

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Науменко Антон Павлович

Диофантовы неравенства с простыми числами

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная
математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2025

Диссертация подготовлена на кафедре математических и компьютерных методов анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Гриценко Сергей Александрович**,
доктор физико-математических наук.

Официальные оппоненты: **Королев Максим Александрович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАН, Математический
институт им. В.А. Стеклова РАН, Отдел теории
чисел, ведущий научный сотрудник.

Рахмонов Зарулло Хусенович,
доктор физико-математических наук, профессор,
академик НАН Республики Таджикистан,
Институт математики им. А.Джураева НАН
Республики Таджикистан, главный научный
сотрудник

Пачев Урусби Мухамедович,
доктор физико-математических наук, доцент,
Кабардино-Балкарский государственный
университет им. Х.М. Бербекова, институт
математики и естественных наук, кафедра
алгебры и дифференциальных уравнений,
старший научный сотрудник.

Защита диссертации состоится «21» ноября 2025 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3558> .

Автореферат разослан «__» октября 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук

В.А. Кибкало

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Диссертация относится к области аналитической теории чисел. Работа посвящена изучению диофантовых неравенств, более точно вопросам разрешимости в простых числах нелинейных (в первую очередь – квадратичных) диофантовых неравенств.

Автором получен ряд результатов о близости суммы двух, трех и четырех квадратов к любому достаточно большому положительному действительному числу.

Пусть $N(\sigma, T)$ – число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma \leq \text{Re } s < 1, \quad 0 < \text{Im } s \leq T$.

Оценки вида

$$N(\sigma, T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^c T, c \geq 1 \quad (1)$$

называются плотностными теоремами.

Наилучшим современным ¹ значением λ на всем промежутке $1/2 \leq \sigma < 1$ является $\lambda = \frac{6}{5}$. Заметим, что вышел препринт L. Guth и J. Maynard ², в котором $\lambda = \frac{15}{13}$. Константа c играет меньшую роль, доказано ³ что $c < 18.2$.

Риман Б. в работе ⁴ обнаружил, что количество простых чисел, не превосходящих x , выражается через сумму по нетривиальным нулям $\zeta(s)$. Такого рода представления называются явными формулами. Одной из самых известных явных формул является утверждение:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\text{Im } \rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $2 < T \leq x$, $\rho = \beta + i\gamma$ – нули $\zeta(s)$ в критической полосе.

¹M.N. Huxley, On the difference between consecutive primes, Invent. Math., vol. 15:1, 1972, pp. 164–170.

²L. Guth, J. Maynard, New large value estimates for Dirichlet polynomials // <https://arxiv.org/abs/2405.20552v1>

³Гриценко С.А. Уточнение одной константы в плотностной теореме // Матем. заметки. –1994. – 55:2. – с. 59–61.

⁴Риман Б. О числе простых чисел, не превышающих данной величины. Сочинения. М.: ОГИЗ, 1946. С. 216–224.

В сороковых годах двадцатого века Ю.В. Линник ^{5, 6} разработал новую технику решения задач с простыми числами, основанную на явных формулах и плотностных теоремах. Эта техника получила название плотностной.

В монографии Воронина С.М. и Карацубы А.А. ⁷ содержится следующий результат, доказанный на основе плотностной техники: неравенство

$$|p - N| \leq H \quad (2)$$

разрешимо в простых числах при $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$ для любого достаточно большого N , λ – константа из плотностной теоремы.

В 2006 году Гирько В.В. и Гриценко С.А. ⁸ при помощи плотностной техники доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА . Пусть λ – константа из плотностной теоремы (1). Если $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2 .

Для числа решений данного неравенства справедлива оценка $I(N, H) \gg \frac{H}{\ln N}$.

В 2012 году в работе ⁹ С.А. Гриценко и Н.Т. Ча при помощи плотностной техники получили следующие теоремы.

ТЕОРЕМА В. Если $H > \sqrt{N} \exp(-\ln^{0.1} N)$, то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2 .

ТЕОРЕМА С. Пусть λ – константа из плотностной теоремы (1). Если

⁵Линник Ю.В. О возможности единого метода в некоторых вопросах аддитивной и дистрибутивной теории чисел. ДАН. 1945. Том 49, вып. 1. С. 3–7.

