

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Антипов Виктор Алексеевич

**О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый
актив**

Специальность

1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Диссертация подготовлена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: **Кабанов Юрий Михайлович**
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Шапошников Станислав Валерьевич**
доктор физико-математических наук,
МГУ имени М.В. Ломоносова,
профессор кафедры математического анализа
механико-математического факультета

Якимив Арсен Любомирович
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник, Математический
институт им. В. А. Стеклова РАН

Рохлин Дмитрий Борисович
доктор физико-математических наук, доцент,
зав. каф. методов оптимизации и машинно-
го обучения Института математики, механики
и компьютерных наук, Южный федеральный
университет

Защита диссертации состоится 25 сентября 2026 г. в 17 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д.1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/>.

Автореферат разослан 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3,
кандидат физико-математических наук

Е.Д. Алферова

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

В работе рассматриваются модели страховой компании, инвестирующей свой капитал (или его часть) в рисковый актив. Основным предметом исследования является вероятность разорения как функция начального капитала компании. Особое внимание уделяется вопросу гладкости вероятности разорения и ее асимптотическому поведению при больших значениях начального капитала.

Первая модель резерва страховой компании была предложена в 1903 году шведским математиком и актуарием Ф. Лундбергом,¹ а позже изучена другим шведским математиком Х. Крамером.² В модели рассматривалась страховая компания, получающая со скоростью $c > 0$ страховые взносы и выплачивающая в случае наступления страховых случаев величины ξ_i , где $(\xi_i)_{i \geq 1}$ есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.) с функцией распределения F . Моменты наступления страховых требований подчиняются пуассоновскому процессу N_t интенсивности λ , независимому от страховых выплат. Динамика капитала компании задается процессом

$$X_t^u = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \quad t > 0,$$

где $u \geq 0$ есть начальный капитал компании. Основным предметом исследования в данной теории является вероятность, что капитал компании станет отрицательным (неположительным). Определим момент разорения компании $\tau^u = \inf\{t \geq 0 : X_t^u < 0\}$ и вероятность разорения $\Psi(u) = \mathbb{P}(\tau^u < \infty)$. С точки зрения теории случайных процессов, вероятность разорения есть вероятность выхода случайного процесса X_t^u из области $\mathbb{R}_+$ за конечное время. Используя мартингальный подход, нетрудно показать³ (см. гл. VII, п. 10), что вероят-

¹Lundberg F. Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen: Återförsäkring af kollektivrisker. / Lundberg Filip. — Uppsala, Sweden : Uppsala University, 1903. — с. 53.

²Cramér H. On the Mathematical Theory of Risk. — Stockholm, Sweden : Skandia Jubilee Volume, 1930. — (Skandias Jubileumsvolym). — Laid the rigorous mathematical foundations for Lundberg's collective risk theory.

³Ширяев А. Н. Вероятность-2: Суммы и последовательности случайных величин — стационарные, мартингалы, марковские цепи. — 4-е, переработанное и дополненное. — Москва : МЦНМО, 2007. — с. 416.

ность разорения удовлетворяет неравенству Лундберга

$$\Psi(u) \leq e^{-\gamma u}, \quad (1)$$

где γ является решением уравнения $\lambda(\mathbb{E}e^{\gamma\xi} - 1) = c\gamma$. В частности, в случае экспоненциально распределенных скачков известен точный вид вероятности разорения. Дополнительно, если потребовать непрерывность функции распределения F , нетрудно показать⁴ (см. гл. I), что она удовлетворяет интегродифференциальному уравнению (ИДУ)

$$c\Psi'(u) - \lambda\Psi(u) + \lambda \int_0^u \Psi(u-y)dF(y) = 0.$$

Важно отметить, что одним из основных свойств вероятности разорения является экспоненциальное убывание (1) при стремлении начального капитала к бесконечности. Оказывается, что характер поведения вероятности разорения при больших значениях капитала меняется качественным образом при добавлении в модель рискованных инвестиций.

В современном мире предположение об отсутствии инвестиций капитала страховых компаний является нереалистичным – компании держат часть своих резервов в таких инструментах, как фонды акций или облигаций. Данная инвестиционная активность позволяет покрывать расходы, выплачивать дивиденды акционерам и формировать резервы для будущих выплат по страховым случаям, но также приводит к увеличению риска дефолта компании. В одной из первых работ,⁵ рассматривающих модель с инвестициями, предполагалось, что страховая компания инвестирует весь свой капитал в рискованный актив, динамика цены которого задается геометрическим броуновским движением (ГБД) с параметрами сноса a и волатильности σ . Капитал страховой компании в данной модели задан процессом

$$X_t^u = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i + \int_0^t X_s^u (ads + \sigma dW_s), \quad t > 0, \quad (2)$$

⁴Grandell I. Aspects of Risk theory. — Berlin : Springer, 1990.

⁵Фролова А. Г. Некоторые математические модели теории риска // Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам в геометрии и анализе. Тезисы. — 1994. — с. 117–118. — неопубликованная работа.

где W_t есть стандартный винеровский процесс. Было показано, что асимптотическое поведение вероятности разорения существенным образом отличается от поведения в модели Крамера-Лундберга – вероятность разорения ведёт себя как степенная функция при стремлении начального капитала к бесконечности. Более строгий и полный анализ данной модели представлен в статье.⁶ Используя оценки Калашникова⁷ для линейных разностных уравнений с случайными коэффициентами, показано, что при $2a > \sigma^2$ вероятность разорения убывает не быстрее, чем степенная функция, а в случае большой волатильности ($2a < \sigma^2$) разорение происходит с вероятностью единица. Применение формулы Ито к вероятности разорения (в предположении достаточной гладкости) позволяет получить интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) (см. работы^{6,8})

$$\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \Psi''(u) + (au + c)\Psi'(u) - \lambda \Psi(u) + \lambda \int_0^u \Psi(u-y) dF(y) = 0.$$

Дифференцирование полученного интегро-дифференциального уравнения достаточное число раз позволяет свести ИДУ к дифференциальному уравнению (ДУ), для которого возможно применение асимптотической теории решений ДУ (см. книгу⁹) для исследования поведения вероятности разорения при больших значениях начального капитала. Так, например, в случае экспоненциально распределенных скачков найдена точная асимптотика – вероятность разорения убывает как степенная функция с показателем $\beta = 2a/\sigma^2 - 1$

$$\Psi(u) = Cu^{-\beta}(1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

Пограничный случай $2a = \sigma^2$ исследован в работе,¹⁰ где показано, что для данных параметров модели вероятность разорения также равна единице для любого начального капитала. В другой работе¹¹ был представлен подход, ос-

⁶Frolova A., Kabanov Y., Pergamenschikov S. In the insurance business risky investments are dangerous // Finance and Stochastics. — 2002. — т. 6, No 2. — с. 227–235.

⁷Kalashnikov V., Norberg R. Power tailed ruin probabilities in the presence of risky investments // Stochastic Processes and their Applications. — Netherlands, 2002. — т. 98, No 2. — с. 211–228.

⁸Paulsen J., Gjessing H. K. Ruin theory with stochastic return on investments // Advances in Applied Probability. — 1997. — т. 29, No 4. — с. 965–985.

⁹Fedoryuk M. V. Asymptotic Analysis: Linear Ordinary Differential Equations. — Berlin : Springer-Verlag, 1993. — с. 363.

¹⁰Pergamenschikov S., Zeitouni O. Ruin probability in the presence of risky investments // Stochastic Processes and their Applications. — Amsterdam, Netherlands, 2006. — т. 116. — с. 267–278.

