

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Клементьев Петр Дмитриевич

**Двухуровневый анализ некоторых типов композитов и
метаматериалов**

Специальность 1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук, профессор
Шешенин Сергей Владимирович
кандидат физико-математических наук,
кандидат геолого-минералогических наук
Артамонова Нина Брониславовна

Москва – 2026

Оглавление

Оглавление.....	2
Введение.....	4
Глава 1. Исследование упругих и упругопластических свойств дисперсных композитов и пористых материалов на основе численных экспериментов	20
1.1. Обзор литературы.....	20
1.2. Применение асимптотического метода осреднения для определения эффективных упругих модулей дисперсных композитов	28
1.3. Вычисление концентраций интенсивностей напряжений при статическом нагружении	39
1.4. Моделирование представительного объема пористого материала.....	40
1.5. Упругопластические свойства материала матрицы.....	50
1.6. Зависимость осредненных диаграмм пористого материала и дисперсного композита от пути деформирования и объемной деформации	52
1.7. Идентификация параметров макромодели Друкера – Прагера с помощью вычислительных экспериментов на мезоуровне.....	55
Глава 2. Вычисление диаграммы напряжение – деформация композитных и пористых материалов с учетом поврежденности	60
2.1. Обзор литературы.....	60
2.2. Алгоритм численного моделирования прогрессирующего разрушения....	63
2.3. Численные эксперименты на модельных задачах.....	67
2.4. Трехмерное моделирование представительного объема композитного материала	81

Глава 3. Механические свойства искусственных материалов с периодической структурой	86
3.1. Обзор литературы.....	86
3.2. Связанность растяжения с изгибом для пластин	89
3.3. Примеры расчета связанности растяжения и изгиба для метаматериала...	92
3.4. Растяжение двухслойного резинокордного образца.....	95
3.5. Осреднение во втором приближении трехмерного неоднородного упругого материала	107
3.6. Связанность растяжения/сжатия с кручением для квазипериодической среды.....	113
3.7. Численные примеры.....	116
Заключение	123
Список литературы	127

Введение

Актуальность темы

Современное машиностроение, аэрокосмическая отрасль, биомедицина и другие передовые технологические отрасли предъявляют всё более высокие требования к конструкционным и функциональным материалам. В этой связи дисперсно-упрочненные композиты и пористые материалы, а также материалы с искусственно созданной периодической структурой (метаматериалы) активно исследуются и применяются, поскольку использование данных материалов позволяет создать изделия с наиболее эффективными и уникальными свойствами. Поэтому исследование типов подобных материалов является актуальным.

Применение композитных, пористых и метаматериалов невозможно без исследования и прогнозирования механических свойств на макроуровне (уровне всего образца или детали). Представляется актуальным использование численных методов, применяемых на мезоуровне, для исследования свойств рассматриваемых материалов в дополнение к экспериментам в связи с экономической и ресурсной эффективностью, поскольку осредненные свойства композитных, пористых материалов и метаматериалов могут быть вычислены при помощи численного моделирования на мезоуровне.

Следовательно, актуальной задачей является вычисление эффективных свойств композитных, пористых материалов и метаматериалов, используя численные методы и производительность современных компьютеров. Для этого в работе используются трехмерные модели композитного материала, построенные по рентгеновским изображениям. Этот подход позволяет добиться лучшего совпадения вычисленных и экспериментально полученных эффективных свойств на макроуровне.

Актуальность численного исследования упругопластических свойств дисперсных композитов и пористых материалов обусловлена ограниченной применимостью аналитических возможностей осреднения в пластической области.

Идентификация параметров макромоделей на основе вычислений на мезоуровне позволяет осуществлять прогнозирование свойств дисперсных композитов и пористых материалов на макроуровне и сократить объем экспериментов, что является актуальной задачей.

При современном развитии компьютеров и вычислительных методов создание виртуальных прототипов (цифровых двойников) является актуальным и развивающимся направлением. В частности, это касается вычисления диаграмм напряжений – деформаций композитных и пористых материалов. Представляется, что создание вычислительных прототипов является актуальным для априорного анализа создаваемых перспективных материалов. Вычислительный подход на мезоуровне актуален для имеющихся композиционных и пористых материалов, поскольку не все свойства легко измерить в эксперименте. Например, затруднительно экспериментальное определение коэффициента передачи порового давления (коэффициента Био).

При деформировании дисперсных композитов происходят локальные разрушения (разрушения на мезоуровне). Поэтому развитие методов учета такого разрушения вполне актуально. Это также относится к численному методу, реализуемому в рамках метода конечных элементов (МКЭ) и получившему название прогрессирующего разрушения. В работе дано развитие этого подхода, что позволило приблизить расчетную диаграмму напряжение – деформация к экспериментальной.

Теоретическое и численное исследование периодических структур типа метаматериалов вызывает интерес у многих авторов. Исследование с помощью асимптотического подхода позволяет дать ответ, являются ли метаматериалы истинными материалами или конструкциями. Эти объекты обнаруживают новые свойства, например в виде связанности растяжения и сжатия с кручением.

Асимптотическое и численное исследования зависимости эффективных свойств метаматериалов от структуры и числа ячеек периодичности представляются актуальными, поскольку позволяют заменить экспериментальные

исследования на макроуровне свойств связности растяжения и изгиба или растяжения и закручивания, наблюдаемые в метаматериалах, численным моделированием на мезоуровне.

Степень разработанности темы исследований

Развитие многоуровневых методов, строго говоря, началось с двух-масштабного метода асимптотического осреднения. Однако фактически идея может быть обнаружена в более ранних исследованиях, касающихся вычисления эффективных упругих модулей композитов. В настоящее время для вычисления эффективных свойств композитов разработаны и обоснованы различные методы, восходящие как к классическому определению эффективных модулей упругости [40; 120; 123], так и к классическому асимптотическому подходу для периодических структур (см., например, [3; 40; 167]). В этих подходах реализуется пространственное осреднение, и фундаментальное значение имеет понятие представительного объема (представительной области). Асимптотический метод в подавляющем большинстве случаев эффективно применялся и применяется для линейных задач. Для непериодических сред предложены модификации, включающие использование представительных областей и специальных граничных условий [14; 86; 87; 123], а также метод перехлеста представительных областей, покрывающих всю макрообласть [47; 60]. Случай периодической структуры проще, поскольку представительной областью является одна ячейка периодичности. Вычислительные эксперименты и теоретическое исследование показали, что классическое определение эффективных свойств, применяемое для композитов, не удовлетворяет равенству энергий деформаций исходного и осредненного пористого материала (равенству энергий Хилла), поэтому в нашей работе [25] предложена его модификация.

Однако дисперсные композиты, активно применяемые на практике, представляют собой непериодические структуры. В настоящее время вызывают интерес нелинейные задачи, для которых вычисление эффективных механических свойств остается открытой областью многих исследований. Широкое

распространение получили дисперсные композиты на основе матрицы из сплава алюминия и наполнителей в виде различных карбидов, например титана или бора. Применительно к таким материалам экспериментальные исследования эффективных упруго-пластических характеристик в зависимости от концентрации армирующих частиц [101; 124; 158] дополняются численным моделированием.

В ряде работ успешно реализовано численное моделирование пластической деформации и разрушения металломатричных композитов для различных случаев нагружения с учетом микроструктурных особенностей и реологии компонентов композита. Открытым вопросом является точность, с которой следует воспроизводить структуру неоднородного материала в численной модели. Авторы зачастую используют модельные структуры [51; 82; 91; 110; 169; 173; 182]. Важным вопросом является схожесть модельной структуры с реальной. В ряде работ, в том числе в наших работах, для определения эффективных характеристик композита $B_4C/2024Al$ используются трехмерные модели реальной структуры, полученной методами рентгеновской томографии [91; 128; 130; 131; 177; 180].

Другим важным направлением является изучение сложного упруго-пластического поведения материалов, не описываемого классическими деформационной теорией пластичности или теорией течения на основе критерия Мизеса. В работах [6; 33; 143] экспериментально исследуется и теоретически описывается поведение материалов (мрамора, чугуна, керамики и др.), чьи свойства, включая связь между интенсивностями напряжений и деформаций, существенно зависят от первого инварианта напряжений. Материальные параметры предлагаемых определяющих соотношений успешно идентифицируются по экспериментальным данным, демонстрируя совпадение расчётов с экспериментом [31]. Кроме того, для ряда композитов, включая дисперсно-упрочнённые, проводится изучение зависимости пластических свойств от величины среднего гидростатического напряжения [119] и от пути деформирования [85]. В наших исследованиях показано на примере модельной пористой структуры, что даже если матрица описывается теорией течения на

основе поверхности текучести Мизеса, то осредненный материал демонстрирует более сложное поведение [25].

Исследования методов учета деградации свойств материала в ходе деформирования имеют давнюю историю, основанную на концепциях механики повреждений. Фундаментальные подходы с введением скалярных [22; 44] и тензорных [21] параметров поврежденности, характеризующих степень деградации материала, были заложены в середине XX века и получили развитие в работах [23; 42; 43; 45; 46]. Существенным вкладом в моделирование прогрессирующего разрушения в рамках метода конечных элементов (МКЭ) стала модифицированная модель Гурсона–Твергаарда–Нидлмана (GTN), учитывающая зарождение, рост и слияние микропор [154; 183; 185].

Применение методов учета деградации свойств материала в процессе деформирования в рамках МКЭ методом прогрессирующего разрушения рассматривается в [83; 84; 163]. В этих работах указывается на зависимость решения от размера конечно-элементной сетки при использовании деградации свойств материала в точках интегрирования конечных элементов. Авторы предлагают развитие метода прогрессирующего разрушения, состоящего в учете разрушения в среднем в области конечного размера (нелокальный метод). В современных работах проводится сравнение методов разрушения в точке интегрирования на основе сопоставления диаграмм напряжение – деформация для пористого материала [52]. Дальнейшим развитием является учет различного поведения материала при сжатии и растяжении, например через модификацию критериев разрушения для хрупких материалов [70]. Путем сравнения различных вариантов метода прогрессирующего разрушения в нашей работе [26] показана неадекватность метода деградации в отдельных точках интегрирования конечного элемента.

Применительно к композиту $V_4C/2024Al$ накоплен значительный объем экспериментальных данных о типах повреждений (хрупкое разрушение включений, отслоение, трещины в матрице) при различных НДС [77; 152; 158; 181].

Активно развиваются вычислительные подходы к прогнозированию разрушения этого материала на мезоуровне. Проводится сравнение результатов, полученных на основе модельных структур с геометрически простыми включениями [82; 128], и более точных расчётов с использованием реальной микроструктуры, реконструированной методами микрокомпьютерной томографии [128]. Эти исследования показывают важность учёта сложной реальной геометрии включений для адекватного описания процесса разрушения.

Теоретической основой для изучения механических свойств искусственных материалов с периодической структурой (метаматериалов, резинкорда) выступают градиентные и моментные теории упругости, позволяющие учитывать размерные эффекты и неоднородность структуры [9; 34], а также метод асимптотического осреднения для сред с периодической структурой [3; 167]. Исследования в области метаматериалов сконцентрированы на проектировании их внутренней архитектуры [66; 71; 80; 98] для получения заданных эффективных свойств: отрицательного коэффициента Пуассона, регулируемого теплового расширения и связанности деформаций растяжение/кручение, растяжение/изгиб. В наших работах [170; 171] теоретически показано, что эффект связанности существенно зависит от структуры метаматериала.

Прикладные аспекты разработки искусственных материалов детально изучены на примере резинокордных композитов, широко применяемых в шинной промышленности. Для описания их поведения развиты определяющие соотношения, учитывающие вязкоупругие свойства резиновой матрицы [4; 75; 184] и анизотропию композита [125]. При численном исследовании таких структур распространение получили подходы, основанные на осреднении свойств: использование эквивалентных ортотропных моделей с эффективными модулями [187] или многослойных моделей, явно учитывающих трехмерную структуру [56].

Цель данной работы – применить вычислительные эксперименты на мезоуровне для определения свойств неоднородных материалов на макроуровне.

Для достижения поставленной цели работы решены следующие **задачи**:

1. Разработка и практическая апробация методов двухуровневого анализа для вычисления эффективных упругих и упругопластических свойств дисперсных композитов и пористых материалов с учетом деградации свойств. Верификация путем сравнения с экспериментом эффективных упругих свойств дисперсного композитного материала и эффективных диаграмм напряжение – деформация. Сравнение диаграмм, полученных на модельных структурах дисперсного композита и полученных с помощью рентгеновской томографии.
2. Модификация определения осредненных свойств пористых материалов. Вычисление на его основе эффективных диаграмм напряжение – деформация и исследование его зависимости от пути деформирования. Идентификация параметров макромодели по результатам расчетов на мезоуровне (уровне структуры пористой среды). Определение зависимости определяющего соотношения макромодели от первого инварианта напряжений.
3. Сравнительный анализ алгоритмов мезоуровневого разрушения и их верификация на реальных и модельных микроструктурах.
4. Разработка на основе асимптотического метода осреднения во втором приближении методики исследования связанностей типов деформаций растяжение/изгиб, растяжение/кручение для метаматериалов. Ее реализация для различных пространственных ячеек периодичности. Анализ зависимости коэффициентов связанности от количества ячеек периодичности в случае декартовой и цилиндрической топологии ячеек.
5. Применение мезоуровневого анализа для резинокордного композита. Численное определение размеров зон краевого эффекта и обоснование возможности использования коротких образцов для испытаний.

Научная новизна

1. Показано, что для определенных средних по представительной области напряжений и деформаций пористой среды не выполняется равенство энергий Хилла. Для определения эффективных модулей пористой среды используется

определение через граничные значения при задании перемещений в виде линейных функций. Для этого определения выполняется равенство энергий деформаций Хилла осредненной и исходной пористой сред.

2. Новизна состоит в том, что, как показано расчетами на мезоуровне, пористые материалы с угловатыми пораами и матрицей, подчиняющейся классической теории течения с условием Мизеса (в отличие от пористых материалов с гладкими пораами), проявляют существенную зависимость осредненной диаграммы напряжение – деформация от пути деформирования, сочетающего объемное сжатие и сдвиг. Новизна также заключается в различной зависимости осредненной диаграммы от первого инварианта для различных путей нагружения.
3. Новым является вывод о существенном значении учета возникновения поврежденности и использования реальной структуры дисперсного композитного материала с алюминиевой матрицей и керамическими включениями для приближения осредненной диаграммы напряжение – деформация к экспериментальной.
4. Прямым следствием метода осреднения во втором приближении является то, что введенные в работе моментные напряжения зависят от малого параметра, который обратно пропорционален количеству ячеек периодичности, составляющих периодическую структуру метаматериала в декартовой системе координат. Для метаматериалов с периодичностью структуры в цилиндрической системе координат величина связанности силы и момента постоянна. Этот результат подтвержден численными расчетами.
5. Научная новизна заключается в численном уточнении размеров зон краевого эффекта в двухслойных резинокордных образцах для различных кордных углов и в практическом оформлении процедуры для короткого лабораторного образца.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Метод определения осредненных напряжений и деформаций в представительном объеме пористого материала позволяет обеспечить выполнение равенства энергий осредненной и исходной пористых сред.
2. Установлено, что осредненные диаграммы напряжение- деформация пористой среды существенно зависят от формы пор. Показано, что для пористых материалов с угловатыми порами, матрица которых описывается теорией течения с независимой от первого инварианта тензора напряжений функцией течения, осредненная диаграмма напряжение- деформация зависит как от пути деформирования, сочетающего объемное сжатие и сдвиг, так и от первого инварианта тензора деформаций. Установленное свойство описывается макромоделью Друкера – Прагера.
3. Учет поврежденности реальной структуры дисперсных композитов с металлической матрицей и керамическими включениями позволяет приблизить вычисленные осредненные диаграммы напряжение- деформации к экспериментальным данным.
4. Связанность растяжение/изгиб, растяжение/кручение в метаматериалах с декартовой периодичностью ячеек является свойством, зависящим от количества ячеек, и убывает при масштабировании размера метаматериала. Для метаматериалов с цилиндрической периодической структурой величина связности растяжение/кручение постоянна и не зависит от количества ячеек.
5. Моделирование МКЭ позволяет определить размеры зон краевого эффекта в двухслойном образце резинокорда в зависимости от кордного угла и определить необходимую минимальную длину образца.

Теоретическая и практическая ценность работы

Теоретическая ценность работы заключается в развитии методологии двухуровневого анализа, вносящей вклад в теорию определения эффективных свойств неоднородных сред. Предложена корректная методика осреднения для пористых материалов, которая позволяет получать осредненные упругие и упруго-

пластические свойства. Установленная вычислениями на мезоуровне зависимость диаграммы напряжение – деформация от пути деформирования углубляет представления о поведении пористых сред на макроуровне. Аналитическое доказательство зависимости связанностей растяжение/изгиб, растяжение/кручение от числа ячеек периодичности в метаматериалах имеет теоретическое значение. Практическая ценность состоит в возможности применения цилиндрически периодической структуры в качестве демпфера.

В целом можно отметить, что практическая значимость работы определяется возможностью применения результатов в инженерной деятельности. Разработанные вычислительные методики позволяют вычислять механические характеристики проектируемых композитов, сокращая затраты на экспериментальные исследования. Полученные данные о концентрациях напряжений и разрушении композита $V_4C/2024Al$ могут быть использованы при проектировании конструкций, в состав которых входят дисперсные композиты. Установленная возможность использования коротких образцов резинокорда позволяет их применять для лабораторных испытаний. Теоретически полученная обратно пропорциональная зависимость связанностей растяжение/изгиб, растяжение/кручение от числа ячеек периодичности в метаматериалах с периодической в декартовой системе координат структурой заменяет численные и натурные эксперименты. Практически полезной альтернативой могут быть предложенные в работе метаматериалы со структурой с цилиндрической периодичностью.

Методология и методы исследования

Для вычисления эффективных упругих модулей и диаграмм напряжение – деформация использовалось строгое математическое определение или метод, называемый методом асимптотического осреднения (методом двух масштабов). В случае линейной задачи упругости для композитов определение эффективных модулей Хилла совпадает с определением, вытекающим из метода осреднения. Для

пористой среды определение эффективных модулей также можно строго вывести из метода осреднения.

Вычисление эффективных модулей и диаграмм выполнялось при помощи строго обоснованного метода конечных элементов. Задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) в материале решались в статической трехмерной и двумерной постановках в предположении геометрической линейности. В ходе исследований в данной работе также решались нелинейные упруго-пластические задачи. Для решения нелинейных задач методом конечных элементов использовался метод Ньютона и его модификации.

Метод послойного томографического сканирования был использован для получения двумерных изображений структуры композитного материала. При помощи специализированного ПО (VGSTUDIO MAX) двумерные изображения были преобразованы в трехмерные представительные области, по этим областям проведена пространственная дискретизация на трехмерные линейные тетраэдральные конечные элементы.

Для исследования вариантов методов прогрессирующего разрушения использовался сравнительный анализ. Сравнивались области разрушений и диаграммы напряжение – деформация, полученные исследуемыми методами, и определялось наличие сеточной сходимости.

Для теоретического исследования свойств метаматериалов использовался метод асимптотического осреднения во втором приближении. Численные примеры, подтверждающие теоретические выводы, были получены методом конечных элементов.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность диссертационной работы обоснована использованием строгих математических методов, классических методов механики деформируемого твердого тела, апробированной экспериментальной техники и проверенных численных методов и компьютерных программ. Достоверность

подтверждается также совпадением результатов ряда расчетов с результатами экспериментов.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Всероссийских и Международных конференциях, на научно-исследовательских семинарах, подвергались рецензированию при публикации в журналах.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., члена-корр. РАН Е.В. Ломакина (2026 г.);
- научно-исследовательский семинар имени А.А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., члена-корр. РАН Д.В. Георгиевского (2026 г.);
- научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. М.У. Никабадзе (2026 г.);
- объединенное заседание семинара лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций и лаборатории механики новых материалов и технологий под руководством д.ф.-м.н., члена-корр. РАН Д.С. Лисовенко, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва (2026 г.);
- секция Ученого совета НИИ механики МГУ под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Тарлаковского (2026 г.);
- межкафедральный научно-исследовательский семинар по механике деформируемых сред под руководством д.ф.-м.н., проф. С.В. Шешенина, к.ф.-м.н., к.г.-м.н. Артамоновой Н.Б. и к.ф.-м.н. Ф.Б. Киселева (2021–2026 г.);

- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвящённый 115-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Москва, Россия, 20–21 января 2026 г;
- Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, ИПРИМ РАН, Москва, Россия (2019, 2021, 2023, 2025 г.);
- Всероссийская школа-конференция «Математическое моделирование в естественных науках», ПНИПУ, Пермь, Россия (2023, 2024 г.);
- Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, МАИ, Алушта, Крым, Россия (2021, 2025 г.);
- Международная научная конференция «Ломоносов» (2020–2024 г.);
- Международная конференция по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли, МАИ, Алушта, Крым, Россия, 4–13 сентября 2022 г.;
- Международная научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, механико-математический факультет МГУ, Москва (2020, 2021, 2022 г.);
- Международная молодёжная научная конференция «XLVII Гагаринские чтения», Москва, Россия, 12–23 апреля 2021 г.;
- Международная конференция «Математическое моделирование», МАИ, Москва, Россия, 17 ноября 2020 г.

Исследования, проведенные автором диссертации, были поддержаны грантами РФФИ №19-51-53006 и №19-51-53008 (2019-2020) и РФФИ №25-21-00111 (2025), в которых соискатель выступал в качестве исполнителя.

Личный вклад автора

Автором диссертации самостоятельно при консультационной поддержке руководителей разработаны теоретические положения и вычислительные процедуры, используемые в проведенных исследованиях. Все новые результаты

диссертации получены автором самостоятельно. Автором самостоятельно получены все указанные выше положения, выносимые на защиту.

Для проведения вычислительных экспериментов автором самостоятельно разработаны:

- подпрограммы, реализующие автоматизированный выбор представительной области и постановку граничных условий для задач, решаемых методом конечных элементов в ходе исследования: одноосное растяжение, сдвиг, объемная деформация образца [25; 128; 170];
- подпрограммы на языке FORTRAN для вычисления в представительных областях композитных и пористых материалов эффективных упругих модулей, диаграмм эквивалентные напряжения – деформации [25];
- подпрограммы реализации прогрессирующего разрушения, добавленные в конечно-элементный комплекс в виде собственных подпрограмм.

Самостоятельно выполнены:

- расчеты представительных областей на основе томографических изображений структуры композитного материала, полученных научными руководителями в сотрудничестве с учеными Харбинского технологического института (НТ, Harbin, PR of China) [177]. Анализ результатов проведен самостоятельно;
- вычисления НДС пористых и композитных материалов при различных видах путей деформирования, идентификация параметров макромодели по результатам расчетов [25];
- вычисления эффективных свойств искусственных материалов, подтверждающие теоретические результаты, полученные совместно с научными руководителями [111; 171].

Автором самостоятельно проведен сравнительный анализ самостоятельно вычисленных эффективных модулей в трехмерной постановке с вычисленными эффективными модулями в двумерных представительных областях и с экспериментальными данными [177].

Сравнительный анализ вариантов учета прогрессирующего разрушения проведен самостоятельно автором. Применение рассмотренных методов к реальным и модельным структурам выполнено самостоятельно [128].

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в 14 печатных работах [16; 25–28; 38; 57–59; 111; 128; 170; 171; 177], из них 3 статьи [25; 111; 177] опубликованы в рецензируемых научных журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

Объем и структура диссертационной работы

В **первой главе** изложено применение асимптотического метода осреднения для определения эффективных упругих модулей дисперсных композитов. На примере композита $V_4C/2024Al$ выполнено сравнение эффективных модулей упругости, полученных для двумерных и трехмерных модельных структур, с аналогичными модулями, полученными из расчетов с реальной структурой, и с экспериментальными данными. Исследованы концентрации напряжений при статическом нагружении в композитном материале и показано существенное влияние формы включений на их значения. Для пористых и композитных материалов изучено влияние сложного пути деформирования, сочетающего объемное сжатие и сдвиг, на вид осредненной диаграммы напряжение – деформация. На основе серий вычислительных экспериментов с пористым материалом с угловатыми порами выполнена идентификация параметров макромодели Друкера–Прагера.

