}$$

откуда $\lambda = -\alpha$. Аналогично,

$$\begin{aligned}\mu e_{21} &= (\lambda e_{11} + \mu e_{22})e_{21} = [u_{12}][s_{12}] \cdot e_{21} = \\ &= -[u_{12}]e_{21} \cdot [s_{12}] = -[e_{22}][s_{12}] = \alpha e_{21},\end{aligned}$$

откуда $\mu = \alpha$.

Докажем теперь, что $\alpha = 0$. В самом деле, $e_{13} \circ [s_{12}] = 0$ в силу леммы 6.11, значит,

$$-\alpha e_{23} = -\alpha e_{21}e_{13} = [e_{22}][s_{12}] \cdot e_{13} = -[e_{22}]e_{13} \cdot [s_{12}] + [e_{22}]([s_{12}] \circ e_{13}) = 0. \quad \square$$

Лемма 7.33. В условиях леммы 7.32 верно равенство $LP = 0$.

Доказательство. Рассматривая алгебру $J = G(B^{+s})$ и замечая $J_{12} \circ J_{23} \subseteq J_{13}$, имеем $[u_{12}][s_{23}] = \lambda e_{13} + \mu e_{31}$ в силу леммы 7.29. Заметим также, что $[e_{11}][s_{23}] = 0$:

$$[e_{11}][s_{23}] = [e_{11}]e_{11} \cdot [s_{23}] = -[e_{11}][s_{23}] \cdot e_{11}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}\mu e_{32} &= (\lambda e_{13} + \mu e_{31})e_{12} = [u_{12}][s_{23}] \cdot e_{12} = \\ &= -[u_{12}]e_{12} \cdot [s_{23}] + [u_{12}](e_{12} \circ [s_{23}]) = \\ &= -[e_{11}][s_{23}] + [u_{12}][s_{13}] = [u_{12}][s_{13}].\end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что $[u_{12}][s_{13}] \in \Phi e_{32}$. Отсюда получаем:

$$0 = [u_{12}][s_{13}] \cdot e_{33} = [u_{12}]([s_{13}] \circ e_{33}) = [u_{12}][s_{13}].$$

Наконец, $[u_{12}][s_{34}] = 0$, поскольку $J_{12} \circ J_{34} = 0$. $\square$

Лемма 7.34. M_{11} является суммой неприводимых компонент типа (N_2^-) .

Доказательство. Пусть $M_{11} = N \oplus P$, где N — сумма всех компонент типа (N_2^+) , а P — сумма всех компонент типа (N_2^-) . Известно (леммы 7.29 и 7.33), что $MN = NP = 0$. Допустим, что $N \neq 0$ и $0 \neq a \in P^2$. Тогда $P^2N = PN \cdot P + P[P, N] = 0$, т.е. $aN = 0$. Отсюда следует, что $(aA)N = 0$. Всякий правый идеал алгебры A содержит идемпотент e . Считая этот идеал минимальным получаем неразложимый идемпотент, т.е. можно считать, что $e = e_{11}$. Тогда $0 = e_{11}[1] = [e_{11}]$, что невозможно. $\square$

7.4.3. Косая компонента M_{11}

Пусть компонента M_{11} является суммой неприводимых йордановых компонент $[S]$ типа (N_2^-) .

Обозначим $[s_{12}]_{ij} := e_{ii}[s_{12}] \cdot e_{jj}$, где $[s_{12}] \in [S]$.

Лемма 7.35. *Имеется представление $[s_{12}] = [s_{12}]_{12} + [s_{12}]_{21}$.*

Доказательство. Из лемм 7.16 а) и 6.11 следует, что $[s_{12}] = [s_{12}] \cdot 1 = [s_{12}] \sum_{i=1}^n e_{ii} = [s_{12}](e_{11} + e_{22})$. Аналогично $[s_{12}] = (e_{11} + e_{22})[s_{12}]$.

Далее, очевидно, что $[s_{12}]_{11} = 0$. В самом деле, $[s_{12}]_{11} = e_{11}[s_{12}] \cdot e_{11} = -e_{11}[s_{12}] + e_{11}([s_{12}] \circ e_{11}) = 0$. $\square$

Лемма 7.36. *Выполнено соотношение $[s_{ij}][s_{kl}]' = 0$. Другими словами, $M_{11}^2 = 0$.*

Доказательство. Во-первых, имеем $[s_{12}]_{21}[s_{34}]' \cdot e_{11} = -[s_{12}]_{21}[s_{34}]'$, то есть $[s_{12}]_{21}[s_{34}]' = 0$. Аналогично и $[s_{12}]_{12}[s_{34}]' = 0$. Таким образом, $[s_{12}][s_{34}]' = 0$.

Поскольку $[s_{13}]' \circ e_{22} = 0$, таким же образом доказывается, что $[s_{12}]_{12}[s_{13}]' = 0$.

Далее, $[s_{12}]_{21}[s_{13}]' \cdot e_{33} = [s_{12}]_{21}[s_{13}]'$, то есть $[s_{12}]_{21}[s_{13}]' \in M_n e_{33}$.

Кроме того, используя правую альтернативность и леммы 6.11 и 6.12 получаем: $[s_{12}]_{21}[s_{13}]' \cdot e_{32} = -(e_{22}[s_{12}] \cdot e_{32}e_{11})[s_{13}]' + [s_{12}]_{21}([s_{13}]' \circ e_{32}) = 0$. Таким образом, $[s_{12}]_{21}[s_{13}]' = 0$. Вместе с предыдущим это означает, что $[s_{12}][s_{13}]' = 0$.

Наконец, $[s_{12}]_{12}[s_{12}]' \cdot e_{11} = [s_{12}]_{12}[s_{12}]'$, поэтому $[s_{12}]_{12}[s_{12}]' \in M_n e_{11}$. Кроме того, $[s_{12}]_{12}[s_{12}]' \cdot e_{13} = 0$, поэтому $[s_{12}]_{12}[s_{12}]' = 0$. Аналогично, $[s_{12}]_{21}[s_{12}]' = 0$. Что означает $[s_{12}][s_{12}]' = 0$. $\square$

Таким образом, доказана

Теорема 7.2. *Пусть $B = A \oplus M$ — унитарная правоальтернативная супералгебра с полупростой четной частью, если $A_1 = M_n$ при $n \geq 3$, тогда либо $M_{11}^2 = 0$, либо $A_1 + M_{11}$ является простой супералгеброй $M_n[\sqrt{1}]$.*

Следствие 7.1. *Супералгебра $B = A + M$ над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики $\neq 2$ с простой четной частью M_n при $n \geq 3$ либо тривиально расщепляема, либо является супералгеброй $M_n[\sqrt{1}]$.*

7.5. Йордановы компоненты емкости 2

7.5.1. Регулярные компоненты

Пусть теперь $A = A_1 \oplus A_2$ — прямая сумма простых правоальтернативных алгебр. В нашем случае A_i — это либо M_n при $n \geq 1$, либо C . Рассмотрим йорданову A -компоненту M_{12} ,

принадлежащую значению $\frac{1}{2}$, и ее разложение на неприводимые йордановы компоненты N_i : $M_{12} = \bigoplus_i N_i$. По п. 7.3.4 $N_i \simeq [A_1] \otimes [A_2]$, где $[A_i]$ — йордановая A_i -компонента, типа $[A_i]_r$ или $[A_i]_l$. По леммам 7.22 и 7.24 компоненты $[A_i]_r$ при $A_i = M_n$ ($n \neq 1$) и $A_i = \mathbb{C}$ удовлетворяют соотношениям $[a]_r b = [ab]_r$ и $a[b]_r = 0$.

Понятно, что A -компонент N вида $[A_1]_r \otimes [A_2]_r$ в унитарной супералгебре нет, поскольку в этом случае $N = (e_1 + e_2)N = 0$. Неприводимую йорданову A -компоненту назовем *регулярной*, если в ее составе имеется A_i -компонента типа $[A_i]_r$.

Пусть некоторая регулярная компонента N имеет вид $[A_1]_r \otimes [A_2]_l$. Обозначим ее элементы $[a_1|a_2] = [a_1]_r \otimes [a_2]_l$ для $a_i \in A_i$. Чаще всего для краткости будем писать $[a_1]$ или $[a_2]$.

Лемма 7.37. *Всякая регулярная компонента $N = [A_1]_r \otimes [A_2]_l$ удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} b_1[a_1|a_2] &= [a_1|a_2]b_2 = 0, \\ b_2[a_1|a_2] &= [a_1|b_2a_2], \quad [a_1|a_2]b_1 = [a_1b_1|a_2], \end{aligned}$$

где $a_i, b_i \in A_i$. Другими словами, компонента N является правым регулярным A_1 -модулем и левым регулярным A_2 -модулем.

Доказательство. Для $n = [a_1|a_2] \in N$ по леммам 7.22 и 7.24 имеем $ne_2 = n(1 - e_1) = 0$, тогда по лемме 7.14: $nb_2 = ne_2b_2 = 0$. Отсюда, $b_2n = n \circ b_2 = [a_1|b_2a_2]$. Что и требовалось. $\square$

7.5.2. Произведения йордановых компонент

Лемма 7.38. *Произведение любых двух компонент типа $[A_1]_l \otimes [A_2]$ (тип $[A_2]$ произволен) равно 0 при $\dim A_1 \neq 1$.*

Доказательство. Рассмотрим случаи в зависимости от вида A_1 .

1°. Пусть $A_1 = M_n$ ($n \neq 1$) и имеется две компоненты типа $[A_1]_l \otimes [A_2]$ (может быть и совпадающие), $l_i = [e_{ij}|a_2]$ и $l'_i = [e_{ij}|a_2]$ — их элементы.

Докажем, что $l_1l'_2 = 0$. В самом деле, так как по лемме 7.20 г) $l_1e_{22} = 0$, то

$$l_1l'_2 = l_1(l'_2 \circ e_{22}) = l_1l'_2 \cdot e_{22} = l_1(l'_1 \circ e_{21}) \cdot e_{22} = (l_1l'_1 \cdot e_{21})e_{22} + (l_1e_{21} \cdot l'_2)e_{22}.$$

Первое слагаемое равно нулю, поскольку $l_1l'_1 = l_1l'_2 \cdot e_{12} \in A_1$, второе — по лемме 7.20 д). Значит, $l_1l'_2 = 0$.

Наконец, $l_1l'_1 = l_1l'_2 \cdot e_{12} = 0$.

2° Пусть теперь $A_1 = C$.

а) Докажем, что $[a][b] = 0$ для $a, b \in M_2$. Полностью аналогично рассуждениям предыдущего пункта получаем, что $[e_{1i}][e_{2j}] = ([e_{1i}][e_{1j}] \cdot e_{21})e_{22}$, значит, $[e_{1i}][e_{2j}] = \lambda ve_{21} + \mu ve_{22}$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} [e_{1i}][e_{2j}] &= [e_{1i}][e_{2j}] \cdot e_{22} = [e_{1i}][v\overline{e_{2j}} \cdot ve_{22}] \cdot e_{22} = \\ &= ([e_{1i}][ve_{22}] \cdot v\overline{e_{2j}})e_{22} = ([e_{1i}][ve_{j2} \cdot e_{2j}] \cdot v\overline{e_{2j}})e_{22} = \\ &= ([e_{1i}][e_{2j}] \cdot ve_{j2})v\overline{e_{2j}} \cdot e_{22} = \\ &= ((\lambda ve_{21} + \mu ve_{22})ve_{j2} \cdot v\overline{e_{2j}})e_{22} = \\ &= -\lambda(e_{j1} \cdot v\overline{e_{2j}})e_{22} = -\lambda v\overline{e_{2j}e_{j1}} \cdot e_{22} = \lambda ve_{21}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} [e_{1i}][e_{2j}] &= [e_{1i}][e_{2j}] \cdot e_{22} = ([e_{1i}][ve_{21}] \cdot v\overline{e_{1j}})e_{22} = \\ &= ([e_{1i}][e_{2j}] \cdot ve_{j1})v\overline{e_{1j}} \cdot e_{22} = (\lambda ve_{21} \cdot ve_{j1})v\overline{e_{1j}} \cdot e_{22} = 0. \end{aligned}$$

Значит, и $[e_{1i}][e_{1j}] = [e_{1i}][e_{2j}] \cdot e_{12} = 0$.

Итак, установлено, что $[a][b] = 0$ для $a, b \in M_2$.

б) Далее докажем, что $[a][vb] = 0$.

Получаем

$$\begin{aligned} [e_{1i}][ve_{1j}] &= [e_{1i}][ve_{1j}] \cdot e_{22} = [e_{1i}](v \circ [e_{1j}]) \cdot e_{22} = \\ &= ([e_{1i}]v \cdot [e_{1j}])e_{22} + ([e_{1i}][e_{1j}] \cdot v)e_{22} = 0 \end{aligned}$$

по лемме 7.20 д) и п. а).

Кроме того, по лемме 7.25 б) и п. а) имеем

$$\begin{aligned} [e_{11}][ve_{2j}] &= [e_{11}](ve_{2j} \circ [e_{22}]) = [e_{11}]ve_{2j} \cdot [e_{22}] + [e_{11}][e_{22}] \cdot ve_{2j} = \\ &= [ve_{2j} \cdot e_{11}][e_{22}] = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} [e_{12}][ve_{2j}] &= [e_{12}](ve_{1j} \circ [e_{21}]) = [e_{12}]ve_{1j} \cdot [e_{21}] + [e_{12}][e_{21}] \cdot ve_{1j} = \\ &= [ve_{1j} \cdot e_{12}][e_{21}] = 0, \end{aligned}$$

поэтому доказано, что $[a][vb] = 0$.

в) Докажем, что $[va][b] = 0$. По лемме 7.25 б) и п. а) имеем

$$0 = [a][b] \cdot v = -[va][b] + [a][vb],$$

и по п. б) все доказано.

г) Докажем, что $[va][vb] = 0$. Имеем по п. б)

$$0 = [a][vb] \cdot v = -[va][vb] + [a][b].$$

Осталось воспользоваться п. а). □

Лемма 7.39. Если $A_1 = \Phi e_1$ и $\dim_{\Phi} A_2 \neq 1$, то либо $M_{12}^2 = 0$, либо $A_1 + A_2 + M_{12}$ является супералгеброй $M_{1|k}$.

Доказательство. Так как M_{12} по лемме 7.19 является йордановой компонентой, то имеется разложение M_{12} в прямую сумму неприводимых йордановых компонент. Обозначим через N_r компоненту типа $[A_1] \otimes [A_2]_r$, а через N_l — типа $[A_1] \otimes [A_2]_l$.

Будем обозначать буквами r элементы компонент типа N_r , l — типа N_l .

1° Из леммы 7.38 следует, что $N_l N'_l = 0$.

2° $N_r M \subseteq A_1 = \Phi e_1$. В самом деле, по лемме 7.37 $e_1 r = r$, значит, по лемме 7.15 для нечетного x имеем $rx = e_1 r \cdot x = e_1 \cdot rx$.

3° Докажем, что $N_r N'_r = 0$. Пусть $rr' \neq 0$, тогда по п. 2° можно считать, что $rr' = e_1$. Значит, для любого r'' по лемме 7.37 имеем

$$r'' = e_1 r'' = rr' \cdot r'' = rr'' \cdot r' + r[r', r''] \in \Phi e_1 \cdot r' + r \cdot \Phi e_1 = \Phi r'.$$

Это означает, что в данном случае N_r одномерно. Но размерность каждой компоненты N_r : $\dim_{\Phi} N_r = \dim_{\Phi} [A_1] \cdot \dim_{\Phi} [A_2] = \dim_{\Phi} [A_2] \neq 1$. Противоречие, значит $N_r N'_r = 0$.

4° Докажем, что если $N_r N_l \neq 0$, то $e_1 N_l = N_l e_2 = 0$. Пусть $rl \neq 0$, тогда по п. 2° можно считать, что $rl = e_1$. По правой альтернативности и п. 1° получаем

$$le_1 = l \cdot rl = lr \cdot l + l \cdot lr = l \circ lr.$$

Таким образом, если l лежит в йордановой компоненте N_l , то le_1 лежит в ней же. Значит, в компоненте N_l имеется такой ненулевой элемент x , что $xe_1 = 0$ или $xe_1 = x$. Так как $[A_1]$ одномерно, то это свойство выполнено для всех элементов N_l , в частности, если $xe_1 = 0$, то $N_l e_1 = 0$.

Покажем, что случай $le_1 = 0$ невозможен. Если $le_1 = 0$, то $e_1 l = l$, тогда $lM \subseteq \Phi e_1$, значит, $r'' = e_1 r'' = rl \cdot r'' = rr'' \cdot l + r[l, r'']$, тогда по п. 3° $r'' = r[l, r'']$. По п. 2° и включению $lM \subseteq \Phi e_1$ имеем $r'' \in r \cdot \Phi e_1$, значит, по лемме 7.37 $r'' = 0$, — противоречие.

5° Докажем, что если $N_r N_l \neq 0$, то N_l — бимодуль. По п. 4° $e_1 N_l = N_l e_2 = 0$ и $e_2 N_l = N_l e_1 = N_l$. Тогда по лемме 7.20 в) $a_1 x = e_1(a_1 \circ x) = 0$ и $xa_1 = x \circ a_1$; $xa_2 = (x \circ a_2)e_2 = 0$ и $a_2 x = a_2 \circ x$.

6°. Докажем, что если $N_r N_l \neq 0$, то $(A_2, A_2, N_l) = 0$. По п. 5° для $a, b \in A_2$ и $x = [c] \in N_l$ выполнено

$$(a, b, x) = -(a, x, b) = -ax \cdot b + a \cdot xb = -[ac]b = 0.$$

7°. Докажем, что если $N_r N_l \neq 0$, то $A_2 = M_n$. Рассмотрим случай, когда $A_2 = C$, тогда по п. 6° для $a, b, c \in A_2 = C$: $[ab \cdot c] = ab[c] = a[bc] = [a \cdot bc]$, — противоречие.

8°. Докажем, что если $N_r N_l \neq 0$, то супералгебра $A_1 + A_2 + N_r + N_l$ является супералгеброй $M_{1|n}$. Из пп. 5°–7° следует, что бимодуль $N_r + N_l$ ассоциативен. Для этого случая из теорем 4.3 и 4.4 следует, что супералгебра $A_1 + A_2 + N_r + N_l$ либо тривиально расщепляема, либо является супералгеброй $M_{1|n}$.

9°. Докажем, что случай $N_r N_l = 0$ и $N_l N_r \neq 0$ невозможен. Пусть $lr = g = g_1 + g_2 \neq 0$, где $g_i \in A_i$. Для произвольного элемента $r' = [a] \in N_r$ по предположению $N_r N_l = 0$ и п. 3° имеем

$$r'g = r' \cdot lr = r' \cdot rl + r'l \cdot r - r'r \cdot l = 0,$$

т.е. $0 = r'g = r'g_2 = [ag_2]$. Из произвольности элемента a заключаем, что $g_2 = 0$. Значит, $lr \in \Phi e_1$, и можно считать, что $lr = e_1$.

Далее, по п. 1° и предположению $N_r N_l = 0$ имеем

$$le_1 = l \cdot lr = l[l, r] = ll \cdot r - lr \cdot l = -e_1 l,$$

значит, $l = l \circ e_1 = 0$, — противоречие.

10°. Докажем, что неприводимая йорданова компонента типа N_r в разложении M_{12} единственна. Так как $M_{12}^2 \neq 0$, то из пп. 1°, 3° и 9° следует, что $N_r N_l \neq 0$. Тогда по п. 8° супералгебра $A_1 + A_2 + N_r + N_l$ является супералгеброй $M_{1|n}$. Исходя из структуры супералгебры $M_{1|n}$, имеем, что для некоторых элементов $r_i \in N_r$, $l_i \in N_l$ выполнено $r_i l_i = e_1$, $l_i r_i = e_{ii} \in A_2$.

Тогда для произвольного r' из некоторой компоненты N'_r имеем

$$r' = e_1 r' = r_1 l_1 \cdot r' = r_1 r' \cdot l_1 + r_1 [l_1, r'] \in r_1 (A_1 + A_2) = r_1 A_2 \subseteq N_r.$$

11°. Докажем, что если $N_r N_l \neq 0$ и $N_r N'_l \neq 0$, то $N'_l = N_l$. Для $l' \in N'_l$ по пп. 5° и 1° имеем

$$l' = l' e_1 = l' \cdot r_1 l_1 = l' \cdot l_1 r_1 + l' r_1 \cdot l_1 - l' l_1 \cdot r_1 = l' e_{11} + a_2 l_1 \in N_l.$$

12°. Докажем, что $M_{12} = N_r + N_l$. По пп. 10° и 11° осталось доказать, что условие $N_r N'_l = 0$ нарушено. По п. 9° если $N_r N'_l = 0$, то $N'_l N_r = 0$. Для произвольного $l' \in N'_l$ имеем по правой альтернативности и п. 1° $e_1 l' = r_1 l_1 \cdot l' = 0$ и $e_{ii} l' = l_i r_i \cdot l' = 0$, значит, $e_2 l' = 0$. Отсюда следует, что $l' = (e_1 + e_2) l' = 0$. □

Лемма 7.40. Если $\dim_{\Phi} A_1, \dim_{\Phi} A_2 \neq 1$, то либо $M_{12}^2 = 0$, либо $A_1 + A_2 + M_{12}$ является супералгеброй $M_{m|n}$.

Доказательство. Разложим M_{12} в сумму неприводимых йордановых компонент N_i : $M_{12} = \bigoplus_i N_i$. Каждая компонента N_i имеет вид $[A_1] \otimes [A_2]$, где $[A_i]$ — это либо $[A_i]_r$, либо $[A_i]_l$, причем, компоненты $[A_1]_r \otimes [A_2]_r$ отсутствуют.

Ненулевыми по лемме 7.38 могут быть только произведения компонент $R = [A_1]_r \otimes [A_2]_l$ и $L = [A_1]_l \otimes [A_2]_r$ между собой.

Покажем, что при $A_1 = C$ компонента $L = [A_1]_l \otimes [A_2]_r$ отсутствует. По лемме 7.37 для элементов $a, b, c \in A_1 = C$, $x = [c] \in L$ имеем

$$(a, b, [c]) = -(a, [c], b) = -a[c] \cdot b + a \cdot [c]b = -[ac]b = 0,$$

значит, $[ab \cdot c] = ab \cdot [c] = a \cdot b[c] = a[bc] = [a \cdot bc]$, — противоречие.

Т.о., если $M_{12}^2 \neq 0$, то $A_1 = M_m$, $A_2 = M_n$. В этом случае $R + L$ является ассоциативным бимодулем, тогда по теоремам 4.3 и 4.4 заключаем, что супералгебра $A_1 + A_2 + R + L$ является супералгеброй $M_{m|n}$.

Зафиксируем два неприводимых бимодуля R и L , тогда из структуры супералгебры $M_{m|n}$ заключаем, что имеются элементы $r_{ij} \in R$ и $l_{ij} \in L$ с произведениями $r_{ij}l_{i'j'} = \delta_{ii'}e'_{ij'} \in A_2$ и $l_{ij}r_{i'j'} = \delta_{ii'}e_{ij'} \in A_1$, в частности $e_1 = \sum_{i=1}^m l_{i1}r_{1i}$, а $e_2 = \sum_{i=1}^n r_{i1}l_{1i}$.

Если элемент r из некоторого бимодуля R' типа $[A_1]_r \otimes [A_2]_l$, то $r = e_2r = \sum_{i=1}^n r_{i1}l_{1i} \cdot r = \sum_{i=1}^n (r_{i1} \cdot l_{1i}r) \in R$ (поскольку элементы rl_{1i} лежат в A_2). Поэтому в M_{12} имеется лишь один бимодуль R , а по симметрии индексов и один бимодуль L . Все остальные компоненты N в M_{12} имеют тип $[A_1]_l \otimes [A_2]_l$, тогда для $x \in N$ по правой альтернативности имеем $e_1x = \sum_{i=1}^m l_{i1}r_{1i} \cdot x = 0$, так как по лемме 7.38 $N * M_{12} = 0$. Аналогично и $e_2x = 0$. Поэтому $x = (e_1 + e_2)x = 0$, значит, $N = 0$. $\square$

Лемма 7.41. Если $A_1 = M_2$ и $M_{11}^2 \neq 0$, то $A_1 + M_{11}$ является одной из простых супералгебр: $M_2[\sqrt{1}]$, $B_{4|4}(w)$ или $S_{4|2}$.

Доказательство. Разложим йорданову компоненту M_{11} в сумму неприводимых йордановых компонент.

Следуя [50] отметим, что имеется четыре неприводимые йордановы компоненты.

1. Регулярная йорданова компонента $[M_2]$ с действием $[a] \circ b = [a \circ b]$.
2. Одномерная косая компонента $P = [S(M_2)]$ с действием $[s] \circ a = [as + sa^t]$. Заметим, что $S(M_2) = \Phi(e_{21} - e_{12})$.

3. Симметрическая компонента $N = [H(M_2)]$ с действием $[h] \circ a = [ah + ha^t]$.

В обозначениях [57] $n_1 = [e_{12} + e_{21}]$, $n_2 = [-e_{11} + e_{22}]$, $n_3 = [-e_{11} - e_{22}]$.

4. Компонента $N' = [H(M_2)]'$ с действием $[h]' \circ a = [a^t h + ha]'$.

В обозначениях [57] $n_1 = [e_{12} + e_{21}]'$, $n_2 = [-e_{11} + e_{22}]'$, $n_3 = [e_{11} + e_{22}]'$.

По лемме 1.4, доказанной в [57, предложение 3], в унитарном правоальтернативном M_2 -бимодуле нет неприводимых йордановых компонент N' . Это доказательство с небольшими замечаниями вполне годится для компоненты M_{11} , для которой пока не доказано, она является унитарным правоальтернативным M_2 -бимодулем. Чтобы не указывать эти несложные замечания, мы приведем более простое доказательство этого факта.