¹¹Belkina T. Risky investment for insurers and sufficiency theorems for the survival probability // Markov

нованный на постановке краевой задачи для ИДУ и доказательстве верификационной теоремы, показывающей, что вероятность неразорения, в предположении гладкости как функции начального капитала, является решением поставленной краевой задачи. Результат о гладкости вероятности разорения был получен в дальнейшем в работах,^{12,13} где рассматривались скачки вверх (модель страхования жизни) и скачки в обе стороны (модель с стохастическими премиями) процесса, соответствующего страховой деятельности компании. Показано, что при выполнении условий регулярности плотности f скачков ξ

$$f', f'' \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad (3)$$

вероятность разорения является дважды непрерывно-дифференцируемой на $(0, \infty)$ функцией с ограниченными первой и второй производными. Численные исследования дифференциальных уравнений, возникающих в задачах разорения, представлены в работах.^{14,15} Существует и альтернативный подход, не использующий технику анализа решений ИДУ для исследования асимптотических свойств вероятности разорения и основанный на неявной теории восстановления Голди.¹⁶ Так, например, некоторые оценки вероятности разорения в моделях с дискретным временем были получены в работах.^{17,18}

Первая глава настоящей работы посвящена исследованию вероятности разорения в модели типа Крамера–Лундберга с рисковыми инвестициями (2) с дополнительным предположением, что страховая компания инвестирует долю κ своего капитала в рисковый актив. Поставлена краевая задача для ИДУ, описывающего вероятность неразорения, и показано, что решение поставлен-

Processes and Related Fields. — 2014. — т. 20, No 3. — с. 505–525.

¹²Kabanov Y., Pergamenschikov S. In the insurance business risky investments are dangerous: the case of negative risk sums // Finance and Stochastics. — Germany, 2016. — т. 20, No 2. — с. 355–379.

¹³Kabanov Y., Pukhlyakov N. Ruin probabilities with investments: smoothness, integro-differential and ordinary differential equations, asymptotic behaviour // Journal of Applied Probability. — United Kingdom, 2022. — т. 59, No 2. — с. 556–570.

¹⁴Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В. Сингулярная краевая задача для интегродифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями: анализ и численное решение // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2012. — т. 52, No 10. — с. 1812–1846.

¹⁵Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Славко Б. В. Платежеспособность страховой компании в дуальной модели риска с учётом инвестиций: анализ и численные исследования сингулярных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2019. — т. 59, No 11. — с. 1973–1997.

¹⁶Goldie C. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equation. // Ann. Appl. Probab. — 1991. — т. 1. — с. 126–166.

¹⁷Nyrhinen H. On the ruin probabilities in a general economic environment. // Stoch. Proc. Appl. — 1999. — т. 83. — с. 319–330.

¹⁸Nyrhinen H. Finite and infinite time ruin probabilities in a stochastic economic environment. // Stoch. Proc. Appl. — 2001. — т. 92. — с. 265–285.

ной задачи является гладкой и монотонной функцией, имеющей степенную асимптотику с показателем $\gamma - 1$, где $\gamma := 2((a - r)\kappa + r)/(\kappa^2\sigma^2)$. Следуя за рассуждениями из работы,¹¹ показано, что вероятность разорения является решением поставленной краевой задачи. Данный результат обобщает результаты, полученные в работах^{6,11} на случай произвольных размеров страховых выплат ξ и требует лишь предположений о непрерывности функции распределения F и ограниченности моментов $\mathbb{E}\xi^{\gamma-1} < \infty$. Кроме того, полученный результат не требует выполнения условий регулярности (3) плотности скачков. В конце главы приведено описание численных экспериментов, подтверждающих полученные теоретические результаты для случаев «легких» и «тяжелых» хвостов распределения.

Другой подход нахождения асимптотики решения ДУ основан на применении преобразования Лапласа и тауберовых теорем. В задачах разорения с инвестициями в рисковый актив, рассмотренных в работах^{6,12,13} и др., ДУ для вероятности разорения имеет на бесконечности иррегулярную особенность и такие классические методы асимптотического анализа, как метод Фробениуса, неприменимы. Взятие преобразования Лапласа позволяет убрать данную особенность и применить асимптотический анализ для функции изображения. Обратный переход к асимптотике вероятности разорения (функции оригиналу) осуществляется с помощью тауберовой теоремы. Так, например, с использованием данного подхода в работе¹⁹ проведен анализ асимптотического поведения вероятности разорения в модели типа Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив, цена которого моделируется ГБД.

Вторая глава данной работы посвящена изучению асимптотического поведения вероятности разорения в модели с инвестициями в рисковый актив, допускающей как положительные, так и отрицательные страховые выплаты с плотностями распределений, имеющими дробно-рациональное преобразование Лапласа. Данная модель обобщает модель из работы¹³ на более общий случай распределения страховых выплат. Основной результат заключается в том, что при $\beta \in (0, 1)$ вероятность разорения убывает как степенная функция с показателем β .

Развитие моделей страховой компании связано не только с рассмотрением

¹⁹Albrecher H., Constantinescu C., Thomann E. Asymptotic results for renewal risk models with risky investments // Stochastic Processes and their Applications. — 2012. — т. 122, No 11. — с. 3767–3789.

более общих процессов, отвечающих за страховую деятельность, но и исследованием более общих процессов цены актива, в который страховая компания инвестирует свой капитал. Так, например, в работе²⁰ и, далее, в работе²¹ была рассмотрена модель, где цена актива задана ГБД с параметрами, подчиняющимися марковскому процессу с конечным числом состояний. Стоимость капитала компании в данной модели задана процессом

$$X_t^{u,i} = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i + \int_0^t X_s^u (a_{\theta_s} ds + \sigma_{\theta_s} dW_s), \quad t > 0, \quad (4)$$

где марковский процесс θ_s принимает значения на конечном множестве $E := \{0, 1, \dots, K-1\}$ и $\theta_0 = i$. Данный подход позволяет описать различные режимы финансового рынка, на котором данный базовый актив торгуется (например, рынок, переходящий из состояния высокой волатильности в состояние низкой волатильности). В упомянутых выше работах основным инструментом исследования является неявная теория восстановления, позволяющая получить оценки для вероятности разорения при больших значениях начального капитала. Вероятность разорения здесь понимается как вероятность разорения при заданном начальном состоянии процесса $\theta_0 = i$. В работе²⁰ для случая двух состояний ($K = 2$) получены «неточные» оценки вероятности разорения

$$0 < \liminf_{u \rightarrow \infty} u^\beta \Psi_i(u) \leq \limsup_{u \rightarrow \infty} u^\beta \Psi_i(u) < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Другой подход основан на получении ИДУ (см. работу²²), описывающем вероятность разорения, и дальнейшем анализе асимптотических свойств решения. В частности, вывод ИДУ, понимаемого в классическом смысле и описывающего вероятность разорения, требует достаточной гладкости исследуемого функционала, что в данной работе предполагается данным.

Третья глава настоящей работы посвящена исследованию вопроса гладкости вероятности разорения в модели (4) типа Крамера–Лундберга с ин-

²⁰Ellanskaya A., Kabanov Y. On ruin probabilities with risky investments in a stock with stochastic volatility // *Extremes*. — 2021. — т. 24. — с. 687–697.

²¹Kabanov Y., Pergamenschikov S. On ruin probabilities with investments in a risky asset with a regime-switching price // *Finance and Stochastics*. — 2022. — т. 26. — с. 877–897.

²²Ramsden L., Papaioannou A. D. Asymptotic results for a Markov-modulated risk process with stochastic investment // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2017. — т. 313. — с. 38–53.

вестициями в рисковый актив и марковским процессом с конечным числом состояний, модулирующим параметры цены базового актива. Показано, что если плотность скачков составного пуассоновского процесса имеет непрерывные и интегрируемые производные вплоть до второго порядка, то есть $f', f'' \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то вероятность разорения является дважды непрерывно дифференцируемой функцией начального капитала. Наличие гладкости позволяет получить ИДУ второго порядка для вероятности разорения

$$\frac{1}{2}\sigma_i^2 u^2 \Psi_i''(u) + (a_i u + c) \Psi_i'(u) - \alpha \Psi_i(u) + \alpha \int_0^u \Psi_i(u-y) dF(y) + \sum_{j \in E} \lambda_{ij} \Psi_j(u) = 0,$$

где $i \in E$, α есть интенсивность пуассоновского процесса N_t , величина λ_{ij} задает интенсивность переключения процесса θ между состояниями i и j .