⁶Линник Ю.В. Об одной теореме теории простых чисел. ДАН. 1945. Том 47, вып. 1. С. 7–9.

⁷Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.

⁸Гирько В.В., Гриценко С.А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами // Чебышевский сборник. – 7:4. – с.26-30.

⁹С.А. Гриценко, Нгуен Тхи Ча, О диофантовых неравенствах с простыми числами// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика, 2012. 23:29, с. 202–205

$H > N^{(1-(2\lambda)^{-1})^2} \exp(\ln^{0.8} N) = N^{0.3402\dots} \exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 и p_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В Теореме В параметр H можно выбрать меньше $\sqrt{N}$, тогда как разрешимость (2) при $H = \sqrt{N}$ не следует даже из гипотезы Римана.

Цели и задачи диссертации

- уточнение нижних оценок параметра H , данных в Теоремах В, С;
- получение нижней оценки параметра H , при которой диофантово неравенство $|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \leq H$, разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3, p_4 .

Положения, выносимые на защиту

1. Если $H = N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon} = N^{0.481 + \varepsilon}$ диофантово неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 для любого $N > N_0(\varepsilon)$, что уточняет результат Теоремы В.

2. Если $H = N^{\frac{7}{12} \cdot (\frac{31}{64} - \frac{1}{300}) + \varepsilon} = N^{0.2806\dots + \varepsilon}$ диофантово неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 для любого $N > N_0(\varepsilon)$, что уточняет результат Теоремы С.

3. Если $H = N^{\frac{49}{144} \cdot (\frac{31}{64} - \frac{1}{300}) + \varepsilon} = N^{0.1636\dots + \varepsilon}$ диофантово неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3, p_4 для любого $N > N_0(\varepsilon)$.

Объект и предмет исследования

Объект исследования — диофантовы неравенства.

Предмет исследования — нелинейные диофантовы неравенства с простыми числами.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми и получены автором самостоятельно.

Основным из них является доказательство разрешимости в простых числах p_1, p_2 диофантова неравенства

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

где $H = N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon} = N^{0,481 + \varepsilon}$ для любого $N > N_0(\varepsilon)$.

При этом для числа решений $J(N, H)$ данного диофантова неравенства справедлива оценка

$$J(N, H) \gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N} \ln N}.$$

Практическая и теоретическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в дальнейших исследованиях, посвященных разрешимости диофантовых неравенств в простых числах и вопросам распределения простых чисел на коротких промежутках.

Степень достоверности

Достоверность результатов автора диссертации подтверждена строгими математическими доказательствами. Научные результаты автора опубликованы в открытой печати в рецензируемых научных изданиях и прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соот-

ветствующими ссылками

Методы исследования

Работа основана на плотностной технике Ю.В. Линника и применении результатов о числе нулей дзета-функции Римана, реальная часть которых близка к единице, а также некоторых уточнениях указанных результатов за счет использования метода экспоненциальных пар.

Апробация результатов

Основные результаты работы докладывались:

- на XV Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения" посвященной столетию со дня рождения Н.М. Коробова, Тула, 28–31 мая 2018 г.¹⁰;
- на XVI Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы, приложения и проблемы истории" посвященной 80-летию со дня рождения Мишеля Деза Коробова, Тула, 13–18 мая 2019 г.¹¹;
- на специальном семинаре "Аналитическая теория чисел" механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (неоднократно, с 2017 по 2025 гг.);
- на специальном семинаре "Современные проблемы теории чисел" МИАН им. В.А. Стеклова в 2025 г.

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 3 печатных работах, из них 3 работы в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория

¹⁰А.П. Науменко, О нелинейных диофантовых неравенствах с простыми числами// Труды XV Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения" , Тула, 2018 г. С. 239–241.

¹¹А.П. Науменко, Об одном классе нелинейных диофантовых неравенств с простыми числами// Труды XVI Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы, приложения и проблемы истории" , Тула, 2019 г. С. 166–168.