Так как $e_{12}[e_{11}]' \cdot e_{22} = -e_{12}[e_{11}]'$, то $e_{12}[e_{11}]' = 0$. Отсюда $0 = e_{12}[e_{11}]' \cdot e_{12} = e_{12}[e_{12} + e_{21}]'$, тогда $[e_{11}]'e_{12} = [e_{11}]' \circ e_{12} = [e_{12} + e_{21}]'$ и $[e_{12} + e_{21}]'e_{12} = [e_{12} + e_{21}]' \circ e_{12} = 2[e_{22}]'$. Значит, $2[e_{22}]' = [e_{12} + e_{21}]'e_{12} = [e_{11}]'e_{12} \cdot e_{12} = 0$, — противоречие.

Также в [57, предложение 4] доказано, что элементы неприводимой йордановой компоненты $[M_2]$ образуют регулярный ассоциативный бимодуль.

Обозначим через R сумму регулярных компонент в составе M_{11} , а через L — сумму симметрических и одномерных компонент. По лемме 7.4 $R * L = 0$.

Если $R^2 \neq 0$, то $A_1 + R$ — сильно ассоциативная супералгебра, и по теоремам 4.3 и 4.4 является супералгеброй $M_2[\sqrt{1}]$. Поэтому $L = e_1 L = ([e_{11}]^2 + [e_{22}]^2)L$, и по правой альтернативности и лемме 7.4 $L = 0$, т.е. $A_1 + M_{11} = M_2[\sqrt{1}]$.

Если $L^2 \neq 0$ и L состоит только из одномерных компонент, то по лемме 7.3 L является альтернативным бимодулем Кэли, а значит, по теоремам 4.3 и 4.4 $A_1 + L = S_{4|2}$. По правой альтернативности и лемме 7.4 $R = 0$, т.е. $A_1 + M_{11} = S_{4|2}$.

Если $L^2 \neq 0$ и L содержит трехмерную компоненту, то по леммам 7.7–7.13 $L = P + N$ — сумма согласованных одномерной и трехмерной компонент, тогда $A_1 + L = B_{4|4}(w)$ — асимметричный дубль. По правой альтернативности и лемме 7.4 $R = 0$, т.е. $A_1 + M_{11} = B_{4|4}(w)$. $\square$

Из § 7.4 следует

Лемма 7.42. *Если $A_1 = M_n$ ($n \neq 1$) и $M_{11}^2 \neq 0$, то $A_1 + M_{11}$ является простой супералгеброй $M_n[\sqrt{1}]$.*

По теореме 6.1 всякий C -бимодуль альтернативен, поэтому выполнена

Лемма 7.43 (лемма 4.28). *Если $A_1 = C$, то $M_{11}^2 = 0$.*

Из лемм 7.41–7.43 следует

Предложение 7.3. *Конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра с простой четной частью над алгебраически замкнутым полем характеристики не 2 либо является супералгеброй с нулевым умножением нечетных элементов, либо сама является простой супералгеброй из следующего списка: $M_n[\sqrt{1}]$, $B_{4|4}(w)$, $S_{4|2}$ или $B_{1|2}$.*

Доказательство. Пусть $B = A \oplus M$, где $A = M_n$ или $A = \mathbb{O}$. В леммах 7.41–7.43 полностью разобран случай $\dim A > 1$. Случай $A = \Phi e$ разобран в [4, § 7], при этом не использовалась простота супералгебры B . $\square$

7.6. Основная теорема

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 7.3. *Простая конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра с полупростой четной частью является либо одной из супералгебр $M_{m|n}$, $M_n[\sqrt{1}]$, $B_{4|4}(w)$, $S_{4|2}$, либо одной из абелевых супералгебр $B_{1|2}$, $B_{n|n}$, $B_{2|2}(\nu)$.*

7.6.1. Предварительные леммы

Рассмотрим простую правоальтернативную супералгебру $B = A \oplus M$ и разложение нечетной части на йордановы компоненты по полной системе центральных ортогональных идемпотентов четной части: $M = \bigoplus M_{ij}$.

Лемма 7.44. *Если B — простая супералгебра, то для любого i выполнено*

$$A_i \cap M^2 \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $A_1 \cap M^2 = 0$, тогда для $A' = \sum_{i \neq 1} A_i$ имеем $A' + M \triangleleft B$, — противоречие. $\square$

Лемма 7.45. *Если $M_{12}^2 \neq 0$, $\dim A_1 \neq 1$ и B — простая, то $B = M_{m|n}$.*

Доказательство. Пусть M_{12} — ненулевая компонента и $\dim A_1 \neq 1$, тогда по леммам 7.39 и 7.40 компонента $A_1 + A_2 + M_{12}$ является простой супералгеброй $M_{m|n}$, значит, $e_1, e_2 \in M_{12}^2$. Можно считать, что $e_1 = \sum_i l_i r_i$ и $e_2 = \sum_j r'_j l'_j$ — некие разложения идемпотентов по элементам M_{12} , причем $r_i l_i \in A_2$ и $l'_i r'_i \in A_1$. Докажем, что в этом случае каждая иная компонента M_{ij} , где $i = 1, 2$, — нулевая. В связи с симметрией проведем доказательство для компонент M_{1i} .

Для элемента $x \in M_{11}$ по лемме 7.16 $x = e_1x = \sum_i l_i r_i \cdot x$, и по правой альтернативности и лемме 7.21 получаем, что $x = 0$.

Аналогично для элемента $x \in M_{13}$ получаем, что $e_1x = 0$, тогда имеем $x = x \circ e_1 = xe_1 = x \cdot \sum_i l_i r_i = x \cdot \sum_i r_i l_i \in M_{13}A_2 = 0$.

Отсюда следует, что $(A_1 + A_2) * M \subseteq M_{12}$, кроме того, понятно, что $M_{12} * A \subseteq M_{12}$ (следует из того, что $M_{m|n}$ — супералгебра) и $M_{12} * M \subseteq A_1 + A_2$ (лемма 7.21). Значит, $A_1 + A_2 + M_{12} = M_{m|n}$ — идеал супералгебры B , т.е. совпадает с ней. $\square$

Лемма 7.46. Если $M_{11}^2 \neq 0$, $\dim A_1 \neq 1$ и B — простая, то B — одна из супералгебр $M_n[\sqrt{1}]$, $B_{4|4}(w)$, $S_{4|2}$.

Доказательство. 1°. Докажем, что $e_1 \in M_{11}^2$. По леммам 7.41–7.43 имеем $A_1 = M_n$ при $n \geq 2$ и $A_1 + M_{11}$ является одной из простых супералгебр $M_n[\sqrt{1}]$, $B_{4|4}(w)$, $S_{4|2}$, т.е. в каждом из этих трех случаев $e_1 \in M_{11}^2$.

2°. Докажем, что $M_{12}^2 = 0$. В самом деле, иначе по лемме 7.45 $A_1 + A_2 + M_{12} = M_{n|m}$, т.е. имеются такие элементы r_1 и l_1 из M_{12} , что $l_1 r_1 = e_{11} \in A_1$. Кроме того, по п. 1° стандартные рассуждения приводят к выводу $e_1 M_{12} = 0$. Поэтому $e_{11} = e_1 e_{11} = e_1 \cdot l_1 r_1 = e_1 l_1 \cdot r_1 = 0$, — противоречие.

3°. Докажем, что $M_{12} = 0$. По п. 2° $e_1 M_{12} = 0$, поэтому для любого $x \in M_{12}$ выполнено $e_2 x = x$, значит, $x e_1 = x$ и $x e_2 = 0$. Отсюда по лемме 7.20 в) заключаем, что M_{12} — A -бимодуль. Таким образом, $M_{12} \triangleleft B$. Что и требовалось.

4°. Из п. 3° следует, что $A_1 + M_{11} \triangleleft B$, поэтому $B = A_1 + M_{11}$, что и требовалось. $\square$

7.6.2. Доказательство теоремы

Рассмотрим вначале случай $\dim A_1 \neq 1$. По леммам 7.44 и 7.21 $M_{11}^2 \neq 0$ или $M_{12}^2 \neq 0$, значит, по леммам 7.45 и 7.46 супералгебра B является одной из супералгебр $M_{m|n}$, $M_n[\sqrt{1}]$, $B_{4|4}(w)$, $S_{4|2}$. Первая часть теоремы доказана, поэтому далее можно считать, что для любого i простая часть A_i является полем Φe_i , т.е. A — ассоциативно-коммутативная алгебра. Этот случай полностью разобран в главе 3.

Нужно ли доказать предложение о том, что если A — простая, то и $A + M$ — простая? Осталось рассмотреть, вроде, только случай $A = \Phi e$.

Глава 8

Автоморфизмы и дифференцирования простых унитальных супералгебр

8.1. Матричные представления, автоморфизмы и дифференцирования абелевых супералгебр

8.1.1. Матричные представления супералгебр $B_{2|2}(\nu)$ и $B_{n|n}$

Положим $e_{11} = e_1$, $e_{22} = e_2$. Поскольку умножение в $B_{2|2}(\nu)$ имеет вид

$$\begin{aligned} e_{ii}e_{jj} &= \delta_{ij}e_{ii}, & e_{ii}x_{jk} &= \delta_{ij}x_{jk}, & x_{ij}e_{kk} &= \delta_{jk}x_{ij}, \\ x_{12}^2 &= x_{12}x_{21} = e_{11}, & x_{21}x_{12} &= e_{22}, & x_{21}^2 &= \nu e_{22}, \end{aligned}$$

то $(\alpha_{11}e_{11} + \beta_{12}x_{12} + \gamma_{21}x_{21} + \delta_{22}e_{22})(\lambda_{11}e_{11} + \mu_{12}x_{12} + \xi_{21}x_{21} + \eta_{22}e_{22}) = \alpha_{11}\lambda_{11}e_{11} + \lambda_{11}\gamma_{21}x_{21} + \alpha_{11}\mu_{12}x_{12} + \beta_{12}\mu_{12}e_{11} + \gamma_{21}\mu_{12}e_{22} + \beta_{12}\xi_{21}e_{11} + \gamma_{21}\xi_{21}\nu e_{22} + \delta_{22}\xi_{21}x_{21} + \beta_{12}\eta_{22}x_{12} + \delta_{22}\eta_{22}e_{22} =$
 $(\alpha_{11}\lambda_{11} + \beta_{12}\mu_{12} + \beta_{12}\xi_{21})e_{11} + (\alpha_{11}\mu_{12} + \beta_{12}\eta_{22})x_{12} + (\lambda_{11}\gamma_{21} + \delta_{22}\xi_{21})x_{21} + (\delta_{22}\eta_{22} + \gamma_{21}\mu_{12} + \gamma_{21}\xi_{21}\nu)e_{22}.$

Записывая $\alpha_{11}e_{11} + \beta_{12}x_{12} + \gamma_{21}x_{21} + \delta_{22}e_{22}$ в виде матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \gamma_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$, получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \gamma_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \mu_{12} \\ \xi_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda_{11} + \beta_{12}\xi_{21} + \beta_{12}\mu_{12} & \alpha_{11}\mu_{12} + \beta_{12}\eta_{22} \\ \lambda_{11}\gamma_{21} + \delta_{22}\xi_{21} & \delta_{22}\eta_{22} + \gamma_{21}\mu_{12} + \gamma_{21}\xi_{21}\nu \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \gamma_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \mu_{12} \\ \xi_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{12}\mu_{12} & 0 \\ 0 & \nu\gamma_{21}\xi_{21} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\star$ — умножение в $B_{2|2}(\nu)$. Заметим, что умножение в супералгебре $B_{2|2}(\nu)$ напоминает умножение в векторно-матричной алгебре Цорна.

Теперь запишем элемент $\alpha e_1 + \beta x_1 + \gamma x_2 + \delta e_2$ супералгебры $B_{2|2}$ в виде матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, получим

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\beta' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\gamma' + \delta\delta' \end{pmatrix}.$$

Обозначая через a_1, a_2 строки матрицы a , а через a^1, a^2 — ее столбцы, получаем

$$a \star b = \begin{pmatrix} (a_1, b_1) & a_1 \cdot b^2 \\ a_2 \cdot b^1 & (a_2, b_2) \end{pmatrix}, \text{ где } (u, v) \text{ — скалярное произведение.}$$

8.1.2. Об изоморфизме супералгебр $B_{2|2}(\nu)$ и $B_{2|2}(\nu')$

Дадим описание $B_{2|2}(\nu)$ в терминах определяющих соотношений: e_1, e_2 — полная ортогональная система идемпотентов, $P_{12} = \Phi x_{12}$, $P_{21} = \Phi x_{21}$,

$$x_{12}^2 = x_{12}x_{21} = e_1, \quad x_{21}x_{12} = e_2, \quad x_{21}^2 = \nu e_2$$

Если $\nu \neq 0$, то существует автоморфизм (сопряжение), продолжающий стандартную инволюцию $*$. В самом деле, сопоставление

$$g_1 := e_2, \quad g_2 := e_1, \quad y_{12} := \frac{1}{\sqrt{\nu}}x_{21}, \quad y_{21} := \sqrt{\nu}x_{12},$$

является автоморфизмом:

$$\begin{aligned} y_{12}^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}x_{21}\right)^2 = \frac{1}{\nu}x_{21}^2 = e_2 = g_1, & y_{12}y_{21} &= x_{21}x_{12} = e_2 = g_1, \\ y_{21}y_{12} &= x_{12}x_{21} = e_1 = g_2, & y_{21}^2 &= (\sqrt{\nu}x_{12})^2 = \nu e_1 = \nu g_2. \end{aligned}$$

Если же $\nu = 0$, то легко видеть, что автоморфизм ξ супералгебры $B_{2|2}(0)$ является тождественным отображением на ее четной части, поскольку сохраняет компоненту P_{21} , состоящую из всех изотропных векторов, значит, $x_{12}^\xi = \pm x_{12}$, $x_{21}^\xi = \mp x_{21}$.

Предложение 8.1. *Супералгебры $B_{2|2}(\nu)$ и $B_{2|2}(\nu')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\nu = \nu'$.*

Доказательство. Пусть $\psi: B_{2|2}(\nu) \rightarrow B_{2|2}(\nu')$ — изоморфизм. Без ограничения общности можно считать, что $\nu \neq 0$ и ψ действует тождественно на четной части, иначе следует рассмотреть произведение ψ на сопряжение.

Положим $y_{12} = x_{12}^\psi$, $y_{21} = x_{21}^\psi$. Поскольку $x_{12}^2 = e_1$, $x_{12}x_{21} = e_1$, $x_{21}x_{12} = e_2$, $x_{21}^2 = \nu e_2$, то $y_{12}^2 = e_1$, $y_{12}y_{21} = e_1$, $y_{21}y_{12} = e_2$, $y_{21}^2 = \nu e_2$. Далее, найдутся такие скаляры $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, что $y_{12} = \varphi_1 x'_{12}$, $y_{21} = \varphi_2 x'_{21}$, где x'_{12}, x'_{21} — канонический базис $B_{2|2}(\nu')$. Следовательно, $\varphi_1^2 = 1$, $\varphi_1\varphi_2 = 1$, откуда $\varphi_1 = \pm 1$, $\varphi_2 = \mp 1$. Стало быть, $(x'_{21})^2 = \nu' e_2$ и $y_{21}^2 = (\varphi_2 x'_{21})^2 = \nu' e_2$. Учитывая, что $y_{21}^2 = \nu e_2$, получаем требуемое. $\square$

Следствие. *Если $\nu \neq 0$, то $\text{Aut } B_{2|2}(\nu) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Кроме того, $\text{Aut } B_{2|2}(0) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Отметим также, что $\text{Aut } B_{n|n} \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_n$.

8.1.3. Дифференцирования супералгебр $B_{2|2}(\nu)$ и $B_{n|n}$

Линейное отображение $D: B \rightarrow B$ супералгебры $B = B_0 \oplus B_1$ называется *четным дифференцированием*, если $B_0^D \subseteq B_0$, $B_1^D \subseteq B_1$ и для любых $x, y \in B_0 \cup B_1$:

$$(xy)^D = x^D y + xy^D.$$

Всякое четное дифференцирование D тривиально на четной части, поскольку $e^D = 0$ для любого идемпотента e . Пусть $D \in \text{Der}_0 B_{2|2}(\nu)$ — четное дифференцирование. Тогда

$$x_{12}^D = \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{21}, \quad x_{21}^D = \beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{21}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = e_1^D &= (x_{12}^2)^D = (\alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{21}) \circ x_{12} = (2\alpha_1 + \alpha_2)e_1 + \alpha_2 e_2, \\ 0 = (\nu e_2)^D &= (x_{21}^2)^D = (\beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{21}) \circ x_{21} = \beta_1 e_1 + (\beta_1 + 2\nu\beta_2^2)e_2, \end{aligned}$$

значит, $D = 0$, если $\nu \neq 0$. Если же $\nu = 0$, то $x_{12}^D = 0$, $x_{21}^D = \beta x_{21}$ и $0 = e_1^D = (x_{12}x_{21})^D = x_{12}x_{21}^D = x_{12} \cdot \beta x_{21} = \beta e_1$, откуда $\beta = 0$ и $D = 0$.

Линейное отображение $D: B \rightarrow B$ супералгебры $B = B_0 \oplus B_1$ называется *нечетным дифференцированием*, если $B_0^D \subseteq B_1$, $B_1^D \subseteq B_0$ и для любых $x, y \in B_0 \cup B_1$:

$$D(xy) = D(x)y + (-1)^x xD(y).$$

Если $D \in \text{Der}_1 B_{2|2}(\nu)$ — нечетное дифференцирование. Тогда положим

$$\begin{aligned} D(e_1) &= \alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{21}, & D(e_2) &= \beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{21}, \\ D(x_{12}) &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, & D(x_{21}) &= \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 &= D(x_{12}) = D(e_1 x_{12}) = D(e_1) \cdot x_{12} + e_1 \cdot D(x_{12}) = \\ &= (\alpha_1 x_{12} + \alpha_2 x_{21})x_{12} + \lambda_1 e_1 = (\alpha_1 + \lambda_1)e_1 + \alpha_2 e_2, \end{aligned}$$

значит, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \lambda_2$ и $D(e_1) = \lambda_2 x_{21}$. Аналогично,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = D(x_{12}e_2) = \lambda_2 e_2 - x_{12}(\beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{21}) = -(\beta_1 + \beta_2)e_1 + \lambda_2 e_2,$$

откуда $\beta_1 + \beta_2 = -\lambda_1$. Далее,

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 = D(e_2 x_{21}) = (\beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{21})x_{21} + \mu_2 e_2 = \beta_1 e_1 + (\beta_2 \nu + \mu_2)e_2,$$

значит, $\beta_1 = \mu_1$, $\beta_2 \nu = 0$. Точно также имеем

$$\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 = D(x_{21}e_1) = \mu_1 e_1 - x_{21}\lambda_2 x_{21} = \mu_1 e_1 - \lambda_2 \nu e_2,$$

следовательно, $\mu_2 = -\lambda_2 \nu$. Кроме того,

$$\lambda_2 x_{21} = D(e_1) = D(x_{12}^2) = D(x_{12})x_{12} - x_{12}D(x_{12}) = \lambda_1 x_{12} - \lambda_2 x_{12},$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Также имеем

$$\mu_1 x_{12} + \beta_2 x_{21} = D(e_2) = D(x_{21}x_{12}) = D(x_{21})x_{12} = (\mu_1 e_1 - \lambda_2 \nu e_2)x_{12} = \mu_1 x_{12},$$

тогда $\beta_2 = 0$. Итак, $D(e_1) = 0$, $D(e_2) = \mu_1 x_{12}$, $D(x_{12}) = 0$, $D(x_{21}) = \mu_1 e_1$. Наконец,

$$\nu \mu_1 x_{12} = D(\nu e_2) = D(x_{21}^2) = D(x_{21})x_{21} - x_{21}D(x_{21}) = -\mu_1 x_{21},$$

значит, $\mu_1 = 0$ и $D = 0$.

Теперь рассмотрим дифференцирование супералгебры $B_{n|n}$. Пусть D — четное дифференцирование. Тогда $D(x_{12}) = D(e_1 x_{12} e_2) = e_1 D(x_{12}) e_2$, поскольку $D(e_i) = 0$, значит, $D(x_{12}) = \alpha_1 x_{12}$. Далее, $0 = D(e_1) = D(x_{12}^2) = D(x_{12}) \circ x_{12} = 2\alpha_1 e_1$, т.е. $D(x_{12}) = 0$, следовательно, $D = 0$.

Пусть теперь D — нечетное дифференцирование супералгебры $B_{n|n}$. Покажем сначала, что $D(e_i) = 0$. В самом деле, поскольку $(\forall x, y \in M) [x, y] = 0$, то

$$D(e_1) = D(x_{12}^2) = D(x_{12}) \cdot x_{12} - x_{12} \cdot D(x_{12}) = [D(x_{12}), x_{12}] = 0.$$

Если $D(x_{12}) = \dots + \alpha_i e_i + \dots$ и $\alpha_i \neq 0$ при $i \geq 2$, то имеем

$$0 = D(x_{12} x_{i,i+1}) = D(x_{12}) x_{i,i+1} - x_{12} D(x_{i,i+1}) = \alpha_i x_{i,i+1} - \beta x_{12},$$

что невозможно. Следовательно, $D(x_{i,i+1}) = \alpha_i e_i$ для любого $i \leq n-1$ и аналогично $D(x_{n,1}) = \alpha_n e_n$. Значит, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$. При $n = 2$ точно также проверяется, что $D = 0$.

Итак, $\text{Der } B_{n|n} = 0$ при $n \geq 2$. Это равенство верно и при $n = 1$.

Поскольку при расширении основного поля автоморфизм супералгебры B можно продолжить до автоморфизма супералгебры B_Ω , то группа автоморфизмов простой конечномерной правоальтернативной супералгебры B абелева типа является абелевой. Точно так же всякое дифференцирование супералгебры B равно нулю.

8.2. Специализация асимметричных дублей

Напомним, что простые неальтернативные правоальтернативные супералгебры с чётной частью M_2 называются *асимметричными дублями* и обозначаются $B_{4|4}(w)$, где $w \in M_2$.

В этой главе асимметричные дубли рассматриваются над произвольным полем Φ характеристики, отличной от 2.

Далее в этой главе следующие обозначения и договоренности:

мультипликативная группа поля Ω обозначается $\Omega^\times$;

через $\text{span } X$ обозначается линейная оболочка множества X ;

отображение $D_s: x \mapsto [x, s]$, как обычно, обозначает внутреннее дифференцирование, определяемое элементом s ;

внутренний автоморфизм φ , такой что $a^\varphi = a^s = s^{-1}as$ отождествляется с матрицей s ;

скалярная матрица $\lambda e_{11} + \lambda e_{22}$ отождествляется со скаляром λ ;

матрица $e_{12} + \zeta^2 e_{21}$ для элемента $\zeta \notin \Phi$, такого что $\zeta^2 \in \Phi$ отождествляется с самим элементом ζ .

Пусть $w \in M_2$ — фиксированная матрица с ненулевым следом. Умножение однородных элементов в супералгебре $B_{4|4}(w)$ имеет вид:

$$[a][b] = a \cdot \frac{\operatorname{tr} b}{\operatorname{tr} w}, \quad [a]b = [a\bar{b}], \quad a[b] = \left[ab - [a, w] \frac{\operatorname{tr} b}{\operatorname{tr} w} \right].$$

В §8.3 будет доказано, что дубли $B_{4|4}(w)$ и $B_{4|4}(w')$ с подобными матрицами w и w' изоморфны, поэтому можно ограничиться изучением дублей специального вида $B_{4|4}(w)$, для которых матрица w приведена к «нормальной форме». Как хорошо известно (см., например, [43]), всякая матрица в зависимости от её спектра подобна либо диагональной, либо жордановой, либо обобщенно жордановой. Заметим, что $\operatorname{tr}(w) \neq 0$. Более точно, имеют место следующие варианты.

1°. Если собственные значения матрицы w различны и содержатся в поле Φ , то матрица w подобна диагональной, но не скалярной.

2°. Если собственные значения матрицы w различны и не содержатся в поле Φ , то матрица w подобна обобщенно жордановой $w = \alpha + \beta\zeta$.

3°. Если собственные значения совпадают, значит, содержатся в поле Φ ; тогда матрица w либо скалярна, либо подобна жордановой.

Тем самым, возникают три типа асимметричных дублей: *диагональный*, *жорданов* и *обобщенно жорданов*, которыми исчерпываются все асимметричные дубли над произвольным полем.

Среди диагональных дублей имеются два класса дублей, имеющих нетипичное поведение при автоморфизмах и дифференцированиях: скалярные и вырожденные.

Дубль, определяемый скалярной матрицей λ , называется *скалярным*. Заметим, что в скалярных дублях пространство M как правый модуль над M_2 «ассоциативен слева», пространство M — ассоциативный левый модуль над M_2 , однако, сам бимодуль не является альтернативным.

Отметим наиболее красивый скалярный дубль, который назовем *исключительным* $E_{4|4} = B_{4|4}(\frac{1}{2})$, т.е. его определяющая матрица совпадает с $\frac{1}{2}$. Таблица умножения однородных элементов исключительного дубля $E_{4|4}$ записывается наиболее простым образом:

$$[a][b] = a \operatorname{tr} b, \quad [a]b = [a\bar{b}], \quad a[b] = [ab].$$

Еще одним важным подклассом диагональных дублей является класс *вырожденных дублей*, т.е. дублей задаваемых вырожденной матрицей λe_{11} или подобной ей.