Дальнейшее изучение данной теории приводит к рассмотрению более общих моделей, где процесс капитала компании подчиняется обобщенному процессу Орнштейна–Уленбека

$$X_t^u = u + P_t + \int_0^t X_{s-}^u dR_s, \quad t > 0, \quad (5)$$

драйверами которого являются два независимых процесса Леви P_t и R_t (см. работы^{8,23}). В частности, процесс цены базового актива в данной постановке подчиняется геометрическому процессу Леви. В силу того, что гладкость вероятности разорения является нетривиальным результатом даже в случае классической модели типа Крамера–Лундберга, вероятность разорения может рассматриваться как решение ИДУ, понимаемое в вязкостном смысле. Так, например, в работе²⁴ рассматривалась модель Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив, заданный геометрическим процессом Леви. Капитал компании подчиняется процессу

$$X_t^u = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i + \int_0^t X_{s-}^u dR_s, \quad t > 0,$$

где R_s есть процесс Леви с параметрами сноса a , волатильности σ и мерой

²³Paulsen J. Risk theory in stochastic economic environment // Stochastic Processes and their Applications. — 1993. — т. 46. — с. 327–361.

²⁴Belkina T., Kabanov Y. Viscosity solutions of integro-differential equations for nonruin probabilities // Theory Probab. Appl. — 2016. — т. 60, No 4. — с. 671–679.

Леви Π , сосредоточенной на $(-1, \infty)$. Показано, что вероятность разорения удовлетворяет в вязкостном смысле ИДУ

$$\mathcal{L}\Psi(u) + \lambda \int_{[0,u]} \Psi(u-y) dF(y) + \int_{\mathbb{R}} [\Psi(u(1+y)) - \Psi(u) - \Psi'(u)uy] \Pi(dy) = 0,$$

где $\mathcal{L}\Psi(u) := \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \Psi''(u) + (au+c)\Psi'(u) - \lambda\Psi(u)$. Кроме того, в предположении

$$\int (|x|^2 \wedge |x|) \Pi(dx) < \infty \quad (6)$$

доказана теорема единственности, гарантирующая, что два непрерывных ограниченных вязкостных решения с совпадающими граничными условиями в 0 и ∞ совпадают всюду. Другие результаты для более общих моделей, использующие неявную теорию восстановления, представлены в работах.^{25,26} Большая часть существующих результатов в теории разорения посвящена исследованию асимптотического поведения вероятности разорения на бесконечном временном промежутке (см. также работу,²⁷ использующую неявную теорию восстановления). Несмотря на то, что с практической точки зрения исследование вероятности разорения с инвестициями в рисковый актив на конечном временном интервале имеет преобладающее значение, соответствующих исследований практически нет. В качестве исключения можно отметить работу,²⁸ в которой исследована краевая задача для ИДУ в частных производных. Предполагалось, что цена следует геометрическому броуновскому движению, а страховая деятельность компании подчиняется сумме составного пуассоновского процесса и винеровского процесса. Было показано, что задача допускает классическое решение, кроме единственной точки на границе. В работе²⁹ были предложены численные подходы для решения задачи в случае, когда процесс цены имеет скачковую компоненту, заданную

²⁵Eberlein E., Kabanov Y., Schmidt T. Ruin probabilities for a Sparre Andersen model with investments. // Stoch. Process. Appl. — 2022. — т. 144. — с. 72—84.

²⁶Kabanov Y., Promyslov P. Ruin probabilities for a Sparre Andersen model with investments: the case of annuity payments. // Stoch. Process. Appl. — 2023. — т. 27. — с. 887—902.

²⁷Kabanov Y., Pergamenschikov S. Ruin probabilities for a Lévy-driven generalised Ornstein–Uhlenbeck process // Finance and Stochastics. — 2020. — т. 24, No 1. — с. 39—69.

²⁸Hunting M. Existence of a classical solution of a parabolic PIDE associated with ruin probability : Working Paper / University of Bergen. — 2012.

²⁹Hunting M. A numerical approach to ruin probability in finite time for fitted models with investment : Working Paper / University of Bergen. — 2012.

составным пуассоновским процессом. В другой работе³⁰ рассматривалась более общая семимартингальная модель (5) Орнштейна–Уленбека, где процесс относительного изменения цены R_t есть семимартингал, а процесс P_t , отвечающий за страховую деятельность, задан процессом Леви. В работе показано, что в предположении интегрируемости хвостов меры Леви

$$\int_{|x|>1} |x|^\alpha \Pi_P(dx) < \infty$$

для некоторого $\alpha > 0$ и при выполнении некоторых условий ограниченности экспоненциальных функционалов процесса $\ln \mathcal{E}(R)_t$, где $\mathcal{E}(X)$ есть стохастическая экспонента процесса X , справедлива оценка для вероятности разорения

$$\mathbb{P}(\tau^u < T) \leq Cu^{-\alpha},$$

где $C > 0$ зависит от процесса R_t . Кроме того, при некоторых дополнительных предположениях доказана оптимальность полученной оценки.

Четвертая глава данной работы посвящена исследованию ИДУ в частных производных для вероятности разорения на конечном временном интервале для модели Орнштейна–Уленбека с драйверами, заданными процессами Леви. Важнейшим отличием рассматриваемой модели от большинства предшествующих является конечный временной горизонт $[0, T]$, на котором рассматривается деятельность компании. Капитал страховой компании на промежутке $[t, T]$, где $t \in [0, T)$, задается процессом

$$X_r^{t,u} = u + P_r - P_t + \int_{(t,r]} X_s^{t,u} dR_s, \quad r \in [t, T], \quad t < T.$$

Бизнес-процесс P_t , задающий страховую деятельность компании, и процесс относительного изменения цены рискованного актива R_s являются процессами Леви с заданными триплетами (a, σ^2, Π) и (a_P, σ_P^2, Π_P) . Момент разорения компании и вероятность разорения определим как $\tau^{t,u} := \inf\{r > t : X_r^{t,u} \leq 0\}$ и $\Psi(t, u) := \mathbb{P}(\tau^{t,u} < T)$. Последняя величина отражает вероятность разорения страховой компании до момента T , имеющей в момент времени t начальный капитал u . Показано, что вероятность разорения является непрерывной

³⁰Vostrikova L., Spielmann J. On the Ruin Problem with Investment When the Risky Asset Is a Semimartingale // Theory of Probability and Its Applications. — 2020. — т. 65, No 2. — с. 249–269..

функцией времени t и начального капитала u . Кроме того, получено ИДУ в частных производных на вероятность разорения

$$\Psi_t(t, u) + \mathcal{L}\Psi(t, u) = 0,$$

где $\mathcal{L}$ есть интегро-дифференциальный оператор. Полученное ИДУ в частных производных понимается в вязкостном смысле, что позволяет обойти вопрос о гладкости вероятности разорения. Используемый подход развивает дальше идеи статьи.²⁴ Важно отметить, что полученные результаты не требуют выполнения условия (6). Достаточно лишь выполнения классических условий интегрируемости

$$\int (|x|^2 \wedge 1) \Pi(dx) < \infty, \quad \int (|x|^2 \wedge 1) \Pi_P(dx) < \infty.$$

Доказана теорема единственности, утверждающая, что два непрерывных вязкостных решения совпадают, если они имеют одинаковое поведение на границе.

Цель работы. Исследование гладкости вероятности разорения и её асимптотического поведения при больших значениях начального капитала в модели типа Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив; асимптотический анализ вероятности разорения страховой компании в модели с инвестициями в рисковый актив и двусторонними скачками; исследование гладкости вероятности разорения страховой компании в модели с инвестициями в рисковый актив в случайной среде, вывод ИДУ для вероятности разорения; анализ непрерывности вероятности разорения в общей модели Орнштейна–Уленбека на конечном временном интервале, вывод ИДУ в частных производных для вероятности разорения в вязкостном смысле, исследование единственности вязкостного решения; численное моделирование полученных результатов для ряда моделей.

Научная новизна работы. Получены новые результаты в вопросах гладкости вероятности разорения и её асимптотического поведения при больших значениях капитала в различных моделях страховой компании, инвестирующей свой капитал в рисковый актив. Получены результаты численного моде-

лирования вероятности разорения для ряда моделей.