Во **второй главе** проведен сравнительный анализ вариантов алгоритма прогрессирующего разрушения, применимого на мезоуровне. Варианты включают: 1) подход, в котором деградация учитывается отдельно в каждой точке интегрирования конечного элемента, 2) вариант деградации свойств конечного элемента целиком и 3) деградации свойств материала в области фиксированного

размера. Их апробация проведена на модельных задачах, что позволило установить условия сеточной сходимости и зависимости от других параметров этих методов. Проведено сравнение результатов вычислений модельных задач с результатами экспериментов. Показано качественное соответствие получаемых областей разрушения. Методы применены для вычисления диаграмм напряжение – деформация композитного материала $B_4C/2024Al$ с учетом как искусственно сгенерированной, так и реальной микроструктуры, полученной методом компьютерной томографии. Показано, что учет реальной геометрии включений и механизмов повреждения матрицы и включений является важным условием для достижения соответствия расчетных кривых экспериментальным данным.

В третьей главе асимптотический метод осреднения во втором приближении применен для исследования неклассических свойств (связанности растяжение/изгиб, сжатие/кручение) в метаматериалах. Теоретически проанализирована и численно подтверждена зависимость коэффициентов связанности от параметра, обратно пропорционального количеству ячеек периодичности, для сред с периодическими в декартовой системе координат структурами. Для метаматериалов с периодической структурой в цилиндрической системе координат показана независимость связанности растяжения с кручением от размера структуры. Методами мезомоделирования исследованы краевые эффекты в резинокордном двухслойном композите. Определены характерные размеры зон их влияния и обоснована методика использования коротких образцов при механических испытаниях на одноосное растяжение.

Глава 1. Исследование упругих и упругопластических свойств дисперсных композитов и пористых материалов на основе численных экспериментов

В главе 1 использованы результаты работ [25; 27; 57; 128; 170; 177].

1.1. Обзор литературы

В связи с развитием технологий производства и активным внедрением в промышленность перспективных композитных материалов актуальной задачей является исследование эффективных свойств этих материалов.

Классическим методом нахождения эффективных свойств композитного материала является проведение экспериментов с образцами и вычисление эффективных свойств по полученным экспериментальным данным. Однако производство экспериментальных образцов, проведение экспериментов и обработка результатов могут быть затратны в ресурсном плане.

Другим методом, широко применяемым на практике, является вычислительный метод прогноза эффективных макроскопических упругих и пластических свойств композиционного материала с помощью расчетов на мезоуровне, т.е. уровне структуры. Оба подхода дополняют друг друга. Недостатком вычислительного подхода является необходимость знать свойства компонентов неоднородного материала.

Определение эффективных упругих модулей впервые дано Хиллом [123] и затем развито для материалов с учетом физической и геометрической нелинейности. Это развитие было предложено многими авторами, например в работах [40; 155; 156]. Метод асимптотического осреднения, предложенный в середине 70-х годов прошлого столетия и строго математически обоснованный для периодической структуры материала [3; 167], также дает определение эффективных свойств в случае линейности. Его появление привело к взрывному росту количества работ, направленных на вычисление тех или иных осредненных физических свойств. Перечислим только некоторые книги [3; 40; 140]. Затем были

работы, в которых рассматривались непериодические структуры [14; 60]. Ключевым для непериодических структур материала является понятие и наличие представительного объема (представительной области [47]). Для периодической структуры представительной областью является ячейка периодичности. В [39] показана связь определения эффективных упругих модулей, данного в [123] и возникающего из асимптотического подхода. Для непериодических сред при формулировке двухмасштабного метода ячейка периодичности заменяется на представительную область. При формулировке задач в представительной области на мезоуровне дифференциальные уравнения в области не изменяются по сравнению с периодическим случаем, но возникает проблема формулировки граничных условий. Если ограничиться только задачей вычисления эффективных свойств, то известны два варианта постановки граничных условий. Первая возможность – это сохранение условий периодичности, второй вариант – формулировка, эквивалентная постановке граничных условий таких же, как в работах [86; 87; 123]. В обоих случаях вблизи границы возникает пограничный слой, который не позволяет реализовать процедуру двухмасштабного метода в полной мере. Для преодоления этой трудности в [60] был предложен вариант перехлеста представительных областей, покрывающих всю макрообласть. Такой вариант имеет аналогию с методом декомпозиции областей с условиями Дирихле. Последний метод рассматривался в литературе как подход параллельного решения больших линейных систем. В рамках методики осреднения подход с перехлестом в работе [47] продемонстрирован на примере задачи цилиндрического изгиба пластины.

В [10] классический метод асимптотического осреднения применялся для вычисления эффективных упругих характеристик композита с эпоксидной матрицей. В работе [11] при помощи метода асимптотического осреднения проводится определение эффективных жесткостных характеристик композитных сетчатых оболочек и последующее вычисление зависимости этих характеристик от геометрических параметров структуры.

Другой подход к учету разных уровней материала исследован в [35]. В этой работе предложено многоуровневое моделирование неупругого деформирования с внутренними переменными, описывающими эволюцию структуры. Разработанные законы упрочнения и ротаций решеток, учитывающие физические механизмы, позволяют адекватно описывать поведение поликристаллических металлов и частично кристаллических полимеров.

Подход, основанный на идее прогнозирования эффективных свойств неоднородного пористого материала при помощи численного решения задач на мезоуровне (уровне структуры материала) используется для исследования эффективных упругих свойств пористых и композитных материалов в [92; 166] на примере пористого материала с известными свойствами матрицы и геометрическими характеристиками пор. Во многих работах проводится численное решение локальных задач в представительной области для получения решений задач на макроуровне или вычисления макросвойств [137; 148; 168].

В работе [169] методом конечных элементов на основе трехмерных представительных областей исследованы эффективные упругие свойства композитов со сферическими включениями (жёсткими, полостями, стеклянными), случайно распределёнными в матрице до концентрации 50%, с целью проверки точности классических аналитических моделей.

Локальные задачи могут быть решены также для случая больших деформаций [127; 136; 151; 174].

В работе [176] проводится вычисление эффективных диаграмм напряжение – деформация волокнистого композитного материала в предположении пластических свойств матрицы. Результаты вычислений совпадают с экспериментальными данными с хорошей точностью.

Одним из активно исследуемых материалов является, например, дисперсный композит с алюминиевой матрицей, армированной керамическими частицами $B_4C/2024Al$. Материал включений карбид бора (B_4C) – универсальный керамический материал, известный своей исключительной твердостью, высокой

температурой плавления, низкой плотностью и химической стабильностью. Он нашел широкое применение в таких отраслях, как производство брони и режущих инструментов, используется в областях ядерных технологий и абразивной обработки [74; 129; 132; 150; 158]. Значительный интерес вызвало включение V_4C в матрицу из алюминиевого сплава 2024Al для получения композитного материала $V_4C/2024Al$. Композит $V_4C/2024Al$ обеспечивает баланс между легкостью конструкции и улучшенными механическими свойствами, что делает его привлекательным для применений, требующих одновременно высокой прочности и малого веса материала [67; 158]. Дисперсия частиц V_4C в матрице обеспечивает дополнительное армирование, способствуя повышению прочности материала [178]. Отмечается, что добавление керамических включений в алюминиевую матрицу существенно повышает износостойкость получаемого композитного материала по сравнению с алюминием [30]. В связи с этим композиты $V_4C/2024Al$ нашли применение в аэрокосмической, автомобильной, оборонной и других отраслях промышленности [126; 164]. Еще одним преимуществом данного материала является, например, способность выдерживать динамические нагрузки [101; 124]. В работе [177] рассмотрено воздействие динамической нагрузки на дисперсный композит и дано сравнение результата с результатом действия статической нагрузки.

Исследуются и другие типы дисперсных композитов с металлической матрицей. Например, в диссертации [50] широко исследованы физико-механические свойства дисперсно-упрочнённых композитов на основе алюминия и магния. В частности, результаты исследований показали, что добавление наночастиц трифторида скандия и нитрида алюминия в алюминиевую и магниевую матрицы соответственно приводит к повышению предела прочности на величину до 80% и деформации до разрушения до 2.4 раз. В работе [12] экспериментально показано, что введение 0.5% по массе наночастиц нитрида алюминия в магниевый сплав МЛ5 повышает сопротивление деформированию и разрушению композита при квазистатическом и ударно-волновом нагружении.

В работе [173] показано, что при динамическом нагружении дисперсного композита с полимерной матрицей мелкие частицы наполнителя (в качестве наполнителя исследуются вольфрам и алюминий) образуют силовые цепи, повышая прочность материала, тогда как крупные частицы инициируют макротрещины сдвига, приводящие к преждевременному разрушению.

Технология изготовления подобных материалов может быть различной. Применяют методы порошковой металлургии [179] с последующим запеканием, смешивание в расплаве [109], механическое фрезерование и горячее прессование [73], механическое легирование и горячую экструзию [165], плазменно-активируемое спекание [134]. Размер частиц включений при этом варьируется в пределах 5 мкм – 100 мкм [118]. В работе [102] показано, что эффективные свойства получаемых образцов зависят в том числе от равномерности распределения частиц карбида бора и метода перемешивания порошков Al-6061 и B₄C для последующего спекания. Наиболее эффективным методом смешивания в данной работе признается метод сухого смешивания в роторном смесителе.

Результаты экспериментальных исследований механических свойств композитов B₄C/2024Al в зависимости от концентрации карбида бора широко представлены в литературе [3-5]. Экспериментально показано, что добавление в алюминиевую матрицу армирующих частиц карбида бора улучшает механические свойства композита, такие как упругие модули, прочность на разрыв, прочность на сжатие, твердость и предел текучести [4]. Например, в работе [179] на основе экспериментальных данных показано, что добавление в материал частиц карбида бора с объемной долей 12% в алюминиевую матрицу приводит к возрастанию модуля упругости на 67%, предела текучести – более чем на 100%, предела прочности – на 60% относительно материала матрицы.

Применение метода вычисления эффективных свойств композита на мезоуровне связано с вопросом выбора области для расчета. Актуальным подходом в этой области является применение двумерных и трехмерных моделей реальной структуры композита, полученных с помощью рентгеновской компьютерной

томографии [130; 131]. В работах [177; 180] подход применения структуры материала, полученной при помощи томографа, был использован для вычисления эффективного упругого модуля. Решение задач на мезоуровне позволяет не только экономить временные и финансовые ресурсы в процессе исследования эффективных свойств, но и дополнить экспериментальные данные. Так в работе [128] при помощи решения задач на мезоуровне были вычислены концентрации напряжений в В₄C/2024Al – параметры, косвенно определяющие зоны и интенсивность будущего разрушения материала. При экспериментальном исследовании материала получение этих параметров затруднено.

В работе [91] выполнено конечно-элементное моделирование дисперсно-упрочненных композитов на 2D и 3D моделях с реальной и модельной структурой. Установлено, что двумерные модели дают лишь качественное согласие с экспериментом, тогда как трехмерное моделирование реальной микроструктуры обеспечивает большую количественную точность прогнозирования механического поведения (эффективный упругий модуль, кривая осредненных напряжений – деформаций) по сравнению с модельными структурами.

Другим подходом к созданию представительных областей для исследований эффективных свойств композитных материалов является генерация модельных структур при помощи специализированного ПО. Подход с применением модельных областей с включениями в форме различных геометрических фигур (эллипсоиды, призмы или пирамиды) активно развивается в литературе [17; 51; 82; 110]. На основе модельных структур могут определяться эффективные упругие свойства материала [182]. В работе [173] при помощи модельных структур в виде кругов показано, что при динамическом нагружении дисперсного композита с полимерной матрицей мелкие частицы наполнителя (в качестве наполнителя исследуются вольфрам и алюминий) образуют силовые цепи, повышая прочность материала, тогда как крупные частицы инициируют макротрещины сдвига, приводящие к преждевременному разрушению.

В [97] для построения нелинейных определяющих соотношений на макроуровне используется искусственная структура с эллипсоидальными порами. В книге [54] приведено сравнение результатов расчетов эффективных свойств и концентраций напряжений для реальной и модельной структур композита $V_4C/2024Al$.

Развитием подходов к учету внутренней структуры является учет наличия межфазного слоя в композитном материале [103; 153]. Однако следует отметить, что в упомянутых выше работах [128; 177] учет межфазного слоя не производился, но результаты расчетов совпали с экспериментом с точностью до 2%. Вероятно, причина совпадения заключается в высокой точности детализации внутренней структуры материала. В исследовании, описанном в работе [62], проводилось определение эффективных упругих характеристик композитного материала на основе фенольного связующего, армированного дискретными углеродными волокнами. Моделирование выполнялось без учета специфических свойств межфазной области. Несмотря на это, полученные вычисленные значения модулей упругости продемонстрировали удовлетворительное соответствие с данными экспериментальных измерений [62]. Следует отметить, что определение свойств межфазного слоя является непростой задачей.

Другой темой исследований материалов со сложным строением на уровне структуры является вопрос существования единой кривой, связывающей интенсивности напряжений и деформаций (или эквивалентное по Мизесу напряжение и эквивалентную деформацию). Для ряда материалов, например геоматериалов, гипотеза классических теорий пластичности о существовании единой кривой, связывающей интенсивности напряжений и деформаций, оказывается неверной или неточной. Так, гипотеза о единой кривой деформирования не выполняется для материалов, содержащих поры и включения, например для песков, пористых скальных грунтов и других геоматериалов [19; 31; 32], для которых наблюдается зависимость от первого инварианта тензора напряжений или деформаций. В работах [90; 142; 144; 145] исследованы свойства

связи процессов сдвигового и объемного деформирования для таких материалов как чугун, керамики, алюминиевые сплавы и слоистые композиты. В работах [6; 31; 33; 143] рассматриваются потенциальные определяющие соотношения, описывающие поведение материалов, свойства которых зависят от вида напряженного состояния, определяемого отношением первых двух инвариантов. В [31] демонстрируются экспериментальные кривые зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций, различающиеся в случае различных путей деформирования для таких материалов, как белый мрамор, известняк и другие. Экспериментальные данные используются для идентификации параметров определяющих соотношений. В работе [8] рассматривается модель материала, в которой среди прочих параметров учитывается гидростатическое давление, влияющее на прочностные, реологические и деформационные характеристики материала.

Для ряда композиционных материалов существует зависимость напряженно-деформированного состояния (НДС) от истории деформирования. Например, в работе [146] рассматривается влияние пропорциональных и непропорциональных путей деформирования на механические характеристики материала Ti-6Al-4V. Исследование показало, что непропорциональное нагружение может вызывать дополнительные эффекты упрочнения в образцах. Другим неклассическим свойством дисперсных композитов с металлической матрицей является зависимость пластических свойств материалов от величины среднего гидростатического напряжения [139; 141]. В работе [119] демонстрируется, что для композитного материала Al₂O₃/Al при величине среднего гидростатического напряжения 200 МПа диаграмма напряжение – деформация проходит выше аналогичной диаграммы, полученной при отсутствии среднего гидростатического напряжения.

Также в литературе исследуются эффективные свойства пористых материалов. Например, в работе [78] предложен алгоритм вычисления эффективных прочностных характеристик пористого материала на основе

численного решения серии упругих задач для двумерной области с одной порой. В работе [175] на основе трёхмерной представительной области пористого материала проводится вычисление эффективных упругих свойств в предположении нелинейности определяющих соотношений. Расчёты в обеих работах выполнялись с помощью КЭ-пакета Fidesys.

В работе [85] показана зависимость свойств пористого материала (например, процесса роста пустот) от пути деформирования и среднего гидростатического напряжения. В [149] с использованием нейронных сетей предсказывались поля напряжений и деформаций в композитах. Продемонстрировано, что при фиксированной микроструктуре эффективные свойства материала сохраняются при изменении пути деформирования. Другой подход к описанию определяющих соотношений осредненного композитного материала обсуждается в работе [117]. На основе результатов вычислений НДС в представительных областях при различных сложных траекториях деформирования при помощи нейронных сетей подбираются параметры определяющих соотношений на макроуровне.

1.2. Применение асимптотического метода осреднения для определения эффективных упругих модулей дисперсных композитов

В данном разделе определены эффективные упругие модули дисперсного композита $V_4C/2024Al$ при помощи асимптотического метода осреднения на основе 3D моделей реальной и модельной структур. Проведено сравнение расчетных значений модуля Юнга с экспериментальными.

В данной работе применяется определение эффективных упругих модулей, основанное на методе асимптотического осреднения [54]. Идея данного метода заключается в представлении перемещений в виде асимптотического ряда по малому параметру:

$$\left(C_{ijkl} u_{k,l} \right)_{,j} + f_i = 0, x \in V$$

Вводятся быстрые координаты $\xi_i = x_i / \varepsilon$, $\varepsilon = l / L$. Здесь ε – малый геометрический параметр; l – характерный линейный размер представительной

области (representative volume element – RVE); L – характерный линейный размер изучаемого объема композита. Решение задачи представим как

$$u_i(\mathbf{x}, \xi) = v_i(\mathbf{x}) + \varepsilon N_{ipq}(\xi) v_{p,q}(\mathbf{x}) + \dots$$

где $N_{kpq_1 \dots q_m}(\xi)$ – локальные функции быстрых координат; $v_k(\mathbf{x})$ – гладкая составляющая перемещений.

Тогда в первом приближении можно записать:

$$\sigma_{ij} = P_{ijpq} v_{p,q}, \quad P_{ijpq} = C_{ijpq} + C_{ijkl} N_{kpq,l}$$

Если асимптотическое разложение применить к задаче определения эффективных модулей упругости, то получается локальная задача в представительной области, которая может быть записана двумя способами:

$$\begin{cases} C_{ijpq}(\mathbf{x}) u_{p,qj} = 0, \quad \mathbf{x} \in V_{RVE} \\ u_p = \varepsilon_{pq}^0 x_q, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} (C_{ijkl}(\mathbf{x}) N_{kpq,l} + C_{ijpq}),_j = 0, \quad \mathbf{x} \in V_{RVE} \\ N_{kpq} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE} \end{cases} \quad (1.2)$$

Из нее следует определение эффективных модулей дисперсного композита:

$$C_{ij\alpha\beta}^{eff} = \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle}{\varepsilon_{\alpha\beta}^0}$$

Для сплошного композиционного материала $\langle \varepsilon_{pq} \rangle = \varepsilon_{pq}^0$, причем $C_{ij\alpha\beta}^{eff} = \langle P_{ijpq} \rangle$.

Для пористой среды $\langle \varepsilon_{pq} \rangle \neq \varepsilon_{pq}^0$. Угловые скобки означают осреднение по объему представительной области

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_{RVE}} f dV$$

Задача (1.1) представляет собой набор задач, в каждой из которых только одна компонента $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ не равна нулю: $\varepsilon_{pq}^0 = \delta_{p\alpha} \delta_{q\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^0$ (Суммирование по α, β

отсутствует). При фиксированных α, β задача позволяет вычислить 9 компонент эффективного тензора модулей упругости. Для вычисления всех компонент в общем случае требуется решить 6 краевых задач (1.1), изменяя $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

В первом приближении перемещения имеют вид: $u_i = v_i + \varepsilon N_{ipq} v_{p,q}$.

Тогда осредненные по объему деформации будут иметь вид:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) + \frac{1}{2} \int_{V_{RVE}} (N_{ipq,j} + N_{jpq,i}) dV \varepsilon_{pq}^0$$

Для композитных сплошных материалов:

$$\int_{V_{RVE}} N_{ipq,j} dV = \int_{\Sigma_{RVE}} N_{ipq} d\Sigma = 0$$

Однако для пористой среды это равенство будет иметь вид:

$$\int_{V_{RVE}} N_{ipq,j} dV = 0 + \int_{\Sigma_{por}} N_{ipq} d\Sigma \neq 0$$

где Σ_{por} — это поверхность пор. Поэтому, вообще говоря, заданные на границе деформации не совпадают с осредненными:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle \neq \varepsilon_{ij}^0$$

Но для композитных материалов это равенство выполняется. Поэтому эффективные упругие модули сплошных композитов можно вычислять следующим образом:

$$C_{ij\alpha\beta}^{eff} = \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle}{\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle}$$

Расчеты проведены с помощью конечно-элементной программы. Для вычисления эффективного модуля решались двумерные задачи в представительной области в плоско-деформированном и плоско-напряженном состояниях [54]. Краевые условия, поставленные на границе представительной области, показаны на рисунке 1.1. Задача, показанная на рисунке 1.1а позволяет вычислить

эффективный модуль Юнга E_1^{eff} и коэффициент Пуассона. Проводилась проверка изотропии материала. В результате можно записать E^{eff} .

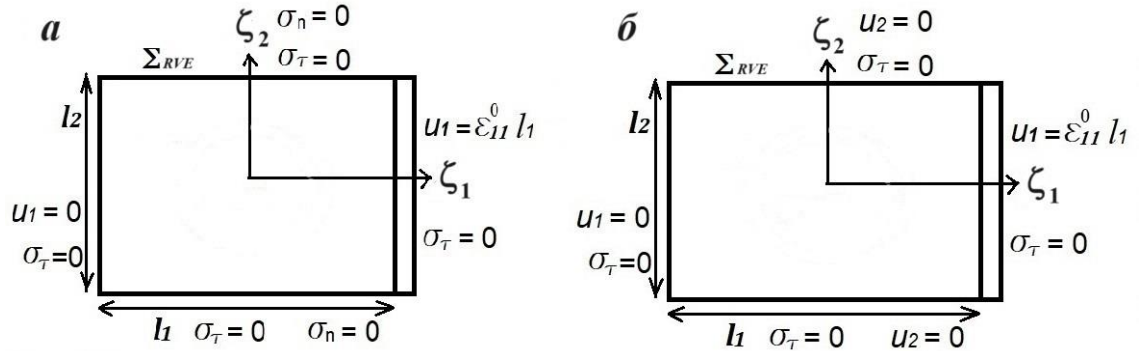


Рисунок 1.1. Граничные условия локальных краевых задач для определения (а) – модуля Юнга E_1^{eff} (плоское напряженное состояние) и (б) – модулей упругости C_{1111}^{eff} и C_{2211}^{eff} (плоское деформированное состояние).

На рисунке 1.1а показаны граничные условия локальной краевой задачи определения модуля Юнга в горизонтальном направлении (плоское напряженное состояние). Верхняя и нижняя границы свободны от напряжений, левая граница фиксирована в направлении, перпендикулярном границе, на правой границе заданы перемещения в виде линейной функции координат. Эффективный модуль E_1^{eff} рассчитывается по формуле:

$$E_1^{eff} = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{\varepsilon_{11}^0} = \frac{1}{\varepsilon_{11}^0 \cdot l_2} \int_{l_2} \sigma_{11} dl_2.$$

Аналогично определяется эффективный модуль Юнга в вертикальном направлении.

На рисунке 1.1б показаны граничные условия для определения модулей упругости C_{1111}^{eff} и C_{2211}^{eff} (плоско-деформированное состояние). Верхняя, нижняя и левая границы фиксируются в направлении, перпендикулярном соответствующей границе, на правой границе перемещения задаются в виде линейной функции координат. В результате решения этой задачи получаем:

$$C_{1111}^{eff} = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle}{\varepsilon_{11}^0} = \frac{1}{\varepsilon_{11}^0 \cdot l_2} \int \sigma_{11} dl_2, \quad C_{2211}^{eff} = \frac{\langle \sigma_{22} \rangle}{\varepsilon_{11}^0} = \frac{1}{\varepsilon_{11}^0 \cdot l_1} \int \sigma_{22} dl_1.$$

Интеграл по объему $\langle \sigma_{11} \rangle$ был преобразован в интеграл по границе по формуле Гаусса-Остроградского. Значение интеграла напряжений σ_{11} по границе l_2 рассчитывалось при решении задачи в конечно-элементной программе, ε_{11}^0 – постоянные деформации из граничных условий краевой задачи. Аналогично определяются модули упругости C_{2222}^{eff} и C_{1122}^{eff} . Для изотропных образцов ($C_{1111}^{eff} = C_{2222}^{eff}$) эффективный модуль Юнга (E^{eff}) и коэффициент Пуассона (ν^{eff}) можно рассчитать по формулам теории упругости:

$$C_{\alpha\alpha\alpha\alpha}^{eff} = \lambda^{eff} + 2\mu^{eff}, \quad C_{\beta\beta\alpha\alpha}^{eff} = \lambda^{eff}, \quad \nu^{eff} = \frac{\lambda^{eff}}{2(\lambda^{eff} + \mu^{eff})}, \quad E^{eff} = 2\mu^{eff} (1 + \nu^{eff}),$$

где λ^{eff} и μ^{eff} – упругие модули Ламе.