8.3. Изоморфизм супералгебр $B_{4|4}(w)$ и $B_{4|4}(w')$

Линейное отображение φ супералгебры B на супералгебру B' называется *изоморфизмом*, если $A^\varphi = A'$, $M^\varphi = M'$ и для любых $x, y \in B$

$$(xy)^\varphi = x^\varphi y^\varphi.$$

Рассмотрим изоморфизмы асимметричных дублей. У супералгебр $B = B_{4|4}(w)$ и $B' = B_{4|4}(w')$ общая четная часть $A = M_2$ со стандартным базисом e_{ij} . Выберем канонические базисы нечетных частей $[e_{ij}]$ и $[e_{ij}]'$ в супералгебрах B и B' как это было сделано в §7.2.1.

Определение. Матрицы w и w' назовем *эквивалентными*, если существуют скаляр $\varepsilon \in \Phi$ и матрица $s \in SL_2$, такие, что $w' = \varepsilon^2 w^s$.

8.3.1. Теорема об изоморфизме

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 8.1. *Дубли $B_{4|4}(w)$ и $B_{4|4}(w')$ изоморфны тогда и только тогда, когда матрица w' и w эквивалентны.*

Доказательство теоремы разобьем на две леммы.

Лемма 8.1. *Если матрицы w и w' эквивалентны, то дубли $B_{4|4}(w)$ и $B_{4|4}(w')$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть матрицы w' и w эквивалентны: $w' = \varepsilon^2 w^s$, где $\det(s) = 1$. Рассмотрим отображение $\varphi: B \rightarrow B'$, задав действия на четной и нечетной частях по следующим правилам: $a \mapsto a^s$, $[a] \mapsto [\varepsilon a^s]'$. Проверим, что сохраняются операции умножения нечетных элементов и модульные операции. Заметим, что $(b^s)^{\nu'} = \frac{\text{tr}(b^s)}{\text{tr}(w')} = \frac{\text{tr}(b)}{\text{tr}(\varepsilon^2 w^s)} = \frac{\text{tr}(b)}{\varepsilon^2 \text{tr}(w)} = \varepsilon^{-2} b^\nu$. Значит,

$$[a]^\varphi [b]^\varphi = [\varepsilon a^s]' [\varepsilon b^s]' = \varepsilon^2 a^s \cdot (b^s)^{\nu'} = (ab^\nu)^s = (ab^\nu)^\varphi = ([a][b])^\varphi,$$

т.е. φ сохраняет умножение нечетных элементов.

Аналогично проверяется и сохранение модульных произведений. Для действия справа имеем:

$$[a]^\varphi b^\varphi = [\varepsilon a^s]' b^s = [\varepsilon a^s \bar{b}^s]' = [\varepsilon (a\bar{b})^s]' = [a\bar{b}]^\varphi = ([a]b)^\varphi.$$

Замечая теперь, что $a^s D_{w'} = \varepsilon^2 a^s D_{w^s} = \varepsilon^2 (a D_w)^s$, и по доказанному $(b^s)^{\nu'} = \varepsilon^{-2} b^\nu$, имеем для действия слева:

$$\begin{aligned} a^\varphi [b]^\varphi &= a^s [\varepsilon b^s]' = \varepsilon [a^s b^s - a^s D_{w'} (b^s)^{\nu'}]' = \\ &= \varepsilon [(ab)^s - (a D_w b^\nu)^s]' = [ab - a D_w b^\nu]^\varphi = (a[b])^\varphi. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 8.2. Если дубли $B_{4|4}(w)$ и $B_{4|4}(w')$ изоморфны, то матрицы w и w' эквивалентны.

Доказательство. Пусть теперь имеется изоморфизм φ дубля $B = B_{4|4}(w)$ в дубль $B' = B_{4|4}(w')$. Понятно, что на четной части он является автоморфизмом s , преводящим элемент w в некоторый элемент $w_2 = w^s$. По лемме 8.1 имеется изоморфизм ψ между $B = B_{4|4}(w)$ и $B'' = B_{4|4}(w_2)$, причем, изоморфизмы φ и ψ совпадают на четной части.

Рассмотрим изоморфизм $\xi = \psi^{-1}\varphi: B'' \rightarrow B'$, тождественный на четной части. Положим, что $B'' = A + [A]_2$ и $B' = A + [A]_1$, считая, что $w_1 = w'$. Введем линейное отображение $\zeta: [a]_2^\xi = [a^\zeta]_1$. Так как

$([a]_2[w_2]_2)^\xi = (aw_2^{\nu_2})^\xi = aw_2^{\nu_2} = a$ и $([a]_2[w_2]_2)^\xi = [a^\zeta]_1[w_2^\zeta]_1 = a^\zeta w_2^{\zeta\nu_1}$, то, полагая $\varepsilon = \frac{\text{tr}(w_1)}{\text{tr}(w_2^\zeta)}$, имеем

$$a^\zeta = \varepsilon a. \quad (8.1)$$

Так как по формуле (8.1) $w_2^\zeta = \varepsilon w_2$, то $\varepsilon = \frac{\text{tr}(w_1)}{\text{tr}(\varepsilon w_2)}$, т.е.

$$\varepsilon^2 = \frac{\text{tr}(w_1)}{\text{tr}(w_2)}, \quad (8.2)$$

Далее, так как

$$(a[b]_2)^\xi = [ab - aD_{w_2}b^{\nu_2}]_2^\xi = \varepsilon[ab - aD_{w_2}b^{\nu_2}]_1,$$

$$a^\xi[b]_2^\xi = a[b^\zeta]_1 = \varepsilon a[b]_1 = \varepsilon[ab - aD_{w_1}b^{\nu_1}]_1 = \varepsilon[ab - \varepsilon^{-2}aD_{w_1}b^{\nu_2}]_1,$$

то при $b^{\nu_2} = 1$ получаем $aD_{w_2} = \varepsilon^{-2}aD_{w_1}$ для любых a , т.е., элемент $w_2 - \varepsilon^{-2}w_1$ централен, но след этого элемента в силу (8.2) равен нулю, значит, $w_1 = \varepsilon^2 w_2 = \varepsilon^2 w^s$. $\square$

8.3.2. Изоморфизм специальных дублей.

Опишем отдельно изоморфизмы дублей, заданных матрицами в нормальной форме.

Изоморфизм диагональных дублей. Пусть $B = B_{4|4}(\lambda e_{11} + \mu e_{22})$ и $B' = B_{4|4}(\lambda' e_{11} + \mu' e_{22})$ — два диагональных дубля. По теореме 8.1 эти дубли изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы $\lambda e_{11} + \mu e_{22}$ и $\lambda' e_{11} + \mu' e_{22}$ эквивалентны. Пусть вначале эти матрицы подобны. Заметим, что наборы (λ, μ) и (λ', μ') являются их спектрами. У подобных матриц спектры совпадают с точностью до перестановки собственных значений. Значит, подобие возможно только в двух случаях: диагональные коэффициенты матриц либо совпадают, либо переставлены местами. Пропорциональность возможна только с коэффициентом ε^2 .

Таким образом, диагональные дубли B и B' изоморфны тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\varepsilon \in \Phi^\times$, что $\lambda' = \varepsilon^2 \lambda$, $\mu' = \varepsilon^2 \mu$ или $\lambda' = \varepsilon^2 \mu$, $\mu' = \varepsilon^2 \lambda$.

В качестве следствия получаем, что скалярные дубли $B_{4|4}(\lambda)$ и $B_{4|4}(\lambda')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\lambda' = \varepsilon^2 \lambda$.

Изоморфизм жордановых дублей. Пусть $B_{4|4}(\lambda + e_{12})$ и $B_{4|4}(\lambda' + e_{12})$ – два жордановых дубля. Они изоморфны тогда и только тогда, когда имеется матрица $w'' = \varepsilon^2 w$, пропорциональная матрице $w = \lambda + e_{12}$ и подобная матрице $w' = \lambda' + e_{12}$. Но при умножении матрицы на скаляр её собственные значения умножаются на этот скаляр, а собственные подпространства сохраняются. Значит, спектр матрицы w'' равен $(\varepsilon^2 \lambda, \varepsilon^2 \lambda)$ и инвариантное подпространство, отвечающее собственному значению $\varepsilon^2 \lambda$, одномерно, поэтому матрица w'' подобна жордановой матрице $\varepsilon^2 \lambda + e_{12}$.

Таким образом, жордановы дубли $B_{4|4}(\lambda + e_{12})$ и $B_{4|4}(\lambda' + e_{12})$ изоморфны тогда и только тогда, когда имеется такой скаляр $\varepsilon \in \Phi^\times$, что $\lambda' = \varepsilon^2 \lambda$.

Изоморфизм обобщённо жордановых дублей. Пусть $B_{4|4}(\lambda + \mu\zeta)$ и $B_{4|4}(\lambda' + \mu'\zeta')$ – два обобщённо жордановых дубля, где $\zeta, \zeta' \notin \Phi$, $\zeta^2, \zeta'^2 \in \Phi$, $\mu, \mu' \neq 0$, мы считаем, согласно прежним договоренностям, что элемент ζ отождествляется с матрицей $e_{12} + \zeta^2 e_{21} \in M_2$.

При подобии спектры матриц в алгебраическом замыкании поля сохраняются с точностью до перестановки собственных значений. При пропорциональности остаются пропорциональными в алгебраическом замыкании с тем же коэффициентом. Так как спектрами определяющих матриц данных дублей являются $(\lambda + \mu\zeta, \lambda - \mu\zeta)$ и $(\lambda' + \mu'\zeta', \lambda' - \mu'\zeta')$, то обобщённо жордановы дубли $B_{4|4}(\lambda + \mu\zeta)$ и $B_{4|4}(\lambda' + \mu'\zeta')$ изоморфны тогда и только тогда, когда имеется такой скаляр $\varepsilon \in \Phi^\times$, что $\lambda + \mu\zeta = \varepsilon^2(\lambda' \pm \mu'\zeta')$.

8.4. Автоморфизмы супералгебры $B_{4|4}(w)$

Автоморфизмом супералгебры называется изоморфизм, отображающий её на себя.

Лемма 8.3. Группа автоморфизмов супералгебры $B_{4|4}(w)$ является прямым произведением группы знаков $U_2 = \{\pm 1\}$ и группы $C(w) \cap SL_2$, где $C(w) = \{s \in M_2 \mid ws = sw\}$ – централизатор элемента w .

Доказательство. Поскольку в любой ассоциативной конечномерной центральной простой алгебре, в частности, в алгебре матриц M_2 каждый автоморфизм внутренний (см., например, [62]), то существует такой $s \in M_2$, что для любого $a \in M_2$ выполнено равенство $a^\varphi = a^s$. Без ограничения общности, можно считать, что $\det s = 1$.

Далее, зададим отображение $\psi : M_2 \rightarrow M_2$ соотношением $[a]^\varphi = [a^\psi]$ и выясним свойства этого отображения при автоморфизме φ .

Из соотношения (7.11) имеем

$$[a]^\varphi [b]^\varphi = (ab^\nu)^\varphi = a^\varphi b^\nu, \quad [a^\psi] [b^\psi] = a^\psi b^{\psi\nu},$$

т.е. для любых $a, b \in M_2$

$$a^\varphi b^\nu = a^\psi b^{\psi\nu}.$$

Так как $w^\nu = \frac{\text{tr}(w)}{\text{tr}(w)} = 1$, то $a^\varphi = w^{\psi\nu} a^\psi$. Отсюда следует, что $w^\varphi = w^{\psi\nu} w^\psi$, следовательно $w^{\varphi\nu} = (w^{\psi\nu})^2$. Поскольку следы подобных матриц равны, то $\text{tr}(w^\varphi) = \text{tr}(w^s) = \text{tr}(w)$, тогда получаем, что $w^{\varphi\nu} = \frac{\text{tr}(w^\varphi)}{\text{tr}(w)} = 1$. Это в точности означает, что $w^{\psi\nu} = \varepsilon = \pm 1$, причем знак ε однозначно определяется действием автоморфизма φ на элемент $p = [w]$:

$$p^\varphi = [w^\psi], \quad w^{\psi\nu} = \varepsilon.$$

Таким образом, доказана формула $a^\psi = \varepsilon a^\varphi$.

Итак, если φ автоморфизм супералгебры $B_{4|4}(w)$, то имеются такие элементы $\varepsilon \in U_2 = \{\pm 1\}$ и $s \in \text{SL}_2$, что для любого $a \in M_2$

$$a^\varphi = a^s, \quad [a]^\varphi = [\varepsilon a^s].$$

По доказанному в лемме 8.1 такое отображение является изоморфизмом между дублями $B_{4|4}(w)$ и $B_{4|4}(w')$, где $w' = \varepsilon^2 w^s = w^s$. Так как φ — автоморфизм, то $w' = w$ и, поэтому, $w = w^s$.

Таким образом, $s \in C(w)$. Лемма доказана. $\square$

Задача описания централизаторов матриц, приведенных к нормальной форме, хорошо известна и описана во многих классических монографиях (см., например, [24]). Здесь мы приведем решение этой задачи лишь для полноты картины, тем более, что она элементарна для размерности 2.

Скалярный дубль. Пусть матрица $w = \lambda \neq 0$ скалярна; тогда её централизатор совпадает с M_2 и $\text{Aut } B_{4|4}(\lambda) = U_2 \times \text{SL}_2$.

Диагональный дубль. Так как централизаторы матриц w , μw и $w - \mu$ для произвольного ненулевого скаляра $\mu \in \Phi^\times$ совпадают, то можно считать, что $w = e_{11}$. Пусть $s = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$, тогда из равенства $ws = sw$ имеем

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, σ_{11} и σ_{22} произвольны, а $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$, т.е. централизатор $C(w)$ совпадает с алгеброй диагональных матриц:

$$C(w) = D_2 = \Phi e_{11} + \Phi e_{22},$$

$$D_2 \cap \text{SL}_2 = \{\alpha e_{11} + \alpha^{-1} e_{22} \mid \alpha \in \Phi^\times\}$$

и $\text{Aut } B_{4|4}(w) \simeq U_2 \times \Phi^\times$.

Жорданов дубль. Пусть w — жорданова клетка собственного значения λ . Как и в предыдущем пункте заметим, что $C(w) = C(w - \lambda)$, поэтому можно считать, что $w = e_{12}$. И в этом случае имеем равенство

$$\begin{pmatrix} \sigma_{21} & \sigma_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{11} \\ 0 & \sigma_{21} \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $\sigma_{21} = 0$, $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ и σ_{12} — произвольно, т.е. централизатор $C(w)$ совпадает с алгеброй правильных верхне-треугольных матриц

$$C(w) = \Phi + \Phi e_{12},$$

значит, $C(w) \cap \text{SL}_2 = 1 + \Phi e_{12}$ и $\text{Aut } B_{4|4}(w) \simeq U_2 \times \Phi$.

Обобщённо жорданов дубль. Пусть матрица w не имеет собственных значений в поле Φ , тогда её собственные значения записываются в виде $\alpha \pm \beta\zeta \in \Phi(\zeta)$, где $\zeta^2 \in \Phi$, $\zeta \notin \Phi$. Обобщенной жордановой формой матрицы w является матрица $\alpha + \beta z$, где $z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \zeta^2 & 0 \end{pmatrix}$. Будем считать, что $w = \alpha + \beta z$. Тогда $C(w) = C(z)$. И в этом случае имеем матричное соотношение

$$\begin{pmatrix} \sigma_{21} & \sigma_{22} \\ \sigma_{11}\zeta^2 & \sigma_{12}\zeta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{12}\zeta^2 & \sigma_{11} \\ \sigma_{22}\zeta^2 & \sigma_{21} \end{pmatrix},$$

т.е. $\sigma_{22} = \sigma_{11}$ и $\sigma_{21} = \sigma_{12}\zeta^2$. Таким образом,

$$C(w) = \Phi + \Phi z = \Phi(\zeta).$$

Тогда $C(w) \cap \text{SL}_2 = \{\lambda + \mu\zeta \mid \lambda^2 - \mu^2\zeta^2 = 1\}$. Обозначая эту группу единиц через U_{ζ^2} , получаем $\text{Aut } B_{4|4}(w) = U_2 \times U_{\zeta^2}$. Например, если $\Phi = \mathbb{R}$, а $\zeta = i$, то $U_{\zeta^2} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Таким образом, доказана

Теорема 8.2. *Группа автоморфизмов скалярного дубля $B_{4|4}(\lambda)$ является прямым произведением $U_2 \times \text{SL}_2$. Если w — не скалярная матрица, то группа автоморфизмов дубля $B_{4|4}(w)$ абелева.*

8.5. Чётные дифференцирования дубля $B_{4|4}(w)$

Линейное отображение $D: B \rightarrow B$ супералгебры $B = A + M$ называется *чётным дифференцированием*, если $A^D \subseteq A$, $M^D \subseteq M$ и для любых $x, y \in A \cup M$

$$(xy)^D = x^D y + xy^D.$$

Лемма 8.4. *Всякое чётное дифференцирование D супералгебры $B_{4|4}(w)$ на четной части является внутренним дифференцированием вида aD_s таким, что $a^D = aD_s$, $s \in C(w)$; на нечетной — дублирует действие на четной части: $[a]^D = [a^D]$. То есть $\text{Der}_0 B_{4|4}(w) = \mathfrak{sl}_2 \cap C(w)$.*

Доказательство. Известно, что всякое дифференцирование простой конечномерной центральной ассоциативной алгебры A (в частности, алгебры M_2) является внутренним [62]. В свою очередь, все внутренние дифференцирования алгебры A образуют алгебру дифференцирований — алгебру Ли, порожденную операторами D_s , где $s \in A$, относительно операции коммутирования $[D_a, D_b] = D_a D_b - D_b D_a = D_{[a,b]}$. В частности, множество $\text{Der } M_2$ всех дифференцирований алгебры M_2 образует алгебру Ли $\mathfrak{sl}_2 = \text{span}(e_{11} - e_{22}, e_{12}, e_{21})$ бесследных матриц.

Пусть D — чётное дифференцирование супералгебры $B_{4|4}(w)$, тогда для некоторого $s \in \mathfrak{sl}_2$ выполнено $a^D = aD_s$. Определим отображение $\delta: M_2 \rightarrow M_2$ посредством следующего равенства:

$$[a]^D = [a^\delta].$$

С помощью δ опишем действие дифференцирования D на нечетной части. Так как $p^2 = w$ и $p = [w]$, то из соотношения (7.11) имеем

$$wD_s = w^D = [w^\delta][w] + [w][w^\delta] = w^\delta w^\nu + w w^\delta \nu.$$

Учитывая, что матрица wD_s имеет нулевой след, получим, что $(wD_s)^\nu = 0$, кроме того, $w^\nu = 1$, поэтому, применяя к обеим частям равенства функционал ν , получим $0 = 2w^\delta \nu$, то есть

$$w^\delta \nu = 0.$$

Далее, так как $a = [a]p = [a][w]$, то по соотношению (7.11) получаем

$$a^D = [a^\delta][w] + [a][w^\delta] = a^\delta w^\nu + a w^\delta \nu = a^\delta,$$

таким образом, доказано, что

$$[a]^D = [a^D]. \quad (8.3)$$

Таким образом, дифференцирование четной части индуцирует «свою копию» в нечетной.

Учитывая равенство (8.3) покажем, что формулы (7.11) выполнены для любого дифференцирования D . В самом деле,

$$\begin{aligned} ([a][b])^D &= (ab^\nu)^D = a^D b^\nu, \\ [a]^D [b] + [a][b]^D &= a^D b^\nu + a(bD_s)^\nu = a^D b^\nu, \end{aligned}$$

так как $\text{tr}(bD_s) = 0$.

Далее, пользуясь очевидным свойством $s + \bar{s} = \text{tr } s$, докажем, что для любого b верно равенство $\bar{b}^D = \overline{b^D}$:

$$\bar{b}^D = \overline{bD_s} = -\bar{b}D_{\bar{s}} = -\bar{b}D_{\text{tr}(s)-s} = \bar{b}D_s = \bar{b}^D.$$

Используя это равенство и (8.3), проверим справедливость (7.12) для любого дифференцирования D :

$$\begin{aligned} ([a]b)^D &= [a\bar{b}]^D = [(a\bar{b})^D] = [a^D\bar{b}] + [a\bar{b}^D] = [a^D\bar{b}] + [a\overline{b^D}], \\ &= [a]^Db + [a]b^D = [a^D]b + [a]b^D = [a^D\bar{b}] + [a\overline{b^D}]. \end{aligned}$$

Наконец, учитывая равенство $b^{D\nu} = 0$ и используя соотношение (7.13), имеем:

$$\begin{aligned} (a[b])^D &= [ab]^D - [aD_w b^\nu]^D = [ab]^D - [aD_w D_s b^\nu], \\ a^D[b] + a[b^D] &= [a^D b] - [a^D D_w b^\nu] + [ab^D] = [ab]^D - [aD_s D_w b^\nu]. \end{aligned}$$

При $b^\nu = 1$ имеем $aD_w D_s = aD_s D_w$. Значит, $aD_{[w,s]} = 0$, т.е. коммутатор $[w, s] = ws - sw$ является центральным элементом, значит, он равен 0, поскольку имеет нулевой след. Отсюда следует, что $s \in C(w)$. $\square$

В §8.4 описаны централизаторы матриц, приведенных к нормальной форме. Таким образом, справедлива

Теорема 8.3. *Алгебра четных дифференцирований скалярного дубля $B_{4|4}(\lambda)$ изоморфна $\mathfrak{sl}_2$. Алгебры четных дифференцирований остальных дублей одномерны, значит, абелевы.*

В соответствии с леммой 8.4 достаточно указать пересечения централизаторов $C(w)$ и алгебры $\mathfrak{sl}_2$: если w — скалярная матрица, то $C(w) \cap \mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2$; если w — диагональна, но не скалярна, то $C(w) \cap \mathfrak{sl}_2 = \Phi(e_{11} - e_{22})$; если жорданова, то $C(w) \cap \mathfrak{sl}_2 = \Phi e_{12}$; если $w = \alpha + \beta\zeta$ — обобщённая жорданова клетка, то $C(w) \cap \mathfrak{sl}_2 = \Phi\zeta$.

8.6. Нечётные дифференцирования

Линейное отображение $D: B \rightarrow B$ супералгебры $B = A + M$ называется *нечётным дифференцированием*, если $A^D \subseteq M$, $M^D \subseteq A$ и для любых $x, y \in A \cup M$

$$(xy)^D = (-1)^{|y|} x^D y + xy^D.$$

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 8.4. *Ненулевые нечетные дифференцирования имеют только вырожденные дубли; более точно, нечетное дифференцирование D вырожденного дубля $B_{4|4}(\lambda e_{22})$ задается правилами: $a^D = -\lambda\beta[e_{22}ae_{12}]$, $[a]^D = \beta ae_{12}$ при подходящем β . Супералгебра дифференцирований любого нескаллярного дубля является абелевой. Супералгебра дифференцирований скалярного дубля изоморфна $\mathfrak{sl}_2$.*

Для доказательства теоремы введем два линейных оператора на четной части φ и ψ соотношениями $a^D = [a^\varphi]$ и $[a]^D = a^\psi$, и изучим их свойства. Сначала получим некоторые общие свойства этих операторов, а потом изучим их более детально в каждом из трех возможных случаев: жорданов дубль, диагональный дубль, обобщенно жорданов дубль.

Заметим вначале, что $1^D = 0$, это обычным образом следует из равенства $1 \cdot 1 = 1$. Другими словами, $1^\varphi = 0$.

Запишем соотношение, получающееся после применения оператора D к соотношению (7.11):

$$-a^\psi b + a^\psi D_w b^\nu + a \overline{b^\psi} = a^\varphi b^\nu. \quad (8.4)$$

Отсюда при $b = e_{12}$ и $b = e_{21}$ следует, что

$$-a^\psi e_{12} + a \overline{e_{12}^\psi} = 0, \quad -a^\psi e_{21} + a \overline{e_{21}^\psi} = 0,$$

значит, $a^\psi = a(\overline{e_{12}^\psi}e_{21} + \overline{e_{21}^\psi}e_{12})$, другими словами, подставляя в это равенство $a = 1$, получим

$$a^\psi = a \cdot 1^\psi, \quad (8.5)$$

где

$$1^\psi = \overline{e_{12}^\psi}e_{21} + \overline{e_{21}^\psi}e_{12}.$$

Подставляя теперь $a = e_{12}$ и $a = e_{21}$, получим

$$\begin{aligned} e_{12}^\psi &= e_{12} \overline{e_{12}^\psi}e_{21} + e_{12} \overline{e_{21}^\psi}e_{12}, \\ e_{21}^\psi &= e_{21} \overline{e_{12}^\psi}e_{21} + e_{21} \overline{e_{21}^\psi}e_{12}, \end{aligned}$$

иначе говоря, если $e_{12}^\psi = \sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij}e_{ij}$, а $e_{21}^\psi = \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij}e_{ij}$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\beta_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha_{12} & \beta_{22} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что для некоторых скаляров α, β, γ

$$\begin{aligned} e_{12}^\psi &= \alpha e_{11} + \gamma e_{12}, & e_{21}^\psi &= \beta e_{22} - \gamma e_{21}, \\ 1^\psi &= (\alpha e_{22} - \gamma e_{12})e_{21} + (\beta e_{11} + \gamma e_{21})e_{12}, \end{aligned}$$

то есть

$$1^\psi = \begin{pmatrix} -\gamma & \beta \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2. \quad (8.6)$$

Заметим, что отсюда следует равенство $\overline{1^\psi} = -1^\psi$, поэтому из (8.4) при $a = b = 1$ имеем

$$1^\psi = \frac{1^\psi D_w}{\text{tr}(w)}. \quad (8.7)$$

8.6.1. Нечётные дифференцирования жордановых дублей.