Методы исследования. В работе использованы методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, а также численные методы. В теоретической части основными инструментами были теория семимартингалов, асимптотическая теория (интегро-)дифференциальных уравнений, формула Ито, преобразование Лапласа и тауберовы теоремы, теория интегральных уравнений Вольтерры, а также теория вязкостных решений для параболических ИДУ в частных производных. Методы численного анализа используют теорию построения разностных схем для (интегро-)дифференциальных задач. Численное моделирование проведено при помощи языка Python.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории разорения с инвестициями, в том числе для задач оптимального управления, а также для получения практических результатов в области численного моделирования вероятности дефолта страховой компании.

Положения выносимые на защиту.

1. Теорема о существовании единственного классического решения краевой задачи для ИДУ, совпадающего с вероятностью неразорения страховой компании в модели типа Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив. Результат о степенной асимптотике вероятности разорения при больших значениях начального капитала.
2. Теорема об асимптотическом поведении вероятности разорения в модели с инвестициями в рисковый актив и двусторонними скачками.
3. Теорема о достаточном условии гладкости вероятности разорения в модели с инвестициями в рисковый актив в случайной среде. Вывод системы ИДУ для вероятностей разорения.
4. Теорема о существовании единственного вязкостного решения ИДУ в общей модели Орнштейна–Уленбека.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

- Совместный семинар Кафедры теории вероятностей МГУ им. М.В. Ломоносова и Фонда «Институт «Вега», Москва, 7 декабря 2022, «О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый актив».
- XXX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», 10-21 апреля 2023, «О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый актив».
- 16th Bachelier Colloquium 2024, Mathematical Finance and Stochastic Calculus, Métabief, France, 5-19 January 2024, “Ruin probabilities with investments in random environment: smoothness”.
- «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании», ЦЭМИ РАН, Москва, 12 марта 2024. «О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый актив».
- XXXII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», 11-25 апреля 2025, «О применении преобразования Лапласа для задачи разорения со случайными платежами и инвестициями в рисковый актив».
- «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании», ЦЭМИ РАН, Москва, 31 марта 2026. «Об интегро-дифференциальном уравнении, возникающем в задаче разорения страховой компании с инвестициями в рисковый актив».
- Международная научная конференция «Ломоносовские чтения». Подсекция «Новые вызовы экономики: цифровая трансформация, финансовые рынки и качество жизни». Раздел «Математические финансы», 3 апреля 2026. Доклад «Об интегро-дифференциальном уравнении, возникающем в задаче разорения с инвестициями в рисковый актив».
- Большой семинар кафедры теории вероятностей МГУ, 8 апреля 2026, «О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый актив».

Публикации. Все основные результаты по теме диссертации изложены в четырех статьях, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук. Список работ автора приведен в

конце автореферата и диссертации.

Личный вклад автора. Диссертантом совместно с научным руководителем проводился выбор темы, а также осуществлялось планирование всей работы. Профессору Ю.М. Кабанову принадлежит постановка задач и общий подход к их решению. Автору диссертации принадлежит доказательство теорем и лемм, а также проведение численного моделирования.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 77 страниц, включая 2 рисунка. Список литературы содержит 45 наименований

В работу вошли результаты, выполненные при поддержке гранта РФФИ 20-68-47030, рук. — проф. Д. Фантаццини.

Содержание работы

Первая глава посвящена исследованию модели страховой компании, инвестирующей долю κ своего капитала в рисковый актив, динамика цены которого подчиняется ГБД с параметрами a и σ . Страховая деятельность компании задана составным пуассоновским процессом с положительным сносом c и скачками вниз, имеющими функцию распределения F .

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с фильтрацией $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ заданы независимые винеровский процесс $W = (W_t)_{t \geq 0}$ и составной пуассоновский процесс $P = (P_t)_{t \geq 0}$ со сносом $c > 0$. Определим пуассоновскую случайную меру $p_P(dt, dx)$ процесса P с компенсатором $\Pi_P(dx)dt$, где $\Pi_P(\mathbb{R}_-) < \infty$ и $\Pi_P(\mathbb{R}_+) = 0$. Рассмотрим модель страховой компании, инвестирующей долю κ своего резерва в рисковый актив, цена которых описывается геометрическим броуновским движением

$$S_t = S_0 e^{(a - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

Оставшуюся долю капитала $1 - \kappa$ компания хранит на безрисковом счете с процентной ставкой r

$$B_t = B_0 e^{rt}.$$

Динамика резерва компании описывается процессом $X = X^u$ вида

$$X_t = u + \int_0^t X_s dR_s + P_t, \quad t \geq 0,$$

где

$$R_t = ((a - r)\kappa + r)t + \kappa\sigma W_t,$$

процесс P отражает непосредственно «страховую» деятельность компании, величина $u > 0$ задает начальный капитал компании. Процесс капитала X можно также представить в «дифференциальной» форме $dX_t = X_t dR_t + dP_t$, $X_0 = u$, где

$$dP_t = cdt + \int xp_P(dt, dx), \quad P_0 = 0.$$

В актуарной литературе процесс P обычно представляется в более наглядном виде как

$$P_t = ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i,$$

где $N_t := p_P([0, t] \times \mathbb{R})$ есть пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda = \Pi_P(\mathbb{R}_-)$, случайные величины $\xi_i > 0$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F(x) = \Pi_P((-x, 0])/\lambda$.

Положим $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t^u < 0\}$ (момент разорения), $\Psi(u) := \mathbb{P}(\tau < \infty)$ (вероятность разорения), $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ (вероятность неразорения).

Известно, что если вероятность неразорения является гладкой функцией начального капитала, то есть $\Phi \in C^2$, то, применяя стандартные рассуждения с формулой Ито, получаем, что Φ удовлетворяет ИДУ

$$\frac{1}{2}\kappa^2\sigma^2u^2\Phi''(u) + \tilde{a}u\Phi'(u) + c\Phi'(u) + \lambda \int_0^\infty (\Phi(u - y) - \Phi(u)) dF(y) = 0; \quad (7)$$

где $\tilde{a} := ((a - r)\kappa + r)$ (см., например, работу⁶). То же самое уравнение справедливо и для вероятности разорения Ψ . Достаточным условием на F , гарантирующим гладкость Φ , является существование плотности $f \in C^2((0, \infty))$ такой, что $f'' \in L^1(\mathbb{R}_+)$ (см. работу¹³). Сформулируем основной результат данной главы.

Теорема 1 Положим $\gamma := 2((a - r)\kappa + r)/(\kappa^2\sigma^2) > 1$ и предположим, что F непрерывна и $\mathbb{E}\xi_1^{\gamma-1} < \infty$. Тогда существует $G \in C([0, \infty)) \cap C^2((0, \infty))$, являющаяся единственным решением ИДУ

$$\frac{1}{2}\kappa^2\sigma^2u^2G''(u) + \tilde{a}uG'(u) + cG'(u) + \lambda \int_0^\infty (G(u-y) - G(u)) dF(y) = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями $G(0+) = \Phi(0+)$ и $G(\infty) = 1$. Данное решение совпадает с вероятностью неразорения Φ . Более того, существует $C_\infty > 0$ такая, что $\Psi(u) \sim C_\infty u^{-\gamma+1}$ при $u \rightarrow \infty$.