На рисунке 1.2 представлены изображения микроструктур композитного материала $B_4C/2024Al$, полученные с помощью растрового электронного микроскопа. Изображения представляют собой плоские срезы образцов, содержащих 5, 10 и 15% карбида бора; серый и белый цвет — сплав алюминия с Al_2Cu , черный — частицы карбида бора B_4C .

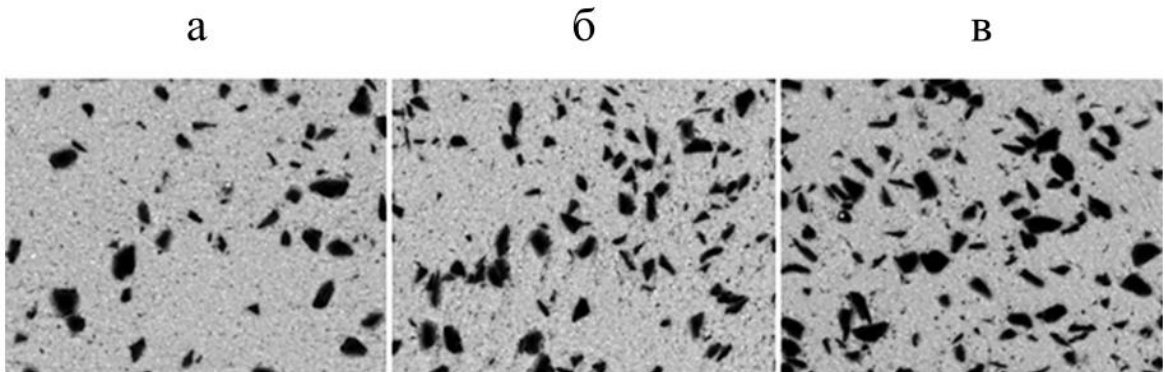


Рисунок 1.2. Изображения микроструктуры композита $B_4C/2024Al$ (содержание B_4C – 5% (а), 10% (б) и 15% (в)).

Проведено трехмасштабное исследование эффективных упругих модулей композита $B_4C/2024Al$ на основе оцифрованных фотографий шлифов реальной структуры композита, полученных с помощью электронного микроскопа в Харбинском технологическом институте в Китае [180]. Для упрощения расчетов в составе композита были выделены два материала:

- 1) матрица, состоящая из Al и мелких включений Al_2Cu и B_4C (размером <1 мкм),
- 2) более крупные включения карбида бора B_4C (размером от 7 до 30 мкм, средний размер – 10–20 мкм).

Таким образом, моделирование упругих модулей композита $B_4C/2024Al$ становится трехмасштабным. Первый масштабный уровень – это макроуровень, элемент конструкции (или его часть) из рассматриваемого материала дисперсного композита $B_4C/2024Al$. Второй и третий масштабные уровни – это мезоуровни. Ко второму уровню относится представительная область (RVE), состоящая из осредненной матрицы и крупных включений B_4C , к третьему уровню – RVE, в которую входит только матрица, состоящая из Al и мельчайших включений Al_2Cu и B_4C .

На 1-м этапе определялись эффективные модули упругости трехкомпонентной матрицы. На фотографии шлифа дисперсного композита были выделены две области матрицы (рисунок 1.3, слева), по этим областям были построены модели в программе AutoCAD (рисунок 1.3, справа), а затем в конечно-элементной программе рассчитаны их эффективные упругие свойства по методике, описанной выше.

На рисунке 1.3 (справа) представлены модели двух областей матрицы, полученные в результате оцифровки в AutoCAD. На моделях серый цвет соответствует алюминию, белым цветом изображены включения Al_2Cu , а черным цветом обозначены включения B_4C .

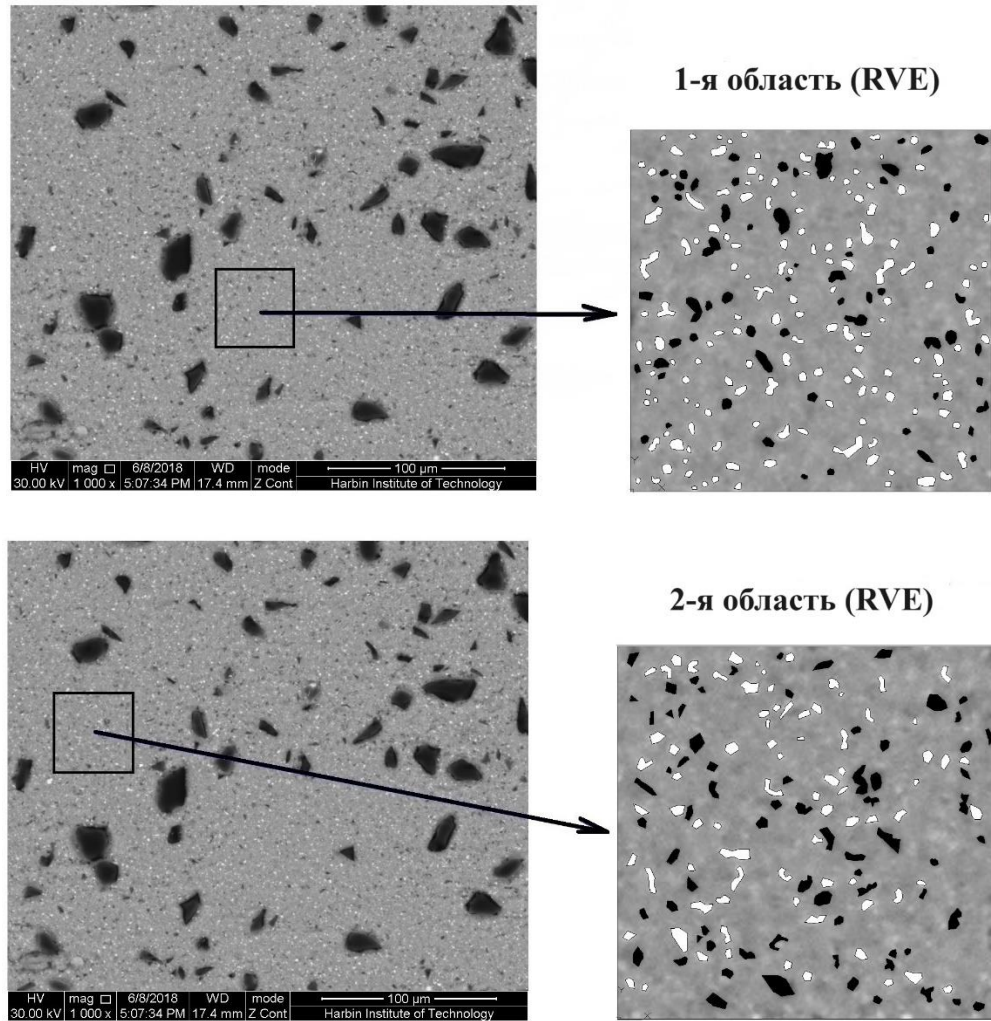


Рисунок 1.3. Создание модели расчета эффективных свойств матрицы дисперсного композита.

Упругие свойства компонентов матрицы, принятые в расчетах, представлены в таблице 1.1. Эти свойства задавались по литературным источникам и по результатам экспериментов, проведенных в Харбинском технологическом институте в Китае.

Таблица 1.1. Упругие модули компонентов матрицы, принятые в расчетах

Компоненты	E , ГПа	ν
Al	69	0.33
Al ₂ Cu	112.6	0.32
B ₄ C	450	0.16

В ходе расчетов были получены эффективные свойства трехкомпонентной матрицы: $E = 74.7 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.32$. Оказалось, что матрица статистически однородна и изотропна. Модули Юнга E_1^{eff} и E_2^{eff} по направлениям двух осей различаются менее чем на 1%. Модули Юнга различаются менее чем на 1% для двух выделенных областей (рисунок 1.3). Значения коэффициента Пуассона получились одинаковые для двух областей (RVE). Модули Юнга матрицы, определенные в плоскодеформированном и плосконапряженном состояниях, различаются менее чем на 1%.

Затем были проведены расчеты в трехмерной представительной области. На рисунке 1.4а показана трехмерная двухкомпонентная модель композита $B_4C/2024Al$, построенная по рентгеновским изображениям, полученным в Шанхайском институте прикладной физики. На рисунках 1.4б и 1.4в изображены включения B_4C . Как видно, включения имеют неправильную угловатую форму, поэтому важно понять, насколько необходимо использовать реальную структуру композита для расчета эффективных свойств и напряженного состояния.

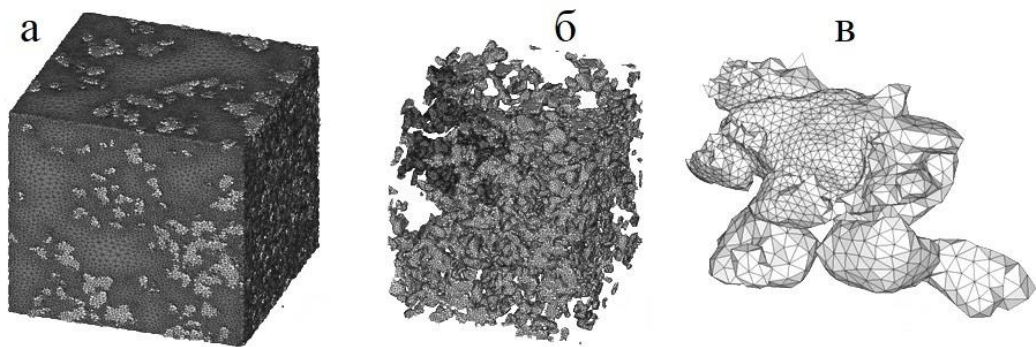


Рисунок 1.4. Двухкомпонентная модель композита $B_4C/2024Al$ (а), изображения включений B_4C (б, в).

Как известно, вычислительные эксперименты должны проводиться на представительных областях (RVE). Следует обратить внимание на предлагаемое расширенное понимание представительной области. Дело в том, что для того, чтобы концентрация карбида бора была постоянной, нужно использовать достаточно большие области. Оцифровки таких больших областей и последующие конечно-элементные расчеты требуют слишком большой мощности и памяти

компьютера. Представляется целесообразным использовать расширенное определение представительной области, предложенное в [2]. Представительными областями будем считать области, для которых зависимость эффективных свойств (например, модуля Юнга) от концентрации V_4C ложится на одну и ту же кривую с допустимой точностью. Используемые в вычислениях представительные области являются макроизотропными, но имеют разные концентрации V_4C . Ситуация иллюстрируется на рисунке 1.5.

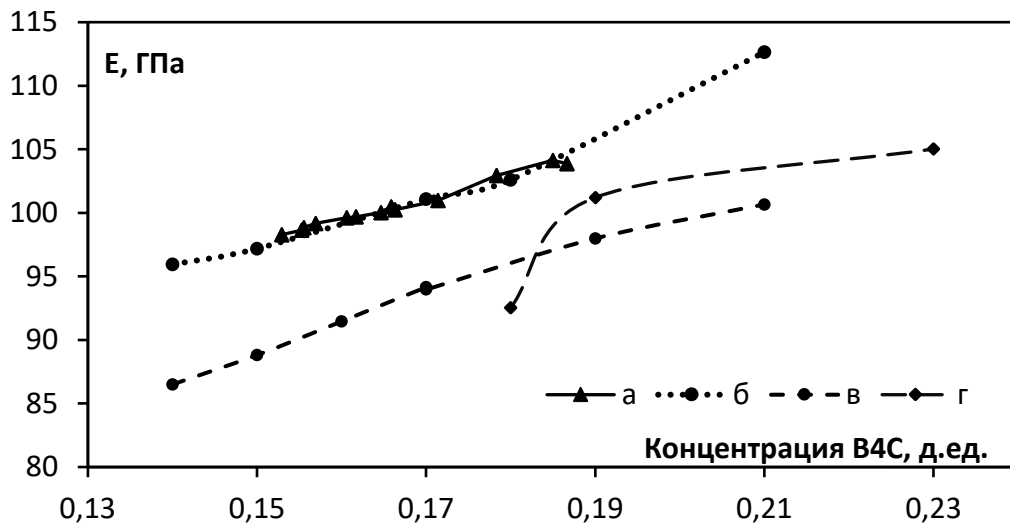


Рисунок 1.5. Зависимости эффективного модуля Юнга от объемной концентрации включений V_4C для 3D образцов реальной структуры: RVE размера (в мм) $0,19 \times 0,19 \times 0,19$ (а), $1/4$ (б), $1/8$ (в) и $1/6$ (г) от линейного размера RVE.

Наибольшие модели композита, полученные с помощью рентгеновской томографии, имели размеры (в мм) $0,19 \times 0,19 \times 0,19$ (рисунок 1.4). Для определения размера представительной области композита $V_4C/2024Al$ были проведены 3D вычислительные эксперименты на образцах, имеющих линейные размеры $1/4$, $1/6$ и $1/8$ от линейных размеров наибольшей модели (рисунок 1.5). Как видно на графиках 1.5а и 1.5б, точки соответствия расчетных значений модуля Юнга и концентрации включений V_4C ложатся на одну кривую, следовательно, соответствующие области можно считать представительными (RVE). Однако области с размерами $1/6$ и $1/8$ от наибольшей области уже представительными не являются. Таким образом, осреднение по области частично заменено осреднением по ансамблю (набору областей).

3D модели реальной структуры получить достаточно трудоемко, поэтому интересно провести исследование, можно ли определять эффективные упругие модули по 2D моделям реальной структуры (рисунок 1.2) или по 3D моделям искусственной структуры, в которой включения карбида бора аппроксимируются эллипсоидами (рисунок 1.6). Критерием корректности полученных результатов является сравнение с экспериментом.

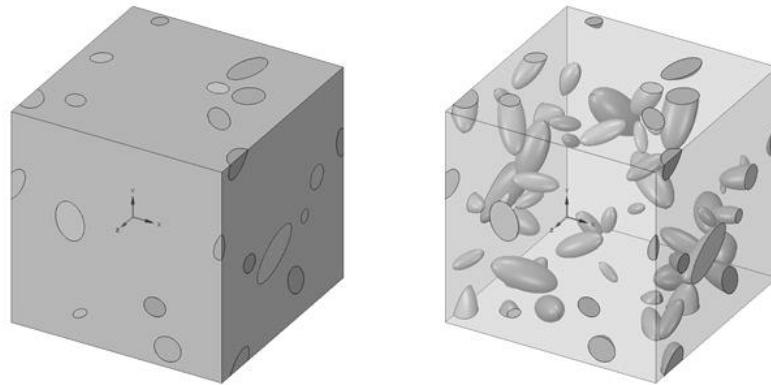


Рисунок 1.6. Изображение модели с 5% концентрацией включений B_4C .

На рисунке 1.7 показаны зависимости эффективных упругих модулей от содержания карбида бора для 3D и 2D реальных структур композита и моделей с эллипсоидными включениями. Двумерные задачи решались в предположении плоской деформации. Для диапазона концентраций B_4C от 0.14 до 0.20 эти зависимости почти линейные. Для 3D реальной и модельной (с эллипсоидами) структур графики почти совпадают, различия в значениях модулей Юнга для одинаковых концентраций B_4C отличаются не более чем на 1%. А линия, аппроксимирующая зависимость модуля Юнга от содержания B_4C для 2D реальных структур проходит ниже, чем для 3D реальной и модельной структур, причем значения модуля упругости для 2D расчетов на 6-8% меньше, чем для 3D расчетов при одинаковых концентрациях B_4C (рисунок 1.7).

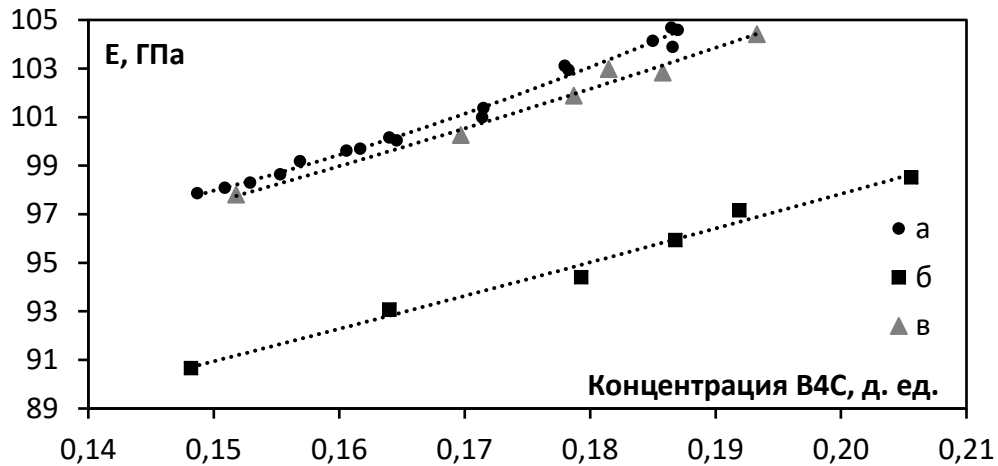


Рисунок 1.7. Зависимость модуля упругости от содержания В₄С: 3D реальная структура (а), 2D реальная структура (б), 3D модель с эллипсами (в).

Сравнение с экспериментом для концентраций карбида бора 15% и 20% приведено в таблице 1.2. В скобках приведены относительные разницы полученных значений относительно экспериментальных данных.

Таблица 1.2. Сравнение расчетных значений модуля Юнга (ГПа) с экспериментом

Концентрация В ₄ С	15%	20%
Эксперимент	99.1	107.3
3D реальная структура	98.0 (1.1%)	107.6 (0.3%)
3D модельная структура	97.5 (1.6%)	105.6 (1.6%)
2D реальная структура	90.9 (8.3%)	97.8 (8.9%)

Расчетные значения модуля Юнга для 2D и 3D реальной структуры и для 3D модельной структуры с включениями в виде эллипсоидов для концентраций 15% и 20% были получены с помощью квадратичной интерполяции вычисленных значений модуля Юнга. Как видно, значения модуля Юнга для модельной и реальной 3D структур отличаются от экспериментальных (для соответствующих значений концентрации В₄С) не более чем на 2%. Значения модуля Юнга для 2D реальной структуры меньше экспериментальных на 8%. Отсюда можно сделать вывод о том, что модельные структуры можно использовать для оценки

эффективных упругих модулей композита $V_4C/2024Al$. Двумерные модели реальной структуры могут быть использованы для получения приближенной оценки эффективных свойств материала при небольших вычислительных и временных затратах. Трехмерные модели позволяют более точно вычислить эффективные свойства композита, однако для 3D вычислений может потребоваться значительно больше вычислительных ресурсов.

1.3. Вычисление концентраций интенсивностей напряжений при статическом нагружении

Для изучения напряженно-деформированного состояния (НДС) композита $V_4C/2024Al$ на микроуровне при одноосном сжатии и исследования концентрации напряжений вблизи включений карбида бора различной формы использовались 3D модели реальной микроструктуры и 3D модели с включениями в виде эллипсоидов со случайной ориентацией.

В таблице 1.3 показаны результаты расчетов концентраций C_{Mises} интенсивностей напряжений по Мизесу (отношение максимальных напряжений $\sigma_{MaxMises}$ к средним по образцу напряжениям $\sigma_{AvMises}$):

$$\sigma_{Mises} = \sqrt{\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right] / 2}, \quad C_{Mises} = \sigma_{MaxMises} / \sigma_{AvMises}.$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения.

Как видно из таблицы 1.3, максимальные концентрации наблюдаются в моделях реальной структуры при расчетах на мелкой сетке во включениях карбида бора. Это можно объяснить тем, что большие концентрации интенсивностей напряжений возникают вблизи углов жестких включений, а использование мелкой сетки позволяет лучше аппроксимировать острые углы. Во включениях карбида бора концентрации интенсивностей напряжений по Мизесу для реальной структуры достигают 29.19 при расчетах на мелкой сетке и 14.16 при расчетах на крупной сетке, а для модельной структуры с эллипсоидами – 5.65 и 6.21 соответственно. В менее жесткой алюминиевой матрице максимальные

концентрации интенсивностей напряжений по Мизесу значительно ниже (для реальной структуры на мелкой сетке – 6.19, на крупной – 6.35; для модельной с эллипсоидами на мелкой сетке – 2.77, на крупной – 3.50).

Таблица 1.3. Концентрации интенсивностей напряжений по Мизесу при статическом нагружении

Сетка	Мелкая сетка (до 2 млн. узлов)				Крупная сетка (до 300 тыс. узлов)			
	Реальная структура		Модель с эллипсоидами		Реальная структура		Модель с эллипсоидами	
Компонент	B ₄ C	Al	B ₄ C	Al	B ₄ C	Al	B ₄ C	Al
Количество образцов	14	14	4	4	13	13	8	8
Среднее	13.78	4.03	4.78	2.62	11.18	3.71	5.08	3.12
Минимум	9.34	2.72	4.10	2.40	9.44	2.75	4.53	2.57
Максимум	29.19	6.19	5.65	2.77	14.16	6.35	6.21	3.50

Можно сделать вывод, что при исследовании концентраций интенсивностей напряжений важно учитывать реальную структуру дисперсных композитов, а модели с включениями карбида бора в виде эллипсоидов не годятся для исследования концентраций напряжений. Было также замечено, что величины концентраций интенсивностей напряжений практически не зависят от концентрации включений карбида бора, если концентрация включений не превышает 30%.

Полученные результаты исследования НДС образцов на микроуровне позволяют определить нагрузку, при которой возникнут пластические деформации, а также прогнозировать условия нагружения, при которых можно ожидать нарушение внутренней целостности композита.

1.4. Моделирование представительного объема пористого материала

Следующие разделы первой главы посвящены моделированию дисперсных композитов и пористых материалов в упругопластической области. Исследуется

вопрос выполнения гипотезы единой кривой на макроуровне для рассматриваемых материалов. Предполагается, что осредненные свойства модельных материалов получены из решения локальных задач на мезоуровне с учетом структуры материала. Предполагается, что материалы компонентов композита или материал матрицы пористой среды описываются классической теорией пластичности (теорией течения) [29], построенной на основе 2-го инварианта тензора напряжений. Дается ответ на вопрос, какая теория описывает осредненный материал? Будет ли иметь место единая кривая между интенсивностями напряжений и деформаций (эквивалентными по Мизесу напряжениями и деформациями)?

Для упругопластического материала напряжения и деформации зависят, вообще говоря, от пути деформирования. Рассмотрим двумерные пути деформирования в плоскости $(\varepsilon_{eqv}, \theta)$. Пути деформирования задаются в виде комбинации простого сдвига и всестороннего сжатия:

$$\begin{cases} u_1 = \gamma_0(t)x_2, & \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE}, \\ u_2 = u_3 = 0, & \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE}, \end{cases} \quad u_i = \varepsilon_0(t)x_i, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

где Σ_{RVE} – граница представительной области, t – параметр прослеживания пути деформирования. Граничные условия проиллюстрированы на рисунке 1.8.

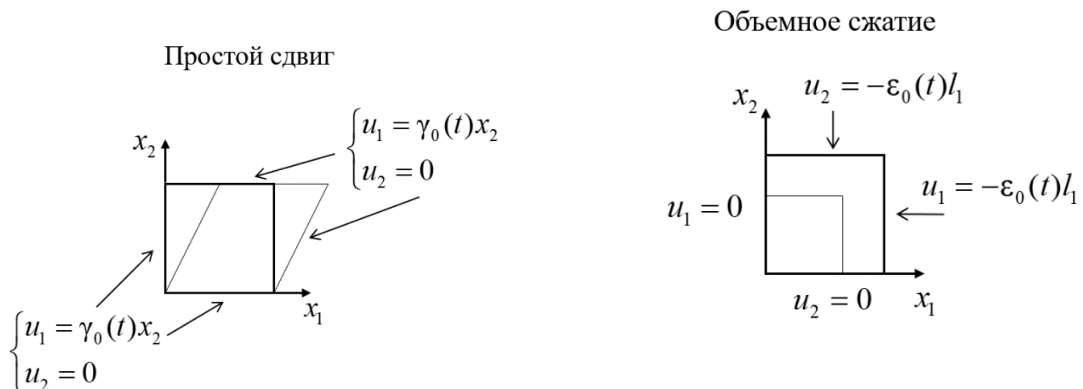


Рисунок 1.8. Граничные условия на границе представительной области.