чисел и дискретная математика и индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus, RSCI и ПИНЦ.

Личный вклад автора

Основные положения диссертации, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Основные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации – 71 страница. Список литературы содержит 24 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы работы, дается краткий исторический обзор результатов, полученных ранее и связанных с тематикой диссертации, формулируются основные результаты диссертации и дается краткое описание методов их получения.

Первая глава диссертации содержит ряд вспомогательных лемм, известных в литературе, а также основные леммы 11 — 34.

Вторая глава состоит из двух параграфов.

Задачей, рассматриваемой в первом параграфе, является разрешимость в простых числах диофантова неравенства $|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H$.

Основным **результатом** первого параграфа второй главы является следующая полученная диссертантом

ТЕОРЕМА 1. *Если $H > N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon}$, то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2 для любого $N > N_0(\varepsilon)$.

Задачей, рассматриваемой во втором параграфе второй главы, является

разрешимость в простых числах диофантовых неравенств $|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leq H$ и $|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \leq H$.

Основными **результатами** второго параграфа второй главы являются следующие полученные диссертантом теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Если $H > N^{\frac{7}{12} \cdot (\frac{31}{64} - \frac{1}{300}) + \varepsilon} = N^{0.2806 \dots + \varepsilon}$, то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 и p_3 для любого $N > N_0(\varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 3. Если $H > N^{\frac{49}{144} \cdot (\frac{31}{64} - \frac{1}{300}) + \varepsilon} = N^{0.1636 \dots + \varepsilon}$, то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 и p_4 для любого $N > N_0(\varepsilon)$.

Доказательство теоремы 1 составляет содержание первого параграфа второй главы.

Опишем основные этапы доказательства теоремы 1.

Без ограничения общности считаем, что $H \leq \sqrt{N}/2$. Рассмотрим сумму:

$$S = \sum_{N-2N_1 < p^2 \leq N-N_1} \sum_{\sqrt{N-p^2-H} < k \leq \sqrt{N-p^2+H}} \Lambda(k),$$

где $N_1 = N^{\frac{61}{80} + \varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$.

При суммировании по k учитываются не только простые числа q , но и степени простых чисел q^r при натуральных $r > 1$. Вклад указанных слагаемых в S оценивается сверху как

$$\ll \frac{HN_1^{1/4} \ln^2 N}{\sqrt{N}}, \quad (3)$$

запись $A \ll B$ означает, что существует постоянная c такая, что $A \leq cB$

Далее имеем $N - p^2 \asymp N_1$ (запись $A \asymp B$ означает, что существуют постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1 B \leq A \leq c_2 B$). Воспользуемся для внутренней

суммы явной формулой (лемма 1):

$$S = \sum_{N-2N_1 < p^2 \leq N-N_1} \left(\sqrt{N-p^2+H} - \sqrt{N-p^2-H} \right) - \sum_{N-2N_1 < p^2 \leq N-N_1} \left(\sum_{|\gamma| \leq T} \int_{\sqrt{N-p^2-H}}^{\sqrt{N-p^2+H}} x^{\rho-1} dx + O\left(\frac{\sqrt{N_1} \log^2 N}{T}\right) \right).$$

Параметр T выбираем с таким расчетом, чтобы остаток явной формулы был меньше по порядку, чем

$$\sqrt{N-p^2+H} - \sqrt{N-p^2-H}.$$

Имеем

$$T = \frac{N_1 \ln^3 N}{H}. \quad (4)$$

Рассмотрим предполагаемый главный член:

$$\sum_{N-2N_1 < p^2 \leq N-N_1} \left(\sqrt{N-p^2+H} - \sqrt{N-p^2-H} \right).$$

Согласно лемме 6, при $N_1 \geq N^{\frac{61}{80} + \varepsilon_1}$ для соответствующим образом подобранного ε_1 отрезок $[\sqrt{N-2N_1}; \sqrt{N-N_1}]$ содержит простые числа, причем их количество $\gg \frac{N_1}{\sqrt{N} \ln N}$.