Изложим идею доказательства данного результата. Первый шаг заключается в сведении рассматриваемого ИДУ к интегральному уравнению (ИУ). Действительно, вводя новую функцию $g = G'$, интегрируя по частям и применяя интегрирующий множитель к заданному ИДУ, получаем уравнения для функции g

$$(u^\gamma e^{-\alpha/u} g(u))' = u^{\gamma-2} e^{-\alpha/u} (\mu G(0+) \bar{F}(u) + Bg(u)). \quad (9)$$

с граничным условием в нуле $g(0) = \lambda G(0+)/c$, где $\alpha := 2c/\kappa^2\sigma^2$, $\mu := 2\lambda/\kappa^2\sigma^2$, $Bg(u) := \mu \int_0^u g(y) \bar{F}(u-y) dy$. Далее, используя теорему Банаха о неподвижной точке в пространстве непрерывных функций, находим классическое решение уравнения $g_* \geq 0$ на интервале $[0, u_0]$. Наконец, используя полученное решение как начальное значение для уравнения Вольтерра второго рода на $[u_0, \infty)$ для функции $\tilde{g}(u) = u^\gamma g(u)$, находим классическое решение данного уравнения на $[u_0, \infty)$. Таким образом, получено полное решение $\hat{g}$, совпадающее с g_* на $[0, u_0]$ и $u^{-\gamma} \tilde{g}(u)$ на $[u_0, \infty)$. Данное решение однозначно определяется начальным значением $\hat{g}(0) = g^*(0) = \lambda G(0+)/c$. Кроме того, решение $\hat{g}$, и, следовательно, G , является непрерывно дифференцируемым, если функция распределения F непрерывна. В случае, если $\mathbb{E}\xi^\varepsilon < \infty$ для некоторого $\varepsilon \in (0, \gamma-1)$, решение G является ограниченным при $u \rightarrow \infty$, то есть $G(\infty) < \infty$. Кроме того, если $\mathbb{E}\xi^{\gamma-1} < \infty$, то решение G имеет степенную асимптотику порядка $\gamma-1$, то есть $G(u) \sim 1 - C_\infty u^{-\gamma+1}$ при $u \rightarrow \infty$. Краевое условие на бесконечности $G(\infty) = 1$ однозначным образом определяет

значение $G(0+)$. Действительно, $G(0+)$ выбираем таким образом, чтобы

$$G(0+) + \int_0^\infty \hat{g}(s; G(0+)) ds = 1.$$

Таким образом, для рассматриваемого ИДУ второго порядка требуется лишь одно граничное условие на бесконечности. Последний шаг доказательства заключается в применении формулы Ито и отождествлении полученного решения с вероятностью разорения (следуя рассуждениям теоремы 3.1 из работы¹¹).

Во второй главе рассматривается более общая модель страховой компании, инвестирующей свой капитал в рисковый актив, цена которого подчиняется геометрическому броуновскому движению с параметрами a и σ . Процесс, отвечающий за страховую деятельность компании, имеет как положительные, так и отрицательные скачки. Плотности скачков процесса являются решениями однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с фильтрацией $F = (F_t)_{t \geq 0}$ заданы независимые винеровский процесс $W = (W_t)_{t \geq 0}$ и составной пуассоновский процесс $P = (P_t)_{t \geq 0}$ со сносом $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Определим пуассоновскую случайную меру $p_P(dt, dx)$ процесса P с компенсатором $\Pi_P(dx)dt$, где $\Pi_P(\mathbb{R}) < \infty$. Будем далее предполагать, что $\Pi_P(\mathbb{R}_+) > 0$ и $\Pi_P(\mathbb{R}_-) > 0$.

Следуя работе,¹³ рассмотрим модель страховой компании, инвестирующей свой резерв в рисковые активы, цена которых описывается геометрическим броуновским движением

$$S_t = S_0 e^{(a - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

Динамика резерва компании описывается процессом $X = X^u$ вида

$$X_t = u + \int_0^t X_s dR_s + P_t, \quad t \geq 0,$$

где $R_t = at + \sigma W_t$ является процессом относительного изменения цены рискового актива, процесс P отражает непосредственно «страховую» деятельность компании, величина $u > 0$ задает начальный капитал компании. В нашем

случае будет более удобно представить процесс P в виде

$$P_t = ct + \sum_{i=1}^{N_t^2} \xi_i^2 - \sum_{i=1}^{N_t^1} \xi_i^1,$$

где N^1, N^2 суть пуассоновские процессы с интенсивностями $\lambda_1 = \Pi_P(\mathbb{R}_-)$ и $\lambda_2 = \Pi_P(\mathbb{R}_+)$ соответственно, случайные величины ξ_i^1, ξ_i^2 положительны и имеют распределения $F_1(x) := \Pi_P((-x, 0])/\lambda_1$ и $F_2(x) := \Pi_P((0, x])/\lambda_2$ при $x > 0$.

Следуя статье,¹⁹ будем считать, что случайные величины ξ_i^1 и ξ_i^2 являются абсолютно непрерывными и их плотности распределения f_1 и f_2 удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\mathcal{P}_1 \left(\frac{d}{dx} \right) f_1(x) = 0, \quad \mathcal{P}_2 \left(\frac{d}{dx} \right) f_2(x) = 0, \quad (10)$$

где формальные дифференциальные операторы $\mathcal{P}_i, i = 1, 2$ заданы в виде

$$\mathcal{P}_i \left(\frac{d}{dx} \right) = \sum_{j=0}^n \alpha_i^j \frac{d^j}{dx^j}, \quad \alpha_i^j \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i^0 \neq 0.$$

Также определим соответствующие им формальные сопряженные операторы $\mathcal{P}_i^*, i = 1, 2$,

$$\mathcal{P}_i^* \left(\frac{d}{dx} \right) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_i^j \frac{d^j}{dx^j}.$$

Обозначим $\widehat{f}$ одностороннее преобразование Лапласа функции f , заданное в виде

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx.$$

Иногда будет удобнее использовать одностороннее преобразование Лапласа-Стилтьеса

$$\widehat{U}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dU(x),$$

где $U(dx)$ есть мера, заданная на $\mathbb{R}_+$.

Отметим, что плотности распределений $f_1(x)$ и $f_2(x)$, удовлетворяющие соотношениям (10), имеют преобразования Лапласа, представимые в виде рациональных дробей $p(s)/q(s)$, где $p(s)$ и $q(s)$ являются многочленами ко-

нечных степеней (см. работу,³¹ гл. I). Данный класс распределений содержит распределения с плотностями вида

$$f(x) = \sum_{j=0}^{q_1} c_j x^j e^{\eta_j x} + \sum_{j=0}^{q_2} d_j x^j \cos(a_j x) e^{\delta_j x} + \sum_{j=0}^{q_3} e_j x^j \sin(b_j x) e^{\varepsilon_j x}.$$

Введем стандартные обозначения: $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t'' < 0\}$ (момент разорения), $\Psi(u) := \mathbb{P}(\tau < \infty)$ (вероятность разорения). Основной результат главы об асимптотическом поведении вероятности разорения $\Psi(u)$ сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2 *Положим $\beta = 2a/\sigma^2 - 1$, где $\beta \in (0, 1)$. Пусть плотности распределений $f_i, i = 1, 2$, удовлетворяют соотношениям (10) и существует $\beta' \in (0, \beta)$, что $\mathbb{E}(\xi_1^1)^{\beta'} < 1$. Тогда $\Psi(u) \sim Cu^{-\beta}$, $u \rightarrow \infty$ для некоторой $C > 0$.*

Изложим идею доказательства данного результата. Согласно утверждению 6.1 из работы,¹³ вероятность разорения Ψ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\mathcal{L}(\Psi)(u) + \mathcal{I}(\Psi)(u) = 0, \quad (11)$$

где

$$\mathcal{L}(\Psi)(u) = \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \Psi''(u) + (au + c)\Psi'(u) - (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi(u),$$

$$\mathcal{I}(\Psi)(u) = \int \Psi(u+y) \Pi_P(dy).$$

Интегральный оператор представим в виде

$$\mathcal{I}(\Psi)(u) = \lambda_1 \mathcal{I}_1(\Psi)(u) + \lambda_2 \mathcal{I}_2(\Psi)(u) = \lambda_1 \int \Psi(u-y) f_1(y) dy + \lambda_2 \int \Psi(u+y) f_2(y) dy.$$

Будем также считать, что для некоторого $\beta' \in (0, \beta \wedge 1)$ верно $\mathbb{E}(\xi_1^1)^{\beta'} < 1$. Тогда для вероятности разорения выполняется условие регулярности $\Psi(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$ (см. лемму 2.1 в работе¹³). Кроме того, будем считать,

³¹ Asmussen S., Albrecher H. Ruin Probabilities. — 2nd ed. — Singapore : World Scientific, 2010. — (Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability; vol. 14). — с. 620.