В работе рассматриваются пропорциональные и сложные пути деформирования. Пропорциональное деформирование осуществляется

одновременным приложением обоих граничных условий (1.3), когда $\gamma_0(t) / \varepsilon_0(t) = const$. Сложное деформирование моделируется поочередным приложением сдвига и объемного сжатия в разном порядке. Удобно представить рассматриваемые пути деформирования схематично на плоскости $(\gamma = 2\varepsilon_{12}, \theta)$ (рисунок 1.9).

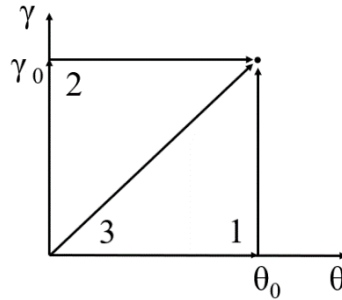


Рисунок 1.9. Пути деформирования: 1,2 – сложное деформирование в виде комбинации сдвига и всестороннего сжатия, 3 – пропорциональное деформирование.

Опишем подробнее пути деформирования, представленные на рисунке 1.9. Путь 1 соответствует последовательному приложению объемной деформации до фиксированного значения θ_0 и затем деформации сдвига до значения γ_0 . Путь 2 отличается порядком приложения деформаций: сначала достигается сдвиговая деформация γ_0 , потом объемная деформация θ_0 . Путь 3 соответствует пропорциональному деформированию, при котором объемная деформация и деформация сдвига изменяются одновременно. Задачи с граничными условиями (1.3) решались методом конечных элементов (МКЭ). Для анализа напряженно-деформированного состояния, рассчитанного в результате численного решения задач в процессе деформирования, были построены диаграммы зависимости осредненного эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации. Для сплошного материала вычисление средней величины по объему производится, как обычно, по следующей формуле:

$$\langle g \rangle = \frac{1}{V} \int_V g(\vec{x}) dV, \quad V \geq V_{RVE}. \quad (1.4)$$

Здесь V_{RVE} – представительная область (RVE – representative volume element).

Предварительно в данном разделе предлагается модификация вычисления осредненных напряжений и деформаций в представительной области для случая пористого материала. Дело в том, что в случае пористого материала осреднение, вообще говоря, не может осуществляться по формуле (1.4). Развитие методов вычисления эффективных свойств дисперсных неоднородных материалов через свойства компонентов в случае линейной упругости началось с работ Хилла [122; 123] и Кренера [138].

Для сплошного материала в случае линейной упругости известны два варианта осреднения [86; 120; 123]. Оба варианта обобщаются на случай квазистатической задачи для склерономного материала [40; 54]. Первый вариант заключается в решении краевой задачи в V_{RVE} при заданных на границе перемещениях в виде линейных функций координат (при задании макрооднородного поля деформаций):

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) = 0, & \mathbf{x} \in V_{RVE}, \\ u_i = \varepsilon_{ij}^0(t)x_j, & \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Выражение $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$ означает, что напряжения представлены через перемещения с помощью определяющего соотношения и формул Коши, в которых малые деформации выражаются через компоненты перемещений. Если определяющее соотношение задается в виде связи скоростей напряжений и деформаций, то уравнение равновесия формулируется относительно производной от напряжений по времени. Для задачи (1.5) известны два свойства:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0 \quad (1.6)$$

и

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle. \quad (1.7)$$

Первое свойство (1.6) означает, что средняя деформация равна заданной деформации ε^0 . Второе свойство (1.7) (равенство Хилла) выражает

эквивалентность энергий неоднородного и гомогенизированного материала и является обоснованием осреднения материала на основе задачи (1.5): для макрооднородного состояния энергии совпадают. Говорят, что это осреднение по энергии, хотя равенство энергий может трактоваться как важное следствие задачи (1.5). Поэтому получает смысл осредненное определяющее соотношение, которое для физически нелинейной среды записывается в виде [40]:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = F_{ij}(\langle \varepsilon \rangle). \quad (1.8)$$

В (1.8) напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} вычисляются по перемещениям, которые являются решениями краевой задачи (1.5). Следует отметить, что в отличие от случая линейной упругости, для физически нелинейного материала сложность гомогенизации состоит в выяснении вида функций F_{ij} в осредненном определяющем соотношении (1.8). Вид функций F_{ij} не следует из процедуры осреднения. В случае линейной теории упругости соотношения (1.8) и (1.6) приводят к конструктивному способу вычисления эффективных модулей упругости. Действительно, задавая ненулевые компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$, получаем

$$C_{ij\alpha\beta} = \langle \sigma_{ij} \rangle / \varepsilon_{\alpha\beta}^0.$$

Аналогично можно определить эффективные свойства податливости, если сформулировать краевую задачу:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) = 0, & \mathbf{x} \in V_{RVE}, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j = \sigma_{ij}^0(\mathbf{u})n_j, & \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Тогда эффективные функции податливости задаются выражением:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = G_{ij}(\langle \sigma \rangle).$$

Для задачи (1.9) выполняется равенство энергий (1.7) и

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0. \quad (1.10)$$

В случае линейной упругости эффективные податливости находятся как $S_{ij\alpha\beta} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle / \sigma_{\alpha\beta}^0$. Описанные методы получения эффективных свойств в [86] названы прямыми, хотя в силу выполнения равенства энергий (1.7) эти методы могут называться также энергетическими. Известные методы вычисления эффективных упругих модулей или податливостей используют точное или приближенное решение задач (1.5) или (1.9).

В [1; 13; 54] описано применение задачи (1.5) для вычисления эффективных упругих модулей и тензорного параметра Био пористых геоматериалов – скальных грунтов. Однако вычисление средних осуществлялось иначе. Дело в том, что для пористого материала равенство (1.7) не выполняется при определении осреднения в виде $\langle g \rangle = \frac{1}{V} \int_V g(\vec{x}) dV$, $V \geq V_{RVE}$. (1.4).

Далее в этом разделе приведем обоснование модификации вычисления средних для пористой среды по сравнению со сплошным неоднородным материалом. Задача в представительной области имеет вид

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) = 0, & \mathbf{x} \in V_s, \\ u_i = \varepsilon_{ij}^0(t)x_j, & \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE}, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j = 0, & \mathbf{x} \in \Sigma_p \end{cases} \quad (1.11)$$

В задаче (1.11) представительная область состоит из области материала (скелета пористой среды) и пор: $V_{RVE} = V_s \cup V_p$, где V_s – область скелета пористой среды, V_p – совокупная область пор. Полная поверхность скелета включает поверхность представительной области и поверхности пор: $\Sigma_s = \Sigma_{RVE} \cup \Sigma_p$. Проверим выполнимость равенств (1.6), (1.7) для пористой среды. Для проверки условия (1.6) имеем цепочку преобразований:

$$\begin{aligned}
\int_{V_s} u_{i,j} dV &= \int_{\Sigma_s} u_i n_j dV = \int_{\Sigma_{RVE}} u_i n_j dV + \int_{\Sigma_p} u_i n_j dV = \\
&= \varepsilon_{ik}^0 \int_{\Sigma_{RVE}} x_k n_j dV + \int_{\Sigma_p} u_i n_j dV = \varepsilon_{ij}^0 V_{RVE} + \int_{\Sigma_p} u_i n_j dV, \\
\int_{V_s} \varepsilon_{ij} dV &= \varepsilon_{ij}^0 V_{RVE} - \Delta_{ij},
\end{aligned}$$

где $\Delta_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_p} (u_i n_j^p + u_j n_i^p) dV$, а $\mathbf{n}^p = -\mathbf{n}$, \mathbf{n}^p – нормаль к границе пор, направленная в область твердой фазы. Следовательно, равенство (1.6), вообще говоря, не выполняется. В отличие от сплошного материала, в пористой среде средние по представительной области деформации не равны заданным на границе деформациям ε_{ij}^0 :

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_{RVE}} \varepsilon_{ij} dV = \varepsilon_{ij}^0 - \frac{\Delta_{ij}}{V_{RVE}}. \quad (1.12)$$

Таким образом, показано, что если граничные условия (1.5) не удовлетворяются на части поверхности представительной области, то это приводит к замене равенства (1.6) формулой (1.12). Невыполнение равенств (1.6) было отмечено в работах [36; 61] при анализе жесткостей гофрированных пластин, лицевые поверхности которых свободны от нагрузки. Как отмечено в [121], ключевым условием для определения эффективных свойств является равенство энергий (1.7).

Проверим выполнение условия (1.7). Для этого запишем преобразования, используя уравнения равновесия из (1.5):

$$\begin{aligned}
\int_{V_s} \sigma_{ij} u_{i,j} dV &= \int_{\Sigma_{RVE}} \sigma_{ij} u_i n_j d\Sigma + \int_{\Sigma_p} (\sigma_{ij} n_j) u_i d\Sigma = \\
&= \varepsilon_{ik}^0 \int_{\Sigma_{RVE}} x_k (\sigma_{ij} n_j) d\Sigma = \varepsilon_{ik}^0 \int_{\Sigma_{RVE}} x_k S_i^{(n)} d\Sigma,
\end{aligned}$$

где $\mathbf{S}^{(n)}$ – вектор поверхностных сил (реакций) на границе представительной области Σ_{RVE} , где заданы перемещения в виде (1.12). Следовательно,

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ik}^0 \int_{\Sigma_{RVE}} x_k S_i^{(n)} d\Sigma + \varepsilon_{jk}^0 \int_{\Sigma_{RVE}} x_k S_j^{(n)} d\Sigma \right). \quad (1.13)$$

Формула (1.13) может использоваться для вычисления средней энергии деформаций после решения задачи (1.11). Покажем явную связь этой энергии со средним напряжением.

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle V_{RVE} &= \int_{V_s} \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \varepsilon_{ik}^0 \int_{\Sigma_{RVE}} x_k (\sigma_{ij} n_j) d\Sigma = \\ &= \varepsilon_{ik}^0 \int_{\Sigma_{RVE}} (\sigma_{ij} x_k) n_j d\Sigma + \varepsilon_{ik}^0 \int_{\Sigma_p} x_k (\sigma_{ij} n_j) d\Sigma = \\ &= \varepsilon_{ik}^0 \int_{V_s} (\sigma_{ij} x_k)_{,j} dV = \varepsilon_{ik}^0 \int_{V_s} \sigma_{ij} x_{k,j} dV = \varepsilon_{ij}^0 \int_{V_s} \sigma_{ij} dV. \end{aligned}$$

В итоге получаем равенство энергий в виде

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle \varepsilon_{ij}^0. \quad (1.14)$$

Таким образом, для пористой среды за среднюю деформацию в представительной области следует принять ε^0 , а равенство энергий понимать в виде соотношения (1.14). Тогда задача (1.11) и соотношения $\langle \sigma_{ij} \rangle = F_{ij}(\varepsilon^0)$ могут служить для определения и вычисления эффективных нелинейных свойств пористого материала. Для линейно упругой среды эффективные упругие модули вычисляются по формуле $C_{ij\alpha\beta} = \langle \sigma_{ij} \rangle / \varepsilon_{\alpha\beta}^0$.

Обобщением задачи (1.5) на случай пористой среды служит краевая задача

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) = 0, & \mathbf{x} \in V_{RVE}, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j = \sigma_{ij}^0(\mathbf{u}) n_j, & \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE}, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j = 0, & \mathbf{x} \in \Sigma_p. \end{cases} \quad (1.15)$$

Сначала выясним, чему равняется среднее напряжение, т.е. выполняется ли равенство (1.10). Для этого проведем следующие выкладки.

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{ij} \rangle V_{RVE} &= \int_{V_s} \sigma_{ij} dV = \int_{V_s} \sigma_{ik} \delta_{jk} dV = \\
&= \int_{V_s} \sigma_{ik} x_{j,k} dV = \int_{\Sigma_s} (\sigma_{ik} n_k) x_j d\Sigma = \\
&= \sigma_{ik}^0 \int_{\Sigma_{RVE}} x_j n_k d\Sigma = \sigma_{ik}^0 \int_{V_{RVE}} x_{j,k} dV = \sigma_{ij}^0 V_{RVE}.
\end{aligned}$$

Полученное равенство означает выполнение условия (1.10) для пористой среды. Проверим выполнение равенства энергий.

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle V_{RVE} &= \int_{V_s} \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \int_{\Sigma_s} \sigma_{ij} u_i n_j d\Sigma = \\
&= \sigma_{ij}^0 \int_{\Sigma_{RVE}} u_i n_j d\Sigma = \sigma_{ij}^0 \int_{\Sigma_s} u_i n_j d\Sigma + \sigma_{ij}^0 \int_{\Sigma_p} u_i n_j^p d\Sigma = \\
&= \sigma_{ij}^0 \int_{V_s} u_{i,j} dV + \sigma_{ij}^0 \Delta_{ij} = \sigma_{ij}^0 \langle \varepsilon_{ij} \rangle V_{RVE} + \sigma_{ij}^0 \Delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для задачи (1.15) равенство энергий не выполняется, поэтому задачу (1.15) не следует использовать для вычисления эффективных свойств пористой среды.

Далее приведем расчеты, которые подтверждают теоретические выводы. В этих расчетах напряжения отнесены к пределу текучести σ_y . Масштабированные деформации получены делением деформаций на предел текучести ε_y . При вычислении осредненных диаграмм $\langle \sigma_{eqv} \rangle \sim \varepsilon_{eqv}^0$ для путей деформирования, описанных выше, использовалась задача (1.11). При применении МКЭ интегрирование заменено на суммирование средних по элементу. Обозначим среднее напряжение и средние деформации в i -ом элементе с объемом V_i как $\sigma_{\alpha\beta}^i$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}^i$ соответственно. Тогда расчетные формулы осредненных напряжений и деформаций можно записать следующим образом:

$$\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \sigma_{\alpha\beta}^i V_i, \quad \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \varepsilon_{\alpha\beta}^i V_i.$$

На примере задачи одноосного растяжения опишем разницу между вычисленной средней деформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ и заданной деформацией ε_{11}^0 . Поры были

выбраны в форме правильного тетраэдра с объемной концентрацией $n = 0.15$ (рисунок 1.10).

Решалась задача линейной упругости типа (1.11) с граничными условиями на поверхности Σ_{RVE} :

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon_{11}^0 x_1, \\ u_2 = u_3 = 0. \end{cases}$$

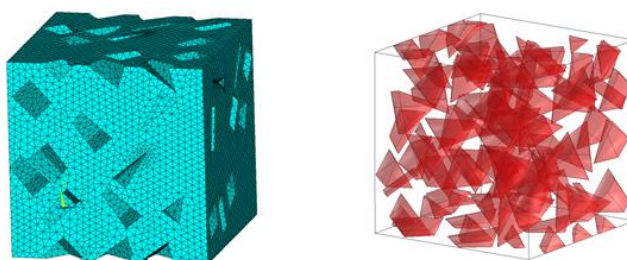


Рисунок 1.10. Представительная область с угловатыми порами и изображением конечно-элементной сетки (слева) и угловатые поры в представительной области (справа).

Вычислялись средние деформации в материале матрицы $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ и рассчитывалась относительная разница между заданной и средней деформацией:

$$\delta = \frac{|\langle \varepsilon_{11} \rangle - \varepsilon_{11}^0|}{\varepsilon_{11}^0} \cdot 100\%.$$

Результаты вычислений приведены в таблице 1.4. Видно, что осредненная осевая деформация не совпадает с заданной деформацией.

Таблица 1.4. Сравнение осредненной деформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ с ε_{11}^0 ($n = 0.15$)

ε_{11}^0	$\langle \varepsilon_{11} \rangle$	$\delta, \%$
0.005	0.00419	16.23

Результаты расчетов для различных концентраций пор представлены в таблице 1.5.

Таблица 1.5. Сравнение осредненной деформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ с ε_{11}^0 для различных концентраций пор n

$n, \%$	ε_{11}^0	$\langle \varepsilon_{11} \rangle$	$\delta, \%$
5	0.010	0.00945	5.47
10		0.00894	10.61
15		0.00838	16.23

Как видно в таблице 1.5, в рассмотренном диапазоне концентраций пор относительная разница между заданной и осредненной деформацией приблизительно пропорциональна величине объемной концентрации пор.

1.5. Упругопластические свойства материала матрицы

В данном разделе описан результат вычисления осредненной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций, т.е. анализ задачи, сформулированной в начале предыдущего раздела.

Рассматривается модельный материал матрицы. Предполагается, что материал матрицы упругопластический, описывается классической теорией течения при малых деформациях. Учитывается изотропное упрочнение. Единая кривая зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации для материала матрицы приведена на рисунке 1.11.

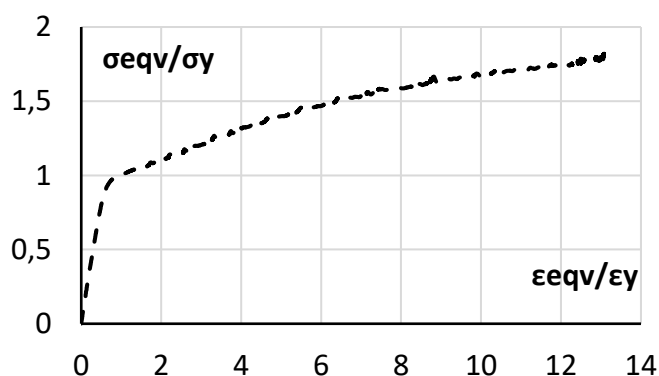


Рисунок 1.11. Зависимость безразмерного эквивалентного напряжения от масштабированной эквивалентной деформации для материала матрицы.

Интенсивности напряжений и деформаций мы определяем по формулам $\sigma_{и} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$, $\varepsilon_{и} = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}$. Они отличаются коэффициентами от эквивалентных по Мизесу напряжений и деформаций: $\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_{и}$, $\varepsilon_{eqv} = \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_{и}$. Безразмерные напряжения отнесены к пределу текучести по напряжениям в смысле эквивалентного напряжения σ_{eqv} . Деформации отнесены к пределу текучести относительно ε_{eqv} . Упругие свойства матрицы задаются величиной безразмерного модуля сдвига, определяемой по диаграмме на рис. 1, и величиной коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$.

Скорость деформации предполагается аддитивной и складывается из скоростей упругой деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ и пластической деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$: $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$.

Ассоциированный закон течения имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_{ij}, \chi)}{\partial \sigma_{ij}},$$

где $f(s_{ij}, \chi)$ – уравнение поверхности текучести с изотропным упрочнением:

$$f(s_{ij}, \chi) = s_{ij}s_{ij} - (k_0^2 + \chi(e_{ij}^p)),$$

где k_0 – начальный предел текучести Мизеса, связанный с пределом текучести при

одноосном растяжении σ_y : $k_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y$, $\chi(e_{ij}^p)$ – параметр расширения сферы

поверхности текучести, e_{ij}^p – компоненты девиаторов тензоров пластических

деформаций и напряжений соответственно: $e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}^p\delta_{ij}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$.

1.6. Зависимость осредненных диаграмм пористого материала и дисперсного композита от пути деформирования и объемной деформации

На рисунке 1.12 приведены вычисленные осредненные диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ для путей деформирования, показанных на рисунке 1.9.

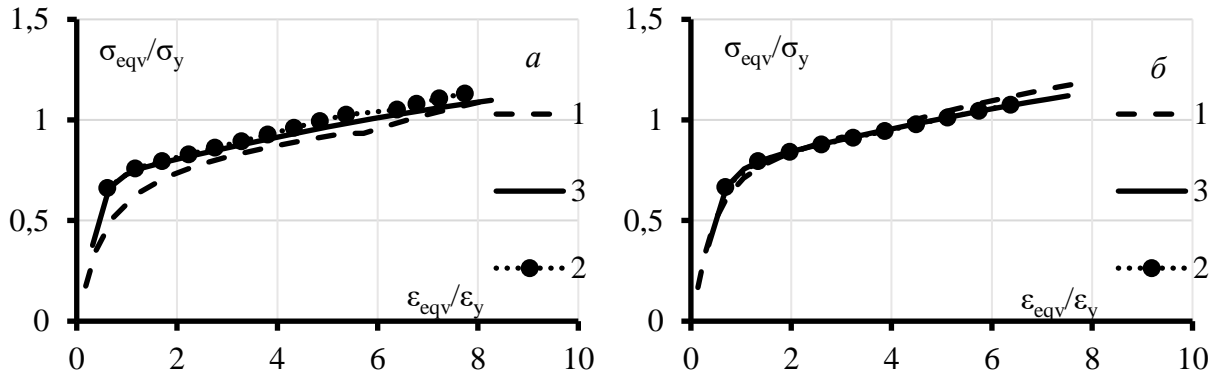


Рисунок 1.12. Осредненные диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ пористого материала с угловатыми (а) и эллипсоидальными (б) порами для разных путей деформирования: 1 – последовательные объемное сжатие, сдвиг, 2 – последовательные сдвиг, объемное сжатие, 3 – пропорциональное деформирование.

Для угловатых пор заметна разница в диаграммах, полученных при сложном пути деформирования в порядке объемное сжатие – сдвиг, по сравнению с диаграммами при других путях деформирования. Для угловатых пор диаграмма, соответствующая первому пути деформирования, идет ниже остальных, предел текучести снижается. При этом диаграммы отличаются не только в момент перехода из упругой в пластичную зону, но и при дальнейшем деформировании. Максимальная разница диаграмм для структуры с угловатыми порами составляет 29%, с эллипсоидальными порами – около 7%. В последнем случае зависимостью от пути деформирования можно пренебречь.

Проведены серии расчетов, определяющие зависимость безразмерных диаграмм $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ от величины объемного сжатия при сложном пути деформирования. Во всех численных экспериментах применялось деформирование с последовательным приложением деформаций: сначала объемное сжатие, потом сдвиг. Рассматривались следующие величины объемной деформации, отнесенной

к пределу текучести: $\theta_0 / \varepsilon_y = 0$, $\theta_0 / \varepsilon_y = 1.82$, $\theta_0 / \varepsilon_y = 3.64$. На рисунке 1.13 представлены результаты численных экспериментов для этих трех случаев.

Обнаружена следующая тенденция: с увеличением объемной деформации пластичность наступает при меньшем эквивалентном напряжении. Осредненные диаграммы для угловатой пористой структуры отличаются не только в момент перехода из упругой в пластическую область, но и при дальнейшем деформировании. Для величины $\theta_0 / \varepsilon_y = 1.82$ диаграмма $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ в начале деформирования в пластической области совпадает с диаграммой для величины $\theta_0 / \varepsilon_y = 3.64$, но по мере увеличения деформации приближается к диаграмме для величины $\theta_0 / \varepsilon_y = 0$. Максимальная разница диаграмм для структуры с угловатыми порами составляет около 30%, для эллипсоидальных пор – 8%.

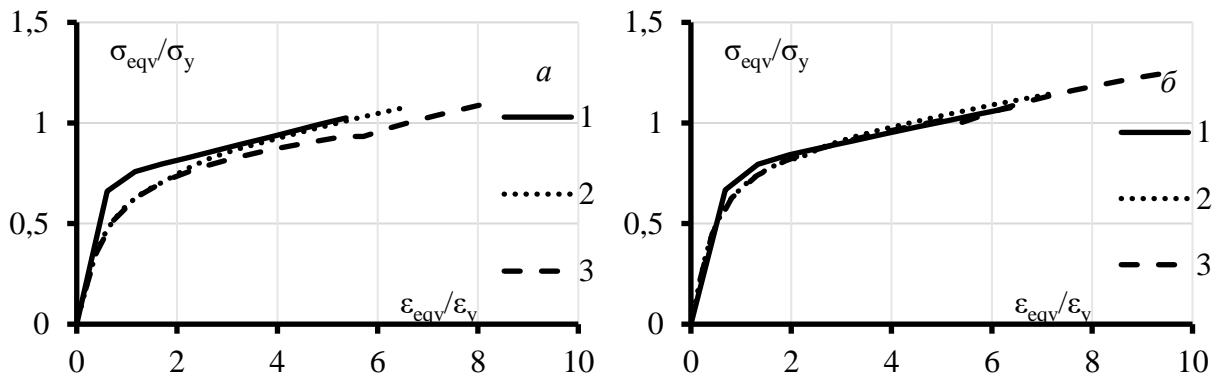


Рисунок 1.13. Осредненные диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ пористого материала с угловатыми (а) и эллипсоидальными (б) порами: 1 – $\theta_0 / \varepsilon_y = 0$, 2 – $\theta_0 / \varepsilon_y = 1.82$, 3 – $\theta_0 / \varepsilon_y = 3.64$.