Сначала рассмотрим нечётные дифференцирования *жорданова дубля* $B_{4|4}(\frac{1}{2\lambda} + e_{12})$. В силу (8.7) получаем, что $1^\psi = \lambda(1^\psi e_{12} - e_{12} 1^\psi)$, значит, на основании (8.6)

$$\begin{pmatrix} -\gamma & \beta \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\alpha & -2\gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $1^\psi = 0$. Сравнивая с (8.5), получаем $a^\psi = 0$. Выберем b так, что $b^\nu = 1$, тогда из равенства (8.4) следует, что $a^\varphi = 0$.

Таким образом, доказано, что $\text{Der}_1 B_{4|4}(\frac{1}{2\lambda} + e_{12}) = 0$.

8.6.2. Нечётные дифференцирования диагональных дублей.

Теперь рассмотрим нечётные дифференцирования *диагонального дубля* $B_{4|4}(\frac{\lambda + \mu(e_{22} - e_{11})}{2}) = B_{4|4}(\frac{\lambda - \mu}{2} + \mu e_{22})$.

По соотношениям (8.7) имеем $1^\psi = \frac{\mu}{\lambda}(1^\psi e_{22} - e_{22} 1^\psi)$, значит, по соотношению (8.6)

$$1^\psi = \begin{pmatrix} -\gamma & \beta \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} = \frac{\mu}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Возможны лишь три случая:

$$\mathbf{1.} \ 1^\psi = 0; \quad \mathbf{2.} \ \mu = \lambda \text{ и } 1^\psi = \beta e_{12}, \quad \mathbf{3.} \ \mu = -\lambda \text{ и } 1^\psi = \alpha e_{21}.$$

Покажем, что случаи, отмеченные в **3**, приводят к дублям, изоморфным дублям из случая **2**. В самом деле, при $\mu = -\lambda$ дубль принимает вид $B_{4|4}(\lambda e_{11})$, а при $\mu = \lambda$ — вид $B_{4|4}(\lambda e_{22})$. Определяющие матрицы этих дублей подобны, значит, они изоморфны.

Разберем два оставшихся случая **1** и **2**.

Случай 1. $1^\psi = 0$. В этом случае из соотношения (8.5) получаем, что $a^\psi = 0$, тогда по (8.4) имеем $a^\varphi = 0$, значит $\text{Der}_1 B_{4|4}(\lambda + \mu(e_{22} - e_{11})) = 0$.

Случай 2. $1^\psi = \beta e_{12}$. В этом случае мы имеем дело с вырожденным дублем $B_{4|4}(\lambda e_{22})$. Его определяющие соотношения записываются следующим образом: $[a][b] = \lambda^{-1}a \operatorname{tr}(b)$, $[a]b = [a\bar{b}]$, $a[b] = [ab] - [ae_{22} - e_{22}a] \operatorname{tr}(b)$. Применяя дифференцирование D к каждому из этих равенств, получаем

$$-a^\psi b + (a^\psi e_{22} - e_{22}a^\psi) \operatorname{tr}(b) + \overline{ab}^\psi = \lambda^{-1}a^\varphi \operatorname{tr}(b), \quad (8.8)$$

$$a^\psi b + \lambda^{-1}a \operatorname{tr}(b^\varphi) = (\overline{ab})^\psi, \quad (8.9)$$

$$-\lambda^{-1}a^\varphi \operatorname{tr}(b) + ab^\psi = (ab)^\psi - (ae_{22} - e_{22}a)^\psi \operatorname{tr}(b). \quad (8.10)$$

Так как $1^\psi = \beta e_{12}$, то из (8.5) следует, что

$$a^\psi = \beta a e_{12}, \quad (8.11)$$

причем, можно считать, что $\beta \neq 0$.

Подставляя это равенство в соотношение (8.10) при $b = \frac{1}{2}$, получаем $-\lambda^{-1}a^\varphi = \beta e_{22}a e_{12}$, то есть

$$a^\varphi = -\lambda \beta e_{22}a e_{12}. \quad (8.12)$$

Осталось проверить, что найденные отображения ψ и φ определяют все дифференцирования дубля $B_{4|4}(\lambda e_{22})$.

Подставляя соотношения (8.11) и (8.12) в (8.8) и сокращая на β , получаем

$$-a e_{12} b + a e_{12} \operatorname{tr}(b) - e_{22} a e_{12} \operatorname{tr}(b) - a e_{12} \bar{b} = -e_{22} a e_{12} \operatorname{tr}(b),$$

которое, очевидно, выполнено при любых a и b .

Аналогично поступим с соотношением (8.9):

$$a e_{12} b - a \operatorname{tr}(e_{22} b e_{12}) = \overline{a b} e_{12}.$$

Покажем, что для любых b выполнено свойство $e_{12} b - \operatorname{tr}(e_{22} b e_{12}) = \bar{b} e_{12}$. В самом деле, $e_{12} b - \bar{b} e_{12} = e_{12} b + \overline{e_{12} b} = \operatorname{tr}(e_{12} b) = \operatorname{tr}(e_{12} e_{22} b) = \operatorname{tr}(e_{22} b e_{12})$. Таким образом, соотношение (8.9) выполнено при любых a и b .

Подставим соотношения (8.11) и (8.12) в (8.10):

$$e_{22} a e_{12} \operatorname{tr}(b) + a b e_{12} = a b e_{12} - (a e_{22} - e_{22} a) e_{12} \operatorname{tr}(b).$$

Это соотношение, очевидно, выполнено для любых a и b .

По определению дифференцирования надо понять, что полученное дифференцирование выполнено и на произведении четных элементов. Имеем $(ab)^D = a^D b + ab^D$, то есть $[(ab)^\varphi] = [a^\varphi]b + a[b^\varphi]$, значит,

$$(ab)^\varphi = a^\varphi \bar{b} + ab^\varphi - (a e_{22} - e_{22} a) \operatorname{tr}(b^\varphi).$$

Подставим (8.11) и (8.12) в это соотношение и сократим на $\lambda\beta$:

$$-e_{22}abe_{12} = -e_{22}ae_{12}\bar{b} - ae_{22}be_{12} + (ae_{22} - e_{22}a)\operatorname{tr}(e_{22}be_{12}).$$

Тогда

$$e_{22}ae_{12}\bar{b} - e_{22}abe_{12} + e_{22}a\operatorname{tr}(be_{12}) = -ae_{22}be_{12} + ae_{22}\operatorname{tr}(e_{22}be_{12}).$$

Левая часть равенства равна 0, поскольку $\operatorname{tr}(be_{12}) = be_{12} + \overline{be_{12}} = be_{12} - e_{12}\bar{b}$. Правая также равна 0, так как $e_{22}\operatorname{tr}(e_{22}be_{12}) = e_{22}e_{22}be_{12} - e_{22}e_{12}\bar{b}e_{11} = e_{22}be_{12}$.

Таким образом, доказано, что соотношения (8.11) и (8.12) определяют все возможные нечётные дифференцирования на дубле $V_{4|4}(\lambda e_{11})$.

8.6.3. Нечётные дифференцирования обобщённо жордановых дублей.

Рассмотрим, наконец, нечётные дифференцирования обобщённо жорданова дубля $V_{4|4}(\lambda + \mu\zeta)$. В силу (8.7) $1^\psi = \frac{\mu 1^\psi D_\zeta}{2\lambda}$. Ввиду (8.6) имеем

$$1^\psi D_\zeta = \begin{pmatrix} \alpha\zeta^2 - \beta & -2\gamma \\ 2\gamma\zeta^2 & \beta - \alpha\zeta^2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\eta = \frac{\mu}{2\lambda}$, тогда имеем три равенства

$$\eta(\beta - \alpha\zeta^2) = \gamma, \tag{8.13}$$

$$-2\eta\gamma = \alpha, \tag{8.14}$$

$$2\eta\gamma\zeta^2 = \beta. \tag{8.15}$$

Из (8.14) и (8.15) получаем, что $\beta = -\alpha\zeta^2$, тогда подставим это соотношение в (8.13): $2\eta\beta = \gamma$. Наконец, из этого равенства и (8.15), получаем $4\eta^2\zeta^2\beta = \beta$. Но $4\eta^2\zeta^2 \neq 1$, поскольку иначе $\zeta = \pm \frac{1}{2\eta} = \pm \frac{\lambda}{\mu} \in \Phi$, поэтому $\beta = 0$, а значит, $\alpha = 0$ и $\gamma = 0$. Таким образом, $1^\psi = 0$ и $a^\psi = a^\varphi = 0$.

Значит, все нечётные дифференцирования обобщённо жорданова дубля нулевые. Тем самым, теорема 8.4 полностью доказана.

Глава 9

Простые супералгебры, четная часть которых содержит ниль-радикал

9.1. Простые унитарные супералгебры

Алгебра называется *унитарной*, если она получена внешним присоединением единицы к ниль-алгебре. Целью этого параграфа является доказательство утверждения.

Теорема 9.1. *Пусть $B = A \oplus M$ — простая конечномерная правоальтернативная супералгебра над полем Φ характеристики 0. Если чётная часть A унитарна и её единица является единицей в супералгебре B , то супералгебра B ассоциативна.*

Неизвестно является ли существенным в этой теореме ограничение конечномерности супералгебры.

9.1.1. Предварительные замечания

Всюду ниже, если не оговорено противное, используются обозначения:

$$a, b, c, r \in A, x, y, z \in M, p, q, t \in A \cup M.$$

Пусть $A = \Phi \cdot 1 + \mathfrak{R}$, $0 \neq \mathfrak{R}$ — ниль-радикал алгебры A , Φ — поле характеристики 0. Без ограничения общности поле Φ можно считать алгебраически замкнутым. В дальнейшем, будем отождествлять поля $\Phi \cdot 1$ и Φ . Допустим также, что $(g_1, \dots, g_n)$ — базис пространства $\mathfrak{R}$ над полем Φ , в частности, $\mathfrak{R} = \text{span}(g_1, \dots, g_n)$.

Лемма 9.1. *Если $B = A \oplus M$ — простая супералгебра, то $M^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$.*

Доказательство. Если $M^2 \subseteq \mathfrak{R}$, то $\mathfrak{R} + M \triangleleft B$ (собственный идеал), — противоречие. $\square$

Лемма 9.2. *Если $a \in \mathfrak{R}$, $x \in M$ и $ax = x$, то $x = 0$.*

Доказательство. Поскольку $a \in \mathfrak{R}$, то $a^m = 0$ для некоторого m . Используя правое тождество Муфанг (1.8), покажем, что $(b, a, x) = 0$ для любого $b \in \mathfrak{R}$:

$$(b, a, x) = (b, a, ax) = (b, a, x)a = (b, a, x)a \cdot a = (b, a, x)a^2 = \dots = (b, a, x)a^m = 0.$$

Тогда

$$x = ax = a(ax) = a^2x = \dots = a^{m-1}x = a^{m-1}(ax) = a^m x = 0. \quad \square$$

Лемма 9.3. Если $xy \notin \mathfrak{R}$ для некоторых $x, y \in M$, то $M = xA + Ay$.

Доказательство. На основании леммы 9.1: $M^2 \not\subseteq \mathfrak{R}$, следовательно, $(\exists x, y \in M) xy = \lambda + a$, где $\lambda \in \Phi$, $\lambda \neq 0$ и $a \in \mathfrak{R}$. Значит, умножая обе части равенства на λ^{-1} , получаем, что для подходящих $x, y \in M, a \in \mathfrak{R}$ верно $xy = 1 + a$.

Для произвольного $z \in M$ в силу правой альтернативности верно $(xy)z = (xz)y + x[y, z]$, откуда

$$(1 + a)z \in xA + Ay.$$

Покажем, что линейный оператор $\varphi: M \rightarrow M, z^\varphi = (1 + a)z$ невырожден. В самом деле, иначе $(\exists 0 \neq t \in M) (1 + a)t = 0$, т.е. $t = -at$, что противоречит лемме 9.2. Тогда по теореме о ранге и дефекте оператор φ сюръективен, значит,

$$M = (1 + a)M \subseteq xA + Ay \subseteq M, \quad \text{т.е. } M = xA + Ay. \quad \square$$

По лемма 5.19 и 5.21 заключаем, что выполнена

Лемма 9.4. Верно включение $(A, M, M) \subseteq \mathfrak{R}$.

9.1.2. Случай изотропного пространства M

Напомним, что элемент $x \in M$ называется *изотропным*, если $x^2 \in \mathfrak{R}$. Пространство M назовем *изотропным*, если каждый его элемент изотропен.

Всюду в этом пункте пространство M предполагается изотропным. Кроме того, если не оговорено противное, то знак $\equiv$ означает сравнение по модулю $\mathfrak{R}$.

Поскольку $x^2 \equiv 0$ для любого $x \in M$, то для любых $x, y \in M$:

$$xy + yx = (x + y)^2 - x^2 - y^2 \equiv 0,$$

значит, справедлива

Лемма 9.5. Верно сравнение $(\forall x, y \in M) xy \equiv -yx$ по модулю $\mathfrak{R}$.

Из лемм 9.4 и 9.5 вытекает

Лемма 9.6. Верно включение $M * (\mathfrak{R}M) \subseteq \mathfrak{R}$.

Лемма 9.7. Для любых $x \in M, r \in \mathfrak{R}$ выполнено $xr \cdot x \in \mathfrak{R}$. В частности, для любых $x, y \in M, r \in \mathfrak{R}$ верно $xr \cdot y \equiv -yr \cdot x$.

Доказательство. Ввиду правой альтернативности и лемм 9.5, 9.6 имеем по модулю $\mathfrak{R}$:

$$0 \equiv x^2 \cdot r = -xr \cdot x + x(x \circ r) \equiv -xr \cdot x + x \cdot xr \equiv -2xr \cdot x.$$

Значит, $xr \cdot x \equiv 0$. Линеаризация этого сравнения даёт $xr \cdot y \equiv -yr \cdot x$. □

Поскольку супералгебра B простая, то по лемме 9.1 выберем такие элементы $x, y \in M$, что $xy \notin \mathfrak{R}$. По лемме 9.3: $M = xA + Ay = \text{span}(x, xg_i, y, g_iy \mid i = \overline{1, n})$. Поскольку $x, y \in M$ линейно независимы (иначе $xy \in \mathfrak{R}$), то $\dim_{\Phi} M \geq 2$.

Лемма 9.8. *Справедливо включение $x\mathfrak{R} \cdot x\mathfrak{R} + (x\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R})x \subseteq \mathfrak{R}$.*

Доказательство. Если $xa \cdot xb \notin \mathfrak{R}$, где $a, b \in \mathfrak{R}$, то по лемме 9.3:

$$M = \text{span}(xa, xa \cdot g_i, xb, g_i \cdot xb \mid i = \overline{1, n}).$$

Поскольку $x \in M$, то $x \equiv \sum_{c \in \{a, b\}} \alpha_c xc + \sum_i \gamma_i xa \cdot g_i \pmod{\mathfrak{R}M}$, т.е.

$$x = xR_r + xR_aR_s + \sum_i r_i y_i, \quad \text{где } r, s, r_i \in \mathfrak{R}, y_i \in M,$$

или $x \equiv x(R_r + R_aR_s) \pmod{\mathfrak{R}M}$. Так как $\mathfrak{R}M \cdot A \subseteq \mathfrak{R}M$, то

$$x \equiv x(R_r + R_aR_s)^N \pmod{\mathfrak{R}M}.$$

Поскольку подалгебра $\text{alg}_{\text{End}(M)}(R_a \mid a \in \mathfrak{R})$ алгебры операторов $\text{End}_{\Phi}(M)$, порожденная операторами вида $R_a (a \in \mathfrak{R})$, нильпотентна по теореме Ширшова [39, с. 407], то $x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{R}M}$. Тогда $xy \in \mathfrak{R}M \cdot M \subseteq \mathfrak{R}$ по лемме 9.4, что противоречит соотношению $xy \notin \mathfrak{R}$. Тем самым, от противного, доказано включение $x\mathfrak{R} \cdot x\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}$.

Наконец, в силу правой альтернативности, лемм 9.5, 9.6 и включения $x\mathfrak{R} \cdot x\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}$ имеем

$$\begin{aligned} (xa)(bx) &\equiv -(bx)(xa) \in (\mathfrak{R}M)M \subseteq \mathfrak{R}, \\ (xa \cdot b)x &\equiv (xa)(x \circ b) \equiv (xa)(xb) \equiv 0. \quad \square \end{aligned}$$

Всюду ниже в этом пункте $M' = x\mathfrak{R} + \mathfrak{R}y$.

Лемма 9.9. *Если $z \in M$ и $xz \in \mathfrak{R}$, то $z \in \Phi x + M'$.*

Доказательство. Пусть $z = \lambda x + \sum_i \lambda_i xg_i + \mu y + \sum_i \mu_i g_iy$. Тогда, учитывая лемму 9.5, получаем: $x(xg_i) \equiv -(xg_i)x \equiv 0$ в силу леммы 9.7 и $x(g_iy) \equiv 0$ в силу леммы 9.6. Значит, $xz \equiv \mu xy \pmod{\mathfrak{R}}$, откуда $\mu = 0$. □

Лемма 9.10. *Выполнены включения:*

$$\text{а) } M * M' \subseteq \mathfrak{R}; \quad \text{б) } \mathfrak{R} * M \subseteq M'.$$

Доказательство разобьем на ряд пунктов. 1° Заметим, что $\mathfrak{R}M \subseteq \Phi x + M'$. В самом деле, поскольку $(\mathfrak{R}M)x \subseteq \mathfrak{R}$ в силу леммы 9.6, то достаточно применить лемму 9.9.

2° Докажем, что $\mathfrak{R} * (\mathfrak{R}M) \subseteq \Phi x + M'$. В самом деле,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}M)\mathfrak{R} &\subseteq -(\mathfrak{R}\mathfrak{R})M + \mathfrak{R}(M \circ \mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{R}M, \\ \mathfrak{R}(\mathfrak{R}M) &\subseteq \mathfrak{R}M. \end{aligned}$$

Откуда в силу п. 1° вытекает требуемое.

3° Покажем, что $x\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R} \subseteq \Phi x + M'$. Поскольку по лемме 9.8: $(x\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R})x \subseteq \mathfrak{R}$, то указанное соотношение верно по лемме 9.9.

4° Докажем, что $y\mathfrak{R} \subseteq \Phi x + M'$.

Пусть $\mathfrak{R}^{(n)}$ обозначает правую степень радикала, т.е. $\mathfrak{R}^{(1)} = \mathfrak{R}$ и по индукции $\mathfrak{R}^{(n+1)} = \mathfrak{R}^{(n)}\mathfrak{R}$. По теореме Ширшова конечномерная правоальтернативная ниль-алгебра правонильпотентна, значит, $(\exists N)\mathfrak{R}^{(N)} = 0$. Докажем возвратной индукцией по k , что $y\mathfrak{R}^{(k)} \subseteq \Phi x + M'$. Основание индукции при $k = N$ верно. Допустим, что $y\mathfrak{R}^{(k+1)} \subseteq \Phi x + M'$ и выберем произвольный элемент $r \in \mathfrak{R}^{(k)}$. Пусть $yr = \lambda x + \sum_i \lambda_i x g_i + \mu y + \sum \mu_i g_i y$. Допустим, от противного, что $yr \notin \Phi x + M'$. Поскольку $yr \cdot r \in y\mathfrak{R}^{(k+1)}$, то на основании пп. 2° и 3° имеем: $0 \equiv yr \cdot r \equiv \mu yr \pmod{\Phi x + M'}$. Поскольку $yr \notin \Phi x + M'$, то $\mu = 0$, но тогда $yr \in \Phi x + M'$, — противоречие.

5° Докажем, что $\mathfrak{R} * M \subseteq \Phi x + M'$.

В силу п. 1° достаточно понять, что $M\mathfrak{R} \subseteq \Phi x + M'$.

Так как $\mathfrak{R}y \cdot \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}M$ в силу п. 2°, то имеем:

$$\begin{aligned} M\mathfrak{R} &\subseteq (\Phi x + \Phi y + M')\mathfrak{R} \subseteq x\mathfrak{R} + y\mathfrak{R} + x\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R} + \mathfrak{R}y \cdot \mathfrak{R} \subseteq \\ &\subseteq x\mathfrak{R} + y\mathfrak{R} + x\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R} + \mathfrak{R}M \subseteq \Phi x + M' \text{ в силу пп. 1°, 3° и 4°.} \end{aligned}$$

6° Докажем, что $x\mathfrak{R} * y \subseteq \mathfrak{R}$. Имеем:

$$\begin{aligned} y \cdot xr &\equiv -xr \cdot y \text{ в силу изотропности } M \\ &\equiv yr \cdot x \in (\Phi x + M')x \text{ в силу леммы 9.7 и п. 5°} \\ &\subseteq \mathfrak{R} + M'x = \mathfrak{R} + (x\mathfrak{R} + \mathfrak{R}y)x \subseteq \mathfrak{R} \text{ в силу лемм 9.7 и 9.4.} \end{aligned}$$

П. 4° можно усилить следующим образом.

7° Верно включение $y\mathfrak{R} \subseteq M'$. В самом деле, во-первых, в силу п. 4°:

$$(\forall r \in \mathfrak{R}) (\exists \alpha \in \Phi, a, b \in \mathfrak{R}) yr = \alpha x + xa + by.$$

Тогда, учитывая п. 6° и леммы 9.6 и 9.7, имеем по модулю $\mathfrak{R}$:

$$0 \equiv yr \cdot y = \alpha xy + xa \cdot y + by \cdot y \equiv \alpha xy,$$

значит, $\alpha = 0$.

8°. Докажем теперь, что $M * M' \subseteq \mathfrak{R}$. Имеем в силу лемм 9.6–9.8 и п. 6°:

$$M * M' \equiv M' M \equiv x\mathfrak{R} \cdot M = x\mathfrak{R} \cdot (\Phi x + x\mathfrak{R} + \Phi y + \mathfrak{R}y) \equiv x\mathfrak{R} \cdot y \equiv 0.$$

Тем самым, доказан п. а).

9°. Докажем, что $M * \mathfrak{R} \subseteq \Phi y + M'$.

Если $z \in M$, $r \in \mathfrak{R}$, то положим $zr = \lambda x + \sum_i \lambda_i x g_i + \mu y + \sum_i \mu_i g_i y$. Докажем, что $\lambda = 0$. Умножая обе части этого равенства справа на y , получим $(zr)y \equiv \lambda xy$ в силу п. 6°. С другой стороны, ввиду изотропности пространства M , леммы 9.7 и пп. 7°, 8°: $(zr)y \equiv -(yr)z \in M' M \equiv 0$, следовательно, $\lambda = 0$.

Аналогично, если $rz = \lambda x + \sum_i \lambda_i x g_i + \mu y + \sum_i \mu_i g_i y$, то $0 \equiv (rz)y \equiv \lambda xy$ и $\lambda = 0$.

10°. Докажем теперь п. б), т.е. $\mathfrak{R} * M \subseteq M'$.

Заметим, что элементы x и y не пропорциональны, поскольку $x^2 \in \mathfrak{R}$, $xy \notin \mathfrak{R}$. Далее, если $\alpha x + \beta y \in M'$, то $\alpha xy \in M' y \in \mathfrak{R}$ в силу п. а), откуда $\alpha = 0$. Аналогично проверяется, что $\beta = 0$. Пусть E — какой-нибудь базис пространства M' . Тогда $E \cup \{x, y\}$ — базис пространства M . Следовательно, в силу пп. 5° и 9° получаем

$$\mathfrak{R} * M \subseteq (\Phi x + \text{span } E) \cap (\Phi y + \text{span } E) = \text{span } E = M'. \quad \square$$

Предложение 9.1. *Если пространство M изотропно, то супералгебра B не является простой.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $\mathfrak{R} + M' \triangleleft B$ в силу леммы 9.10. $\square$

9.1.3. Случай неизотропного пространства M

Если пространство M неизотропно, то $(\exists x \in M) x^2 \notin \mathfrak{R}$, и можно считать, что $x^2 = 1 + r'$, где $r' \in \mathfrak{R}$.

Кроме того, $M = xA + Ax$ по лемме 9.3, т.е. $M = \text{span}(x, xg_i, g_i x \mid i = \overline{1, n})$.

Пусть A^* — мультипликативная группа алгебры A .

Лемма 9.11. *Не существует $p \in A^*$ такого, что $xp \in (x, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}) + \mathfrak{R}M$.*

Доказательство. Пусть, от противного, существует такой обратимый элемент p . Ввиду обратимости элемента p имеем $\mathfrak{R} = p\mathfrak{R} = \mathfrak{R}p$, значит,

$$\mathfrak{R} = p\mathfrak{R}p; \quad (9.1)$$

и в силу правой альтернативности

$$(\mathfrak{R}M)A \subseteq \mathfrak{R}M. \quad (9.2)$$

Положим $(x, \mathfrak{R})_1 = x\mathfrak{R}$ и определим по индукции $(x, \mathfrak{R})_{k+1} = (x, \mathfrak{R})_k \cdot \mathfrak{R}$. Поскольку алгебра $\text{alg}_{\text{End}(M)}(R_a \mid a \in \mathfrak{R})$ нильпотентна, то $(\exists m) (x, \mathfrak{R})_m = 0$.

Используя соотношения (9.1), (9.2) и правое тождество Муфанг (1.9), получаем:

$$\begin{aligned} x\mathfrak{R} &= x(p\mathfrak{R}p) = (xp)\mathfrak{R} \cdot p \subseteq ((x, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}) + \mathfrak{R}M)\mathfrak{R} \cdot A \subseteq \\ &\subseteq (x, \mathfrak{R})_2 + (x, \mathfrak{R})_3 + \mathfrak{R}M \subseteq \dots \subseteq (x, \mathfrak{R})_m + (x, \mathfrak{R})_{m+1} + \mathfrak{R}M \subseteq \mathfrak{R}M, \end{aligned}$$

откуда

$$x\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}M. \quad (9.3)$$

Ввиду обратимости p имеет место представление $p = \omega + s$, где $0 \neq \omega \in \Phi$, $s \in \mathfrak{R}$, значит, $\omega x = xp - xs \in \mathfrak{R}M + x\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}M$ в силу (9.3), откуда $x \in \mathfrak{R}M$. Наконец, $x^2 \in (\mathfrak{R}M)x \subseteq \mathfrak{R}$ по лемме 9.4, — противоречие. $\square$

Лемма 9.12. Пусть $M' = x\mathfrak{R} + \mathfrak{R}x$. Тогда $M' * M \subseteq \mathfrak{R}$.