Вклад каждого слагаемого по порядку равен $\frac{H}{\sqrt{N_1}}$. Таким образом, предполагаемый главный член имеет порядок

$$\gg \frac{H \sqrt{N_1}}{\sqrt{N} \ln N}. \quad (5)$$

Отметим, что вклад (3) по порядку меньше, чем (5).

Далее займемся оценкой остатка:

$$W = \sum_{N-2N_1 < p^2 \leq N-N_1} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} \int_{\sqrt{N-p^2-H}}^{\sqrt{N-p^2+H}} x^{\rho-1} dx \right|.$$

Сделаем внешнее суммирование сплошным, по натуральным числам n :

$$W \ll \sum_{N-2N_1 < n^2 \leq N-N_1} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} \int_{\sqrt{N-n^2-H}}^{\sqrt{N-n^2+H}} x^{\rho-1} dx \right|.$$

Разобьем сумму по нулям дзета-функции Римана в определении W на две: в первую попадают нули $\rho = \beta + i\gamma$, $1 > \beta \geq \frac{45869}{48270} = 0.95025\dots$, а во вторую — $\rho = \beta + i\gamma$, $\frac{45869}{48270} > \beta \geq \frac{1}{2}$.

Имеем (см. лемму 18)

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{N-2N_1 < n^2 \leq N-N_1} \left| \sum_{\substack{\beta \geq \frac{45869}{48270} \\ |\gamma| \leq T}} \int_{\sqrt{N-n^2-H}}^{\sqrt{N-n^2+H}} x^{\rho-1} dx \right| \ll \\ &\ll \frac{H\sqrt{N_1} \ln N}{\sqrt{N}} \max_{\sigma \in [\frac{45869}{48270}, 1]} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} N(\sigma, T). \end{aligned}$$

Оценим

$$\max_{\sigma \in [\frac{45869}{48270}, 1]} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} N(\sigma, T).$$

При

$$1 - \delta(T) < \sigma \leq 1, \quad \delta(T) = \frac{c_2}{\ln^{2/3} |T| (\ln \ln |T|)^{1/3}},$$

где c_2 — константа из леммы 3, получим $N(\sigma, T) = 0$.

На промежутке $[1 - 10^{-8}; 1 - \delta(T)]$ будем использовать оценку (62) (в обозначениях диссертации) из леммы 27.

Так как при $H > N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon}$ выполнены соотношения $N_1 > N^{0.75} > T$ и $\ln^{-3} T \gg \ln^{-3} N \gg \ln^{-3} T$, достаточно показать

$$\frac{\sigma - 1}{2} + 1600(1 - \sigma)^{3/2} + \frac{76 \ln \ln N}{3 \ln N} < 0.$$

Последнее следует из того, что при достаточно большом N справедлива цепочка неравенств

$$\frac{1 - \sigma}{2} \geq \frac{1}{\ln^{2/3} T (\ln \ln T)^{1/3}} \geq \frac{1}{\ln^{2/3} N (\ln \ln N)^{1/3}} > \frac{152 \ln \ln N}{3 \ln N}$$

и того, что при $\sigma \geq 1 - 10^{-8}$ выполняется неравенство

$$\frac{1 - \sigma}{2} > 3200(1 - \sigma)^{3/2}.$$

На промежутке $\left[\frac{45869}{48270}; 1 - 10^{-8}\right)$ воспользуемся оценкой (64).
При $H > N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon}$ имеем $T \ll N_1^{\frac{1351}{3660} - \varepsilon}$. Тогда окончательно получаем

$$\max_{\sigma \in \left[\frac{45869}{48270}; 1\right]} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} N(\sigma, T) \ll \ln^{-3} N.$$

Далее заметим, что при нашем выборе параметров N_1 и H справедливо

$$N - (n + 1)^2 + H < N - n^2 - H.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, применяя неравенство Коши, имеем

$$\begin{aligned} W_2^2 &= \left(\sum_{N-2N_1 < n^2 \leq N-N_1} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{45869}{48270} \\ |\gamma| \leq T}} \int_{\sqrt{N-n^2-H}}^{\sqrt{N-n^2+H}} x^{\rho-1} dx \right| \right)^2 \ll \\ &\ll \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{45869}{48270} \\ |\gamma| \leq T}} x^{\rho-1} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Используя леммы 2 и 20, для W_2 получим:

$$W_2 \ll \frac{H\sqrt{N_1} \ln^2 N}{\sqrt{N}} \max_{\sigma \in \left[\frac{1}{2}; \frac{45869}{48270}\right)} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} \sqrt{\frac{N(\sigma, T)\sqrt{N}}{H}}.$$