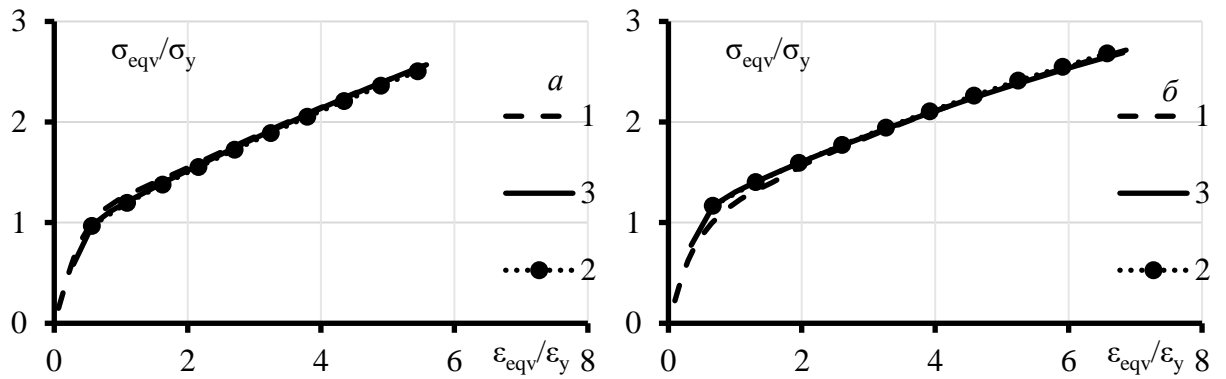


Рисунок 1.14. Осредненные диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ дисперсного композита с угловатыми (а) и эллипсоидальными (б) включениями для разных путей деформирования: 1 – последовательные объемное сжатие, сдвиг, 2 – последовательные сдвиг, объемное сжатие, 3 – пропорциональное деформирование.

Аналогичные численные эксперименты проведены с материалами, у которых поры заполнены упругим материалом. Другими словами, рассмотрены дисперсные композитные материалы с угловатыми и эллипсоидальными включениями. Модуль упругости включений принимался на порядок больше модуля упругости матрицы. Осредненные диаграммы, вычисленные при деформировании по рассмотренным выше путям деформирования, приведены на рисунке 1.14. Относительная разница в соответствующих диаграммах незначительна, особенно если сравнивать со случаем пористого материала.

Результаты серии расчетов, определяющих зависимость диаграмм $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ от величины объемного сжатия при сложном пути деформирования (последовательные объемное сжатие, сдвиг) приведены на рисунке 1.15.

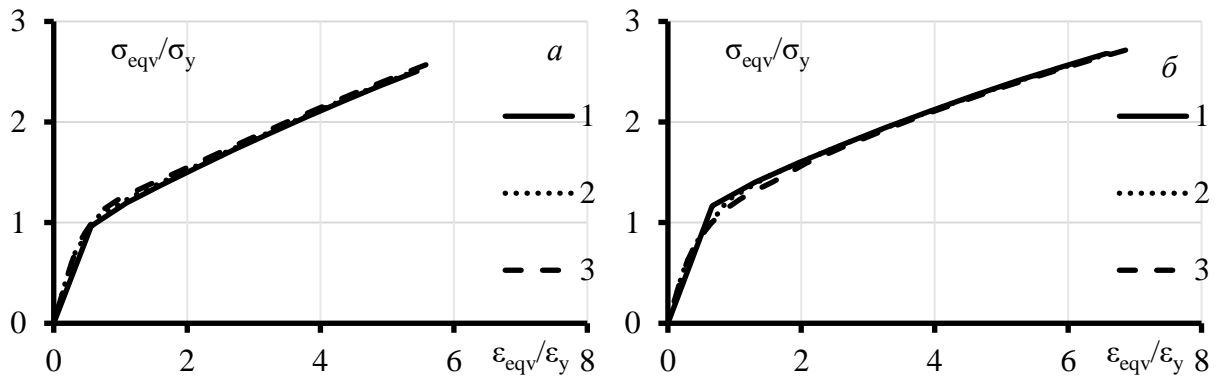


Рисунок 1.15. Осредненные диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ дисперсного композита с угловатыми (а) и эллипсоидальными (б) включениями: 1 – $\theta_0 / \varepsilon_y = 0$, 2 – $\theta_0 / \varepsilon_y = 1.82$, 3 – $\theta_0 / \varepsilon_y = 3.64$.

На рисунках 1.14 и 1.15 видно, что для дисперсного композита разница в осредненных диаграммах практически отсутствует как для различных путей деформирования, так и для разных значений объемной деформации.

Размер решаемых систем в среднем составлял около ста тысяч уравнений. Расчет на вдвое более мелкой сетке показал, что такое число степеней свободы достаточно для обеспечения достоверного анализа деформирования рассмотренных структур: изменение результатов не превысило 5%. Количество пор или включений в образцах составляло около 100 единиц. Увеличение размера представительной области до 200 пор или включений не привело к существенному изменению результатов вычислений. Поэтому приведенное количество включений признано достаточным для обеспечения достоверного анализа.

1.7. Идентификация параметров макромодели Друкера – Прагера с помощью вычислительных экспериментов на мезоуровне

Для описания эффекта снижения предела текучести с увеличением объемной деформации на макроуровне применена теория течения с критерием текучести Друкера – Прагера, для которой функция текучести имеет вид:

$$f = \sigma_{eqv} + \alpha \sigma - \sigma_y = 0.$$

Здесь коэффициент α определяет чувствительность к среднему гидростатическому напряжению, σ_y – предел текучести при одноосном сжатии, σ – среднее гидростатическое напряжение. Закон течения предполагается ассоциированным.

Использована модель степенного нелинейного изотропного упрочнения:

$$\frac{\sigma_y^{current}}{\sigma_y} = \left(\frac{\sigma_y^{current}}{\sigma_y} + \frac{3G}{\sigma_y} \varepsilon_{eqv}^p \right)^N, \quad (1.16)$$

где N – параметр модели, G – модуль сдвига материала, $\sigma_y^{current}$ – значение текущего предела текучести, соответствующее накопленной эквивалентной пластической деформации ε_{eqv}^p , σ_y – начальный предел текучести на диаграмме $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ (рисунок 1.11). Текущий предел текучести $\sigma_y^{current}$ на каждом этапе нагружения находится путем решения нелинейного уравнения (1.16) относительно $\sigma_y^{current}$.

С помощью подбора параметров макромодели удалось добиться совпадения результатов вычислений на мезоуровне (уровне структуры материала) с результатами вычислений однородного сплошного материала с применением модели Друкера – Прагера (на макроуровне). Для подбора параметров были использованы диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ для материала с угловатой пористой структурой, соответствующие сложному пути деформирования в порядке объемное сжатие, сдвиг (рисунок 1.13, а).

На рисунке 1.16 приведены графики зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации для материала с пористой угловатой структурой и его макромодели при различных величинах объемной деформации: $\theta_0 / \varepsilon_y = 0.91$ и $\theta_0 / \varepsilon_y = 2.73$. Совпадение результатов расчетов макромодели и модели на мезоуровне, учитывающей внутреннюю пористую структуру материала, имеет погрешность около 2%.

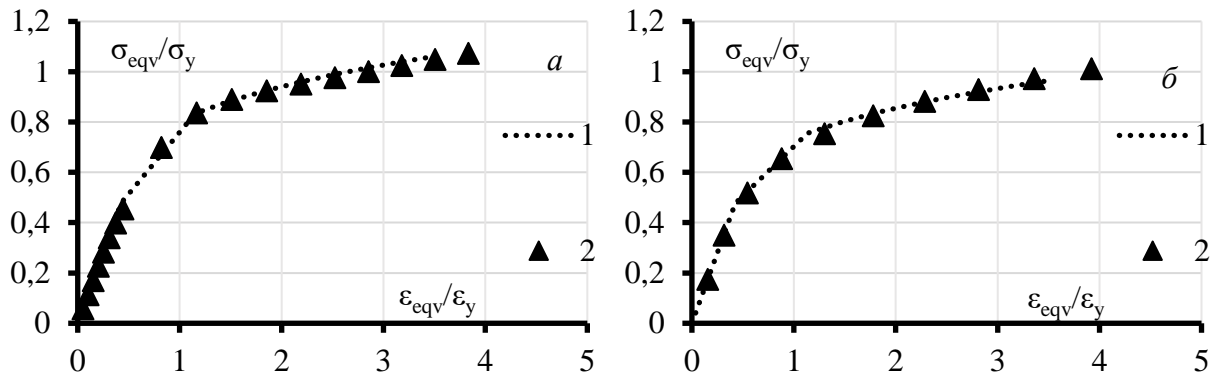


Рисунок 1.16. Сравнение диаграмм $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ макромодели (1) и структурной модели пористого материала с угловатыми порами (2): а) $\theta_0/\varepsilon_y = 0.91$, б) $\theta_0/\varepsilon_y = 2.73$.

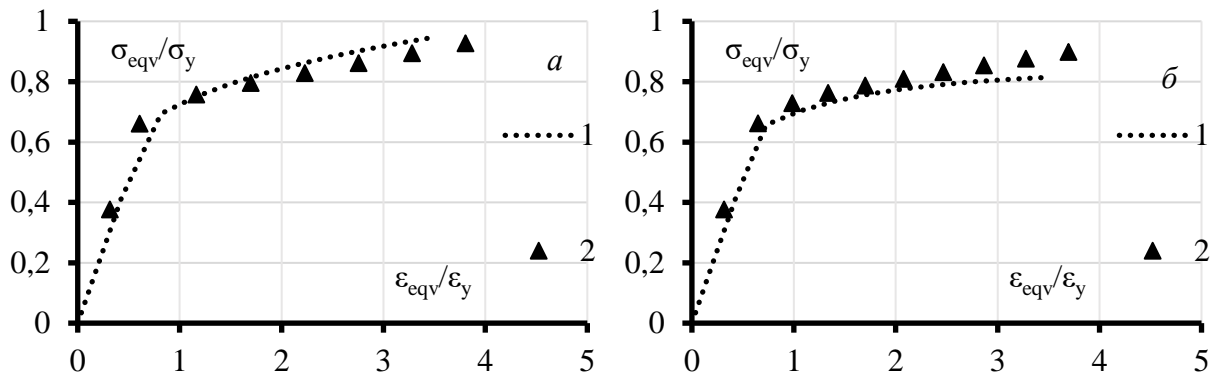


Рисунок 1.17. Сравнение диаграмм $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ макромодели (1) и структурной модели пористого материала с угловатыми порами (2) для разных путей деформирования: а) последовательные сдвиг, объемное сжатие, б) пропорциональное деформирование.

Используя найденные материальные параметры модели Друкера – Прагера для материала с угловатыми порами, проведено сравнение диаграмм $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$, полученных на макро и мезоуровне (рисунок 1.17).

Как видно на рисунке 1.17, разница между диаграммами осредненного материала и исходного пористого материала не превышает 5%.

В первой главе изложено применение асимптотического метода осреднения для определения эффективных упругих модулей дисперсных композитов. На примере композита $V_4C/2024Al$ выполнено сравнение эффективных модулей упругости, полученных для двумерных и трехмерных модельных структур, с аналогичными модулями, полученными из расчетов с реальной структурой и экспериментальными значениями. Показано, что эффективные модули,

рассчитанные на 3D модельной и реальной структурах, отличаются от экспериментальных данных не более чем на 1%. Модули, рассчитанные с помощью двумерных структур, отличаются от экспериментальных данных на величину до 9%. Поэтому все рассмотренные варианты моделирования могут быть применены на практике для вычисления эффективных упругих модулей композитных материалов. Двумерные задачи дают худшую точность, но могут быть актуальны в тех случаях, когда получение трехмерных конечно-элементных сеток, отображающих структуру материала, невозможно. Одной из причин недоступности трехмерных представительных областей с реальной структурой является высокая технологическая сложность получения послойных изображений структуры металломатричных композитов ввиду крайне существенных требований, предъявляемых к мощности используемого рентгеновского томографа.

Исследованы концентрации напряжений при статическом нагружении в композитном материале и показано существенное влияние формы включений на их значения. Для реальной структуры концентрации напряжений оказались больше в пять раз по сравнению с модельной структурой. Таким образом расчеты, требующие учета концентраций напряжений и деформаций, например моделирование зарождения повреждений в материале, требуют учета реальной структуры.

Для пористых и композитных материалов изучено влияние сложного пути деформирования, сочетающего объемное сжатие и сдвиг, на вид осредненной диаграммы напряжение – деформация. Численно показано, что наличие угловатых пор в упругопластической матрице, описываемой пластичностью Мизеса (без зависимости пластических свойств от первого инварианта напряжений) приводит к возникновению макросвойств зависимости кривой напряжение – деформация от величины первого инварианта напряжений. Получено, что диаграммы «напряжение-деформация» для различных путей деформирования и величин объемной деформации могут отличаться на величину до 30%. В пористых

материалах с эллипсоидальными порами и композитных материалах с угловатыми и гладкими включениями зависимости свойств от объемного сжатия не обнаружено.

На основе серий вычислительных экспериментов с пористым материалом с угловатыми порами выполнена идентификация параметров макромодели Друкера–Прагера. Расчеты на мезоуровне с учетом структуры и макроуровне осредненного материала совпали с точностью до 5%. Отсюда можно сделать вывод, что свойства зависимости диаграммы напряжение – деформация материала с угловатыми порами могут быть описаны при помощи макромодели Друкера–Прагера.

Глава 2. Вычисление диаграммы напряжение – деформация композитных и пористых материалов с учетом поврежденности

В главе 2 использованы результаты работ [26; 28; 59; 177].

2.1. Обзор литературы

При деформировании в материале могут возникать повреждения, не приводящие к мгновенному разрушению всего образца, но способные существенно изменить его механические свойства, например снизить модуль упругости или предел текучести. К таким повреждениям относятся образованные поры, микротрещины, неоднородности и другие дефекты материала, которые можно исследовать при помощи современных экспериментальных методов и инструментов, например при помощи сканирующего электронного микроскопа [126]. Одним из методов исследования свойств снижения жесткости материала при деформировании является решение жесткопластических задач. В работе [49] проводится сравнение аналитических решений жесткопластической схемы с численными решениями упругопластических задач на основе сравнения форм и размеров областей пластичности.

Существуют методы явного учета таких распространенных дефектов, как трещины, при решении задач определения НДС в материале. Например, в работах [20; 53] рассматриваются численные методы исследования свойств материала с трещинами различных форм и ориентации на модельных задачах. Однако при численном решении задач с композитными материалами применение методов на основе распространения трещин может быть затруднено из-за сложной геометрической структуры материала (например, $V_4C/2024Al$) и большого числа зарождающихся и развивающихся дефектов в представительной области.

При решении задач с учетом дефектов материала возникает идея описать поведение материала с развивающимися повреждениями с помощью «средних» параметров. Подходы, связанные с учетом «распределенных» накопленных

повреждений в материале, развиваются достаточно давно. Основы механики разрушения сплошных сред, учитывающей распределенные повреждения, были заложены в работах Л.М. Качанова [22] и Ю.Н. Работнова [44] в 1950-1960 гг. при помощи введения скалярных параметров поврежденности и сплошности, характеризующих степень повреждений в материале. В дальнейшем эти идеи получили развитие в работах Л.М. Качанова [23; 24] и Ю.Н. Работнова [42; 43; 45; 46]. В работах А.А. Ильюшина исследуется случай анизотропного повреждения с введением тензора поврежденности второго ранга [21].

Существенную роль в развитии моделирования прогрессирующего разрушения в рамках МКЭ сыграли работы В. Твергаарда и А. Ниделмана [154; 183; 185]. В этих работах предложено расширение классической модели Гурсона описания пластичности пористых материалов: введение поправочных коэффициентов, учитывающих зарождение, рост, слияние микропор, ускоренное разрушение после достижения критического объема пор. Параметр модели – пористость $f \in [0,1]$, вычисляемая в ходе решения и отвечающая за инициирование и развитие поврежденности в каждой точке материала. Эта модифицированная модель получила название модели Гурсона–Твергаарда–Нидлмана (GTN). В работе проведена имплементация модели в МКЭ, приведены численные примеры разрушения образцов, отмечена зависимость решения от размера КЭ.

В работах [83; 84; 163] отмечается зависимость численного решения от размера КЭ при разрушении материала в гауссовых точках (точках интегрирования). Поэтому предложено сделать процесс учета разрушения нелокальным – определять разрушенные точки по средним напряжениям по области.

Рассмотренное моделирование поврежденности материала называют в литературе прогрессирующим разрушением [52; 54; 70; 82]. В статье [52] исследуются подходы к моделированию разрушения при решении задач методом конечных элементов: деградация свойств во всем конечном элементе и деградации свойств в точках интегрирования. Показана разница двух методов: график сила-

перемещение при разрушении конечного элемента падает быстрее, чем при разрушении в точке интегрирования, быстрее наступает полное разрушение образца.

Экспериментальное исследование деформированной микроструктуры, определение типов и количества повреждений при различных НДС рассматриваемого в первой главе композитного материала $V_4C/2024Al$ является значимой областью современных исследований [152; 158; 181]. Выделяются основные типы механического разрушения – это хрупкое разрушение включений, отслоение на границе фаз материалов, трещины в матрице [77]. Также обращается внимание на учет различного поведения материала при сжатии и растяжении в расчетах [70]. В работах [37; 51] методом конечно-элементного моделирования исследованы закономерности локализации пластической деформации и получены количественные зависимости накопления поврежденности в матрице в аналогичном упомянутому металломатричном композите Al/SiC при различных видах нагружения (сжатие, растяжение, сдвиг) с учетом реальной микроструктуры материала.

В [82] проведено вычисление эффективных диаграмм, основанное на искусственно созданной структуре композита, похожей на структуру V_4C/Al . Показано, что сложная геометрическая форма включений требует учета при моделировании поврежденности на мезоуровне: из-за сложной геометрической формы при растяжении в V_4C могут возникать области сжатия, а при сжатии, наоборот, области растяжения. При численном решении задач одноосного растяжения искусственной структуры наблюдаются более существенные различия с экспериментальными данными в диаграммах эффективных интенсивностей напряжений – деформаций по сравнению с аналогичными расчетами с учетом реальной структуры включений.

В работе [63] при численном исследовании НДС в металлокерамическом композите $TiNi-TiB_2$ отмечается эффект возникновения зон растяжения-сдвига на границах фаз композита при сжатии образца на макроуровне. Следует отметить,

что для описания неупругого деформирования включений и матрицы в работе [63] используется неассоциированная теория течения с функцией текучести Мизеса-Шлейхера.

В работе [128] исследуется возможность применения модельных структур для вычисления эффективной диаграммы напряжение – деформация материала В₄С/2024А1 при учете прогрессирующего разрушения. Делается вывод о несоответствии расчетной и экспериментальной диаграмм напряжение – деформация при использовании модельных структур в расчете.

2.2. Алгоритм численного моделирования прогрессирующего разрушения

Прогрессирующее разрушение можно считать численным алгоритмом, реализующим поврежденность материала в рамках метода конечных элементов. Алгоритм состоит в деградации (уменьшении) упругих модулей, если выполнен тот или иной критерий разрушения в данный момент нагружения. Критерии разрушения могут быть различными для изотропных материалов и тем более для анизотропных. Более важно, что выполнение критерия в каждом КЭ можно проверять различным образом. В литературе известны следующие алгоритмы моделирования прогрессирующего разрушения. Первый метод (далее в работе он будет обозначаться Алгоритм I) состоит в том, что критерий разрушения проверяется отдельно в каждой точке интегрирования (гауссовой точке) конечного элемента. Соответственно, деградация происходит или не происходит в каждой гауссовой точке независимо от других гауссовых точек того же КЭ. Второй вариант (далее Алгоритм II) отличается от первого тем, что критерий разрушения проверяется в среднем для всех гауссовых точек КЭ. Материальные параметры деградируют (уменьшаются) во всем элементе, т.е. во всех гауссовых точках. Оба эти варианта обладают тем недостатком, что процесс развития зоны поврежденности материала оказывается зависящим от размеров конечных элементов. Поэтому рассмотрен третий вариант (далее Алгоритм III), в котором разрушение происходит в области фиксированного размера с центром в гауссовой точке. При использовании этого алгоритма вокруг каждой точки интегрирования

строится область заданного размера. После получения решения на текущем шаге нагружения, определяется среднее НДС в каждой такой области. При выполнении критерия разрушения для среднего по области материальные параметры деградируют во всех точках интегрирования, попавших в эту область. Это модель нелокального разрушения. Размер области разрушения является параметром вычислительного метода, так же как и характерный размер конечных элементов. Область разрушения может захватывать некоторое количество конечных элементов. В этом подходе область разрушения почти не зависит от размеров конечных элементов.

В данной работе при описании деформирования композиционного материала учитывается повреждение включений и матрицы. Предполагается, что включения проявляют упругие свойства вплоть до разрушения, а матрица обладает упругопластическими свойствами.

Разрушение во включении происходит, если эквивалентные напряжения достигают критического значения

$$\sigma_{eqv} = \sigma_{eqv}^{crit}, \quad (2.1)$$

где критериальное значение может определяться:

$$\sigma_{eqv}^{crit} = \begin{cases} \sigma_{eqv}^+, & \theta > \delta \\ \sigma_{eqv}^0, & |\theta| \leq \delta \\ \sigma_{eqv}^-, & \theta < -\delta \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь θ – относительное изменение объема, как оно определено в теории малых деформаций. Параметры σ_{eqv}^+ , σ_{eqv}^0 , σ_{eqv}^- соответствуют прочности материала на сдвиг при объемном растяжении, нулевой объемной деформации, объемном сжатии соответственно.

Альтернативным вариантом определения критериального значения эквивалентного напряжения является непрерывная зависимость:

$$\sigma_{eqv}^{crit} = \sigma_{eqv}^- + \frac{\sigma_{eqv}^+ - \sigma_{eqv}^-}{1 + e^{-\alpha \frac{\theta}{\theta_0}}},$$

где величины θ_0, α определяют свойства переходного интервала между критериальной величиной разрушения при объемном сжатии и растяжении.

Связь между объемной деформацией и средним гидростатическим напряжением принимается упругой: $\sigma = K\theta$, $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$, $\theta = \varepsilon_{kk}$. Величины σ_{eqv} , ε_{eqv} – эквивалентные по Мизесу напряжение и деформация:

$$\sigma_{eqv} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}, \quad \varepsilon_{eqv} = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}},$$

s_{ij} – девиатор тензора напряжений: $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$. Выбор критериального значения напряжения позволяет учесть, что прочность включений на сдвиг при сжатии σ_{eqv}^- существенно больше, чем при растяжении σ_{eqv}^+ . Поэтому величина критериального напряжения зависит от знака объемной деформации, что соответствует прочности карбида бора [70].