Доказательство. Напомним, что $x^2 = 1 + r'$, где $r' \in \mathfrak{R}$.

Рассуждения удобно представить в виде последовательности шагов.

1°. Пусть $x \cdot rx = \lambda + r''$ для некоторых $\lambda \in \Phi$, $r, r'' \in \mathfrak{R}$. Докажем, что $\lambda = 0$.

В силу правой альтернативности имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= (x, x, rx) - (x, rx, x) = x^2 \cdot rx - x(x \cdot rx) - (x \cdot rx)x + x(rx \cdot x) = \\ &= -2\lambda x + r_1x + r_2(r_3x) + xr_4, \quad \text{где } r_i \in \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Допустим, от противного, что $\lambda \neq 0$. Тогда верно равенство

$$x = sx + s_1(s_2x) + xt, \quad \text{где } s, s_i, t \in \mathfrak{R}.$$

Следовательно, $x(1-t) = sx + s_1(s_2x)$, т.е. существуют элементы $p = 1-t \in A^*$ и $s_i \in \mathfrak{R}$, $z_i \in M$ такие, что $xp = \sum_i s_i z_i$, значит, $xp \in \mathfrak{R}M$, что противоречит лемме 9.11.

Из п. 1° и леммы 9.4 вытекает

2°. $x * (\mathfrak{R}x) \subseteq \mathfrak{R}$.

3°. Докажем, что $(x\mathfrak{R})(\mathfrak{R}x) \subseteq \mathfrak{R}$. Пусть $r_1, r_2, r \in \mathfrak{R}$, $x_1 = xr_1$, $x_2 = r_2x$ и $x_1x_2 = \lambda + r$. Допустим, что $\lambda \neq 0$; тогда

$$\begin{aligned} 0 &= (x, x_1, x_2) - (x, x_2, x_1) = \\ &= (x \cdot x_1)x_2 - x(x_1x_2) - (xx_2)x_1 + x(x_2x_1) \in \mathfrak{R}M - \lambda x + x\mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Откуда $xr \in \mathfrak{R}M$ для подходящего $p \in A^*$, что противоречит лемме 9.11.

Из п. 3° и леммы 9.4 вытекает

4°. $(x\mathfrak{R}) * (\mathfrak{R}x) \subseteq \mathfrak{R}$.

5°. Докажем, что $x * x\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}$. Пусть $s \in \mathfrak{R}$, $z = xs$ и $zx = \lambda + r$, где $r \in \mathfrak{R}$. Допустим, что $\lambda \neq 0$; тогда ввиду п. 1°

$$0 = (x, x, s) + (x, s, x) = x^2s - xz + zx - x(sx) \equiv -xz + zx,$$

т.е. $xz \equiv zx$ и стало быть

$$xz = \lambda + t, \quad \text{где } t \in \mathfrak{R}. \quad (9.4)$$

Далее, на основании равенства (9.4) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (x, x, z) - (x, z, x) = x^2z - x(xz) - (xz)x + x(zx) = \\ &= (1 + r')z - x(\lambda + t) - (\lambda + t)x + x(\lambda + r) = \\ &= (1 + r')xs - \lambda x - x \circ t + xr = r'(xs) - tx - \lambda x + xs - xt + xr = \\ &= x(-\lambda + s - t + r) + r'(xs) - tx. \end{aligned}$$

Откуда следует, что $(\exists p \in A^*) xp \in \mathfrak{R}M$, что противоречит лемме 9.11.

6°. Докажем, что $(x, \mathfrak{R}, \mathfrak{R})x \subseteq \mathfrak{R}$. Пусть $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, $z = (x, r_1, r_2)$ и $xz = \lambda + r$. Допустим, что $\lambda \neq 0$ и покажем сначала, что $s = z \circ x \in \mathfrak{R}$. В силу суперизованного тождества Клейнфелда (1.6) и п. 5° имеем:

$$s = z \circ x = x(x, r_1, r_2) + (x, r_1, r_2)x = (x^2, r_1, r_2) + (x, x, [r_1, r_2]) \equiv -x \cdot x[r_1, r_2] \equiv 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} 0 &= (x, x, z) - (x, z, x) = x^2z - x(xz) - (xz)x + x(zx) = \\ &= z + r'z - 2\lambda x - x \circ r + x(z \circ x - xz) = \\ &= z + r'z - 2\lambda x - x \circ r + x(s - \lambda - r) = \\ &= z + r'z - 3\lambda x - rx + x(s - 2r), \end{aligned}$$

откуда $(\exists p \in A^*) xp \in (x, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}) + \mathfrak{R}M$. Однако, последнее соотношение невозможно ввиду леммы 9.11. Значит, $\lambda = 0$ и $(x, \mathfrak{R}, \mathfrak{R})x \subseteq \mathfrak{R}$.

Из пп. 5° и 6° немедленно вытекает

7°. Верно сравнение $(x\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R})x \subseteq \mathfrak{R}$.

8°. Докажем, что $x\mathfrak{R} \cdot x\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}$. Если $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, то в силу пп. 3° и 7° имеем:

$$xr_1 \cdot xr_2 \equiv (xr_1)(x \circ r_2) \equiv (xr_1)x \cdot r_2 + (xr_1)r_2 \cdot x \equiv 0.$$

9°. Поскольку $M = \Phi x + M'$, $M' = x\mathfrak{R} + \mathfrak{R}x$, то $M * M' \subseteq \mathfrak{R}$ ввиду пп. 2°, 4°, 5°, 8° и леммы 9.4. $\square$

Предложение 9.2. *Если пространство M неизотропно, то супералгебра B не является простой.*

Доказательство. Покажем сначала, что $M * \mathfrak{R} = M'$, где $M' = x\mathfrak{R} + \mathfrak{R}x$. Для этого необходимо понять, что $(x * \mathfrak{R}) * \mathfrak{R} \subseteq M'$. Пусть

$$(x * a) * b = \xi x + \sum_i \lambda_i x g_i + \sum_i \mu_i g_i x, \quad \text{где } a, b \in \mathfrak{R}.$$

Умножая обе части равенства справа на x , получаем $((x * a) * b)x \equiv \xi$ по лемме 9.12.

Проверим теперь, что $((x * a) * b)x \equiv 0$. Имеем: $(b(x * a))x \equiv 0$ по лемме 9.4 и

$$((x * a)b)x \equiv (x * a)(x \circ b) \equiv (xa)(x \circ b) \equiv (xa \cdot b)x \equiv 0 \text{ в силу пп. 5°, 7° леммы 9.12.}$$

Следовательно, $\xi = 0$ и равенство $M * \mathfrak{R} = M'$ доказано. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{R} + M' \triangleleft B$, — противоречие. $\square$

Из предложений 9.1 и 9.2 вытекает, что $\mathfrak{R} = 0$, т.е. $B = \Phi \oplus \Phi x$ и $x^2 = 1$, значит, супералгебра B ассоциативна. Теорема 9.1 доказана.

9.2. Сингулярные супералгебры малой размерности

Простая правоальтернативная супералгебра с нулевым умножением четных элементов называется *сингулярной*. В этом параграфе доказывается, что сингулярных супералгебр размерности ≤ 4 нет.

Всюду ниже $B = A \oplus M$ — простая сингулярная правоальтернативная супералгебра над полем Φ характеристики $\neq 2$. Положим $d_A = \dim A$, $d_M = \dim M$. Если не оговорено противное, то указанные латинские буквы, возможно с индексами, обозначают однородные элементы:

$$a, b, c \in A, \quad x, y \in M \quad p, q, r \in A \cup M.$$

Нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 9.13. *Справедливы свойства: а) $M^2 = A$; б) $M = A * M$.*

Доказательство. а) Допустим, что $M^2 \neq A$. Поскольку $M^2 \subseteq A$, то $M^2 \triangleleft A$ и $M^2 + M \triangleleft B$, откуда $M^2 = 0$, значит, $M \triangleleft B$, — противоречие.

б) Достаточно заметить, что $A + A * M \triangleleft B$. □

Хорошо известна лемма Алберта [25]: в правоальтернативной алгебре элемент a нильпотентен тогда и только тогда, когда нильпотентен оператор L_a . Точно также, но значительно проще, доказывается

Лемма 9.14. *Если $a^2 = 0$, то $T_1 \dots T_4 = 0$, где $T_i \in \{L, R\}$ ($i = \overline{1, 4}$), $R = R_a$, $L = L_a$.*

Лемма 9.15. *Ни один из случаев $d_A = 1$ или $d_M = 1$ невозможен.*

Доказательство. Пусть, от противного, $d_A = 1$; тогда $A = \Phi a$ и $a^2 = 0$. Ввиду лемм 9.13 б) и 9.14 имеют место равенства $M = A * M = MT^M(A) = \dots = M(T^M(A))^4 = 0$.

Покажем, что $d_M \geq 2$. Если $d_M = 1$, то $M = \Phi x$ и в силу леммы 9.13 а) верно $A = M^2 = \Phi a$, где $a = x^2$. Следовательно, $d_A = 1$, что невозможно ввиду предыдущего. □

Лемма 9.16. *Случай $(\forall a \in A) L_a^2 = 0$ невозможен.*

Доказательство. Допустим, что $L_a^2 = 0$ для любого $a \in A$; тогда $(\forall a, b \in A) L_a \circ L_b = 0$. Поскольку всякое операторное слово в правоальтернативной алгебре S является линейной комбинацией элементов вида

$$L_{a_1} \dots L_{a_m} R_{b_1} \dots R_{b_n}, \quad a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in S,$$

с сохранением состава, то алгебра умножений $T^M(A)$ нильпотентна индекса $\leq 2d_A + 1$. Тогда по лемме 9.13 б) справедливы равенства

$$M = A * M = MT^M(A) = M(T^M(A))^2 = \dots = M(T^M(A))^{2d_A+1} = 0,$$

что невозможно. □

Лемма 9.17. *Случай $d_M = 2$ невозможен.*

Доказательство. Если $d_M = 2$, то $(\forall a \in A) L_a^2 = 0$, поскольку индекс нильпотентности линейного оператора, действующего на M , не превосходит размерности d_M , что невозможно ввиду леммы 9.16. □

Из леммы 9.15 и 9.17 вытекает следующее

Предложение 9.3. *Справедливы неравенства: $d_A \geq 2$, $d_M \geq 3$. В частности, размерность сингулярной супералгебры не менее 5.*

9.3. Сингулярные супералгебры размерности 5

Далее предполагается, что супералгебра $B = A \oplus M$ сингулярна и $d_A = 2$, $d_M = 3$.

Рассмотрим супералгебру $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi) = A \oplus M$, в которой a_1, a_2 — базис A , m_1, m_2, m_3 — базис M и ненулевыми являются следующие произведения:

$$\begin{cases} a_1 m_1 = m_2, & m_1 a_1 = -m_2, & a_1 m_2 = m_3, \\ a_2 m_2 = m_1, & a_2 m_3 = -m_2, & m_3 a_2 = m_2, \\ m_1 m_2 = \varphi a_1 + \xi a_2, & m_3 m_2 = -\xi a_1 + \psi a_2. \end{cases}$$

Легко видеть, что супералгебра $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$ является простой тогда и только тогда, когда $\xi^2 + \varphi\psi \neq 0$. Кроме того, $B_{2|3}(-1, 0, 1) = B_{2|3}$.

Этот параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема 9.2. *Всякая простая правоальтернативная сингулярная супералгебра размерности не выше 5 изоморфна супералгебре вида $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$.*

9.3.1. Восстановление оператора R_a по L_a , если $L_a^2 \neq 0$

В силу леммы 9.16 существует $a \in A$ такой, что $L_a^2 \neq 0$; тогда в силу нильпотентности оператора L_a (лемма 9.14) получаем $L_a^3 = 0$, значит, для оператора L_a в M существует жорданов базис x_1, x_2, x_3 , т.е.

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0. \quad (9.5)$$

Лемма 9.18. *Если выполнены равенства (9.5), то для подходящих скаляров $\gamma, \delta \in \Phi$ справедливы равенства*

$$x_1 a = (\delta - 1)x_2 + \gamma x_3, \quad x_2 a = \delta x_3, \quad x_3 a = 0. \quad (9.6)$$

Более того, $\delta = 0$ или $\delta = 1$.

Доказательство. Записав $x_3 a = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ и умножив обе части этого равенства слева на a , получаем в силу (9.5): $a(x_3 a) = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3$. Покажем, что $a(x_3 a) = 0$. В самом деле, $a(x_3 a) = a(x_3 \circ a) = (ax_3)a = 0$. Значит, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $x_3 a = \lambda_3 x_3$. Тогда $\lambda_3 = 0$, ибо нильпотентный оператор R_a имеет только нулевые собственные значения. Следовательно, $x_3 a = 0$.

Записав $x_2 a = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \delta x_3$ и умножив обе части этого равенств слева на a , получаем $a(x_2 a) = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3$. Поскольку

$$a(x_2 a) = -a(ax_2) + a(x_2 \circ a) = a(x_2 \circ a) = (ax_2)a = x_3 a = 0,$$

то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $x_2a = \delta x_3$.

Аналогично, считая $x_1a = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \gamma x_3$, имеем $a(x_1a) = \lambda_1x_2 + \lambda_2x_3$. Поскольку

$$a(x_1a) = -a(ax_1) + a(x_1 \circ a) = -x_3 + (ax_1)a = -x_3 + x_2a = (\delta - 1)x_3,$$

то $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \delta - 1$, следовательно, $x_1a = (\delta - 1)x_2 + \gamma x_3$. Это доказывает равенства (9.6).

Умножая обе части первого из равенств (9.6) справа на a и учитывая остальные два равенства, получаем $0 = (\delta - 1)x_2a + \gamma x_3a = (\delta - 1)\delta x_3$, откуда $(\delta - 1)\delta = 0$ и δ совпадает либо с нулем, либо с единицей. $\square$

9.3.2. Случай $\delta = 1$ в лемме 9.18 невозможен

Лемма 9.19. *Следующая система равенств*

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = \gamma x_3, & x_2a = x_3, & x_3a = 0 \end{cases} \quad (9.7)$$

несовместна.

Доказательство. Допустим, что b — произвольный элемент из A , непропорциональный a . Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1°. Докажем, что $(bx_1)a = bx_2$, $(bx_2)a = bx_3 = 0$. Заметим, что ввиду (9.7) верно

$$2bx_3 = b(a \circ x_2) = (bx_2)a, \quad (9.8)$$

значит,

$$(bx_3)a = 0. \quad (9.9)$$

Кроме того, из (9.7) следует $x_1 \circ a = x_2 + \gamma x_3$. Следовательно,

$$(bx_1)a = b(x_1 \circ a) = bx_2 + \gamma bx_3. \quad (9.10)$$

После умножения справа на a обеих частей этого равенства, ввиду (9.9) и (9.8) получаем

$$0 = (bx_2)a + \gamma(bx_3)a = (bx_2)a = 2bx_3,$$

значит, $bx_3 = 0$, откуда ввиду (9.10) $(bx_1)a = bx_2$, что и требовалось в п. 1°.

2°. Докажем, что $bx_1 = \mu_2x_2 + \mu_3x_3$, $bx_2 = \mu_2x_3$, $bx_3 = 0$ для подходящих $\mu_2, \mu_3 \in \Phi$. Рассмотрим разложение $bx_1 = \mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3$ и докажем, что $\mu_1 = 0$. Поскольку в силу п. 1° верно $(bx_1)a = bx_2$ и $(bx_1)a = \mu_1\gamma x_3 + \mu_2x_3$ ввиду (9.7), значит,

$$bx_2 = (\mu_1\gamma + \mu_2)x_3. \quad (9.11)$$

Положим $M' = \text{span}(x_2, x_3)$. Тогда $bM' \subseteq M'$ в силу п. 1° и (9.11). Кроме того, поскольку $bx_1 \equiv \mu_1 x_1 \pmod{M'}$, то $\mu_1 = 0$ (нильпотентный оператор L_b имеет только нулевые собственные значения) и $bx_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$. Отсюда, из п. 1° и из (9.11) получаем требуемое в п. 2°.

3°. Докажем теперь, что $x_3 * A = 0$. В силу п. 1° осталось понять, что $x_3 b = 0$.

Пусть $x_3 b = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$. Тогда в силу (9.7): $0 = (x_3 b)a = (\gamma \lambda_1 + \lambda_2)x_3$, откуда $\lambda_2 = -\gamma \lambda_1$ и $x_3 b = \lambda_1 v + \lambda_3 x_3$, где $v = x_1 - \gamma x_2$. Далее, ввиду (9.7) и п. 1°

$$a(x_3 b) = a(x_3 \circ b) = (ax_3)b + (ab)x_3 = 0,$$

следовательно, $0 = \lambda_1 av = \lambda_1 a(x_1 - \gamma x_2) = \lambda_1(x_2 - \gamma x_3)$ и $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Тогда $x_3 b = \lambda_3 x_3$, откуда вытекает $\lambda_3 = 0$ и $x_3 b = 0$.

4°. Докажем, что по модулю Φx_3 имеет место система сравнений

$$\begin{cases} bx_1 \equiv \mu_2 x_2, & bx_2 \equiv 0, & bx_3 = 0, \\ x_1 b \equiv \gamma \rho_1 v, & x_2 b \equiv \rho_1 v, & x_3 b = 0, \end{cases} \text{ где } v = x_1 - \gamma x_2.$$

Пусть $x_2 b = \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3$. Тогда $(x_2 b)a = -(x_2 a)b = -x_3 b = 0$ и $0 = \rho_1 x_1 a + \rho_2 x_2 a + \rho_3 x_3 a = \rho_1 \gamma x_3 + \rho_2 x_3$, откуда $\rho_2 = -\rho_1 \gamma$ и $x_2 b = \rho_1 v + \rho_3 x_3$.

Пусть $x_1 b = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3$. Тогда $(x_1 b)a = -(x_1 a)b = -\gamma x_3 b = 0$ и $0 = \zeta_1 x_1 a + \zeta_2 x_2 a = \zeta_1 \gamma x_3 + \zeta_2 x_3$, откуда $\zeta_2 = -\zeta_1 \gamma$ и $x_1 b = \zeta_1 v + \zeta_3 x_3$.

Следовательно,

$$x_1 b = \zeta_1 v + \zeta_3 x_3, \quad x_2 b = \rho_1 v + \rho_3 x_3. \quad (9.12)$$

Поскольку $vb = x_1 b - \gamma x_2 b \equiv \zeta_1 v - \gamma \rho_1 v = (\zeta_1 - \gamma \rho_1)v \pmod{\Phi x_3}$, то $\zeta_1 = \gamma \rho_1$ и $vb \equiv 0 \pmod{\Phi x_3}$. Отсюда ввиду (9.12) и пп. 2°, 3° получаем требуемое в п. 4°.

5°. Докажем, что $\gamma = 0$. Предположим, что $\gamma \neq 0$.

С одной стороны, $a(x_1 \circ b) = (ax_1)b = x_2 b$, а с другой, на основании п. 4°:

$$a(x_1 \circ b) = a(\mu_2 x_2 + \gamma \rho_1 v) = \mu_2 x_3 + \gamma \rho_1(x_2 - \gamma x_3) \equiv \gamma \rho_1 x_2 \pmod{\Phi x_3}.$$

Значит, $\gamma \rho_1 = 0$, $\rho_1 = 0$ и $x_1 b \equiv 0$, $x_2 b \equiv 0$ ввиду п. 4°.

Итак, доказано, что $M * A \subseteq M'$, откуда в силу леммы 9.13 вытекает $M \subseteq M'$, — противоречие. Значит, $\gamma = 0$.

6°. В силу пп. 1°–5° справедливы равенства

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1 a = 0, & x_2 a = x_3, & x_3 a = 0, \\ bx_2 = \mu_2 x_3, & bx_3 = x_3 b = 0, \\ x_1 b = \xi_3 x_3, & x_2 b = \rho_1 x_1 + \rho_3 x_3. \end{cases}$$

Учитывая эти равенства, имеем

$$\begin{aligned}(a, b, x_2) &= -a(bx_2) = -a\mu_2x_3 = 0, \\ (a, x_2, b) &= (ax_2)b - a(x_2b) = -a(x_2b) = -a\rho_1x_1 = -\rho_1x_2.\end{aligned}$$

Откуда по правой альтернативности: $\rho_1 = 0$ и $M * A \subseteq M'$, что невозможно. $\square$

Из лемм 9.18 и 9.19 вытекает, что справедлива система равенств

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2 + \gamma x_3, & x_2a = x_3a = 0. \end{cases} \quad (9.13)$$

9.3.3. Редукция к случаю $\gamma = 0$ в системе (9.13)

Введем новый базис в M :

$$y_1 = x_1 - \gamma x_2, \quad y_2 = x_2 - \gamma x_3, \quad y_3 = x_3.$$

Имеем

$$\begin{cases} ay_1 = ax_1 - \gamma ax_2 = y_2, & ay_2 = ax_2 - \gamma ax_3 = x_3 = y_3, & ay_3 = 0, \\ y_1a = (x_1 - \gamma x_2)a = -x_2 + \gamma x_3 = -y_2, & y_2a = (x_2 - \gamma x_3)a = 0, & y_3a = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} ay_1 = y_2, & ay_2 = y_3, & ay_3 = 0, \\ y_1a = -y_2, & y_2a = y_3a = 0, \end{cases}$$

значит, с точностью до обозначений, получаются формулы (9.13) при $\gamma = 0$.

Итак, справедлива

Лемма 9.20. *В пространстве M существует базис x_1, x_2, x_3 такой, что выполнена следующая система равенств:*

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = x_3a = 0. \end{cases} \quad (9.14)$$

Далее, попытаемся подобрать элемент $b \in A$, не пропорциональный a , для которого операторы L_b и R_b (действующие на M) имеют наиболее простой вид в подходящем жордановом базисе оператора L_a .

9.3.4. Действие оператора L_b в базисе x_1, x_2, x_3

Положим

$$\begin{cases} bx_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \\ bx_2 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3. \end{cases}$$

Поскольку в силу (9.14) имеем $0 = b(x_1 \circ a) = (bx_1)a = \mu_1 x_1 a = -\mu_1 x_2$, то $\mu_1 = 0$.

Учитывая, что $(bx_2)a = b(x_2 \circ a) = bx_3$, имеем $bx_3 = (bx_2)a = \xi_1 x_1 a = -\xi_1 x_2$.

Значит, выполняется следующая система равенств

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1 a = -x_2, & x_2 a = x_3 a = 0, \\ bx_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, & bx_2 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3, \\ bx_3 = -\xi_1 x_2. \end{cases} \quad (9.15)$$

9.3.5. Одно замечание об элементе bx_3

Лемма 9.21. *Параметр ξ_1 , участвующий в системе (9.15), отличен от нуля.*

Доказательство. Допустим, что $\xi_1 = 0$; тогда система (9.15) принимает вид

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1 a = -x_2, & x_2 a = x_3 a = 0, \\ bx_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, & bx_2 = \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3, \\ bx_3 = 0. \end{cases}$$

Поскольку $bx_2 = \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$, $bx_3 = 0$ и оператор L_b нильпотентен, то $\xi_2 = 0$ и $bx_2 = \xi_3 x_3$, т.е. имеем

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1 a = -x_2, & x_2 a = 0, & x_3 a = 0, \\ bx_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, & bx_2 = \xi_3 x_3, & bx_3 = 0. \end{cases}$$

В силу правого тождества Муфанг (1.10) имеем

$$(a, a, bx_1) + (a, b, ax_1) = (a, a, x_1)b + (a, b, x_1)a.$$

Вычислим последовательно все ассоциаторы, входящие в это равенство

$$(a, a, bx_1) = -a(a(bx_1)) = -a(a(\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)) = 0,$$

$$(a, b, ax_1) = -a(bx_2) = -\xi_3 ax_3 = 0,$$

$$(a, a, x_1)b = -x_3 b,$$

$$(a, b, x_1)a = -(a(bx_1))a = 0,$$

значит, $x_3 * A = 0$. Рассмотрим представление $x_2b = \rho_1x_1 + \rho_2x_2 + \rho_3x_3$. Поскольку

$$(x_2b)a = -(x_2a)b = 0,$$

то

$$0 = \rho_1x_1a + \rho_2x_2a + \rho_3x_3 = -\rho_1x_2,$$

т.е. $\rho_1 = 0$ и $x_2b = \rho_2x_2 + \rho_3x_3$.