Далее оценим

$$\max_{\sigma \in \left[\frac{1}{2}; \frac{45869}{48270}\right)} \frac{N_1^{\sigma-1} N(\sigma, T)\sqrt{N}}{H}.$$

При нашем выборе H справедлива оценка

$$\frac{\sqrt{N}}{H} \ll N_1^{\frac{91}{3660} - \varepsilon}.$$

На промежутке $\left[\frac{15958}{16825}, \frac{45869}{48270}\right)$ воспользуемся оценкой (65) (в обозначениях диссертации) при $k = 5$. Имеем

$$\frac{N_1^{\sigma-1} N(\sigma, T) \sqrt{N}}{H} \ll N_1^{(\sigma-1) + \frac{9457(\kappa+\lambda-5\sigma+4)}{43920} + \frac{91}{3660} - \varepsilon},$$

где (κ, λ) – произвольная экспоненциальная пара.

Разобьем $\left[\frac{15958}{16825}, \frac{45869}{48270}\right)$ на промежутки J_i , $i = 1, 2, 3$, выбирая на каждом из них экспоненциальную пару (κ_i, λ_i) так, чтобы были выполнены условия $\kappa_i + \lambda_i - \frac{1195}{1351} + \frac{3365}{9457}(1 - \sigma) < 0$ и $\frac{|\kappa_i - \lambda_i| + 4}{5} \geq \sigma$ для всех $\sigma \in J_i$.

На промежутке $\left[\frac{39}{50}, \frac{15958}{16825}\right)$ достаточно последовательно воспользоваться оценками (36), (37), (38) (в обозначениях диссертации).

Наконец, на промежутке $\left[\frac{1}{2}, \frac{39}{50}\right)$ будем использовать плотностную теорему Хаксли (1).

Содержание второго параграфа второй главы составляют **доказательства теорем 2 и 3**.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим

$$S = \sum_{N-2N_1 < p_1^2 \leq N-N_1} \sum_{N-p_1^2-2N_2 < p_2^2 \leq N-p_1^2-N_2} \sum_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H} < n \leq \sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} \Lambda(n),$$

где $N_2 = N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon}$, $N_1 = N^{\frac{61}{80} + \varepsilon}$ и в качестве ε выбрано наибольшее из значений, которые получены из теоремы 1 и леммы 6.

При $T_1 = \frac{N_2 \ln^3 N}{H}$ воспользуемся для внутренней суммы леммой 1. С учетом теоремы 1 предполагаемый главный член оценивается как

$$\gg \frac{N_2 \sqrt{N_1}}{\sqrt{N} \ln^2 N} \cdot \frac{H}{\sqrt{N_2}} = \frac{H \sqrt{N_2} \sqrt{N_1}}{\sqrt{N} \ln^2 N}.$$

При оценке остатка

$$\sum_{N-2N_1 < p_1^2 \leq N-N_1} \sum_{N-p_1^2-2N_2 < p_2^2 \leq N-p_1^2-N_2} \left(\sum_{|\gamma| \leq T_1} \int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} x^{\rho-1} dx \right) \ll$$

$$\ll \sum_{N-2N_1 < n^2 \leq N-N_1} \sum_{N-n^2-2N_2 < k^2 \leq N-n^2-N_2} \int_{\sqrt{N-n^2-k^2-H}}^{\sqrt{N-n^2-k^2+H}} \left| \sum_{|\gamma| \leq T_1} x^{\rho-1} \right| dx$$

разобьем промежутки $[N_2/2; 2N_2)$ на непересекающиеся интервалы длины $2H$ (за исключением, быть может, последнего). Согласно лемме 32, в каждый такой интервал при различных парах (n, k) попадает по порядку величины не более $H\sqrt{\frac{N_1}{N}}$ значений $N - n^2 - k^2$.