Предполагается, что разрушение матрицы происходит при достижении заданной величины полных деформаций:

$$\varepsilon_{eqv} = \varepsilon_{eqv}^{crit}$$

Процедура решения задачи реализована в цикле, который можно описать следующей последовательностью действий на каждом шаге по параметру нагружения: приращение нагрузки, решение краевой задачи, определение разрушенных гауссовых точек, деградация свойств в этих точках, переход к следующему шагу. Деградация означает, что в разрушенных точках интегрирования: 1) уменьшаются касательные модули; 2) происходит обнуление напряжений. Например, в упругом случае деградация модулей описывается уравнением:

$$G^{\text{deg}} = c_{\text{deg}}^{\sigma_{\text{eqv}}} G, \quad K^{\text{deg}} = c_{\text{deg}}^{\theta} K, \quad c_{\text{deg}}^{\sigma_{\text{eqv}}, \theta} = \begin{cases} c_{+}^{\sigma_{\text{eqv}}, \theta}, & \theta > 0 \\ c_{0}^{\sigma_{\text{eqv}}, \theta}, & \theta = 0 \\ c_{-}^{\sigma_{\text{eqv}}, \theta}, & \theta < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

где G, K – начальные модули материала, $G^{\text{deg}}, K^{\text{deg}}$ – деградированные модули, c_{deg} – параметр деградации, близкий к нулю. Этот параметр, вообще говоря, различен для состояния всестороннего сжатия и растяжения. В наших расчетах они были выбраны одинаковыми для сдвиговых и объемных модулей. В случае упругопластической матрицы, описываемой теорией Мизеса, деградирует текущий касательный модуль.

Таким образом, материал включений остается упругим, пока не выполнится критерий разрушения (2.1). Затем происходит мгновенное уменьшение накопленного напряжения, уменьшение модулей упругости, и материалу присваиваются деградированные модули упругости согласно соотношениям (2.3).

Рассматриваемые в работе варианты учета поврежденности отличаются алгоритмом выбора точек интегрирования для области разрушения, как это было описано выше. В первом методе материал разрушается в каждой точке интегрирования отдельно, во втором – точки объединены по конечному элементу: вычисляется среднее эквивалентное напряжение для всех точек в элементе, для этой величины проверяется критерий разрушения. В случае выполнения критерия свойства материала деградируют во всех точках интегрирования в конечном элементе. Третий метод прогрессирующего разрушения предполагает задание области разрушения материала (сферы или окружности фиксированного радиуса в случае изотропного материала) вокруг каждой точки интегрирования. На шаге нагружения деградация свойств происходит в области разрушения вокруг точки интегрирования, если критерий разрушения выполняется в среднем в этой области. В случае выполнения критерия разрушения для среднего напряжения по всем точкам интегрирования, попадающим в область разрушения, напряжения обнуляются и материалу присваивается деградированные касательные модули.

Размер (радиус) области разрушения может быть определен в ходе сравнения характера разрушения материала, наблюдаемого в реальных и вычислительных экспериментах.

Схематично зависимость эквивалентных напряжений от эквивалентных деформаций в упругих включениях, полученная в результате применения рассматриваемого алгоритма разрушения, изображена на рисунке 2.1.

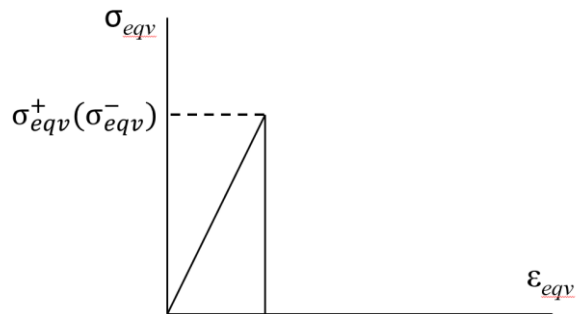


Рисунок 2.1. Диаграмма напряжение – деформация упругого материала с учетом деградации свойств.

2.3. Численные эксперименты на модельных задачах

С целью сравнения описанных алгоритмов прогрессирующего разрушения проведены серии численных экспериментов на примере двумерных модельных задач. Первой решена задача растяжения упругого образца, показанного на рисунке 2.2.

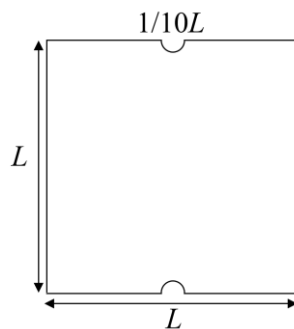


Рисунок 2.2. Геометрические характеристики образца для численного эксперимента для сравнения алгоритмов прогрессирующего разрушения.

Для примера использована двумерная квадратная область с вырезами в форме полукругов радиуса $r = 0.1L$ на верхней и нижней границах. Длина стороны

квадрата равна L . В ходе каждого эксперимента образец подвергался одноосному растяжению вдоль горизонтальной оси. Задача решалась в квазистатической постановке и в предположении геометрической линейности. Материал предполагается изотропно упругим вплоть до разрушения. Критерий разрушения приведен в (2.1). Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad x = 0, \\ u_1 &= u^0(t), \quad \sigma_{12} = 0, \quad x_1 = L, \\ \sigma_{22} &= 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad x_2 = L. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Дискретизация выполнялась линейными конечными элементами в предположении плоской деформации. Деформирование продолжалось до полного разрушения образца, т.е. до возникновения сплошной поперечной трещины. В численных экспериментах менялись размер зоны разрушения d , равный εl , и характерный размер конечных элементов l_e .

В результате расчетов обнаружено возникновение и развитие расположенной вертикальной зоны поврежденности в средней части образца. Численные эксперименты показали, что форма этой области слабо зависит от величины параметров деградации и выбранного метода прогрессирующего разрушения. На рисунке 2.3 приведена типичная картина развития поврежденности в образце.

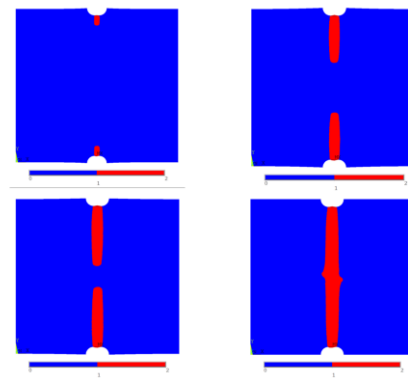


Рисунок 2.3. Развитие области повреждения в образце в процессе деформирования. Алгоритм I. Синее – неразрушенные области, красное – разрушенные.

Были проведены опыты по разрыву образцов из картона с аналогично центрально расположенными полукруглыми выточками на верхней и нижней

границах образца. Процесс нагружения производился по перемещениям с постоянной скоростью до полного разрушения образца. Фотография разрушенного образца приведена на рисунке 2.4.



Рисунок 2.4. Фотография разрушенного опытного образца с центрально расположенными выточками.

Результаты эксперимента на одноосное растяжение образца из картона с выточками, расположенными друг напротив друга, качественно соответствуют рассчитанной схеме повреждений, приведенной на рисунке 2.3: от вершин выточек развивается одна область разрушения.

Проведены серии расчетов при различных параметрах размера КЭ l_e , являющегося параметром численного метода. Для каждого из рассматриваемых методов прогрессирующего разрушения на каждом шаге по нагрузке после решения краевой задачи проводилась проверка критерия разрушения (2.1). Следует отметить, что третий вариант, как и ожидалось, требует больше компьютерного времени.

На рисунке 2.5 приведены графики зависимости безразмерных осредненных эквивалентных напряжений от осредненных эквивалентных деформаций в процессе нагружения и развития зоны поврежденности для трех вариантов прогрессирующего разрушения. Обезразмеривание напряжений проводилось относительно наибольшего достигнутого напряжения в каждой серии расчетов. Деформации масштабировались относительно деформации, соответствующей этому максимальному напряжению. Эти величины обозначены σ_0 и ε_0 соответственно.

Сплошной и пунктирными линиями обозначены результаты расчетов для различных размеров конечных элементов l_e .

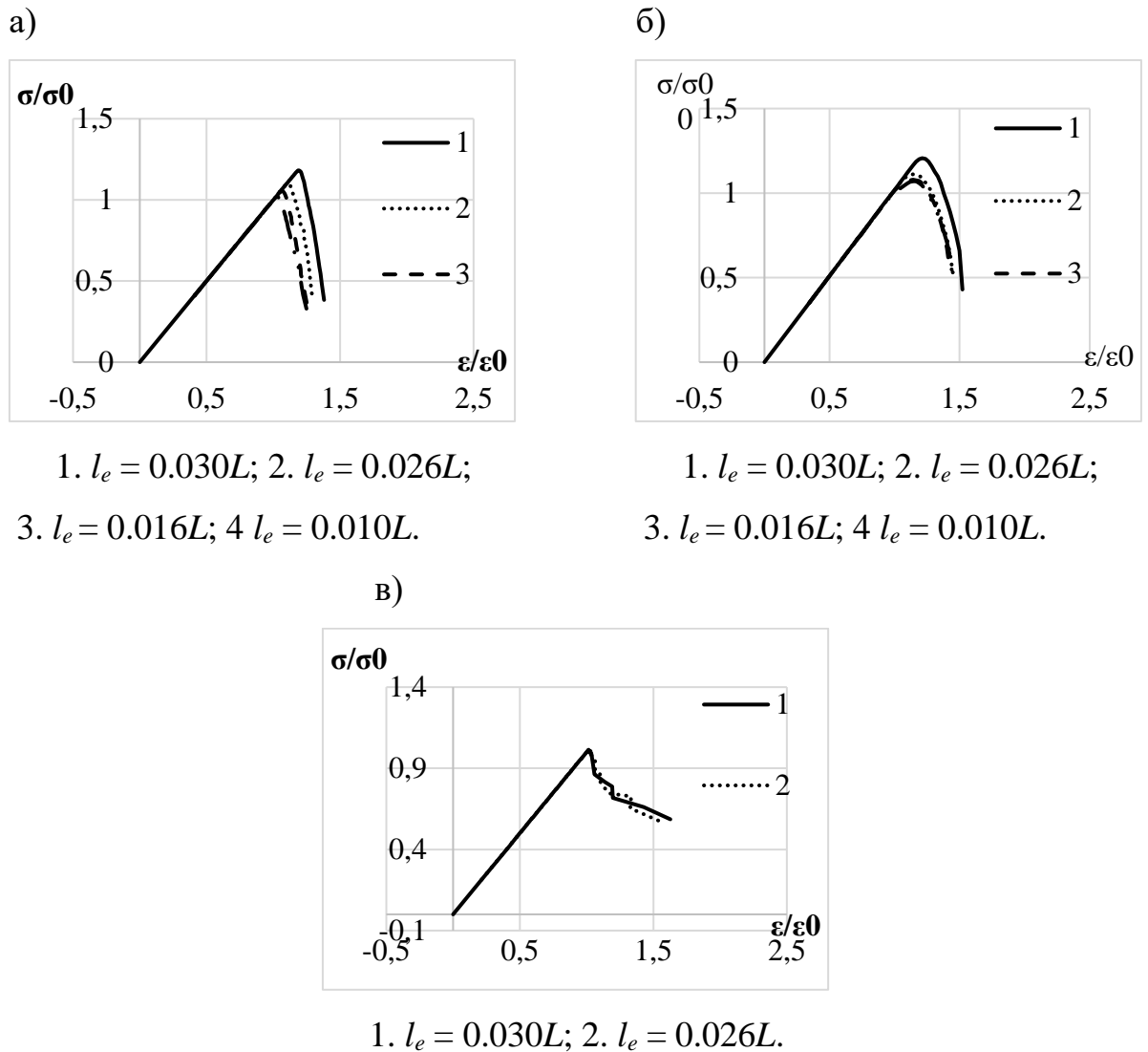


Рисунок 2.5. Графики зависимости осредненных эквивалентных напряжений от деформаций: а) Алгоритм I, б) Алгоритм II, в) Алгоритм III.

Из рисунка 2.5а следует, что при использовании первого алгоритма прогрессирующего разрушения (разрушения в точках интегрирования) при меньших размерах КЭ осредненные диаграммы напряжение – деформация проходят ниже, чем при больших КЭ. Сходимость кривых четко не наблюдается. При уменьшении размера конечного элемента наблюдается сохраняющееся отличие в полученных напряжениях при равных деформациях до 10%. На рисунке 2.5б графики построены для случая разрушения конечного элемента целиком. Видно, что диаграммы напряжение – деформация различаются при различных

размерах сетки. При больших КЭ разрушение образца происходит при больших средних напряжениях. Однако при уменьшении среднего размера КЭ зависимость кривых от этого размера пропадает. Практически совпадают напряжения, при которых образец начинает разрушаться. Также практически совпадают падающие участки кривых, разница составляет около 1%. Результаты применения алгоритма III (разрушение области фиксированного размера), показанные на рисунке 2.5в, отличаются от описанных выше первых диаграмм менее выраженной зависимостью вида полученных диаграмм от размера КЭ. Момент начала разрушения почти не зависит от размера сетки, после начала разрушения диаграммы, соответствующие расчетам с наименьшим размером КЭ, проходят достаточно близко друг к другу, различие появляется в конце диаграмм в моменты, соответствующие полному разрушению образца. На ниспадающих участках диаграмм, соответствующих процессу разупрочнения образца до момента полного разрушения, относительная разница в полученных средних напряжениях в расчетах с наименьшими размерами конечных элементов не превысила 5%.

Проведено исследование зависимости результатов расчета алгоритмом разрушения области фиксированного размера от параметра метода – размера области разрушения. На рисунке 2.6 показаны диаграммы напряжение – деформация, полученные при применении алгоритма к рассматриваемой задаче при различных размерах области разрушения.

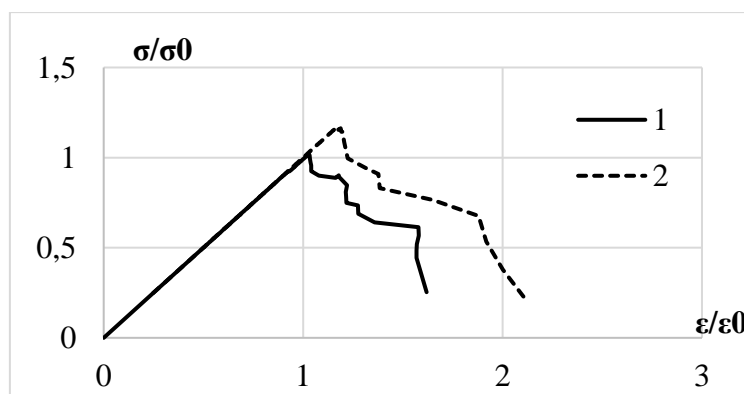


Рисунок 2.6. Графики зависимости осредненного эквивалентного напряжения от эквивалентной деформаций. Алгоритм III. Средний размер КЭ для обоих расчетов одинаковый. Радиус области разрушения изменяется: 1) радиус области = $0.03L$; 2) радиус области = $0.05L$.

Из сравнения диаграмм, приведенных на рисунке 2.6, следует, что с увеличением радиуса области разрушения увеличивается величина осредненного напряжения, соответствующая началу разрушения в образце. Области диаграмм, соответствующие процессу образования повреждений в образце, остаются похожими.

Проведено исследование влияния параметра c_{deg} на решение тестовой задачи на примере Алгоритма II. Параметр принимал значения, равные $1E-06$ и $1E-05$, то есть был увеличен на один порядок для анализа. Результаты приведены на рисунке 2.7.

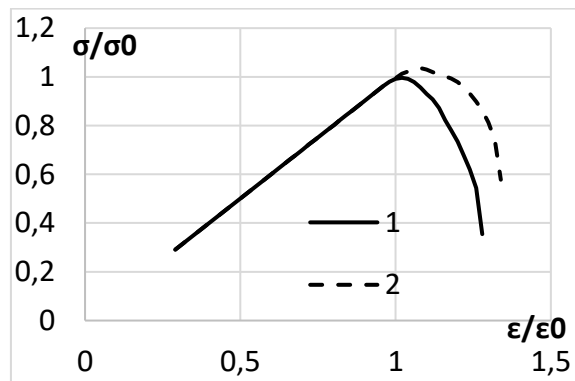


Рисунок 2.7. Сравнение результатов расчетов с различными величинами параметра деградации. 1- $c_{deg} = 1E-06$, 2- $c_{deg} = 1E-05$.

Видно, что увеличение параметра c_{deg} приводит к небольшому увеличению максимального достигнутого напряжения и более пологому участку разупрочнения на диаграмме.

Таким образом, показано, что вариант прогрессирующего разрушения КЭ целиком может представляться оптимальным. Он удовлетворяет требованию сеточной сходимости, прост в реализации, не требует затраты больших вычислительных ресурсов.

Вторая модельная задача отличается от первой несимметричным расположением вырезов. Единственное отличие задачи заключается в расположении вырезов: в первой задаче вырезы находились по середине границ, во

второй смещены относительно середины на одинаковые расстояния в разные стороны. Несимметричный образец приведен на рисунке 2.8.

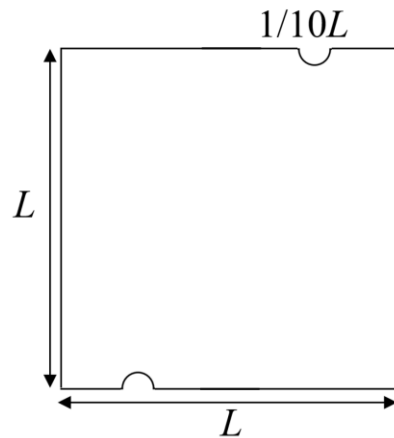


Рисунок 2.8. Геометрические характеристики несимметричного образца.

Изображения развития областей повреждений для задачи аналогичны первому случаю. Эти области слабо зависят от выбранного варианта прогрессирующего разрушения и представлены на рисунке 2.9.

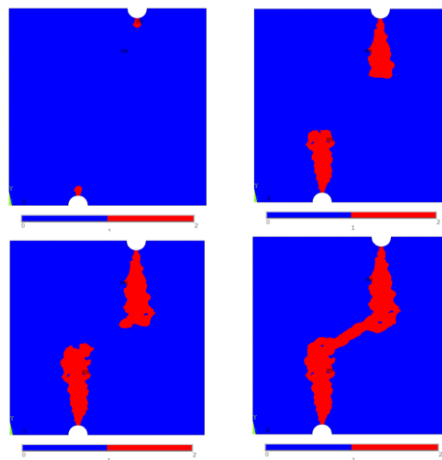


Рисунок 2.9. Развитие области повреждения в несимметричном образце в процессе деформирования. Алгоритм I. Синее – неразрушенные области, красное – разрушенные.

Видны вертикально распространяющиеся области разрушения вблизи каждого выреза. В момент начала полного разрушения образца области меняют направление распространения и двигаются под углом навстречу друг другу.

Исследован вопрос зависимости схемы разрушения образца от наличия дефектов на границе одной из выточек. Для этого модули элементов вблизи

вершины выточки были умножены на близкую к нулю величину, имитируя уже разрушенный материал перед началом расчета. Решалась задача одноосного растяжения. Геометрические характеристики рассматриваемого образца и конечно-элементная сетка с отмеченными предварительно разрушенными элементами приведены на рисунке 2.10.

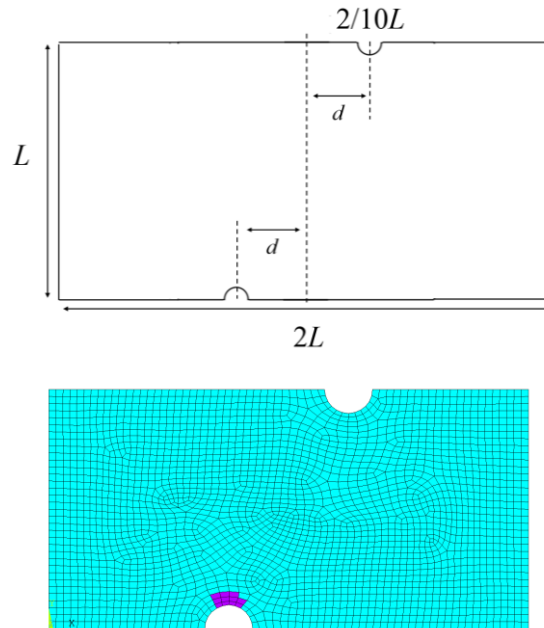


Рисунок 2.10. Геометрические характеристики (сверху) и конечно-элементная сетка (снизу) с предварительно разрушенными элементами (фиолетовые) образца.

В расчете использовался алгоритм II. Средний размер конечных элементов был выбран равным $0.03L$. Упругие модули предварительно разрушенных элементов были умножены на 10^{-5} .

На рисунке 2.11 приведена полученная в результате расчета область разрушения. Наличие дефектов в виде разрушенных конечных элементов приводит к возникновению вертикально расположенной области разрушения, развивающейся от одной из выточек.

В ходе исследования был проведен аналогичный опыт по одноосному растяжению образца из картона с двумя смещенными выточками на верхней и нижней границах. Процесс нагружения производился по перемещениям с постоянной скоростью до полного разрушения образца. Фотография разрушенного образца приведена на рисунке 2.12.

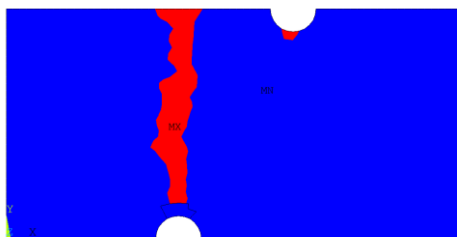


Рисунок 2.11. Область повреждения (красное) в образце с дефектом в одной выточке. Алгоритм II.

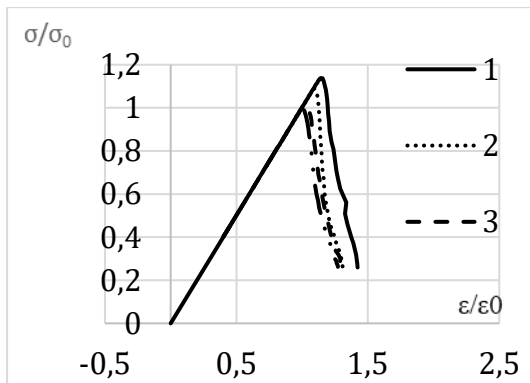


Рисунок 2.12. Фотография разрушенного образца со смещенными выточками.

Результаты опыта показывают наличие одной вертикальной области разрушения, начинающейся из вершины одной из выточек. Учет наличия в образце несовершенства, возникающего при подготовке к опыту, позволяет достичь качественного соответствия расчета и эксперимента.

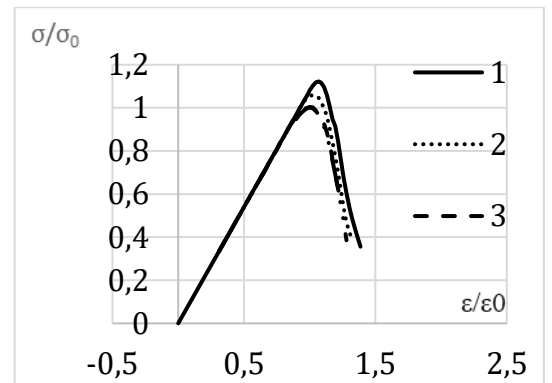
На рисунке 2.13 приведены графики зависимости осредненных напряжений – деформаций для несимметричного образца без добавленных несовершенств (схема разрушения такого образца приведена на рисунке 2.9) при расчетах с учетом различных методов разрушения и с различными размерами конечных элементов.

а)



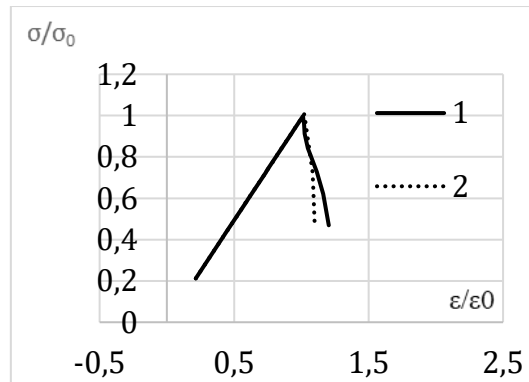
1. $l_e = 0.030L$; 2. $l_e = 0.026L$;
3. $l_e = 0.016L$; 4. $l_e = 0.010L$.

б)



1. $l_e = 0.030L$; 2. $l_e = 0.026L$;
3. $l_e = 0.016L$; 4. $l_e = 0.010L$.

в)



1. $l_e = 0.030L$; 2. $l_e = 0.026L$.

Рисунок 2.13. Графики зависимости осредненных эквивалентных напряжений от деформаций: а) Алгоритм I, б) Алгоритм II, в) Алгоритм III.