Тем самым, доказано, что пространство $M' = \text{span}(x_2, x_3)$ инвариантно относительно действий T_b для любого $b \in A$, т.е. $M' * A \subseteq M'$, откуда вытекает $M * A \subseteq M'$ и в силу леммы 9.13: $M \subseteq M'$, — противоречие. $\square$

9.3.6. Подходящие замены базисов

Из последнего равенства системы (9.15) вытекает

$$b(bx_3) = -\xi_1(bx_2) = -\xi_1(\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3) = -\xi_1^2x_1 - \xi_1\xi_2x_2 - \xi_1\xi_3x_3,$$

значит, в силу равенства $L_b^3 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= -\xi_1^2bx_1 - \xi_1\xi_2bx_2 - \xi_1\xi_3bx_3 = \\ &= -\xi_1^2(\mu_2x_2 + \mu_3x_3) - \xi_1\xi_2(\xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3) - \xi_1\xi_3(-\xi_1x_2) \equiv -\xi_1^2\xi_2x_1 \pmod{M'}, \end{aligned}$$

откуда $\xi_1^2\xi_2 = 0$. Отсюда по лемме 9.21 верно $\xi_2 = 0$ и справедливы соотношения

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = x_3a = 0, \\ bx_1 = \mu_2x_2 + \mu_3x_3, & bx_2 = \xi_1x_1 + \xi_3x_3, \\ bx_3 = -\xi_1x_2, & \xi_1 \neq 0. \end{cases}$$

Далее, в силу предыдущего верно равенство $b(bx_3) = -\xi_1^2x_1 - \xi_1\xi_3x_3$. Умножая обе части этого равенства слева на b и сокращая на $(-\xi_1)$, получаем

$$0 = \xi_1bx_1 + \xi_3bx_3 = \xi_1(\mu_2x_2 + \mu_3x_3) - \xi_3\xi_1x_2,$$

откуда имеем $\xi_3 = \mu_2$, $\mu_3 = 0$, т.е.

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = x_3a = 0, \\ bx_1 = \mu_2x_2, & bx_2 = \xi_1x_1 + \mu_2x_3, \\ bx_3 = -\xi_1x_2, & \xi_1 \neq 0. \end{cases}$$

Заменяя элемент b на элемент $\xi_1^{-1}b$ и считая $\mu = \xi_1^{-1}\mu_2$, получаем

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = x_3a = 0, \\ bx_1 = \mu x_2, & bx_2 = x_1 + \mu x_3, \\ bx_3 = -x_2. \end{cases} \quad (9.16)$$

Сделаем замену базиса $y_1 = x_1 + \mu x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ (это жорданов базис для L_a); тогда в этих обозначениях формулы (9.16) принимают вид

$$\begin{cases} ay_1 = y_2, & ay_2 = y_3, & ay_3 = 0, \\ y_1a = -y_2, & y_2a = y_3a = 0, \\ by_1 = 0, & by_2 = y_1, & by_3 = -y_2. \end{cases}$$

Следовательно, можно считать, что $A = \text{span}(a, b)$, $M = \text{span}(x_1, x_2, x_3)$ и

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2. \end{cases}$$

9.3.7. Структура A -бимодуля M

Пусть $x_1b = \zeta_1x_1 + \zeta_2x_2 + \omega x_3$. Тогда

$$x_2b = (ax_1)b = a(x_1 \circ b) = a(x_1b) = \zeta_1x_2 + \zeta_2x_3,$$

$$x_3b = (ax_2)b = a(x_2 \circ b) = a(x_2b + bx_2) = a(\zeta_1x_2 + \zeta_2x_3 + x_1) = \zeta_1x_3 + x_2.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} 0 &= (x_3b)b = (\zeta_1x_3 + x_2)b = \zeta_1x_3b + x_2b = \\ &= \zeta_1(\zeta_1x_3 + x_2) + \zeta_1x_2 + \zeta_2x_3 = 2\zeta_1x_2 + (\zeta_1^2 + \zeta_2)x_3, \end{aligned}$$

то $\zeta_1 = 0 = \zeta_1^2 + \zeta_2$, значит, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ и выполнены равенства

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, \\ x_1b = \omega x_3, & x_2b = 0, & x_3b = x_2. \end{cases}$$

Аналогично, $0 = (x_1b)b = \omega x_3b = \omega x_2$, откуда $\omega = 0$ и

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = 0, & x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, \\ x_1b = 0, & x_2b = 0, & x_3b = x_2, \end{cases} \quad (9.17)$$

Заметим, что в силу (9.17) M — неприводимый левый A -модуль.

9.3.8. Произведения нечетных элементов

Вычислим теперь произведения нечетных элементов $x_i x_j$. Будем говорить, что элемент t из M имеет вес $\{k, l\}$, если t линейно выражается через векторы x_k, x_l . Из таблицы (9.17) следует, что элементы из пространства $x_1 * A + x_3 * A$ имеют вес $\{2\}$, а элементы из пространства $x_2 * A$ имеют вес $\{1, 3\}$.

Докажем, что все произведения $x_i x_j$ равны 0, за исключением $x_1 x_2$ и $x_3 x_2$.

1°. Покажем, что $x_2 x_1 = 0$. Поскольку $ax_2 = x_3, bx_2 = x_1$, то достаточно понять, что $(x_2 x_1)x_2 = 0$. Имеем $(x_2 x_1)x_2 = x_2^2 x_1 + x_2[x_1 x_2] = x_2^2 x_1$, поскольку $x_2 A = 0$. Элемент $(x_2 x_1)x_2$ имеет вес $\{1, 3\}$, а элемент $x_2^2 x_1$ имеет вес $\{2\}$, значит, они оба нулевые. В частности, $x_2 x_1 = 0$ и $x_2^2 = \beta_{22}b$.

2°. Покажем, что $x_2^2 = 0$ и $x_2 x_3 = 0$. Имеем $x_2^2 x_3 = (x_2 x_3)x_2 + x_2[x_2, x_3] = (x_2 x_3)x_2$. Элемент $x_2^2 x_3$ имеет вес $\{2\}$, а элемент $(x_2 x_3)x_2$ имеет вес $\{1, 3\}$. Значит, они нулевые. Тогда $0 = x_2^2 x_3 = \beta_{22}bx_3 = -\beta_{22}x_2$, т.е. $x_2^2 = 0$ и $(x_2 x_3)x_2 = 0$. Поскольку

$$(\forall c \in A) cx_2 = 0 \Leftrightarrow c = 0,$$

то $x_2 x_3 = 0$.

3°. Покажем, что $x_1^2 = 0$. Имеем $x_1^2 x_2 = (x_1 x_2)x_1 + x_1[x_1, x_2]$. Элемент $x_1^2 x_2$ имеет вес $\{1, 3\}$, а элементы из правой части имеют вес $\{2\}$. Значит, они нулевые. Тогда $x_1^2 = 0$ в силу замечания, приведенного в конце п. 2°.

4°. Покажем, что $x_1 x_3 = 0$. Имеем: $(x_1 x_2)x_3 = (x_1 x_3)x_2 + x_1[x_2, x_3]$. Крайние элементы имеют вес $\{2\}$, а средний — $\{1, 3\}$, значит, $(x_1 x_3)x_2 = 0$, откуда и вытекает требуемое.

5°. Покажем, что $x_3 x_1 = 0$. Поскольку $(x_3 x_1)x_2 = (x_3 x_2)x_1 + x_3[x_1, x_2]$ и в левой части элемент имеет вес $\{1, 3\}$, а элемент из правой части имеет вес $\{2\}$, то $(x_3 x_1)x_2 = 0$, откуда и вытекает требуемое равенство.

6°. Аналогично предыдущему из $x_3^2 x_2 = (x_3 x_2)x_3 + x_3[x_3, x_2]$ вытекает $x_3^2 = 0$.

Тем самым, отличными от нуля могут быть только произведения:

$$x_1 x_2 = \varphi a + \xi b, \quad x_3 x_2 = \eta a + \psi b.$$

Покажем, что $\eta = -\xi$. Имеем $x_3(x_1 x_2) = x_3[x_1, x_2] = -(x_3 x_2)x_1$, значит,

$$x_3(\varphi a + \xi b) = -(\eta a + \psi b)x_1, \quad \xi x_3 b = -\eta a x_1, \quad \xi x_2 = -\eta x_2,$$

откуда и следует равенство $\eta = -\xi$. Тогда $x_1 x_2 = \varphi a + \xi b$, $x_3 x_2 = -\xi a + \psi b$. Отсюда и из (9.17) следует таблица умножения супералгебры $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$ (указаны только ненулевые

произведения):

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & x_1a = -x_2, & ax_2 = x_3, \\ bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, & x_3b = x_2, \\ x_1x_2 = \varphi a + \xi b, & x_3x_2 = -\xi a + \psi b. \end{cases} \quad (9.18)$$

9.3.9. Проверка правой альтернативности супералгебры $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$

I. Вычислим ненулевые ассоциаторы от нечетных элементов. Под степенью ассоциатора мы понимаем его полистепень относительно переменных x_1, x_2, x_3 , причем именно в указанном порядке.

1. Ассоциаторы степени $(2, 1, 0)$:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_1) &= (x_1x_2)x_1 = (\varphi a + \psi b)x_1 = \varphi x_2, \\ (x_1, x_1, x_2) &= -x_1(x_1x_2) = -x_1(\varphi a + \psi b) = \varphi x_2. \end{aligned}$$

2. Ассоциаторы степени $(0, 1, 2)$:

$$\begin{aligned} (x_3, x_2, x_3) &= (x_3x_2)x_3 = (-\xi a + \psi b)x_3 = \psi bx_3 = -\psi x_2, \\ (x_3, x_3, x_2) &= -x_3(x_3x_2) = -x_3(-\xi a + \psi b) = -\psi x_3b = -\psi x_2. \end{aligned}$$

3. Ассоциаторы степени $(1, 1, 1)$:

$$\begin{aligned} (x_3, x_2, x_1) &= (x_3x_2)x_1 = (-\xi a + \psi b)x_1 = -\xi ax_1 = -\xi x_2, \\ (x_3, x_1, x_2) &= -x_3(x_1x_2) = -x_3(\varphi a + \xi b) = -\xi x_3b = -\xi x_2, \\ (x_1, x_2, x_3) &= (x_1x_2)x_3 = (\varphi a + \xi b)x_3 = -\xi x_2, \\ (x_1, x_3, x_2) &= -x_1(x_3x_2) = -x_1(-\xi a + \psi b) = \xi x_1a = -\xi x_2, \\ (x_2, x_1, x_3) &= 0, \quad (x_2, x_3, x_1) = 0. \end{aligned}$$

Ассоциаторы остальных степеней $(2, 0, 1)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 2)$ равны 0.

II. Вычислим теперь ассоциаторы от 2-х нечетных и 1-го четного элементов. Сначала рассмотрим ассоциаторы, содержащие элемент a .

1. Степень $(2, 0, 0)$:

$$(x_1, a, x_1) = -x_2x_1 - x_1x_2 = -x_1x_2, \quad (x_1, x_1, a) = -x_1(x_1a) = x_1x_2.$$

2. Степень $(1, 0, 1)$:

$$\begin{aligned} (a, x_1, x_3) &= (a, x_3, x_1) = (x_1, a, x_3) = (x_1, x_3, a) = 0, \\ (x_3, a, x_1) &= -x_3x_2, \quad (x_3, x_1, a) = x_3x_2. \end{aligned}$$

Ассоциаторы остальных степеней $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ равны 0.

III. Вычислим теперь ассоциаторы, содержащие элемент b .

1. Ассоциаторы степени $(0, 0, 2)$:

$$(x_3, b, x_3) = (x_3 b)x_3 - x_3(bx_3) = x_3x_2, \quad (x_3, x_3, b) = -x_3x_2.$$

2. Ассоциаторы степени $(1, 0, 1)$:

$$\begin{aligned} (b, x_1, x_3) &= (b, x_3, x_1) = (x_3, b, x_1) = (x_3, x_1, b) = 0, \\ (x_1, b, x_3) &= (x_1 b)x_3 - x_1(bx_3) = x_1x_2, \quad (x_1, x_3, b) = -x_1(x_3b) = -x_1x_2. \end{aligned}$$

Ассоциаторы остальных степеней $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ равны 0.

IV. Вычислим, наконец, ассоциаторы от 2-х четных и 1-го нечетного элементов.

1. Сначала выпишем ассоциаторы, содержащие x_1 :

$$\begin{aligned} (x_1, a, a) &= (x_1, a, b) = (x_1, b, a) = (x_1, b, b) = \\ (b, x_1, b) &= (b, b, x_1) = (a, x_1, b) = (a, b, x_1) = 0, \\ (a, x_1, a) &= x_2a - a(-x_2) = ax_2 = x_3, \quad (a, a, x_1) = -ax_2 = -x_3, \\ (b, x_1, a) &= -b(x_1a) = bx_2 = x_1, \quad (b, a, x_1) = -b(ax_1) = -bx_2 = -x_1. \end{aligned}$$

2. Теперь выпишем ассоциаторы, содержащие x_2 :

$$\begin{aligned} (x_2, a, a) &= (a, x_2, a) = (a, a, x_2) = (x_2, a, b) = \\ (x_2, b, a) &= (x_2, b, b) = (b, x_2, b) = (b, b, x_2) = 0, \\ (a, x_2, b) &= (ax_2)b - a(x_2b) = x_3b = x_2, \quad (a, b, x_2) = -a(bx_2) = -ax_1 = -x_2, \\ (b, x_2, a) &= (bx_2)a = x_1a = -x_2, \quad (b, a, x_2) = -b(ax_2) = -bx_3 = x_2. \end{aligned}$$

3. Наконец, выпишем ассоциаторы, содержащие x_3 :

$$\begin{aligned} (x_3, a, a) &= (a, x_3, a) = (a, a, x_3) = (x_3, a, b) = \\ (x_3, b, a) &= (b, x_3, a) = (b, a, x_3) = (x_3, b, b) = 0, \\ (a, x_3, b) &= -a(x_3b) = -ax_2 = -x_3, \quad (a, b, x_3) = -a(bx_3) = ax_2 = x_3, \\ (b, x_3, b) &= (bx_3)b - b(x_3b) = -x_2b - bx_2 = -x_1, \quad (b, b, x_3) = -b(bx_3) = bx_2 = x_1. \end{aligned}$$

9.3.10. Реализация супералгебры $B_{2|3}$ в виде $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$

Формулы (9.18) при $\xi = 0$ принимают вид

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & x_1a = -x_2, & ax_2 = x_3, \\ bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, & x_3b = x_2, \\ x_1x_2 = \varphi a, & x_3x_2 = \psi b. \end{cases}$$

Вводя обозначения $a_1 = a$, $a_2 = b$, $m_1 = x_1$, $m_2 = -x_2$, $m_3 = -x_3$ получаем

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= x_1 a = -x_2 = m_2, & -a_1 m_1 &= -a x_1 = -x_2 = m_2, \\ m_3 a_2 &= -x_3 b = -x_2 = m_2, & -a_2 m_3 &= -b(-x_3) = b x_3 = -x_2 = m_2, \\ a_1 m_2 &= a(-x_2) = -a x_2 = -x_3 = m_3, \\ a_2 m_2 &= b(-x_2) = -b x_2 = -x_1 = -m_1, \\ m_1 m_2 &= -x_1 x_2 = -\varphi a = -\varphi a_1 = a_1 \Leftrightarrow \varphi = -1, \\ m_3 m_2 &= x_3 x_2 = \psi b = \psi a_2 = a_2 \Leftrightarrow \psi = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $B_{2|3} = B_{2|3}(-1, 0, 1)$.

9.4. Изоморфизмы супералгебр вида $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$

В этом параграфе мы докажем, что над алгебраически замкнутым полем всякая сингулярная 5-мерная супералгебра изоморфна $B_{2|3}$. Над полем рациональных чисел существует бесконечно много неизоморфных сингулярных 5-мерных супералгебр.

9.4.1. Критерий изоморфизма супералгебр $B = B(\varphi, \xi, \psi)$ и $B' = B(\varphi', \xi', \psi')$.

Рассмотрим супералгебру $B(\varphi, \xi, \psi) = A \oplus M$ (для сокращения записи мы опускаем нижний индекс $_{2|3}$), в которой a_1, a_2 и x_1, x_2, x_3 — базисы в A и M соответственно, и таблицей умножения (указаны только ненулевые произведения базисных элементов):

$$\begin{cases} a_1 x_1 = x_2, & x_1 a_1 = -x_2, & a_1 x_2 = x_3, \\ a_2 x_2 = x_1, & a_2 x_3 = -x_2, & x_3 a_2 = x_2, \\ x_1 x_2 = \varphi a_1 + \xi a_2, & x_3 x_2 = -\xi a_1 + \psi a_2. \end{cases} \quad (9.19)$$

Лемма 9.22. *Простые супералгебры $B = B(\varphi, \xi, \psi)$ и $B' = B(\varphi', \xi', \psi')$ изоморфны тогда и только тогда, когда верно равенство:*

$$\omega^2 \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & -\xi \\ -\xi & -\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' & -\xi' \\ -\xi' & -\psi' \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

для подходящих скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \omega$ таких, что $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 1$ и $\omega \neq 0$.

Доказательство. Пусть супералгебры B и B' изоморфны. Тогда в супералгебре B с таблицей умножения (9.19) имеется базис b_1, b_2, y_1, y_2, y_3 , в котором таблица умножения имеет вид:

$$\begin{cases} b_1 y_1 = y_2, & y_1 b_1 = -y_2, & b_1 y_2 = y_3, \\ b_2 y_2 = y_1, & b_2 y_3 = -y_2, & y_3 b_2 = y_2, \\ y_1 y_2 = \varphi' b_1 + \xi' b_2, & y_3 y_2 = -\xi' b_1 + \psi' b_2. \end{cases} \quad (9.21)$$

Поскольку

$$\{n \in M \mid nM = 0\} = \Phi x_2, \quad \{m \in M \mid Mm = 0\} = \text{span}(x_1, x_3),$$

то $\Phi x_2 = \Phi y_2$ и $\text{span}(x_1, x_3) = \text{span}(y_1, y_3)$, т.е.

$$y_2 = \omega x_2, y_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3, y_3 = \mu_1 x_1 + \mu_3 x_3 \quad \text{и} \quad \omega \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть $b_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, $b_2 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2$. Вычислим координаты векторов y_1, y_3 .

Так как $b_1 y_2 = y_3$, $b_2 y_2 = y_1$, то

$$\begin{cases} \mu_1 x_1 + \mu_3 x_3 = y_3 = b_1 y_2 = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \omega x_2 = \alpha_1 \omega x_3 + \alpha_2 \omega x_1, \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3 = y_1 = b_2 y_2 = (\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2) \omega x_2 = \beta_1 \omega x_3 + \beta_2 \omega x_1, \end{cases}$$

откуда $\mu_1 = \alpha_2 \omega$, $\mu_3 = \alpha_1 \omega$, $\lambda_1 = \beta_2 \omega$, $\lambda_3 = \beta_1 \omega$. Тогда

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, & b_2 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2, \\ y_1 = \omega(\beta_2 x_1 + \beta_1 x_3), & y_2 = \omega x_2, \quad y_3 = \omega(\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_3). \end{cases}$$

Аналогично, каждое из равенств $b_1 y_1 = y_2$, $y_1 b_1 = -y_2$, $b_2 y_3 = -y_2$, $y_3 b_2 = y_2$, как легко проверить, приводит к соотношению

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 1. \quad (9.22)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} b_1 y_1 = y_2 &\Leftrightarrow (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \omega (\beta_2 x_1 + \beta_1 x_3) = \omega x_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) (\beta_2 x_1 + \beta_1 x_3) = x_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 a_1 \beta_2 x_1 + \alpha_2 a_2 \beta_1 x_3 = x_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \beta_2 x_2 - \alpha_2 \beta_1 x_2 = x_2. \end{aligned}$$

Никаких других соотношений, кроме (9.22), из равенств первых двух типов в (9.21) не получается (имеются в виду всевозможные произведения вида $b_i * y_j$), следовательно,

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, & b_2 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2, \\ y_1 = \omega(\beta_2 x_1 + \beta_1 x_3), & y_2 = \omega x_2, \quad y_3 = \omega(\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_3), \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 1. \end{cases}$$

Наконец, рассмотрим произведения нечетных элементов:

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= \varphi' b_1 + \xi' b_2 \Leftrightarrow \omega^2 (\beta_2 x_1 + \beta_1 x_3) x_2 = \varphi' (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) + \xi' (\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \omega^2 \beta_2 x_1 x_2 + \omega^2 \beta_1 x_3 x_2 = (\varphi' \alpha_1 + \xi' \beta_1) a_1 + (\varphi' \alpha_2 + \xi' \beta_2) a_2 \\ &\Leftrightarrow \omega^2 \beta_2 (\varphi a_1 + \xi a_2) + \omega^2 \beta_1 (-\xi a_1 + \psi a_2) = (\varphi' \alpha_1 + \xi' \beta_1) a_1 + (\varphi' \alpha_2 + \xi' \beta_2) a_2 \\ &\Leftrightarrow \omega^2 (\beta_2 \varphi - \beta_1 \xi) a_1 + \omega^2 (\beta_2 \xi + \beta_1 \psi) a_2 = (\varphi' \alpha_1 + \xi' \beta_1) a_1 + (\varphi' \alpha_2 + \xi' \beta_2) a_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_3 y_2 &= -\xi' b_1 + \psi' b_2 \Leftrightarrow \omega^2(\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_3) x_2 = -\xi'(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) + \psi'(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \omega^2 \alpha_2 x_1 x_2 + \omega^2 \alpha_1 x_3 x_2 = -\xi' \alpha_1 a_1 - \xi' \alpha_2 a_2 + \psi' \beta_1 a_1 + \psi' \beta_2 a_2 \\
&\Leftrightarrow \omega^2 \alpha_2 (\varphi a_1 + \xi a_2) + \omega^2 \alpha_1 (-\xi a_1 + \psi a_2) = -\xi' \alpha_1 a_1 - \xi' \alpha_2 a_2 + \psi' \beta_1 a_1 + \psi' \beta_2 a_2 \\
&\Leftrightarrow \omega^2 (\alpha_2 \varphi - \alpha_1 \xi) a_1 + \omega^2 (\alpha_2 \xi + \alpha_1 \psi) a_2 = (-\xi' \alpha_1 + \psi' \beta_1) a_1 + (-\xi' \alpha_2 + \psi' \beta_2) a_2.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \omega^2 (\beta_2 \varphi - \beta_1 \xi) = (\varphi' \alpha_1 + \xi' \beta_1), & -\omega^2 (\beta_2 \xi + \beta_1 \psi) = -(\varphi' \alpha_2 + \xi' \beta_2), \\ \omega^2 (\alpha_2 \varphi - \alpha_1 \xi) = (-\xi' \alpha_1 + \psi' \beta_1), & -\omega^2 (\alpha_2 \xi + \alpha_1 \psi) = (\xi' \alpha_2 - \psi' \beta_2). \end{cases}$$

Эти равенства эквивалентны матричному равенству

$$\omega^2 \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & -\xi \\ -\xi & -\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' & -\xi' \\ -\xi' & -\psi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad (9.23)$$

которое эквивалентно равенству (9.20). $\square$

9.4.2. Теорема 9.3 и следствия из неё

Из леммы 9.22 и эквивалентности форм $\varphi t^2 + 2\xi ts + \psi s^2$ и $\varphi t^2 - 2\xi ts + \psi s^2$ немедленно вытекает

Теорема 9.3. *Простые супералгебры $B = B(\varphi, \xi, \psi)$ и $B' = B(\varphi', \xi', \psi')$ изоморфны тогда и только тогда, когда эквивалентны квадратичные формы, заданные матрицами*

$$\begin{pmatrix} \varphi & \xi \\ \xi & -\psi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \varphi' & \xi' \\ \xi' & -\psi' \end{pmatrix}.$$

Этот результат является аналогом теоремы Джекобсона для алгебр Кэли—Диксона [68, с. 70].

Следствие 9.1. *Супералгебры $B(\varphi, 0, 1)$, $B(\varphi', 0, 1)$ изоморфны тогда и только тогда, когда уравнение $t^4 = \varphi' \varphi^{-1}$ разрешимо в поле Φ . В частности, над полем рациональных чисел имеется бесконечно много неизоморфных сингулярных 5-мерных супералгебр.*

Доказательство. В самом деле, в силу (9.23) верно

$$\begin{aligned}
&B(\varphi, 0, 1) \simeq B(\varphi', 0, 1) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \omega^2 \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ -\beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 \beta_2 \varphi = \alpha_1 \varphi', & \omega^2 \beta_1 = \alpha_2 \varphi', \\ \beta_1 = \omega^2 \alpha_2 \varphi, & \beta_2 = \omega^2 \alpha_1. \end{cases} \Leftrightarrow \varphi' = \omega^4 \varphi. \quad \square
\end{aligned}$$

Следствие 9.2. *Всякая сингулярная 5-мерная супералгебра над алгебраически замкнутым полем изоморфна супералгебре $B_{2|3}$.*

Доказательство. Известно [35], что над алгебраически замкнутым полем всякая невырожденная квадратичная форма эквивалентна сумме квадратов, следовательно, с точностью до изоморфизма имеется единственная сингулярная 5-мерная супералгебра. $\square$

Отметим также, что при изучении первичных альтернативных алгебр также возникают квадратичные формы, определяющие их структуру (см. [39, 42, 68]).

9.5. Сингулярные 6-мерные супералгебры с 3-мерной нечетной частью

Целью этого параграфа является

Теорема 9.4. *Пусть $B = A \oplus M$ — сингулярная супералгебра. Тогда либо B изоморфна супералгебре $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$, либо $\dim M \geq 4$.*

Положим $d_A = \dim A$, $d_M = \dim M$; пару чисел (d_A, d_M) назовем d -*типом* супералгебры $B = A \oplus M$.

Из предложения 9.3 вытекает, что для доказательства теоремы 9.4 достаточно рассмотреть случай $d_M = 3$, поэтому везде далее в этом параграфе предполагается, что $d_M = 3$.