что вероятность разорения $\Psi \in C^{(n)}((0, \infty))$. Применим оператор

$$\mathcal{T} := \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2^* = \sum_{j,k=0}^n (-1)^k \alpha_1^j \alpha_2^k \frac{d^{j+k}}{dx^{j+k}}$$

к ИДУ (11). Получим ДУ порядка $2n + 2$ на $\Psi(u)$

$$q_{2n+2}(u)\Psi^{(2n+2)}(u) + q_{2n+1}(u)\Psi^{(2n+1)}(u) + \dots + q_1(u)\Psi'(u) = 0, \quad (12)$$

где $q_i(u)$ есть квадратные трехчлены. Точка $u = \infty$ является иррегулярной особой точкой уравнения (12) и метод Фробениуса неприменим. Положим $G = \Psi'$ и применим преобразование Лапласа к (12):

$$p_{2n+1}(s)\widehat{G}''(s) + l_{2n+1}(s)\widehat{G}'(s) + r_{2n+1}(s)\widehat{G}(s) = v_{2n}(s), \quad (13)$$

Применим метод Фробениуса к (13) при $s \rightarrow 0$. Далее, применяя туберову теорему, получим асимптотику $\Psi(u)$ при $u \rightarrow \infty$.

Третья глава посвящена исследованию вероятности разорения в модели страховой компании, инвестирующей свой капитал в рисковый актив, динамика цены которого задана геометрическим броуновским движением с параметрами, модулируемыми марковским процессом с конечным числом состояний.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ заданы независимые процессы W , P , и θ^i , задающие фильтрацию F :

1. Стандартный винеровский процесс $W = (W_t)$, где $W_0 = 0$.
2. Составной пуассоновский процесс $P = (P_t)$ со сносом:

$$P_t = ct + \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$$

где c является константой, $N = (N_t)$ есть непрерывный справа пуассоновский процес с интенсивностью $\alpha > 0$, и (ξ_k) являются н.о.р.с.в. с функцией распределения $F_\xi = F_\xi(dx)$.

3. Кусочно-постоянный непрерывный справа марковский процесс $\theta^i = (\theta_t^i)$ со значениями в множестве $E := \{0, 1, \dots, K-1\}$, начальным значением $\theta_0^i = i$, и матрицей интенсивности (λ_{jk}) . Также будем предполагать, что все состоя-

ния процесса являются сообщающимися.

Обозначим D_0 пространство траекторий процессов θ^i , символом Z будем обозначать элемент пространства D_0 . Заметим, что D_0 можно рассматривать как подпространство пространства Скорохода D .

Напомним, что $\lambda_{jj} = -\sum_{k \neq j} \lambda_{jk}$ и $\lambda_j := -\lambda_{jj} > 0$ для каждого j . Обозначим τ_n^i , $n \geq 1$ моменты скачков процесса θ^i и положим $\tau_0^i = 0$. Рассмотрим марковскую цепь $\vartheta_n^i := \theta_{\tau_n^i}^i$ с переходными вероятностями $p_{kl} = \lambda_{kl}/\lambda_k$, $k \neq l$, и $p_{kk} = 0$. Заметим, что условное распределение промежутка между скачками $\tau_{k+1}^i - \tau_k^i$ при заданном значении $\vartheta_k^i = j$ является экспоненциальным с параметром λ_j . Определим случайную меру $p^i := \sum_n e_{(\tau_n^i, \vartheta_n^i)}$, где e_x задает единичную массу в точке x . Данную меру можно также определить с помощью считающего процесса

$$p^i([0, t], k) := \sum_{\tau_n^i \leq t} \mathbb{I}_{\{\vartheta_n^i = k\}}, \quad k \in E.$$

Для упрощения формул опустим индекс i там, где это возможно, и будем использовать далее стандартные обозначения процессов из теории семимартингалов, где под процессом $L = (L_t)$ будем понимать детерминированный процесс $L_t := t$. Тогда процесс S может быть представлен как решение стохастического уравнения

$$S = 1 + S \cdot (a_\theta \cdot L + \sigma_\theta \cdot W),$$

где $a_k \in \mathbb{R}$, $\sigma_k > 0$, $k = 0, \dots, K-1$. Используя традиционную форму записи исчисления Ито, данный процесс можно записать в виде решения уравнения

$$dS_t = S_t(a_{\theta_t} dt + \sigma_{\theta_t} dW_t), \quad S_0 = 1.$$

Положим $\kappa_k := a_k - (1/2)\sigma_k^2$. Решение данного уравнения может быть представлено в виде $S = \mathcal{E}(R)$, где $\mathcal{E}$ есть стохастическая экспонента и $R := a_\theta \cdot L + \sigma_\theta \cdot W$ есть процесс относительной цены. В более явной форме можно записать $S = e^V$, где

$$V := \kappa_\theta \cdot L + \sigma_\theta \cdot W$$

есть процесс лог-цены актива.

Процесс капитала $X = X^{u,i}$ определим как

$$X = u + X \cdot R + P, \quad (14)$$

где $u > 0$. С точки зрения актуарной теории, данный процесс можно интерпретировать как резерв страховой компании, полностью реинвестируемый в рисковй актив, цена которого задается геометрическим броуновским движением S^i , модулируемым марковским процессом θ^i .

Определим $\tau^{u,i} := \inf\{t > 0: X_t^{u,i} \leq 0\}$ (момент разорения, соответствующий начальному капиталу u и начальному состоянию i), $\Psi_i(u) := \mathbb{P}(\tau^{u,i} < \infty)$ (вероятность разорения) и $\Phi_i(u) := 1 - \Psi_i(u)$ (вероятность неразорения).

Основной результат заключается в достаточном условии гладкости вероятности неразорения как функции начального капитала.

Теорема 3 Пусть случайная величина $\xi < 0$ имеет дважды непрерывно дифференцируемую на $(0, \infty)$ плотность распределения f , такую, что $f', f'' \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Тогда функции $\Phi_i(u)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми при $u > 0$.

Изложим идею доказательства данного результата. Пусть $G(u) := \mathbb{E}g(u + W_1)$, где g есть ограниченная борелевская функция. Заметим, что функция G является гладкой. Действительно, запишем G в терминах распределения случайной величины W_1 ,

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}} g(y) \varphi_{0,1}(y - u) dy, \quad \varphi_{0,t}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad t > 0.$$

Так как производная функции $\varphi_{0,1}$ есть полином, домноженный на саму функцию $\varphi_{0,1}$, дифференцируя достаточное число раз под знаком интеграла, имеем $G \in C^\infty$.

Рассмотрим теперь функцию $G(u) := \mathbb{E}g(u + W_\varsigma + \zeta)$, где винеровский процесс W и случайные величины $\varsigma > 0$ и ζ с плотностями распределений f_ς и f_ζ независимы. Тогда

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[g(z + W_\varsigma) \mathbb{I}_{\{\varsigma \leq t\}}] f_\zeta(z - u) dz + \int_2^\infty \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[g(y + \zeta)] \varphi_{0,t}(y - u) f_\varsigma(t) dy dt.$$

Второй интеграл в правой части соотношения принадлежит к классу $C^\infty((0, \infty))$

в силу оценок $\sup_x |(\partial^n/\partial t^n)\varphi_{0,t}(x)| \leq C_n t^{3/2}$ при $t \in [2, \infty)$ для каждого $n \geq 1$ и некоторых констант C_n . Гладкость первого интеграла гарантируется гладкостью f_ξ и интегрируемостью ее производных.

Первый шаг доказательства заключается в построении интегрального представления для вероятности разорения, используя строго марковское свойство для процесса $(X^{u,i}, \theta^i)$. Дальнейшие рассуждения связаны с получением необходимых оценок на рост производных плотности скачков.