Аналогично первой задаче, результат применения метода разрушения в точке интегрирования существенно зависит от размера конечного элемента. При уменьшении конечного элемента вплоть до $0.01L$ разница в диаграммах сохраняется около величины 10%. Результат применения метода деградации всего конечного элемента так же зависит от размера КЭ, но наблюдается сеточная сходимость: при уменьшении КЭ вплоть до $0.01L$ разница в диаграммах практически пропадает и составляет около 2%. Результаты применения метода разрушения области фиксированного размера практически не зависят от размера КЭ. При изменении размеров КЭ на 15% разница в диаграммах не превышает 3%.

Таким образом, проведен сравнительный анализ трех методов прогрессирующего разрушения. Задачи решались с помощью рассмотренных методов учета прогрессирующего разрушения. Формы областей разрушения слабо зависят от выбранного метода разрушения: для первой задачи разрушенная область являлась вертикальной линией, для второй – ломаная, состоящая из вертикальных и наклонного участков.

Третья модельная задача заключается в одноосном растяжении образца с круглым вырезом в середине. Схематично образец представлен на рисунке 2.14.

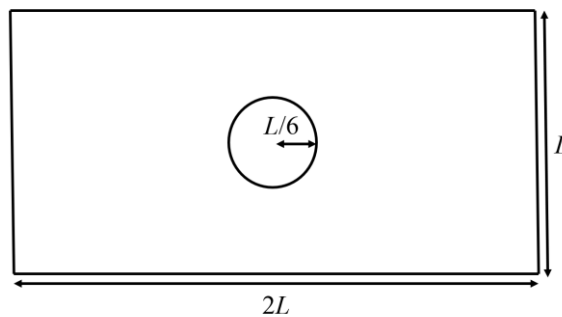


Рисунок 2.14. Геометрические характеристики образца с вырезом в середине.

Использована двумерная прямоугольная область с вырезом в форме круга радиуса $r = L/6$ в середине образца. Высота и ширина прямоугольника равны L и $2L$ соответственно. Аналогично рассмотренным задачам в ходе каждого эксперимента образец подвергался одноосному растяжению вдоль горизонтальной оси. Как и предыдущие две задачи, эта задача решалась в квазистатической постановке и в предположении геометрически линейной теории упругости. Материал предполагается изотропно упругим вплоть до разрушения. Граничные условия приведены выше и соответствуют первым двум задачам.

Изображения областей повреждения, соответствующие моментам нагружения от начала до полного разрушения, приведены на рисунке 2.15. Метод разрушения – деградация материала отдельно в точках интегрирования.

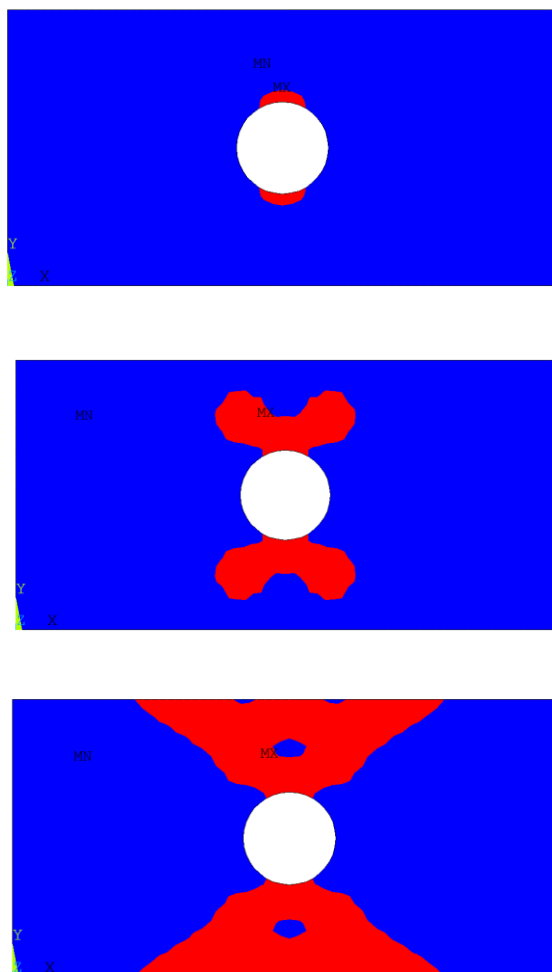


Рисунок 2.15. Развитие области повреждения в образце с круглым вырезом в процессе деформирования. Синее – неразрушенные области, красное – разрушенные.

Видны две симметричные области, распространяющиеся от границ выреза к верхней и нижней границам образца. Приведенный вид области разрушения в грубом приближении не зависит от выбора метода учета прогрессирующего разрушения.

Однако при использовании метода прогрессирующего разрушения отдельно в точках интегрирования изменение параметров метода может приводить к изменению ширины области разрушения, образовавшейся на границах образца. Это свойство проиллюстрировано на рисунке 2.15. На этом рисунке изображены области разрушения материала при деградации материала отдельно в точках

интегрирования. Шаг нагружения был уменьшен в 8 раз по сравнению с шагом расчета, результаты которого приведены на рисунке 2.15.

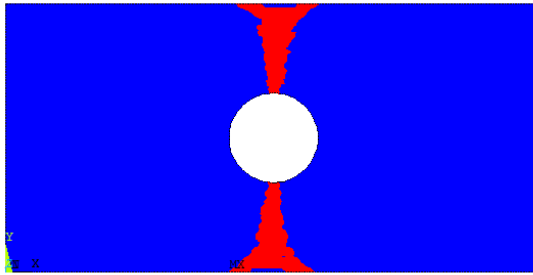


Рисунок 2.16. Области разрушения в образце с круглым вырезом при уменьшенном шаге нагружения.

На рисунке 2.17 приведены области разрушений в той же области, полученные применением метода разрушения области фиксированного размера. Результаты численного эксперимента показывают, что при выборе таких шагов нагружения, как и в предыдущем случае, т.е. с разницей в 8 раз, форма и геометрические параметры областей разрушения изменяются слабо.

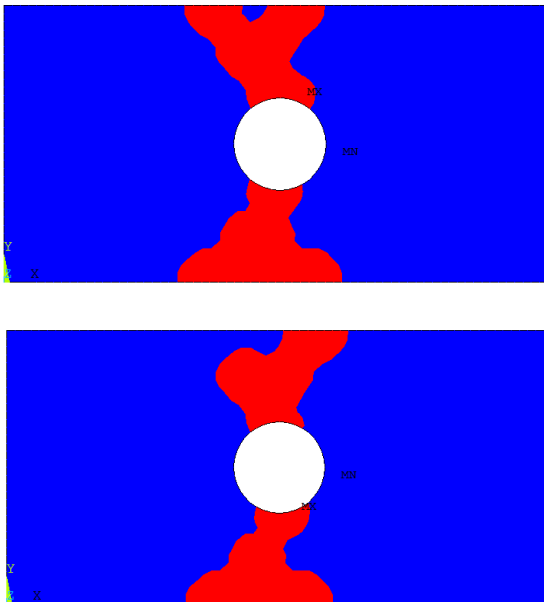


Рисунок 2.17. Области разрушения в образце с круглым вырезом с крупным и малым шагом нагружения

Несимметричность области разрушения вызвана несимметричностью конечно-элементной сетки относительно вертикальной оси симметрии в задаче.

В целом можно заключить, что в ходе исследования на модельных задачах установлено, что результаты метода разрушения в точке интегрирования существенно зависят от параметров численного метода. Получена следующая зависимость от размера конечного элемента: при уменьшении размера сетки диаграммы напряжение – деформация продолжают отличаться. Также выявлена существенная зависимость итоговой области разрушения от параметра шага нагружения.

Анализ результатов расчетов, полученных с помощью алгоритма разрушения конечного элемента целиком, показал, что при достаточном уменьшении среднего размера КЭ решения перестают существенно отличаться. При выборе достаточно малого размера КЭ данный метод может быть использован как метод прогрессирующего разрушения. Третий алгоритм прогрессирующего разрушения (разрушения области фиксированного размера) также позволяет получать результаты, слабо зависящие от параметров метода. Следовательно, данный метод также может быть применен для моделирования разрушения в материале.

Исследовано влияние параметров методов на решение задачи. Показано, что для всех методов увеличение коэффициента деградации приводит к более пологому ниспадающему участку кривой напряжение – деформация. Увеличение радиуса области деградации в третьем методе приводит к увеличению прочности всего образца.

Из проведенного анализа можно заключить, что второй метод (деградации свойств материала во всем КЭ) может считаться оптимальным. Он обладает сеточной сходимостью так же, как третий метод, но требует меньше ресурсов компьютера. При решении модельных задач разница во времени между расчетами с применением второго и третьего метода достигала 3 раз.

2.4. Трехмерное моделирование представительного объема композитного материала

В результате вывода из результатов предыдущего параграфа для моделирования растяжения образца из дисперсного композиционного материала использовался второй вариант метода прогрессирующего разрушения.

Задачи с граничными условиями одноосного растяжения решаются методом конечных элементов. В расчетах использована реальная структура В₄С/Al2024, описанная в главе 1, и модельная структура с эллипсоидальными включениями. Материал матрицы описывался классической теорией пластического течения с изотропным упрочнением. Диаграмма зависимости эквивалентных напряжений от эквивалентных деформаций для материала матрицы приведена на рисунке 2.18.

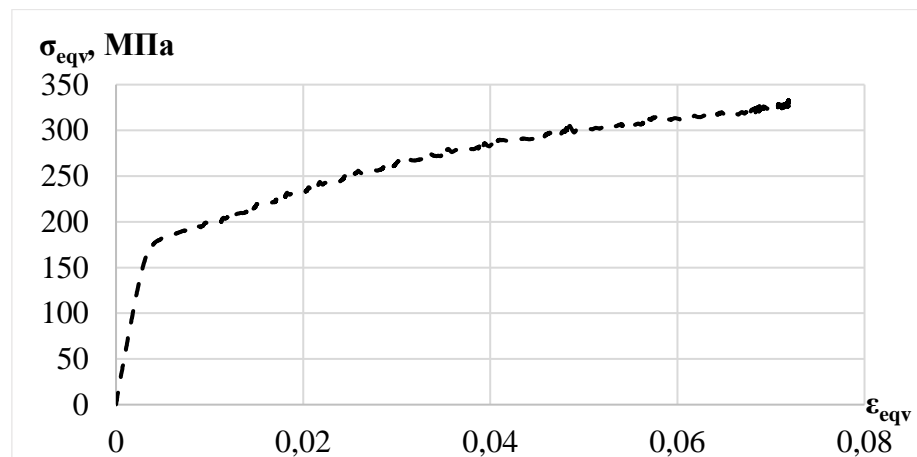


Рисунок 2.18. Зависимость эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации для материала матрицы

Упругие константы включений выбраны равными $E = 450$ ГПа, $\nu = 0.16$. Метод учета разрушения – разрушение конечного элемента целиком. Выбором величин критериев разрушения и параметров метода удалось добиться сходства расчетной и экспериментальной кривой. Так, для карбида бора выбраны значения $\sigma_{eqv}^+ = 4000$ МПа, $\sigma_{eqv}^0 = 2200$ МПа, $\sigma_{eqv}^- = 400$ МПа. Для матрицы критериальная величина задана $\epsilon_{eqv}^{crit} = 0,08$. Параметр деградации $c_{deg} = 1E - 06$. Результаты расчетов приведены на рисунке 2.19.

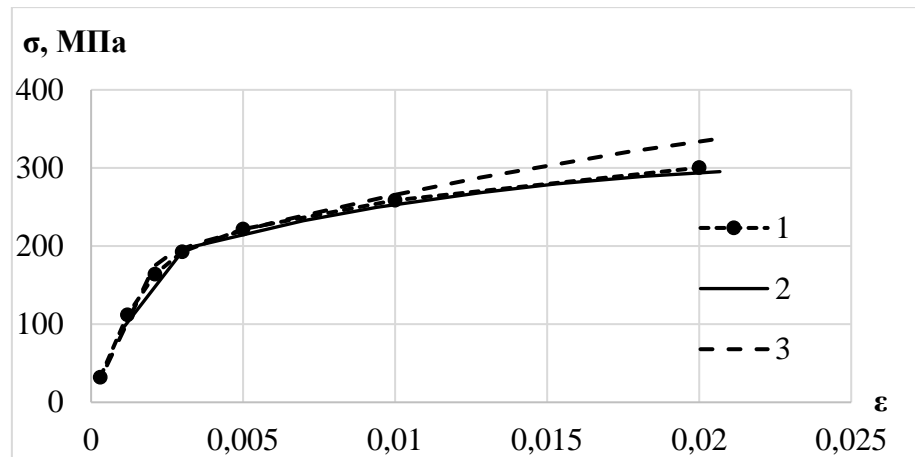


Рисунок 2.19. Результаты сравнения численного решения задачи одноосного растяжения с экспериментальными данными образца материала В₄С/Аl2024 (содержание В₄С 13%): 1 – экспериментальные данные, 2 – расчет с учетом поврежденности, 3 – расчет без учета поврежденности.

Видно, что результаты расчета без учета поврежденности проходят выше экспериментальных данных. Однако точки, полученные в расчете с учетом поврежденности при указанных выше параметрах, хорошо совпадают с экспериментальными данными. Различие составляет не более 5%.

Такой расчет проводился для ряда представительных областей так же, как при вычислении осредненного модуля Юнга. Следует отметить, что не всегда удавалось получить столь хорошее совпадение. Однако учет поврежденности реальной структуры в рассматриваемом композитном материале позволяет приблизить расчетную кривую напряжение – деформация к экспериментальной по сравнению с расчетами без учета повреждений. Примеры результатов аналогичных расчетов с реальной структурой приведены на рисунке 2.20, разница составляла до 12%.

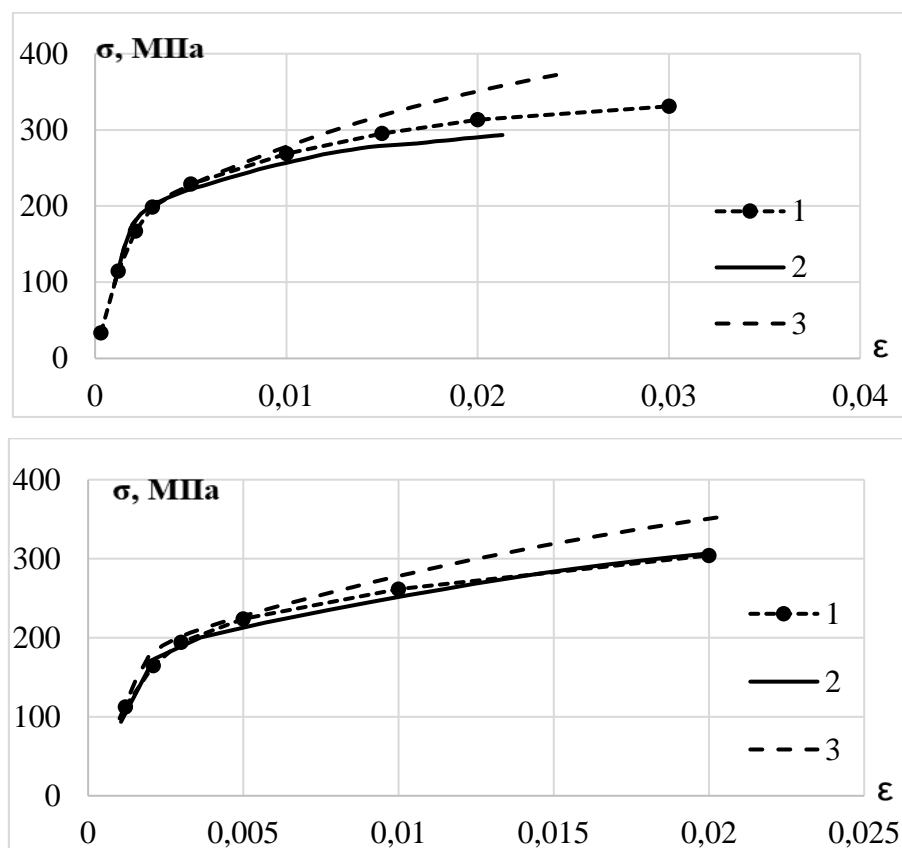


Рисунок 2.20. Результаты сравнения численного решения задачи одноосного растяжения с экспериментальными данными образца материала В₄С/Al2024 (содержание В₄С 16% и 14% соответственно): 1 – экспериментальные данные, 2 – расчет с учетом поврежденности, 3 – расчет без учета поврежденности.

Результаты расчетов композитного материала с эллипсоидальными включениями приведены на рисунках 2.21, 2.22.

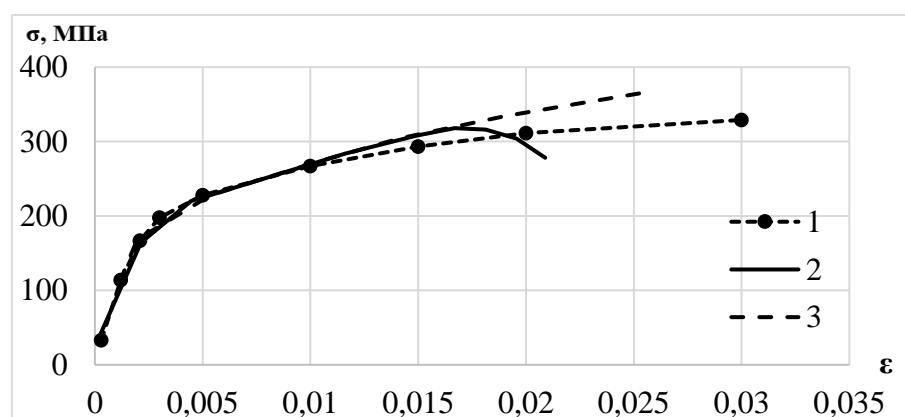


Рисунок 2.21. Результаты сравнения численного решения задачи одноосного растяжения с экспериментальными данными образца модельного материала (содержание включений 16%): 1 – экспериментальные данные, 2 – расчет с учетом поврежденности, 3 – расчет без учета поврежденности.

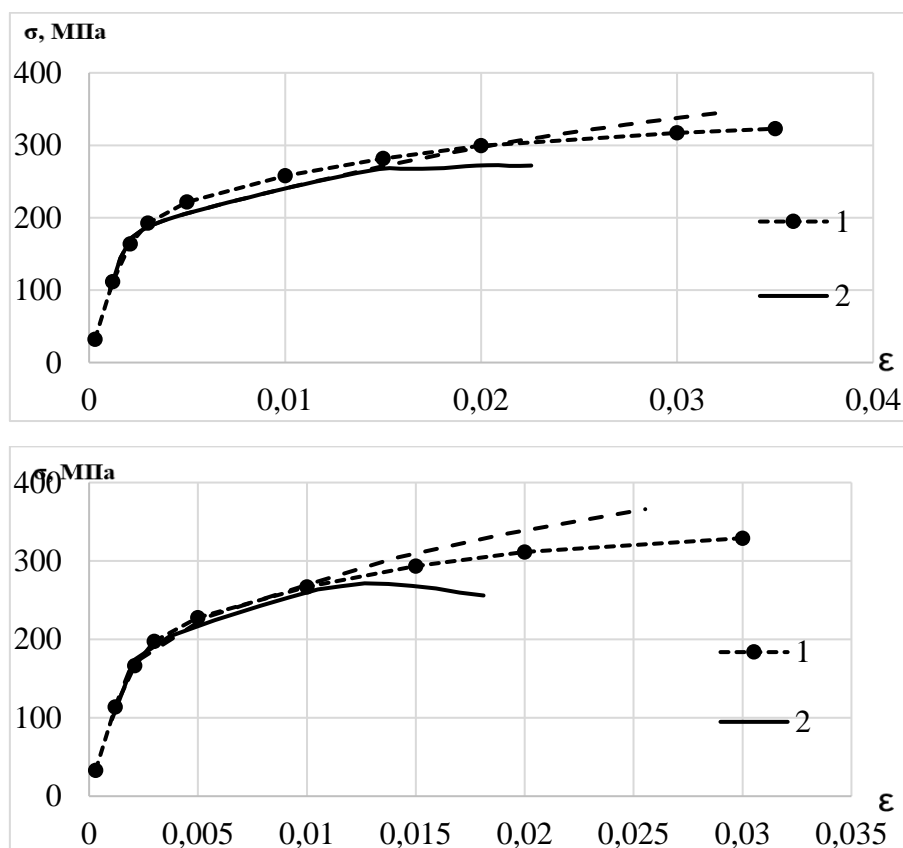


Рисунок 2.22. Результаты сравнения численного решения задачи одноосного растяжения с экспериментальными данными образца модельного материала (содержание включений 13% и 15% соответственно): 1 – экспериментальные данные, 2 – расчет с учетом поврежденности, 3 – расчет без учета поврежденности.

При одинаковых параметрах деградации результаты вычислений с реальной структурой оказываются заметно ближе к экспериментальным данным по сравнению с результатами расчетов с эллипсоидальными включениями.

Во второй главе при помощи сравнительного анализа проведено исследование вариантов алгоритма прогрессирующего разрушения, применяемых на мезоуровне. Рассмотренные варианты: 1) подход, в котором деградация учитывается отдельно в каждой точке интегрирования конечного элемента, 2) вариант деградации свойств конечного элемента целиком и 3) деградации свойств материала в области фиксированного размера. Сравнение алгоритмов проведено при решении модельных задач. Установлено, что результаты применения первого варианта алгоритма прогрессирующего разрушения существенно зависят от среднего размера конечного элемента, алгоритм не обладает свойством сеточной

сходимости. Также установлено, что при применении данного алгоритма итоговая область разрушения существенно зависит от параметра шага нагружения.

Анализ результатов расчетов, полученных с помощью второго метода разрушения, показал, что при достаточном уменьшении среднего размера КЭ решения перестают существенно отличаться.

Третий алгоритм, основанный на деградации свойств области фиксированного размера, демонстрирует слабую зависимость результатов от выбора параметров моделирования. Это подтверждает его пригодность для описания процессов разрушения в материалах.

В ходе исследования было проанализировано влияние варьируемых параметров на получаемое решение. Установлено, что для всех рассмотренных методов увеличение коэффициента деградации ведет к выполаживанию ниспадающей ветви диаграммы деформирования. В рамках третьего метода также выявлено, что увеличению радиуса зоны деградации приводит к повышению прочности образца.

Проведено сравнение решений модельных задач алгоритмом разрушения конечного элемента с экспериментальными данными. Установлено качественное соответствие результатов расчетов и экспериментов, что подтверждает вывод о возможности применения второго метода для моделирования разрушения в материале. Также показана лучшая вычислительная эффективность этого метода относительно разрушения области фиксированного размера, что позволяет сделать вывод об оптимальности применения второго метода для моделирования разрушения материала.

Этот метод применен для вычисления диаграмм напряжение – деформация композитного материала В4С/2024А1 с учетом как искусственно сгенерированной, так и реальной микроструктуры, полученной методом компьютерной томографии. Показано, что учет реальной геометрии включений и механизмов повреждения матрицы и включений является важным условием для достижения соответствия расчетных кривых экспериментальным данным.

Глава 3. Механические свойства искусственных материалов с периодической структурой

В главе 3 использованы результаты работ [16; 38; 111; 170; 171]

3.1. Обзор литературы

Развитие науки о материалах и появление новых технологических возможностей производства в настоящее время приводит к активному применению новых материалов с неклассическими свойствами в различных сферах промышленности: биомедицинской инженерии, робототехнике и аэрокосмической промышленности [99; 133]. Для описания подобных материалов активное развитие получили моментные и градиентные теории. Например, в работе [34] исследуются размерные эффекты в материалах с большими градиентами неоднородности на уровне структуры. Вопросы корректности физических уравнений в градиентных теориях упругости обсуждаются в [9]. Другим методом исследования эффективных свойств сред с неклассическими свойствами является метод асимптотического осреднения [3; 40; 167].

Рассматриваемые материалы (часто искусственные), обладающие неклассическими механическими свойствами, принято называть метаматериалами. К таким свойствам могут относиться: нулевые/отрицательные коэффициенты Пуассона [65; 81; 115; 116], регулируемый коэффициент теплового расширения [64; 89; 96], повышенная прочность при существенном уменьшении веса [88; 106], связанность растяжения с изгибом и растяжения с кручением [69; 100].

В работе [15] представлен обзор работ, посвященных ауксетикам (материалам с отрицательным коэффициентом Пуассона) среди материалов с кубической анизотропией. В [7] методом молекулярной статики изучены металлические нанотрубки и установлена связь хиральности с коэффициентом Пуассона и эффектом Пойнтинга.