Если не оговорено противное, то указанные ниже латинские буквы, возможно с индексами, обозначают однородные элементы:

$$a, b, c \in A, \quad x, y, z, t, u, v \in M, \quad p, q, r, s \in A \cup M.$$

9.5.1. Структура A -бимодуля M

В разделе 9.3 было доказано, что в предположении 3-мерности нечетной части существуют элементы $a, b \in A$ и базис x_1, x_2, x_3 в M такие, что выполнены равенства системы

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = 0, & x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, \\ x_1b = 0, & x_2b = 0, & x_3b = x_2, \end{cases}$$

которая совпадает с системой 9.17. Заметим, что a, b линейно независимы. Допустим, что $c \notin \text{span}(a, b)$. Вычислим действия операторов R_c, L_c на базис x_1, x_2, x_3 . Положим

$$\begin{cases} cx_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \\ cx_2 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3, \\ cx_3 = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3. \end{cases}$$

Поскольку $(cx_1)a = c(x_1 \circ a) = 0$, то $0 = (cx_1)a = \mu_1 x_1 a + \mu_2 x_2 a + \mu_3 x_3 a = -\mu_1 x_2$, откуда $\mu_1 = 0$ и $cx_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$. Аналогично, $(cx_1)b = c(x_1 \circ b) = 0$ и $0 = \mu_2 x_2 b + \mu_3 x_3 b = \mu_3 x_2$, откуда $\mu_3 = 0$ и, стало быть, $cx_1 = \mu x_2$ и

$$\begin{cases} cx_1 = \mu x_2, \\ cx_2 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3, \\ cx_3 = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3. \end{cases}$$

Далее, поскольку

$$(cx_2)a = c(x_2 \circ a) = cx_3, \quad (cx_2)b = c(x_2 \circ b) = cx_1,$$

то

$$cx_3 = (cx_2)a = \xi_1 x_1 a = -\xi_1 x_2, \quad cx_1 = (cx_2)b = \xi_3 x_3 b = \xi_3 x_2,$$

следовательно, $\xi_3 = \mu$ и в новых обозначениях имеет место система

$$\begin{cases} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1 a = -x_2, & x_2 a = 0, & x_3 a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, \\ x_1 b = 0, & x_2 b = 0, & x_3 b = x_2, \\ cx_1 = \mu x_2, & cx_2 = \xi x_1 + \eta x_2 + \mu x_3, & cx_3 = -\xi x_2. \end{cases}$$

Используя эту систему равенств, вычислим произведения

$$\begin{cases} x_1 c = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \\ x_2 c = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3, \\ x_3 c = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3. \end{cases}$$

Поскольку

$$(x_1 c)a = -(x_1 a)c = x_2 c, \quad (x_1 c)b = \alpha_1 x_1 a = -\alpha_1 x_2,$$

то $x_2 c = -\alpha_1 x_2$ и по правой альтернативности (т.к. для оператора правого умножения R_c выполняется $R_c^2 = 0$) $\alpha_1 = 0$, а также $x_2 c = 0$, т.е.

$$x_1 c = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad x_2 c = 0, \quad x_3 c = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3.$$

Учитывая, что

$$(x_1c)b = -(x_1b)c = 0, \quad 0 = \alpha_2x_2b + \alpha_3x_3b = \alpha_3x_2,$$

получаем $\alpha_3 = 0$ и

$$x_1c = \alpha_2x_2, \quad x_2c = 0, \quad x_3c = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} 0 &= (x_3c)c = \gamma_1x_1c + \gamma_2x_2c + \gamma_3x_3c = \gamma_1\alpha_2x_2 + \gamma_3(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3) = \\ &= \gamma_1\gamma_3x_1 + (\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\gamma_3)x_2 + \gamma_3^2x_3, \end{aligned}$$

значит, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_1\alpha_2 = 0$, т.е.

$$x_1c = \alpha_2x_2, \quad x_2c = 0, \quad x_3c = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2, \quad \gamma_1\alpha_2 = 0.$$

Тем самым, полагая $\alpha = \alpha_2$, имеем

$$\left\{ \begin{array}{lll} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = 0, & x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, \\ x_1b = 0, & x_2b = 0, & x_3b = x_2, \\ cx_1 = \mu x_2, & cx_2 = \xi x_1 + \eta x_2 + \mu x_3, & cx_3 = -\xi x_2, \\ x_1c = \alpha x_2, & x_2c = 0, & x_3c = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2, \quad \gamma_1\alpha = 0. \end{array} \right.$$

Число параметров в системе можно уменьшить. Сравнивая выражения

$$\begin{aligned} c(x_2 \circ c) &= (cx_2)c = \xi x_1c + \eta x_2c + \mu x_3c = \xi \alpha x_2 + \mu(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2) = \\ &= \mu\gamma_1x_1 + (\xi\alpha + \mu\gamma_2)x_2, \\ c(x_2 \circ c) &= c(\xi x_1 + \eta x_2 + \mu x_3) = \xi cx_1 + \eta cx_2 + \mu cx_3 = \\ &= \xi \mu x_2 + \eta(\xi x_1 + \eta x_2 + \mu x_3) - \mu \xi x_2 = \eta \xi x_1 + \eta^2 x_2 + \mu \eta x_3, \end{aligned}$$

получаем

$$\mu\gamma_1 = \eta\xi, \quad \xi\alpha + \mu\gamma_2 = \eta^2, \quad \mu\eta = 0.$$

Учитывая, что $\gamma_1\alpha = 0$, имеем

$$\gamma_1\alpha = 0, \quad 0 = \mu\gamma_1\alpha = \eta\xi\alpha, \quad \eta\xi\alpha + \eta\mu\gamma_2 = \eta^3, \quad \mu\eta = 0,$$

значит, $\eta^3 = 0$ и $\eta = 0$. Итак,

$$\left\{ \begin{array}{lll} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = 0, & x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, \\ x_1b = 0, & x_2b = 0, & x_3b = x_2, \\ cx_1 = \mu x_2, & cx_2 = \xi x_1 + \mu x_3, & cx_3 = -\xi x_2, \\ x_1c = \alpha x_2, & x_2c = 0, & x_3c = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2, \\ \gamma_1 \alpha = 0, & \mu \gamma_1 = 0, & \xi \alpha + \mu \gamma_2 = 0. \end{array} \right.$$

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} b(x_2 \circ c) &= (bx_2)c = x_1c = \alpha x_2, \\ b(x_2 \circ c) &= b(cx_2) = \xi bx_1 + \mu bx_3 = -\mu x_2, \end{aligned}$$

то $\mu = -\alpha$ и справедлива система равенств

$$\left\{ \begin{array}{lll} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = 0, & x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, \\ x_1b = 0, & x_2b = 0, & x_3b = x_2, \\ cx_1 = -\alpha x_2, & cx_2 = \xi x_1 - \alpha x_3, & cx_3 = -\xi x_2, \\ x_1c = \alpha x_2, & x_2c = 0, & x_3c = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2, \\ \gamma_1 \alpha = 0, & (\xi - \gamma_2) \alpha = 0. \end{array} \right.$$

Наконец, сравнивая выражения

$$a(x_2 \circ c) = (ax_2)c = x_3c = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2, \quad a(x_2 \circ c) = a(cx_2) = \xi ax_1 = \xi x_2,$$

получаем $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \xi$. Считая $\beta = \xi$, получаем таблицу умножения четных на нечетные элементы (в любом порядке), зависящую от двух параметров:

$$\left\{ \begin{array}{lll} ax_1 = x_2, & ax_2 = x_3, & ax_3 = 0, \\ x_1a = -x_2, & x_2a = 0, & x_3a = 0, \\ bx_1 = 0, & bx_2 = x_1, & bx_3 = -x_2, \\ x_1b = 0, & x_2b = 0, & x_3b = x_2, \\ cx_1 = -\alpha x_2, & cx_2 = \beta x_1 - \alpha x_3, & cx_3 = -\beta x_2, \\ x_1c = \alpha x_2, & x_2c = 0, & x_3c = \beta x_2. \end{array} \right. \quad (9.24)$$

9.5.2. Доказательство теоремы 9.4

Вычислим сначала следующие 6 произведений $x_i x_j$ нечетных элементов:

- 1° $x_2 x_1 = -(x_1 a) x_1 = -x_1 (a \circ x_1) = 0$,
- 2° $x_2 x_3 = x_2 (a \circ x_2) = (x_2 a) x_2 + x_2^2 a = 0$,
- 3° $x_1 x_3 = x_1 (a \circ x_2) = (x_1 a) x_2 = -x_2^2$,
- 4° $x_2^2 = (a x_1) x_2 = (a x_2) x_1 = x_3 x_1$,
- 5° $x_1^2 = x_1 (b \circ x_2) = (x_1 b) x_2 = 0$,
- 6° $x_3^2 = x_3 (a \circ x_2) = (x_3 a) x_2 = 0$.

Полагая $p = x_1 x_2$, $q = x_1 x_3$ и $r = x_3 x_2$, получаем таблицу умножения нечетных элементов:

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	p	q
x_2	0	$-q$	0
x_3	$-q$	r	0

Если $d_M = 3$, то $A = M^2$ по лемме 9.13 а), следовательно $d_A \leq 3$. Докажем от противного, что $d_A \neq 3$. Напомним, что элементы a, b, c , участвующие в (9.24) линейно независимы. Рассмотрим вектор $p = \alpha a - \beta b + c$. Прямое вычисление показывает, что $p * B = 0$. Так как $p \neq 0$, то Φp — одномерный идеал в B , что невозможно.

9.6. Супералгебры, в которых существует такой $a \in A$, что

выполнено $L_a^3 \neq 0$

В этом и следующем параграфах предполагается, что $d_A = 2$ и $d_M = 4$. Именно этот случай необходимо рассмотреть для доказательства следующей теоремы.

Теорема 9.5. *Не существует сингулярных супералгебр размерности 6.*

Допустим, что $L_a^3 \neq 0$ для некоторого $a \in A$. Тогда оператор L_a обладает жордановым базисом $x_1, \dots, x_4$ в M таким, что

$$a x_1 = x_2, \quad a x_2 = x_3, \quad a x_3 = x_4, \quad a x_4 = 0.$$

9.6.1. Действие оператора R_a в базисе $x_1, \dots, x_4$

Положим

$$x_i a = \sum_k \lambda_i^{(k)} x_k.$$

В силу правой альтернативности верно равенство

$$a \cdot ax_i = ax_i \cdot a - a \cdot x_i a,$$

значит, считая, что $x_5 = x_6 = 0$, имеем,

$$\begin{aligned} x_{i+2} &= x_{i+1}a - a \sum_k \lambda_i^{(k)} x_k = \sum_k \lambda_{i+1}^{(k)} x_k - \sum_k \lambda_i^{(k)} x_{k+1} = \\ &= \lambda_{i+1}^{(1)} x_1 + (\lambda_{i+1}^{(2)} - \lambda_i^{(1)}) x_2 + (\lambda_{i+1}^{(3)} - \lambda_i^{(2)}) x_3 + (\lambda_{i+1}^{(4)} - \lambda_i^{(3)}) x_4. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\lambda_{i+1}^{(1)} = 0$, т.е. $\lambda_2^{(1)} = \lambda_3^{(1)} = \lambda_4^{(1)} = 0$.

Далее,

$$\lambda_{i+1}^{(2)} - \lambda_i^{(1)} = 0, \quad \lambda_{i+1}^{(3)} - \lambda_i^{(2)} = \delta_{i+2,3}, \quad \lambda_{i+1}^{(4)} - \lambda_i^{(3)} = \delta_{i+2,4},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Из равенства $\lambda_{i+1}^{(2)} - \lambda_i^{(1)} = 0$ заключаем, что

$$\lambda_3^{(2)} = \lambda_2^{(1)} = 0, \quad \lambda_4^{(2)} = \lambda_3^{(1)} = 0.$$

Наконец, из равенства $\lambda_{i+1}^{(3)} - \lambda_i^{(2)} = \delta_{i+2,3}$ получаем, что

$$\lambda_4^{(3)} = \lambda_3^{(2)} + \delta_{53} = 0.$$

Таким образом, доказано, что если $i > j$, то $\lambda_i^{(j)} = 0$. Итак, мы доказали, что матрица оператора R_a в базисе $x_1, \dots, x_4$ является треугольной.

Так как нильпотентный оператор имеет только нулевые собственные значения, то $\lambda_i^{(i)} = 0$. Поэтому, если $i \geq j$, то $\lambda_i^{(j)} = 0$.

Пусть $\gamma = \lambda_1^{(2)}$. Тогда

$$\lambda_2^{(3)} = \lambda_1^{(2)} + \delta_{33} = \gamma + 1,$$

$$\lambda_3^{(4)} = \lambda_2^{(3)} + \delta_{44} = \gamma + 2.$$

Итак, доказано, что

$$\begin{cases} x_1 a = \gamma x_2 + \lambda_{13} x_3 + \lambda_{14} x_4, \\ x_2 a = (\gamma + 1) x_3 + \lambda_{24} x_4, \\ x_3 a = (\gamma + 2) x_4, \quad x_4 a = 0. \end{cases}$$

Поскольку

$$0 = x_2 a \cdot a = ((\gamma + 1) x_3 + \lambda_{24} x_4) a = (\gamma + 1)(\gamma + 2) x_4,$$

то

$$(\gamma + 1)(\gamma + 2) = 0. \tag{9.25}$$

Далее,

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 a \cdot a = (\gamma x_2 + \lambda_{13} x_3 + \lambda_{14} x_4) a = \gamma x_2 a + \lambda_{13} x_3 a = \\ &= \gamma((\gamma + 1)x_3 + \lambda_{24} x_4) + \lambda_{13}(\gamma + 2)x_4, \end{aligned}$$

значит,

$$\gamma(\gamma + 1) = 0. \quad (9.26)$$

Из равенств (9.25) и (9.26) следует, что $\gamma = -1$, значит,

$$\begin{cases} x_1 a = -x_2 + \lambda_{13} x_3 + \lambda_{14} x_4, \\ x_2 a = \lambda_{24} x_4, x_3 a = x_4, x_4 a = 0. \end{cases}$$

Заметим также, что $\lambda_{24} - \lambda_{13} = \delta_{34}$, т.е. $\lambda_{24} = \lambda_{13}$.

Тем самым, доказана следующая лемма.

Лемма 9.23. Пусть $L_a^3 \neq 0$. Тогда если $x_1, \dots, x_4$ — жорданов базис в M оператора L_a , то для подходящих скаляров ξ, η выполнены равенства:

$$\begin{cases} x_1 a = -x_2 + \xi x_3 + \eta x_4, \\ x_2 a = \xi x_4, \\ x_3 a = x_4, x_4 a = 0. \end{cases}$$

9.6.2. Пространство $M' = aM$

Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности шагов.

1° Ясно, что $M' = \text{span}(x_2, x_3, x_4)$.

Из леммы 9.23 немедленно вытекают следующие два пункта

2° $M * a = M'$.

3° Если $za = 0$ для некоторого $z \in M$, то $z \in M'$.

Пусть b — произвольный элемент из A , z — произвольный элемент из M .

4° Докажем, что $Ax_4 \in M'$. Так как $bx_4 \cdot a = 0$, то ввиду п. 3° верно $bx_4 \in M'$.

5° Докажем, что $Ax_3 \in M'$. В силу правой альтернативности и леммы 9.23 имеем

$$bx_2 \cdot a = b(x_2 \circ a) = b(x_3 + \xi x_4) = bx_3 + \xi bx_4.$$

Так как $bx_2 \cdot a, bx_4 \in M'$ в силу пп. 2°–4°, то $bx_3 \in M'$.

6° Докажем, что $Ax_4 = 0$. Поскольку $M' \cdot a \subseteq \Phi x_4$ в силу леммы 9.23, то $bx_3 \cdot a \in \Phi x_4$.

С другой стороны, $bx_3 \cdot a = b(x_3 \circ a) = 2bx_4$, поэтому $bx_4 \in \Phi x_4$. Так как собственные значения нильпотентного оператора L_b (см. лемму 9.14) равны нулю, то $bx_4 = 0$.

7°. Докажем, что $A * x_4 = 0$. Поскольку в правой альтернативности и п. 6° верно $a \cdot x_4 b = a(x_4 \circ b) = ax_4 \cdot b + ab \cdot x_4 = 0$, то $x_4 b \in \ker L_a = \Phi x_4$. Из нильпотентности оператора R_b следует, что $x_4 b = 0$, значит, с учетом п. 6° получаем требуемое.

8°. Докажем, что $Mx_4 = 0$. Во-первых, в силу п. 6° имеем $bz \cdot x_4 = bx_4 \cdot z + b[z, x_4] = 0$, т.е. $AM \cdot x_4 = 0$. Во-вторых, в силу п. 7° имеем $zb \cdot x_4 = -zx_4 \cdot b + z(b \circ x_4) = 0$, т.е. $MA \cdot x_4 = 0$. Значит, в силу леммы 9.13 9.14 получаем $Mx_4 = 0$.

9°. Докажем, что $AM \subseteq M'$. Прежде всего, на основании пп. 7°, 8° имеем

$$x_4 x_3 = x_4 \cdot ax_2 = x_4 \cdot ax_2 + \xi x_4^2 = x_4(a \circ x_2) = x_4 a \cdot x_2 + x_4 x_2 \cdot a = 0,$$

то есть

$$x_4 x_3 = 0. \quad (9.27)$$

Кроме того, аналогично

$$x_4 x_1 = (x_3 a)x_1 = x_3(a \circ x_1) = x_3(\xi x_3 + \eta x_4) = \xi x_3^2 = \xi ax_2 \cdot x_3 = \xi ax \cdot x_2 = \xi x_4 x_2,$$

то есть

$$x_4 x_1 = \xi x_4 x_2. \quad (9.28)$$

Заметим, что в силу п. 7° и (9.27) имеем $x_4 x_2 \cdot x_3 = x_4 x_3 \cdot x_2 + x_4[x_2, x_3] = 0$, то есть

$$x_4 x_2 \cdot x_3 = 0. \quad (9.29)$$

Поскольку $ax_3 = x_4$, то ненулевой элемент $x_4 x_2$ не может быть пропорционален элементу a . Поэтому возможны два случая:

а) $x_4 x_2 = 0$ или б) $x_4 x_2 = c$ и a, c — базис в A .

На самом деле, первого случая быть не может. Действительно, если $x_4 x_2 = 0$, то $x_4 * M = 0$ в силу (9.27) и (9.28). Отсюда и п. 7° имеем $\Phi x_4 \triangleleft B$, что невозможно.

Таким образом, в силу (9.28) и приведенных рассуждений:

$$x_4 x_2 = c \quad \text{и} \quad x_4 x_1 = \xi c, \quad \text{причем } \{a, c\} \text{ — базис в } A. \quad (9.30)$$

Из (9.29) и (9.30) следует, что $cx_3 = 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned} cx_1 \cdot a &= c(x_1 \circ a) = c(\xi x_3 + \eta x_4) = 0, \\ cx_2 \cdot a &= c(x_2 \circ a) = c(x_3 + \xi x_4) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $cx_1, cx_2 \in M'$, а значит, $AM \subseteq M'$.

10°. Докажем теперь, что $MA \subseteq M'$. Аналогично предыдущему $x_3c \cdot a = -x_3a \cdot c = -x_4c = 0$, значит, $x_3A \subseteq M'$ ввиду п. 3°. Точно также получаем $x_2c \cdot a = -x_2a \cdot c = -\xi x_4c = 0$, т.е. $x_2A \subseteq M'$. Наконец, из нильпотентности оператора R_c следует, что $x_1c \in M'$ и $x_1A \subseteq M'$.

11°. Из пп. 9°, 10° следует, что $M * A \subseteq M'$. А так как $M = A * M$ по лемме 9.13 б), то получаем противоречие.

9.7. Супералгебры, в которых для любого $a \in A$ выполнено $L_a^3 = 0$

Пусть $x_1, \dots, x_4$ — жорданов базис оператора L_a такого, что $L_a^2 \neq 0$, т.е.

$$ax_1 = x_2, \quad ax_2 = x_3, \quad ax_3 = 0, \quad ax_4 = 0.$$

Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1°. Докажем, что жорданов базис $x_1, \dots, x_4$ можно выбрать так, что

$$\begin{cases} x_1a = \delta x_2 + \xi x_4, \\ x_2a = (\delta + 1)x_3, \quad x_3a = 0, \quad x_4a = \zeta x_3. \end{cases}$$

Положим

$$x_ia = \rho_{i1}x_1 + \rho_{i2}x_2 + \rho_{i3}x_3 + \rho_{i4}x_4.$$

Тогда из равенства $a \cdot ax_i = ax_i \cdot a - a \cdot x_ia$ при $i = 1$ имеем

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2a - a(\rho_{11}x_1 + \rho_{12}x_2 + \rho_{13}x_3 + \rho_{14}x_4) = \\ &= \rho_{21}x_1 + \rho_{22}x_2 + \rho_{23}x_3 + \rho_{24}x_4 - \rho_{11}x_2 - \rho_{12}x_3, \end{aligned}$$

отсюда следует, что

$$\rho_{21} = 0, \quad \rho_{11} = \rho_{22}, \quad \rho_{23} = 1 + \rho_{12}, \quad \rho_{24} = 0. \quad (9.31)$$

При $i = 2$ получаем

$$\begin{aligned} 0 &= x_3a - a(\rho_{21}x_1 + \rho_{22}x_2 + \rho_{23}x_3 + \rho_{24}x_4) = \\ &= \rho_{31}x_1 + \rho_{32}x_2 + \rho_{33}x_3 + \rho_{34}x_4 - \rho_{21}x_2 - \rho_{22}x_3, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\rho_{31} = 0, \quad \rho_{32} = \rho_{21}, \quad \rho_{33} = \rho_{22}, \quad \rho_{34} = 0. \quad (9.32)$$

Таким образом, из 9.31 и 9.32 следует, что $x_3a = \rho_{33}x_3$, а в силу нильпотентности оператора R_a заключаем, что $x_3a = 0$, поэтому

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33} = 0.$$

При $i = 4$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= 0 - a(\rho_{41}x_1 + \rho_{42}x_2 + \rho_{43}x_3 + \rho_{44}x_4) = \\ &= -\rho_{41}x_2 - \rho_{42}x_3, \end{aligned}$$

то есть

$$\rho_{41} = \rho_{42} = 0.$$

Таким образом, $x_4a = \rho_{43}x_3 + \rho_{44}x_4$, значит,

$$0 = x_4a \cdot a = \rho_{43}x_3a + \rho_{44}x_4a = \rho_{44}(\rho_{43}x_3 + \rho_{44}x_4),$$

откуда $\rho_{44} = 0$. Итак, получена следующая таблица

$$\begin{cases} x_1a = \rho_{12}x_2 + \rho_{13}x_3 + \rho_{14}x_4, \\ x_2a = (\rho_{12} + 1)x_3, \quad x_3a = 0, \quad x_4a = \rho_{43}x_3, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1a = \delta x_2 + \mu x_3 + \xi x_4, \\ x_2a = (\delta + 1)x_3, \quad x_3a = 0, \quad x_4a = \zeta x_3. \end{cases}$$

Сделав замену базиса (он является жордановым для оператора L_a)

$$y_1 = x_1 + \lambda x_2, \quad y_2 = x_2 + \lambda x_3, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4,$$

получаем

$$\begin{aligned} y_1a &= (x_1 + \lambda x_2)a = \delta x_2 + \mu x_3 + \xi x_4 + \lambda(\delta + 1)x_3 = \\ &= \delta y_2 - \lambda \delta x_3 + \mu x_3 + \xi x_4 + \lambda(\delta + 1)x_3 = \\ &= \delta y_2 + (\mu + \lambda)y_3 + \xi y_4, \\ y_2a &= (x_2 + \lambda x_3)a = (\delta + 1)x_3 = (\delta + 1)y_3, \\ y_3a &= x_3a = 0, \\ y_4a &= x_4a = \zeta x_3 = \zeta y_3. \end{aligned}$$

Выбирая $\lambda = -\mu$, получаем, требуемое в п. 1° утверждение.

Введем обозначения:

$$M_3 = \text{span}(x_3), \quad M_{2,3} = \text{span}(x_2, x_3), \quad M_{2,3,4} = \text{span}(x_2, x_3, x_4).$$

Пусть b — произвольный четный элемент, тогда по правой альтернативности

$$ab \cdot x_i - a \cdot bx_i + ax_i \cdot b - a \cdot x_i b = 0. \quad (9.33)$$

По предположению $L_c^3 = 0$ для любого элемента $c \in A$, то есть

$$c(c \cdot cx_i) = 0,$$

значит, справедливы и его линеаризации

$$c(c \cdot bx_i) + c(b \cdot cx_i) + b(c \cdot cx_i) = 0, \quad (9.34)$$

$$c(b \cdot bx_i) + b(c \cdot bx_i) + b(b \cdot cx_i) = 0. \quad (9.35)$$

2°. Докажем, что $x_2b, x_3b \in M_{2,3}$. Из (9.33) при $i \in \{1, 2\}$ замечаем, что первое слагаемое равно нулю, а второе и четвертое лежат в $M_{2,3}$.

3°. Докажем, что $MA \subseteq M_{2,3,4}$. Из соотношения (9.34) при $i = 4$ получаем $a(a \cdot bx_4) = 0$, значит $a \cdot bx_4 \in M_{3,4}$, откуда следует, что

$$bx_4 \in M_{2,3,4}. \quad (9.36)$$

Далее, при $i = 1$ из (9.34) получаем $a(a \cdot bx_1) + a \cdot bx_2 + bx_3 = 0$. Первое слагаемое лежит в M_3 , второе в $M_{2,3}$, откуда следует, что

$$bx_3 \in M_{2,3}. \quad (9.37)$$

Рассмотрим теперь соотношение (9.33) при $i = 4$:

$$-a \cdot bx_4 - a \cdot x_4b = 0,$$

Первое слагаемое этого равенства по соотношению (9.36) лежит в M_3 , значит,

$$x_4b \in M_{2,3,4}. \quad (9.38)$$

Из п. 2° и (9.38) следует, что $M_{2,3,4}b \subseteq M_{2,3,4}$. Отсюда заключаем, что если $x_1b \equiv \lambda x_1 \pmod{M_{2,3,4}}$, то ввиду инвариантности $M_{2,3,4}$ относительно R_b получаем $\lambda = 0$ и $x_1b \in M_{2,3,4}$. Следовательно, получаем $MA \subseteq M_{2,3,4}$.