Тогда оценка суммы вида

$$\sum_{N-2N_2 < p_1^2 \leq N-N_2} \sum_{N-p_1^2-2N_1 < p_2^2 \leq N-p_1^2-N_1} \left(\sum_{|\gamma| \leq T_1} \int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} x^{\rho-1} dx \right)$$

сводится к оценке интеграла

$$\int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \left| \sum_{|\gamma| \leq T_1} x^{\rho-1} \right| dx.$$

Для оценки интеграла в этом случае нам достаточно воспользоваться леммой 16 при $\alpha = \frac{1}{2}$ совместно с плотностной теоремой Хаксли (1).

Доказательство теоремы 3 производится похожим образом. Мы используем явную формулу, результат теоремы 2 для оценки снизу предполагаемого главного члена, а затем леммы 33, 16 и плотностную теорему Хаксли (1) для оценки остатка.¹²

Заключение

В диссертации исследована разрешимость некоторых диофантовых неравенств в простых числах. Доказано, что

¹²Результаты Теорем 2 и 3 были получены автором диссертации в 2019 году. Если использовать при доказательстве теоремы 2 плотностную теорему из [2] (опубликована в 2025 году), получим оценку $H > N^{\frac{17}{30} \cdot (\frac{31}{64} - \frac{1}{300}) + \varepsilon} = N^{0.2725 \dots + \varepsilon}$, аналогично, в теореме 3 получим $H > N^{\frac{289}{900} \cdot (\frac{31}{64} - \frac{1}{300}) + \varepsilon} = N^{0.1544 \dots + \varepsilon}$

- нелинейное диофантово неравенство $|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H$ разрешимо в простых числах p_1, p_2 при $H = N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon} = N^{0.481... + \varepsilon}$ для любого $N > N_0(\varepsilon)$;
- нелинейное диофантово неравенство $|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leq H$ разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 при $H = N^{\frac{7}{12} \cdot (\frac{31}{64} - \frac{1}{300}) + \varepsilon} = N^{0.2806... + \varepsilon}$ для любого $N > N_0(\varepsilon)$;
- нелинейное диофантово неравенство $|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \leq H$ разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3, p_4 при $H = N^{\frac{49}{144} \cdot (\frac{31}{64} - \frac{1}{300}) + \varepsilon} = N^{0.1636... + \varepsilon}$ для любого $N > N_0(\varepsilon)$.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в области аналитической теории чисел.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук С.А. Гриценко за постановку задач, постоянное внимание и полезные обсуждения. Также автор выражает благодарность заведующему кафедрой математических и компьютерных методов анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, профессору В.Н. Чубарикову и всем сотрудникам кафедры за внимание к работе.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Основные публикации в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

1. А.П. Науменко, О некоторых нелинейных диофантовых неравенствах с простыми числами// Математические заметки. – 2019. – Т. 105, вып. 6. – С. 943–948.

EDN FYDUKI. Объем 0,375 п.л.

Перевод: А.Р. Naumenko, On Some Nonlinear Diophantine Inequalities with Primes// Mathematical Notes. – 2019. – vol 105, no 5-6. – pp. 935–940.

EDN REIAFI. Объем 0,375 п.л.

Импакт-фактор 0,508 (SJR), 0,599 (РИНЦ).

2. А.П. Науменко, О приближении действительных чисел суммами квадратов простых чисел// Чебышевский сборник. – 2018. – Т. 19, вып. 2. – С. 172–182.

EDN VWMRKD. Импакт-фактор 0.302 (РИНЦ). Объем 0,688 п.л.

3. А.П. Науменко, О приближении действительных чисел суммами двух квадратов простых чисел// Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2019. – Вып. 5. – С. 51–55.

EDN KFNXHY. Объем 0,31 п.л.

А.Р. Naumenko, Approaching real numbers by sums of squares of two primes// Moscow University Mathematics Bulletin. 2019. – vol 74, no 5. – pp. 205–208.

EDN YFIGEK. Объем 0,25 п.л.

Импакт-фактор 0,284 (РИНЦ), 0,243 (SJR).