Кроме того, получена система ИДУ для вероятностей неразорения $\Phi_i(u)$

$$\frac{1}{2}\sigma_i^2 u^2 \Phi_i''(u) + (a_i u + c)\Phi_i'(u) + \mathcal{I}\Phi_i(u) + \sum_{j \in E} \lambda_{ij} \Phi_j(u), \quad i \in E, \quad (15)$$

где

$$\mathcal{I}\Phi_i(u) = \alpha \int (\Phi_i(u+x) - \Phi_i(u))F_\xi(dx) = \alpha \int \Phi_i(u+x)F_\xi(dx) - \alpha\Phi_i(u).$$

Четвертая глава посвящена исследованию вероятности разорения на конечном временном интервале для общей модели Орнштейна-Уленбека. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_r)_{r \geq 0}, \mathbb{P})$ заданы два независимых процесса Леви R и P с триплетами (a, σ^2, Π) и (a_P, σ_P^2, Π_P) , допускающие, соответственно, представления

$$R_t = at + \sigma W_t + xI_{\{|x| \leq 1\}} * (\mu - \nu)_t + xI_{\{|x| > 1\}} * \mu_t \quad (16)$$

и

$$P_t = a_P t + \sigma_P W_t^P + xI_{\{|x| \leq 1\}} * (\mu^P - \nu^P)_t + xI_{\{|x| > 1\}} * \mu_t^P, \quad (17)$$

где μ и μ^P — меры скачков, $\nu(dt, dx) = \Pi(dx)dt$ и $\nu^P(dt, dx) = \Pi_P(dx)dt$, W и W^P — винеровские процессы. Обозначим через R^d и P^d чисто разрывные мартингальные компоненты R и P , то есть процессы

$$R^d := xI_{\{|x| \leq 1\}} * (\mu - \nu), \quad P^d := xI_{\{|x| \leq 1\}} * (\mu^P - \nu^P).$$

Рассмотрим процесс $X = X^{t,u}$, определённый на интервале $[t, \infty)$,

$$X_r^{t,u} = u + \int_{(t,r]} X_{s-}^{t,u} dR_s + P_r - P_t. \quad (18)$$

В традиционной дифференциальной форме процесс можно записать как

$$dX_r^{t,u} = X_{r-}^{t,u} dR_r + dP_r, \quad X_t^{t,u} = u. \quad (19)$$

Будем считать, что $\Pi((\infty, -1]) = 0$, то есть стохастическая экспонента $S_t := \mathcal{E}(R)$ строго положительна (п.н.).

Определим при $u > 0$ функцию $\Psi(t, u) = \Psi(t, u, T) = \mathbb{P}[\tau^{t,u} < T]$ — вероятность выхода $X^{t,u}$ из $(0, \infty)$ до момента T . В актуарной терминологии $\Psi(0, u)$ есть вероятность разорения на временном интервале $[0, T]$ страховой компании, начинающей деятельность в момент $t = 0$ с начальным капиталом u . В случае $T = \infty$ приходим к определению вероятности разорения $\Psi(0, u; \infty)$ на бесконечном интервале.

Определим следующие интегральные и дифференциальные операторы. Пусть $\mathcal{L} := \mathcal{L}_R^d + \mathcal{L}_P^i + \mathcal{L}_R^d + \mathcal{L}_P^i$, где

$$\mathcal{L}_R^d \Psi(t, u) := \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 \Psi_{uu}(t, u) + au \Psi_u(t, u), \quad (20)$$

$$\mathcal{L}_R^i \Psi(t, u) := \int \left(\Psi(t, u(1+z)) - \Psi(t, u) - \Psi_u(t, u) u z I_{\{|z| \leq 1\}} \right) \Pi(dz), \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_P^d \Psi(t, u) := \frac{1}{2} \sigma_P^2 \Psi_{uu}(t, u) + a_P \Psi_u(t, u), \quad (22)$$

$$\mathcal{L}_P^i \Psi(t, u) := \int \left(\Psi(t, u+z) - \Psi(t, u) - \Psi_u(t, u) z I_{\{|z| \leq 1\}} \right) \Pi_P(dz). \quad (23)$$

Обозначим через $C_b^{1,2}(t, u)$ множество ограниченных непрерывных функций $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемых по временной переменной и дважды непрерывно дифференцируемых по фазовой переменной в некоторой окрестности точки $(t, u) \in (0, T) \times (0, \infty)$ и равных нулю для $u \in (-\infty, 0]$. Отметим, что для $f \in C_b^{1,2}(t, u)$ значения $\mathcal{L}_R f(t, u)$ и $\mathcal{L}_P f(t, u)$ определены корректно.

Функция $\Psi : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ называется *вязкостным суперрешением*, если для каждой точки $(t, u) \in (0, T) \times (0, \infty)$ и каждой функции $f \in C_b^{1,2}(t, u)$ такой, что $f(t, u) = \Psi(t, u)$ и $f \leq \Psi$, выполняется неравенство

$$f_t(t, u) + \mathcal{L}f(t, u) \leq 0.$$

Функция $\Psi : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ называется *вязкостным субрешением*, если

для каждой точки $(t, u) \in (0, T) \times (0, \infty)$ и каждой функции $f \in C_b^{1,2}(t, u)$ такой, что $f(t, u) = \Psi(t, u)$ и $f \geq \Psi$, выполняется неравенство

$$f_t(t, u) + \mathcal{L}f(t, u) \geq 0.$$

Функция $\Psi : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ является *вязкостным решением*, если Ψ одновременно является вязкостным супер- и субрешением.

Наконец, функция $\Psi \in C_b^{1,2}([0, T] \times [0, \infty])$ называется *классическим суперрешением*, если неравенство $(\partial/\partial t + \mathcal{L})\Psi \leq 0$ выполняется на $(0, T) \times (0, \infty)$.

Согласно нашим определениям, вероятность разорения $\Psi(t, u) = 1$ для $u \leq 0$, $t < T$. Однако, может оказаться, что $\Psi(t, 0+) < 1$.

Первый результат данной главы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 4 *Функция $\Psi(t, u)$ на $[0, T] \times (0, \infty)$ является вязкостным решением интегро-дифференциального уравнения в частных производных*

$$\Psi_t(t, u) + \mathcal{L}\Psi(t, u) = 0. \quad (24)$$

Дальнейший анализ посвящен исследованию единственности вязкостного решения поставленной задачи. Первый этап состоит в введении понятия суб- и суперджетов, позволяющих равномерно приблизить произвольную непрерывную функцию достаточно гладкой тестовой функцией.

Пусть f и g — функции, определённые в окрестности нуля $\mathbb{R}^2$. Обозначая через (h_1, h_2) произвольную точку из $\mathbb{R}^2$, введем следующее обозначение:

$$f(\cdot) \lesssim g(\cdot),$$

если $f(h_1, h_2) \leq g(h_1, h_2) + o(|h_1| + |h_2|^2)$ при $|h| \rightarrow 0$. Аналогичным образом определим

$$f(\cdot) \gtrsim g(\cdot)$$

и, соответственно, $f(\cdot) \approx g(\cdot)$.

Для $(b, p, A) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим функцию

$$Q_{b,p,A}(t, x) := bt + px + (1/2)Ax^2, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

линейную по t и квадратичную по x . Определим параболические *супер-* и

субджеты произвольной функции v в точке $(t, x) \in K := (0, T) \times (0, \infty)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+v(t, x) &:= \{(b, p, A) \in \mathbb{R}^3 : v((t, x) + \cdot) \lesssim v(t, x) + Q_{b,p,A}(\cdot)\}, \\ \mathcal{P}^-v(t, x) &:= \{(b, p, A) \in \mathbb{R}^3 : v((t, x) + \cdot) \gtrsim v(t, x) + Q_{b,p,A}(\cdot)\}.\end{aligned}$$

Оказывается, что для $v \in C(K)$ и любого элемента $(b, p, A) \in \mathcal{P}^+v(t, x)$, где $(t, x) \in K$, существует тестовая функция f , мажорирующая v на K и равномерно близкая к v , имеющая в точке (t, x) то же значение, что и v , принадлежащая $C^{1,2}$ в окрестности (t, x) и имеющая в этой точке первую производную по t , равную b , и первую и вторую производные по x , равные, соответственно, p и A . Более того, $f = v$ вне любой сколь угодно малой окрестности (t, x) .