4°. Докажем, что $x_4b \in M_{2,3}$. Во-первых, ввиду (9.38) получаем $x_4b \equiv \lambda x_4 \pmod{M_{2,3}}$. Во-вторых, в силу п. 2° пространство $M_{2,3}$ инвариантно относительно R_b , значит, $\lambda = 0$ и $x_4b \in M_{2,3}$.

5°. Докажем, что $bx_2 \notin M_{2,3,4}$ для подходящего $b \in A$. Пусть, от противного, для всякого вектора $b \in A$ выполнено $bx_2 \in M_{2,3,4}$. Тогда ввиду соотношений (9.36) и (9.37) верно $bM_{2,3,4} \subseteq M_{2,3,4}$. Если $bx_1 \equiv \lambda x_1 \pmod{M_{2,3,4}}$, то $bx_1 \in M_{2,3,4}$, следовательно, $AM \subseteq M_{2,3,4}$ и в силу п. 3° имеем $M = A * M \subseteq M_{2,3,4}$, что невозможно.

6°. Докажем, что справедлива следующая система равенств

$$\begin{cases} x_1a = -x_2 + \xi x_4, \\ x_2a = x_3a = 0, \quad x_4a = \zeta x_3. \end{cases}$$

В силу п. 5°: $bx_2 \notin M_{2,3,4}$ найдется $b \in A$ такой, что $bx_2 \equiv \mu x_1 \pmod{M_{2,3,4}}$, где $\mu \neq 0$. Выберем так нормировку вектора b , что

$$bx_2 \equiv x_1 \pmod{M_{2,3,4}}. \quad (9.39)$$

В силу правой альтернативности верно

$$-b \cdot ax_i + bx_i \cdot a - b \cdot x_i a = 0, \quad (9.40)$$

откуда при $i = 1$ на основании п. 1° получаем

$$-bx_2 + bx_1 \cdot a - \delta bx_2 - \xi bx_4 = 0,$$

то есть

$$(1 + \delta)bx_2 = bx_1 \cdot a - \xi bx_4.$$

Из соотношений п. 1° и (9.36) получаем, что $(1 + \delta)bx_2 \in M_{2,3,4}$, а значит, из соотношения (9.39) следует, что $\delta = -1$ и выполнена система равенств, указанная в п. 6°.

7°. Докажем, что $\xi = 0$ в системе из п. 6°, т.е. справедлива система

$$x_1 a = -x_2, \quad x_2 a = x_3 a = 0, \quad x_4 a = \xi x_3. \quad (9.41)$$

Из соотношения (9.40) при $i = 2$ получаем

$$-bx_3 + bx_2 \cdot a = 0.$$

Далее, из соотношений (9.37), (9.39) и п. 6°, что

$$0 \equiv bx_2 \cdot a \equiv -x_2 + \xi x_4 \pmod{M_{2,3}},$$

т.е. $\xi = 0$ и получаем систему (9.41).

8°. Докажем, что $bx_1 \in M_{2,3,4}$. Из (9.40) при $i = 1$ и (9.41) получаем $bx_1 \cdot a = 0$, откуда и следует $bx_1 \in M_{2,3,4}$.

9°. Докажем, что $bx_3 \equiv -x_2 \pmod{M_3}$. Аналогично, из (9.40) при $i = 2$ и (9.41) следует $-bx_3 + bx_2 \cdot a = 0$. Так как $M_{2,3,4}a \subseteq M_3$, то из соотношения (9.39) имеем $bx_3 = bx_2 \cdot a \equiv -x_2 \pmod{M_3}$.

10°. Покажем, что $b \cdot bx_2 \equiv 0 \pmod{M_{2,3}}$. Из соотношения (9.35) при $i = 1$ получаем

$$a(b \cdot bx_1) + b(a \cdot bx_1) + b \cdot bx_2 = 0.$$

Поскольку $aM \subseteq M_{2,3}$, то $a(b \cdot bx_1) \in M_{2,3}$. Из п. 8° следует, что $a \cdot bx_1 \in M_3$, поэтому ввиду п. 9° заключаем, что $b(a \cdot bx_1) \in M_{2,3}$. Значит, верно требуемое сравнение.

11°. Докажем, что $bx_2 \equiv x_1 \pmod{M_{3,4}}$. Пользуясь (9.39), запишем $bx_2 \equiv x_1 + \lambda x_2 \pmod{M_{3,4}}$. Так как по (9.36) и пп. 8°, 9° верно $b(x_1 + M_{3,4}) \subseteq M_{2,3,4}$, то мы получаем, что $b \cdot bx_2 \equiv \lambda bx_2 \pmod{M_{2,3,4}}$, откуда по (9.39) заключаем, что $b \cdot bx_2 \equiv \lambda x_1 \pmod{M_{2,3,4}}$. Сравнивая полученное сравнение с п. 10°, заключаем, что $\lambda = 0$, поэтому $bx_2 \equiv x_1 \pmod{M_{3,4}}$.

12°. Докажем, что $bx_3 = -x_2$ и $x_2b \in M_3$. Рассмотрим соотношение (9.34) при $i = 1$: $a(a \cdot bx_1) + a \cdot bx_2 + bx_3 = 0$. Первое слагаемое в этом равенстве по п. 8° равно нулю; а второе равно x_2 по п. 11°, поэтому получаем $bx_3 = -x_2$.

Из соотношения (9.33) при $i = 1$ получаем равенство $-a \cdot bx_1 + x_2b - a \cdot x_1b = 0$. По п. 8° первое слагаемое лежит в M_3 , а по п. 3° там же находится и третье слагаемое, значит, второе слагаемое содержится в M_3 .

13°. Докажем, что $x_3b = x_2$. Из того же соотношения (9.33) при $i = 2$ получаем $-a \cdot bx_2 + x_3b - a \cdot x_2b = 0$. Первое слагаемое в силу п. 11° равно $-x_2$, третье в силу п. 12° равно нулю, поэтому $x_3b = x_2$.

14°. Докажем, что справедливы равенства

$$x_1a = -x_2, \quad x_2a = x_3a = x_4a = 0.$$

В силу п. 4°: $x_4b \in M_{2,3}$. Далее, в силу (9.41) $x_4b \cdot a = 0$, поэтому $x_4a \cdot b = 0$. Учитывая (9.41) и п. 13°, имеем $0 = x_4a \cdot b = \zeta x_3b = \zeta x_2$, т.е. $\zeta = 0$ и система (9.41) принимает указанный вид.

15°. Докажем, что $x_2b = 0$ и $x_4b = \beta x_2$ для подходящего скаляра β . Поскольку $x_2b = -x_1a \cdot b = x_1b \cdot a$ и в силу п. 3°: $x_1b \in M_{2,3,4}$, то имеем $x_2b = 0$.

Заметим, что $x_4b \cdot b = 0$, а так как по п. 4°: $x_4b \in M_{2,3}$, то из равенств $x_2b = 0$ и $x_3b = x_2$ (см. п. 13°) заключаем, что $x_4b \in M_2$, то есть найдется такой скаляр β , что $x_4b = \beta x_2$.

16°. Докажем, что $bx_4 \equiv -\beta x_2 \pmod{M_{3,4}}$. Из равенства при $i = 4$ имеем $-a \cdot bx_4 - a \cdot x_4b = 0$. В силу (9.36) положим $bx_4 \equiv \lambda x_2 \pmod{M_{3,4}}$; тогда $a \cdot bx_4 = \lambda(9.33)x_3$. С другой стороны, по п. (9.35): $a \cdot x_4b = \beta x_3$, поэтому и $\beta + \lambda = 0$ и верно требуемое.

17°. Докажем, что справедлива система равенств

$$\begin{cases} x_3b = -bx_3 = x_2, \\ x_4b = -bx_4 = \beta x_2. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь соотношение

$$-b \cdot bx_i + bx_i \cdot b - b \cdot x_ib = 0. \quad (9.42)$$

В силу п. 16° можно записать $bx_4 = -\beta x_2 + \lambda x_3 + \mu x_4$. Подставляя это выражение в (9.42) при $i = 4$ и, используя п. 15°, получаем

$$-(-\beta bx_2 + \lambda bx_3 + \mu bx_4) + (-\beta x_2b + \lambda x_3b + \mu x_4b) - \beta bx_2 = 0.$$

Приведем подобные члены и еще раз воспользуемся п. 15°:

$$-\lambda bx_3 - \mu bx_4 + \lambda x_3 b + \mu x_4 b = 0. \quad (9.43)$$

Заметим, что все слагаемые из (9.43), кроме второго, содержатся в M_2 ввиду пп. 12°, 13° и 15°. Тогда по модулю M_2 имеем сравнение

$$0 \equiv -\mu bx_4 \equiv -\mu(-\beta x_2 + \lambda x_3 + \mu x_4) \equiv -\lambda \mu x_3 - \mu^2 x_4 \pmod{M_2},$$

откуда следует, что $\mu = 0$. Значит, из (9.43) вытекает $-\lambda bx_3 + \lambda x_3 b = 0$. Отсюда в силу пп. 12° и 13° следует, что $2\lambda x_2 = 0$, т.е. $\lambda = 0$.

Итак, доказано, что $bx_4 = -\beta x_2$. Объединяя пп. 12°, 13° и 15° с последним равенством, получаем требуемое в п. 17°.

18°. Докажем, что $bx_1 = -\alpha x_2$ и $x_1 b = \alpha x_2$. Заметим, что $b(b \cdot bx_3) = 0$, поэтому $b \cdot bx_2 = 0$. Отсюда по п. 11°: $bx_2 \equiv x_1 \pmod{M_{3,4}}$ заключаем, что $bx_1 \in bM_{3,4} \subseteq M_2$, поэтому $bx_1 = -\alpha x_2$ для некоторого скаляра α .

Рассмотрим соотношение (9.42) при $i = 2$: $-b \cdot bx_2 + bx_2 \cdot b - b \cdot x_2 b = 0$. Так как $M_{3,4} * b \subseteq M_2$ по п. 17°, то по п. 11° верно $0 \equiv -bx_1 + x_1 b - b \cdot x_2 b \pmod{M_2}$.

Тогда в силу п. 15° и доказанного равенства $bx_1 = -\alpha x_2$ заключаем, что $x_1 b \equiv 0 \pmod{M_2}$. Пусть $x_1 b = \lambda x_2$; тогда из соотношения (9.33) при $i = 1$ получаем $-a \cdot bx_1 + x_2 b - a \cdot \lambda x_2 = 0$. Значит, в силу равенства $bx_1 = -\alpha x_2$ и п. 15°: $\alpha x_3 - \lambda x_3 = 0$, т.е. $\lambda = \alpha$ и $x_1 b = \alpha x_2$.

19°. Докажем, что справедлива система

$$\begin{cases} ax_1 = -x_1 a = x_2, & ax_2 = x_3, \\ ax_3 = ax_4 = x_2 a = x_3 a = x_4 a = 0, \\ x_1 b = -bx_1 = \alpha x_2, & x_2 b = 0, \\ bx_2 = x_1 - (\alpha + \beta\gamma)x_3 + \gamma x_4, \\ x_3 b = -bx_3 = x_2, & x_4 b = -bx_4 = \beta x_2. \end{cases}$$

Ввиду п. 11° положим $bx_2 = x_1 + \lambda x_3 + \gamma x_4$, тогда в силу п. 12° имеем

$$0 = b(b \cdot bx_3) = -b \cdot bx_2 = -b(x_1 + \lambda x_3 + \gamma x_4),$$

откуда в силу пп. 17°, 18° получаем $0 = (\alpha + \lambda + \beta\gamma)x_2$, значит, $\lambda = -(\alpha + \beta\gamma)$ и $bx_2 = x_1 - (\alpha + \beta\gamma)x_3 + \gamma x_4$. Таким образом, получается требуемая таблица умножения.

20°. Положим $W = \text{span}(x_1 + \gamma x_4, x_2, x_3)$. Тогда из таблицы п. 19° имеем $M * A \subseteq W$, что невозможно ввиду леммы 9.13 б).

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Изучено строение простых конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебр, нечетная часть которых является ассоциативным бимодулем над ассоциативно-коммутативной четной частью, — супералгебры абелевого типа.
2. Исследовано строение простых абелевых супералгебр произвольной размерности, четная часть которых является полем (расширением основного поля).
3. Описаны все простые конечномерные унитарные правоальтернативные супералгебры с ассоциативно-коммутативной четной частью.
4. Изучено строение конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебр с полупростой сильно альтернативной четной частью и описать все простые конечномерные унитарные правоальтернативные супералгебры с сильно альтернативной четной частью.
5. Описано строение правоальтернативных бимодулей, достаточно для применения его к исследованию правоальтернативных супералгебр без дополнительных условий на четную часть.
6. Описаны все простые конечномерные унитарные правоальтернативные супералгебры с полупростой четной частью.
7. Изучено строение групп автоморфизмов и супералгебр дифференцирований построенных простых супералгебр.
8. Начато изучение унитарных и сингулярных правоальтернативных супералгебр.

В дальнейшем перспективными представляются следующие направления исследований:

1. Изучение строения конечномерных простых унитарных правоальтернативных супералгебр с ниль-радикалом в четной части.
2. Описание простых конечномерных не унитарных правоальтернативных супералгебр с полупростой четной частью.
3. Изучение сингулярных супералгебр.

4. Изучение простых бесконечномерных правоальтернативных унитарных супералгебр абелевого типа, четная часть которых является областью целостности.
5. Описание строения конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебр с полупростой четной частью.

Список сокращений и условных обозначений

$B_{1 2}$, 25	P_{ij} , 33 , 69
$B_{2 3}$, 26	$\text{Reg } M_2$, 19
$B_{2 3}(\varphi, \xi, \psi)$, 221	$\mathfrak{R}_i$, 33 , 60
$B_{4 4}(w)$, 172 , 199	
$B(A, \tau)$, 30	$S_{4 2}$, 25
$B(A, \tau, \chi)$, 27	$\text{span } X$, 16
$B(A, \tau, R_\omega)$, 30	$V_{2 1}$, 78
B^n , 80	$\text{WA}(B)$, 75
$B(\Gamma, D, \gamma)$, 26	$Z(B)$, 17
$B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$, 32	
$B^{(j,i)}$, 79	
$B(M_2, \nu, D)$, 174	
C , 87	
C_2 , 19	
$[C]_l$, 179	
$Cl(V, f)$, 21	
$[C]_r$, 179	
$E_{4 4}$, 200	
$E(A, M)$, 79	
E_i , 79	
$J(V, f)$, 20	
M_{ij} , 60 , 177	
M^J , 24	
$M_{m n}$, 25	
$M_n[\sqrt{1}]$, 25	
$[M_n]_l$, 179	
$[M_n]_r$, 179	
M^R , 24	
N , 22	
N' , 23	

Литература

Список публикаций

1. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015. — Т. 79, № 3. — С. 131–158.
2. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые правоальтернативные супералгебры абелева типа, четная часть которых является полем // Изв. РАН. Сер. матем. — 2016. — Т. 80, № 6. — С. 247–257.
3. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры с унитарной четной частью над полем характеристики 0 // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 4. — С. 577–585.
4. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры с полупростой сильно ассоциативной четной частью // Матем. сб. — 2017. — Т. 208, № 2. — С. 55–69.
5. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные унитарные супералгебры с сильно ассоциативной четной частью // Матем. сб. — 2017. — Т. 208, № 4. — С. 73–86.
6. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые 5-мерные правоальтернативные супералгебры с тривиальной четной частью // Сиб. матем. журнал. — 2017. — Т. 58, № 6. — С. 1387–1400.
7. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные унитарные супералгебры с ассоциативно-коммутативной четной частью над полем характеристики нуль // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82, № 3. — С. 136–153.
8. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Сингулярные 6-мерные супералгебры // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 92–105.
9. Murakami L. S. I., Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. Finite-dimensional right alternative superalgebras with a semisimple strongly alternative even part // J. Algebra. — 2019. — Vol. 528. — P. 150–176.
10. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные унитарные правоальтернативные супералгебры над алгеброй матриц порядка 2 // Алгебра и логика. — 2019. — Т. 58, № 1. — С. 108–131.
11. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые асимметричные дубли, их автоморфизмы и дифференцирования // Алгебра и логика. — 2019. — Т. 58, № 5. — С. 627–649.

12. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры с полупростой четной частью // Сиб. матем. журнал. — 2020. — Т. 61, № 2. — С. 365–407.
13. Шашков О. В. Правоальтернативные супералгебры ёмкости 1 с сильно альтернативной четной частью // Алгебра и логика. — 2020. — Т. 59, № 2. — С. 260–281.
14. Шашков О. В. Конечномерные правоальтернативные унитарные супералгебры с сильно альтернативной четной частью // Сиб. матем. журнал. — 2020. — Т. 61, № 5. — С. 1159–1176.
15. Шашков О. В. Об основной теореме Веддерберна для правоальтернативных супералгебр ёмкости 1 // СЭМИ. — 2020. — Т. 17. — С. 1571–1579.
16. Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. Linearly generated singular superalgebras // J. Algebra. — 2020. — V. 546. — P. 580–603.
17. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики 0 // XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. — Тула : Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. — С. 178–180.
18. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные унитарные супералгебры с ассоциативно-коммутативной чётной частью // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. — № 8. — Саратов : Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 2016. — С. 82–84.
19. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые правоальтернативные супералгебры абелева типа произвольной размерности, чётная часть которых поле // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. — № 8. — Саратов : Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 2016. — С. 84–86.
20. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры с унитарной чётной частью над полем характеристики нуль // Мальцевские чтения. — Новосибирск : Институт математики им. С. Л. Соболева, 2016. — С. 158.
21. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные правоальтернативные унитарные супералгебры с сильно ассоциативной четной частью // Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии. — Казань : Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2016. — С. 279.

22. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые конечномерные унитарные правоальтернативные супералгебры над алгеброй матриц порядка 2 // Мальцевские чтения. — Новосибирск : Институт математики им. С. Л. Соболева, 2017. — С. 128.
23. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. Простые асимметричные дубли, их автоморфизмы и дифференцирования // Мальцевские чтения. — Новосибирск : Институт математики им. С. Л. Соболева, 2018. — С. 165.

Цитированная литература

24. Гантмахер Ф. Теория матриц. — М. : ЛитРес, 2018.
25. Albert A. On right alternative algebras // Ann. Math. — 1949. — Vol. 50, no. 2. — P. 318–328.
26. Albert A. A. The structure of right alternative algebras // Ann. Math. — 1954. — Vol. 59, no. 3. — P. 408–417.
27. Anderson T. Hereditary radicals and derivations of algebras // Canad. J. Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 372–377.
28. Джекобсон Н. Теория колец. — М. : ИЛ, 1947.
29. Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М. : Мир, 1964.
30. Гришин А. В., Пчелинцев С. В. Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6 // Матем. сб. — 2016. — Т. 207, № 12. — С. 54–72.
31. Зельманов Е. И. О разрешимости йордановых ниль-алгебр // Исследования по теории колец и алгебр, Тр. Ин-та матем. СО АН СССР. — 1989. — Т. 16. — С. 37–54.
32. Зельманов Е. И., Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54, № 4. — С. 676–693.
33. Carlsson R. Malcev-Moduln // J. Reine Angew. Math. — 1976. — Vol. 281. — P. 199–210.
34. da Silva J. P., Murakami L. S. I., Shestakov I. P. On right alternative superalgebras // Commun. Algebra. — 2016. — Vol. 44, no. 1. — P. 240–252.
35. Ленг С. Алгебра. — М. : Мир, 1968.
36. Кемер А. Р. Многообразия и Z_2 -градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1984. — Т. 48, № 5. — С. 1042–1059.
37. Кемер А. Р. Конечная базлируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и Логика. — 1987. — Т. 26, № 5. — С. 597–641.
38. Кантор И. Л. Йордановы и лиевы супералгебры, определенные алгеброй Пуассона //

- Вторая сибирская школа «Алгебра и анализ». — Томск : Изд-во Томск. ун-та. — 1989. — С. 55–80.
39. Кольца, близкие к ассоциативным / Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П. и Ширшов А. И. — М. : Наука, 1978.
 40. Eilenberg S. Extensions of general algebras // Ann. Soc. Polonaise Math. — 1948. — Vol. 21. — P. 125–134.
 41. Кузьмин Е. Н. Алгебры Мальцева и их представления // Алгебра и Логика. — 1968. — Т. 7, № 4. — С. 48–69.
 42. Пчелинцев С. В. Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным // Известия РАН. Серия матем. — 2004. — Т. 68, № 1. — С. 183–206.
 43. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — М. : Наука, 2005.
 44. Писаренко Н. А. Веддерберново разложение в конечномерных альтернативных супералгебрах // Алгебра и Логика. — 1993. — Т. 32, № 4. — С. 428–440.
 45. Михеев И. М. О простых правоальтернативных кольцах // Алгебра и Логика. — 1977. — Т. 16, № 6. — С. 682–710.
 46. Пожидаев А. П., Шестаков И. П. Некоммутативные йордановы супералгебры степени $n > 2$ // Алгебра и Логика. — 2010. — Т. 49, № 1. — С. 26–59.
 47. Пожидаев А. П., Шестаков И. П. Простые конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры характеристики 0 // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 2. — С. 389–406.
 48. Оре О. Теория графов. — М. : Наука, 1980.
 49. Jacobson N. Structure of alternative and Jordan bimodules // Osaka J. Math. — 1954. — Vol. 6. — P. 1–71.
 50. Jacobson N. Structure and representations of Jordan algebras. — Amer. Math. Soc., 1968. — Vol. 39.
 51. Кас V. Classification of simple $\mathbb{Z}$ -graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Commun. Algebra. — 1977. — Vol. 5, no. 13. — P. 1375–1400.
 52. Кас V. Lie superalgebras // Adv. Math. — 1977. — Vol. 26, no. 1. — P. 8–96.
 53. Kleinfeld E. Right alternative rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1953. — Vol. 4, no. 6. — P. 939–944.
 54. Martinez C., Zelmanov E. Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic // J. Algebra. — 2001. — Vol. 236, no. 2. — P. 575–629.
 55. McCrimmon K. Speciality and non-speciality of two Jordan superalgebras // J. Algebra. — 1992. — Vol. 149, no. 2. — P. 326–351.
 56. Medvedev Yu. A., Zelmanov E. I. Some counterexamples in the theory of Jordan algebras //

- Nonassociative algebraic models (Zaragoza, 1989). — 1992. — P. 1–16.
57. Murakami L. S. I., Shestakov I. P. Irreducible unital right alternative bimodules // J. Algebra. — 2001. — Vol. 246, no. 2. — P. 897–914.
 58. Слинько А. М. Замечание о радикалах и дифференцированиях колец // Сиб. матем. журнал. — 1972. — Т. 13, № 6. — С. 1395–1397.
 59. Слинько А. М., Шестаков И. П. Правые представления алгебр // Алгебра и Логика. — 1974. — Т. 13, № 5. — С. 544–588.
 60. Скосырский В. Г. Правоальтернативные алгебры // Алгебра и Логика. — 1984. — Т. 23, № 2. — С. 185–192.
 61. Скосырский В. Г. Первичные йордановы алгебры и конструкции Кантора // Алгебра и Логика. — 1994. — Т. 33, № 3. — С. 301–316.
 62. Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М. : Мир, 1972.
 63. Филипов В. Т., Харченко В. К., Шестаков И. П. Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. — 4-е изд. — Новосибирск : Ин-т математики СО РАН, 1993.
 64. Pchelintsev S., Shestakov I. Prime $(-1, 1)$ and Jordan monsters and superalgebras of vector type // J. Algebra. — 2015. — Vol. 423. — P. 54–86.
 65. Racine M. L., Zelmanov E. I. Simple Jordan superalgebras. // Non-associative algebra and its applications. 3rd international conference, Oviedo, Spain, July 12th-17th, 1993. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. — P. 344–349.
 66. Schafer R. D. Alternative algebras over an arbitrary field // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 49, no. 8. — P. 549–555.
 67. Schafer R. D. Representations of alternative algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1952. — Vol. 72, no. 1. — P. 1–17.
 68. Schafer R. D. An introduction to nonassociative algebras. Pure and applied mathematics. — Academic Press, 1966.
 69. Scheunert M. The Theory of Lie Superalgebras: An Introduction. Lecture Notes in Mathematics. — Springer Berlin Heidelberg, 2006. — ISBN: [9783540352860](#).
 70. Svartholm N. On the algebras of relativistic quantum mechanics // Proc. Royal Phys. Soc. of Lund. — 1942. — Vol. 12. — P. 94–108.
 71. Tits J. Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles: I. Construction // Indagationes Mathematicae (Proceedings) / Elsevier. — 1966. — Vol. 69. — P. 223–237.
 72. Wall C. T. C. Graded Brauer groups // J. Reine Angew. Math. — 1964. — Vol. 213. —

- Р. 187–199.
73. Zorn M. Theorie der alternativen Ringe // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg / Springer. — 1931. — Vol. 8. — P. 123–147.
 74. Zorn M. Alternative rings and related questions I: existence of the radical // [Ann. Math.](#) — 1941. — Vol. 42, no. 3. — P. 676–686.
 75. Желябин В. Н. Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью // Алгебра и Логика. — 2002. — Т. 41, № 3. — С. 276–310.
 76. Желябин В. Н. Простые йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57, № 6. — С. 1262–1279.
 77. Желябин В. Н., Шестаков И. П. Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т. 45, № 5. — С. 1046–1072.
 78. Шестаков И. П. Супералгебры и контрпримеры // Сиб. матем. журн. — 1991. — Т. 32, № 6. — С. 187–196.
 79. Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и Логика. — 1997. — Т. 36, № 6. — С. 675–716.
 80. Шестаков И. П. Простые $(-1, 1)$ -супералгебры // Алгебра и Логика. — 1998. — Т. 37, № 6. — С. 721–739.