Второй этап заключается в использовании метода удвоения переменных и применении леммы Ишии, позволяющей удобным образом выбрать тестовые функции.

Лемма 1 (Ишии) Пусть O — открытое подмножество $\mathbb{R}_+$, v и $\tilde{v}$ — две непрерывные функции на $(0, T) \times O$. Пусть $\Delta_n(t, x, y) := v(t, x) - \tilde{v}(t, y) - \frac{1}{2}n|x - y|^2$, где параметр $n > 0$. Предположим, что функция Δ_n достигает максимума в точке $(t_n, x_n, y_n) \in (0, T) \times O \times O$. Тогда существуют вещественные числа b_n , A_n и $\tilde{A}_n$ такие, что

$$(b_n, n(x_n - y_n), A_n) \in \bar{\mathcal{P}}^+v(t_n, x_n), \quad (b_n, n(x_n - y_n), \tilde{A}_n) \in \bar{\mathcal{P}}^-\tilde{v}(t_n, y_n),$$

и, для всех $x, y \in O$,

$$A_n x^2 - \tilde{A}_n y^2 \leq 3n(x - y)^2. \quad (25)$$

В частности, $A_n \leq \tilde{A}_n$.

Запись $(b_n, n(x_n - y_n), A_n) \in \bar{\mathcal{P}}^+v(t_n, x_n)$ означает, что существуют последовательности (t_{nk}, x_{kn}) и $(b_{nk}, p_{nk}, A_{nk}) \in \mathcal{P}^+v(t_{n,k}, x_{nk})$, $k \geq 1$, такие, что

$$(t_{nk}, x_{kn}) \rightarrow (t_n, x_n), \quad (b_{nk}, p_{nk}, A_{nk}) \rightarrow (b_n, n(x_n - y_n), A_n), \quad k \rightarrow \infty.$$

Аналогичный смысл имеет запись $(b_n, n(x_n - y_n), \tilde{A}_n) \in \bar{\mathcal{P}}^-\tilde{v}(t_n, y_n)$.

Применение данной леммы позволяет доказать следующий результат.

Теорема 5 Пусть Ψ и $\tilde{\Psi}$ — две функции на $\bar{K} := [0, T] \times \bar{\mathbb{R}}_+$ со значениями в $[0, 1]$, непрерывные всюду, кроме точек (T, ∞) и $(0, T)$. Предположим, что Ψ и $\tilde{\Psi}$ являются вязкостными решениями уравнения (24) на $\bar{K}$, такими что

$$\Psi(t, 0) = \tilde{\Psi}(t, 0), \quad \Psi(t, \infty) = \tilde{\Psi}(t, \infty), \quad \Psi(T, u) = \tilde{\Psi}(T, u).$$

Тогда $\Psi = \tilde{\Psi}$.

Наконец, справедлив также следующий результат о непрерывности вероятности разорения.

Теорема 6 Вероятность неразорения $\Phi(t, u)$ непрерывна на $[0, T) \times (0, \infty)$.

Заключение. В работе изучены вопросы гладкости вероятности разорения страховой компании и ее асимптотического поведение при больших значениях начального капитала. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. В модели типа Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив, цена которого задана ГБД, исследована вероятность разорения как функция начального капитала. В предположении непрерывности функции распределения F страховых выплат доказана гладкость вероятности разорения. Показано, что при $\mathbb{E}\xi^{\gamma-1} < \infty$ вероятность разорения является решением ИДУ и имеет степенную асимптотику с показателем $\gamma - 1$. Приведены численные эксперименты, подтверждающие полученные теоретические результаты для случаев скачков с «тяжелыми» и «легкими» хвостами распределений.
2. Исследована модель с инвестициями в рисковый актив, динамика цены которого задана ГБД, и двусторонними скачками, плотность которых имеет дробно-рациональное преобразование Лапласа. Доказано, что, в предположении достаточной гладкости, вероятность разорения убывает степенным образом с параметром β при $\beta \in (0, 1)$.
3. В модели с инвестициями в рисковый актив, динамика цены которого модулируется марковским процессом с конечным числом состояний, получены достаточные условия гладкости вероятности разорения. Показано, что если плотность скачков имеет непрерывные и интегрируемые

производные вплоть до второго порядка, то есть $f', f'' \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то вероятность разорения является дважды непрерывно дифференцируемой функцией начального капитала. Кроме того, получена система ИДУ, описывающая вероятности разорения для каждого начального состояния марковского процесса.

4. Исследована общая модели Орнштейна–Уленбека с инвестициями в рисковый актив на конечном временном интервале. Показано, что вероятность разорения является непрерывной функцией начального капитала. Кроме того, получено ИДУ в частных производных для вероятности разорения и доказано, что вероятность разорения является единственным решением уравнения в смысле вязкости.

Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы диссертации.

1. Рассмотреть подход, используемый в **первой главе**, для модели разорения с инвестициями в рисковый актив в случайной среде, предложенной в **третьей главе**. Доказать гладкость вероятности разорения как функции начального капитала с ослабленными требованиями на плотности скачков. Доказать «точную» степенную асимптотику для вероятности разорения в данной модели.
2. Используя подход, предложенный в **первой главе**, исследовать гладкость и асимптотическое поведение вероятности разорения в модели с инвестициями в рисковый актив и двусторонними скачками, рассмотренной в **второй главе**.

Благодарность. Автор благодарит научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Юрия Михайловича Кабанова, за постановки и обсуждение задач, а также за постоянное внимание к работе. Кроме того, автор благодарит весь коллектив кафедры теории вероятностей, и, в особенности, заведующего кафедрой теории вероятностей, доктора физико-математических наук, академика РАН Альберта Николаевича Ширяева и

доктора физико-математических наук, профессора Елену Борисовну Яровую
за поддержку и ценные указания.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук.

1. *Antipov V., Kabanov Y.* Ruin probabilities with investments in random environment: smoothness // Mathematics. — 2024. — Т. 12, № 11. — 1705.
DOI: 10.3390/math12111705 / Импакт-фактор 0.497 (SJР).
Вклад соискателя 0.75 п.л. / Общий объем 0.75 п.л.
Постановка задачи и общий подход к решению принадлежат Ю.М. Кабанову. Все результаты получены В.А. Антиповым самостоятельно.
2. *Antipov V., Kabanov Y.* Ruin problems with investments on a finite interval: PIDEs and their viscosity solutions // Finance and Stochastics. — 2026. — Т. 30. — 159—177.
DOI: 10.1007/s00780-025-00580-6 / Импакт-фактор 1.046 (SJР).
Вклад соискателя 1.1875 п.л. / Общий объем 1.1875 п.л.
Постановка задачи и общий подход к решению принадлежат Ю.М. Кабанову. Все результаты получены В.А. Антиповым самостоятельно.
3. *Антипов В. А.* О применении преобразования Лапласа для задачи разорения со случайными страховыми платежами и инвестициями в рисковый актив // Теория вероятностей и её применения. — 2026. — Т. 71, № 1. — 153—162.
DOI: 10.4213/tvp5796 / Импакт-фактор 0.344 (SJР).
Вклад соискателя 0.625 п.л. / Общий объем 0.625 п.л.
Antipov, V. A. An Application of the Laplace Transform to Ruin Problems with Random Insurance Payments and Risky Asset Investments // Theory of Probability & Its Applications. — 2026. — Vol. 71 — № 1 — P. 122—128.
DOI: 10.1137/S0040585X97T992811 / Импакт-фактор 0.344 (SJР).
Вклад соискателя 0.4375 п.л. / Общий объем 0.4375 п.л.
4. *Antipov V., Kabanov Y.* On the integro-differential equation arising in the ruin problem for non-Life insurance models with investment // Mathematics. — 2026. — Т. 14, № 6. — 1035.

DOI: 10.3390/math12111705 / Импакт—фактор 0.497 (SJR).

Вклад соискателя 0.75 п.л. / Общий объем 0.75 п.л.

Постановка задачи и общий подход к решению принадлежат Ю.М. Кабанову. Все результаты получены В.А. Антиповым самостоятельно.