В [65] исследуется влияние сложной геометрии ячейки периодичности на коэффициент Пуассона и модули упругости материала на макроуровне. В работе [64] исследуется идея применения материалов со сложной ячеистой структурой для получения материала с заданным коэффициентом теплового расширения. В статье [88] представлены графеновые метаматериалы с иерархической структурой, которые сочетают высокую прочность со сверхмалым весом.

Как уже было отмечено, метаматериалы представляют собой структуры с искусственно спроектированной внутренней структурой. В книге [41] приводится разделение метаматериалов по типу внутренней структуры, включающее следующие типы геометрии ячейки периодичности: решетчатые [80], ячеистые [71; 93; 95], хиральные [98; 105; 108] и метаматериалы оригами (киригами) [66]. Решетчатые метаматериалы представляют собой микро- или наноструктуры, собранные из повторяющихся однородных элементарных ячеек (открытых или закрытых), чьи механические свойства определяются их архитектурой. Материалы создают, собирая двумерные или трёхмерные решетчатые элементы. Для анализа и оптимизации таких структур широко применяются компьютерные методы [72; 76; 80]. Ячеистые метаматериалы обладают структурой, подразумевающей возможность существенного изменения геометрии: возможность смятия, выпучивания или складывания. Такие материалы могут применяться, например, для поглощения энергии [104]. Хиральные метаматериалы характеризуются зеркальной асимметрией элементарных ячеек (например, шестиугольников), что приводит к образованию хиральных или антихиральных связей и проявлению неклассических механических свойств, таких как отрицательная жёсткость и отрицательный коэффициент Пуассона [98; 105; 107; 108; 114]. Метаматериалы оригами создаются путём складывания плоских плёнок в двухмерные структуры, что позволяет получать сверхжёсткие и сверхлёгкие конструкции с неклассическими механическими характеристиками [66; 68; 112].

Более привычным материалом, обладающим улучшенными механическими характеристиками, является резинкорд. Резинкордные композиты широко

используются в гражданской и оборонной промышленности, например, в шинной индустрии. Конструкция шины включает несколько резинокордных слоев. Каркас радиальной шины состоит из одного или нескольких резинокордных слоев с текстильным кордом. Направление нитей корда каркаса перпендикулярно окружному направлению. Поверх каркаса расположен брекер, состоящий из нескольких слоев кордных нитей с высоким модулем упругости (обычно из стали или других высокопрочных материалов). Нити брекера пересекаются друг с другом. Угол корда (угол между направлением нити и окружным направлением) в радиальной шине обычно составляет 20-25°. Слои брекера вносят основной вклад в прочность шины. Для исследования свойств шин и резинокордных композитов используются экспериментальные и вычислительные методы. Для описания материала матрицы (наполненная резина) часто используется вязкоупругая модель [4; 79; 135; 172]. Теория нелинейной вязкоупругости имеет долгую историю [75; 94]. В работах [5; 147] вязкоупругое поведение резиновых материалов изучалось экспериментально. В работе [184] были рассмотрены вязкоупругие свойства резиновой матрицы и предложено определяющее соотношение для резинокордного материала. В [125] была предложена анизотропная вязкогиперупругая модель для резинокордных композитов. В статье [111] экспериментально исследуется влияние скорости деформации и эффекта Маллинза на поведение резины брекера и резинокордных композитов при квазистатическом нагружении, а также анализируются краевые эффекты в образцах.

В конечно-элементных моделях шин используют эквивалентные ортотропные или трансверсально-изотропные однородные модели вместо резинокордных слоев в линейно-упругой области. Также используются конечные элементы типа Solid, дополненные волокнами (rebar) [186], так же, как при моделировании железобетона. В работе [187] брекер и каркас моделируются с использованием эквивалентной ортотропной модели материала, в которой эффективные модули определяются с помощью уравнений Халпина-Тсяя.

В [157] применяется представление резинокордового композита в виде осредненной или ортотропной линейно-упругой среды в макромодели шины. В работах [159; 162] эффективные свойства резинокорда вычислены при помощи двумерных и трехмерных задач МКЭ. Нелинейная задача была решена в [160] для моделирования НДС в двухслойном образце резинокорда при скручивающей нагрузке. Получение эффективных характеристик резинокордных композитов в предположении конечных деформаций рассматривается в [155]. При аналогичном предположении учета конечных деформаций в [156] исследуются проблемы численного моделирования вязкоупругости. В работе [56] используется трехслойная модель, состоящая из двух осредненных резинокордных слоев и промежуточного резинового слоя. В [161] моделирование использовалось для анализа касательных напряжений в промежуточном резиновом слое двухслойного образца.

3.2. Связанность растяжения с изгибом для пластин

Для тонких тел, асимптотический метод использует идею двух масштабов и позволяет свести уравнения равновесия трехмерной упругости к двумерным уравнениям теории пластин Кирхгофа [36; 40; 54]. Математически деление на разные уровни осуществляется с помощью малого параметра ε . Для тонких тел этот параметр равен толщине h . Это параметр неоднородности НДС. Есть два уровня, на которых рассматриваются напряжения и деформации: макроуровень и мезоуровень. Важное для дальнейшего предположение состоит в том, что напряжение (или деформация) изменяется на характерную величину в пределах характерного расстояния L на макроуровне. Аналогично напряжение (или деформация) изменяется на такую же величину в пределах характерного расстояния l на микроуровне. Тогда малый параметр определяется как $\varepsilon \sim l/L \sim h$. Обычно этот параметр обратно пропорционален количеству ячеек в направлениях в плане (в плоскости пластины). Одновременно с малым параметром ε быстрые координаты x_i определяются следующим образом: $\xi_i = x_i/\varepsilon$, где x_i – декартовы

координаты на макроуровне. На самом деле, ξ_i – это просто декартовы координаты на мезоуровне. Рассмотрим неоднородную пластину (рисунок 3.1) как трехмерное тело.

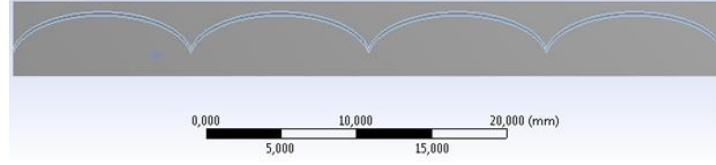


Рисунок 3.1. Пример пластины, который показывает связанность растяжения и изгиба.

Представим перемещения в виде суммы двух полей перемещений u_i^E и u_i^B [55] относительно растяжения/сжатия и изгиба и запишем эти перемещения в соответствии с методом асимптотического осреднения в первом приближении:

$$\begin{aligned}
 u_i^T &= v_i(x_1, x_2) + \varepsilon N_{iPQ}^T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{P,Q}(x_1, x_2) + \\
 &+ \sum_{m=0}^M \varepsilon^{m+2} N_{iPQ_0 \dots Q_{m+1}}^T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{P,Q_0 \dots Q_{m+1}}(x_1, x_2), \\
 u_I^B &= -\varepsilon \xi_3 w_{,I}(x_1, x_2) + \sum_{m=0}^M \varepsilon^{m+2} N_{iPQ_0 \dots Q_m}^B(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0 \dots Q_m}(x_1, x_2), \quad (3.1) \\
 u_3^B &= w(x_1, x_2) + \sum_{m=0}^M \varepsilon^{m+2} N_{3PQ_0 \dots Q_m}^B(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0 \dots Q_m}(x_1, x_2),
 \end{aligned}$$

где $v_i(x_1, x_2)$ – перемещения на макроуровне, а $N_{iPQ_0 \dots Q_m}^T$, $N_{iPQ_0 \dots Q_m}^B$ – поправки перемещений на микроуровне. Идея разложения перемещений в асимптотические ряды состоит в том, чтобы разделить краевые задачи на макро- и микроуровнях. В этой части работы достаточно учитывать только первые члены в уравнениях (3.1).

Так называемые локальные задачи на микроуровне формулируются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 P_{ijPQ,j} &= 0, \quad Q_{ijPQ,j} = 0, \quad \xi \in V^{cell}, \\
 P_{ijPQ} n_j &= 0, \quad Q_{ijPQ} n_j = 0, \quad \xi \in \Sigma_2^{cell}, \quad P, Q = 1, 2, \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

где

$$P_{ijPQ} = C_{ijkl} N_{kPQ,l}^T + C_{ijPQ}, \quad Q_{ijPQ} = -\xi_3 C_{ijPQ} + C_{ijkl} N_{kPQ,l}^B.$$

В уравнениях (3.2) и ниже индексы, написанные заглавными буквами, принимают значения 1, 2, а индексы, написанные строчными буквами, принимают значения 1, 2, 3. В уравнениях выше Σ_2^{cell} обозначает верхнюю и нижнюю границы ячейки. Условия периодичности накладываются на боковые границы ячейки.

Уравнения равновесия для пластин имеют вид:

$$T_{IJ,J} = 0, \quad M_{IJ,J} + Q_I = 0, \quad Q_{I,I} + \varepsilon^3 p(x) = 0$$

Усилия, моменты и поперечные силы:

$$T_{IJ} = \frac{1}{\Sigma_{\eta}^{cell}} \int_{V_{\eta}^{cell}} \sigma_{IJ} dV_{\eta}, \quad M_{IJ} = \frac{1}{\Sigma_{\eta}^{cell}} \int_{V_{\eta}^{cell}} x_3 \sigma_{IJ} dV_{\eta}, \quad Q_I = \frac{1}{\Sigma_{\eta}^{cell}} \int_{V_{\eta}^{cell}} \sigma_{I3} dV_{\eta}$$

Определяющие соотношения на макроуровне получают, как указано ниже:

$$T_{IJ} = A_{IJPQ} \varepsilon_{PQ} + B_{IJPQ}^{(1)} \kappa_{PQ}, \quad (3.3)$$

$$M_{IJ} = B_{IJPQ}^{(2)} \varepsilon_{PQ} + D_{IJPQ} \kappa_{PQ}.$$

В уравнениях (3.3) ε_{PQ} обозначает деформации: $\varepsilon_{PQ} = 1/2(v_{P,Q} + v_{Q,P})$, κ_{PQ} – кривизны: $\kappa_{PQ} = -w_{,PQ}$, T_{IJ} и M_{IJ} – усилия в плане и изгибающие моменты соответственно. Все жесткости выражаются так:

$$A_{IJPQ} = \frac{\varepsilon}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} P_{IJPQ} dV_{\xi}, \quad B_{IJPQ}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} Q_{IJPQ} dV_{\xi}, \quad (3.4)$$

$$B_{IJPQ}^{(2)} = \frac{\varepsilon^2}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} -\xi_3 P_{IJPQ} dV_{\xi}, \quad D_{IJPQ} = \frac{\varepsilon^3}{\Sigma_{\xi}^{cell}} \int_{V_{\xi}^{cell}} -\xi_3 Q_{IJPQ} dV_{\xi},$$

причем $B_{IJPQ}^{(1)} = B_{PQIJ}$.

Усилия и моменты удовлетворяют уравнениям равновесия, приводящим к связанным уравнениям двумерной моментной теории, являющейся обобщением теории Кирхгофа – Лява. В случае слоистой пластины эта теория называется классической ламинатной теорией [54].

Важно различие в порядках жесткостей относительно ε в формулах (3.4). Ясно, что связь между усилиями и кривизнами, а также между моментами и деформациями срединной плоскости исчезает, если ε стремится к нулю.

Рассмотренная выше асимптотическая трактовка верна, если число ячеек в поперечном направлении достаточно мало. Если число ячеек в поперечном направлении велико, мы можем применить асимптотическое осреднение в общей трехмерной постановке [3].

3.3. Примеры расчета связанности растяжения и изгиба для метаматериала

Для исследования связанности растяжения/изгиба использовано численное моделирование цилиндрического изгиба пластины. Пластина состояла из резиновой матрицы с периодически расположенными металлическими включениями, представляющими собой гофры эллиптической и сферической форм. Ячейка периодичности для эллиптических включений имела размер 11.8x5 мм (рисунок 3.2а), а для сферических включений – 5.9x5 мм (рисунок 3.2б).

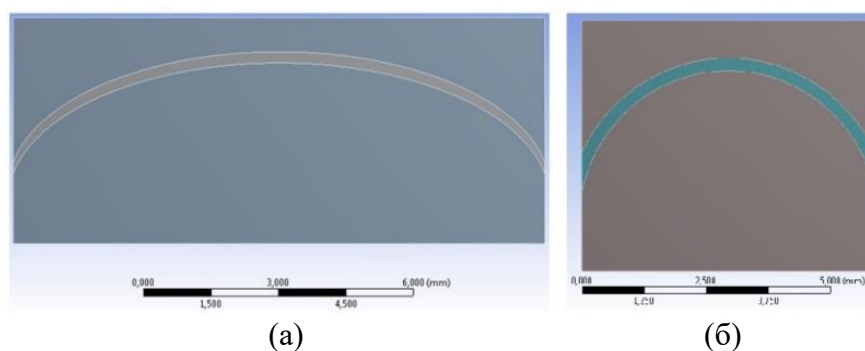


Рисунок 3.2. Ячейки периодичности с включениями эллиптической (а) и сферической (б) формы.

Задача цилиндрического изгиба решалась в двумерной постановке методом конечных элементов. Упругие свойства матрицы определялись упругими константами $E_M = 2$ МПа, $\nu=0.49$. Для включений были приняты $E_M = 200000$ МПа, $\nu=0.3$.

В качестве меры связанности растяжения/изгиба был введен параметр β следующим образом: $\beta = M/(F \cdot h)$, где M – изгибающий момент, осредненный по

толщине пластины, F – растягивающая сила, h – толщина пластины. На рисунке 3.3 показаны модели комбинаций ячеек для эллиптических включений, используемые в расчетах. Модели были построены студентом М.А. Волковым.

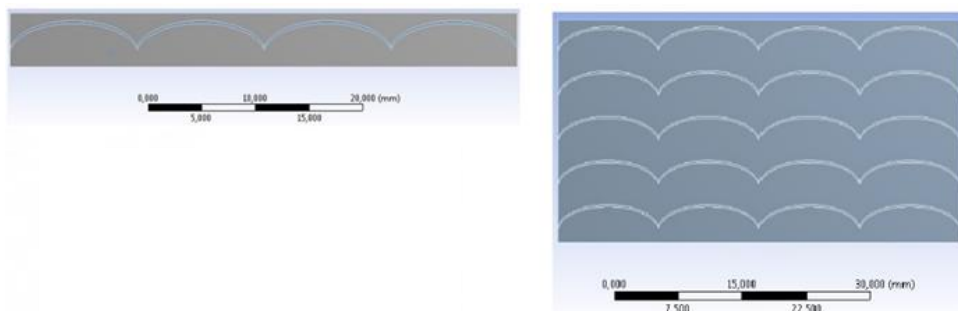


Рисунок 3.3. Модели комбинаций ячеек, используемые в расчетах (4x1, 4x5).

В результате расчетов получена зависимость меры связанности растяжения/изгиба (β) от числа ячеек периодичности по толщине пластины (рисунок 3.4). Очевидно, β уменьшается с увеличением числа ячеек. Для 10 ячеек коэффициент β близок к нулю.

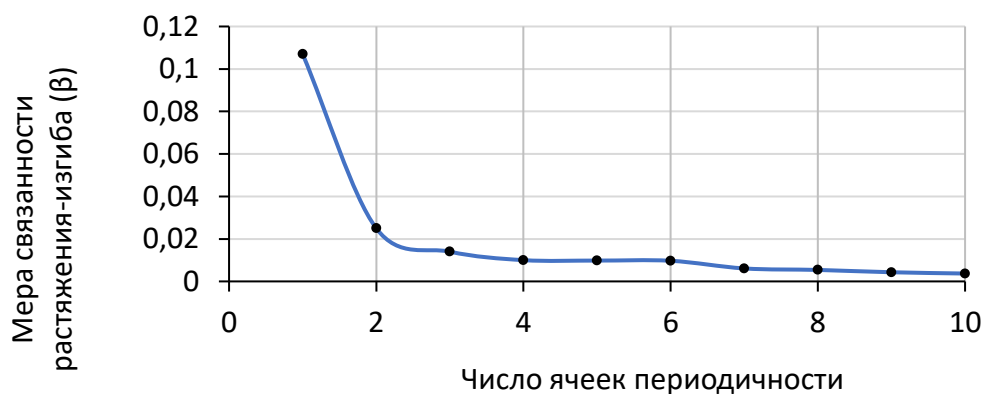


Рисунок 3.4. Зависимость меры связанности растяжения/изгиба (β) от числа ячеек периодичности по толщине пластины. Пластина с эллиптическими включениями.

На рисунке 3.5 приведены комбинации ячеек со сферическими включениями.

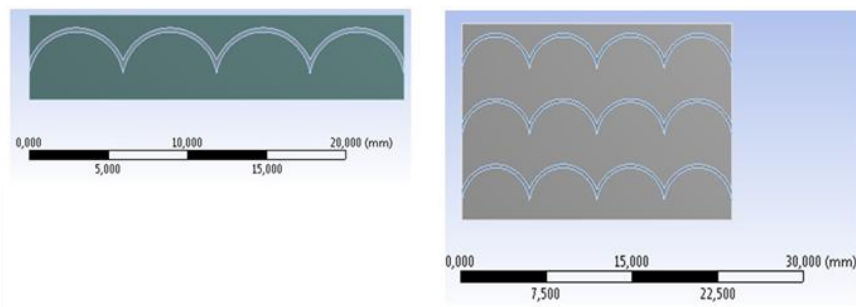


Рисунок 3.5. Модели комбинаций ячеек для сферических включений (4x1, 4x3).

Результаты расчетов показали аналогичную зависимость меры связанности от количества ячеек для сферических включений: с увеличением числа ячеек связанность уменьшается, как показано на рисунке 3.6.

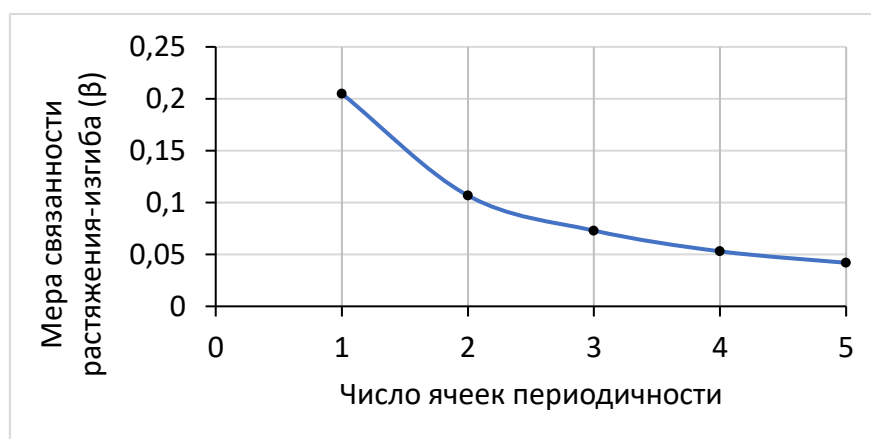


Рисунок 3.6. Зависимость меры связанности растяжения/изгиба (β) от числа ячеек периодичности по толщине пластины. Пластина со сферическими включениями.

Следовательно, асимптотическое осреднение материала с искусственной периодической структурой и численное моделирование доказывают следующее:

- 1) Свойство связанности напряжений с моментными напряжениями может быть описано градиентной теорией упругости.
- 2) Когда число ячеек стремится к бесконечности, связанность стремится к нулю.

3.4. Растяжение двухслойного резинокордного образца

При проведении экспериментов на одноосное растяжение стандартного двухслойного резинокордного образца возникает проблема выбора его правильного размера из-за наличия двух типов зон краевого эффекта. Одна зона возникает вблизи захватов испытательной машины, другая — вдоль свободной боковой кромки. В этой части работы размеры этих зон исследуются методом конечных элементов (МКЭ) и делается вывод о допустимом размере резинокордного образца с углом корда 45° .

Для определения зон краевого эффекта и, как следствие, длины двухслойного резинокордного образца, достаточной для образования в нём области с равномерным напряжённо-деформированным состоянием, применяется трёхслойная модель (два осредненных резинокордных слоя и промежуточный резиновый слой). Задача нахождения НДС решается методом конечных элементов в трехмерной постановке в предположении геометрической и материальной линейности на мезоуровне. Структура образца учитывается трехслойной моделью. Аппроксимация каждого слоя резинокорда однонаправленным волокнистым композитом является достаточно точной по двум причинам. Первая – вдоль волокон формула смеси достаточно точна. Вторая причина состоит в том, что модуль Юнга в поперечном направлении (вычисляемый менее точно) мал и оказывает несущественное влияние на эффективные осредненные модули двухслойного резинокордного материала.

При квазистатическом деформировании материал резины (резиновой смеси) проявляет вязкоупругое поведение. При циклическом деформировании возникает петля гистерезиса. Ее площадь равна энергии деформирования, переходящей в тепло за цикл колебания. Популярной моделью описания поведения линейного вязкоупругого материала является обобщенная модель Максвелла, представляющая собой комбинацию из нескольких параллельно соединенных классических моделей Максвелла (рисунок 3.7).

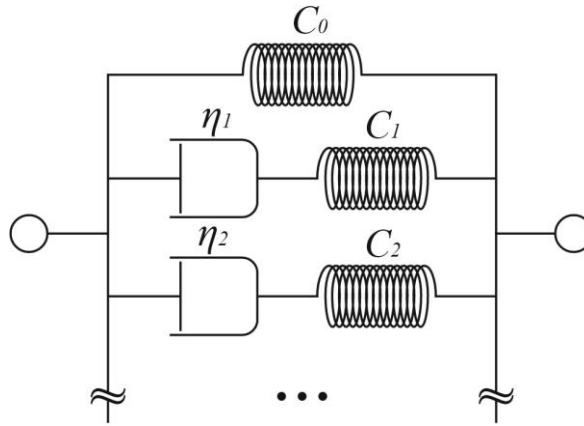


Рисунок 3.7. Схема обобщенной модели Максвелла.

В общем случае обобщенная модель Максвелла записывается в виде

$$s_{ij} = C_0 + \sum_{i=1}^N C_i \int_0^t e^{-\frac{C_i}{\eta_i}(t-\tau)} de_{ij}(\tau)$$

где s_{ij} , e_{ij} – девиаторы напряжений и деформаций.

Таким образом, в рамках данной модели функция релаксации для каждого элемента модели равна $R_i = e^{-\frac{C_i t}{\eta_i}} = e^{-\frac{t}{t_i}}$, а время релаксации равно $t_i = \frac{\eta_i}{C_i}$. Для получения функции релаксации всей модели необходимо также провести суммирование функций релаксации элементов модели Максвелла с учетом их весовых коэффициентов, то есть функция релаксации для данной модели имеет вид:

$$R_{sh}(t) = C_0 + \sum_{i=1}^N C_i e^{-\frac{t}{t_i}}$$

Резинокорд неточно описывается данной моделью. В этом можно убедиться, рассмотрев растяжение материала с постоянной скоростью: график для материала, описываемого моделью Максвелла, сначала совпадает с графиком бесконечно быстрого растяжения, затем наблюдается нелинейный участок, после чего график становится вновь линейным, параллельным графику бесконечно медленного

растяжения (рисунок 3.8). Таким образом, модули Юнга, определяемые на линейном участке для любых скоростей, должны быть равны друг другу.

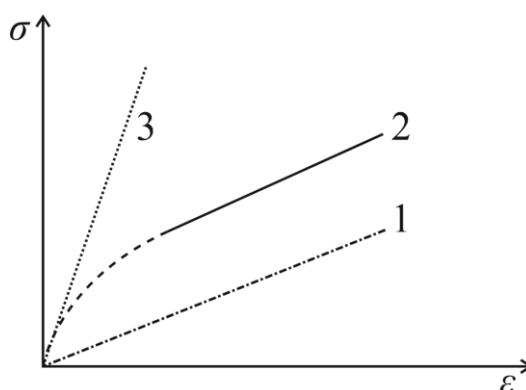


Рисунок 3.8. Кривые $\sigma \sim \varepsilon$ при различных скоростях деформации: 1) бесконечно медленный процесс, 2) процесс с конечной скоростью, 3) бесконечно быстрый процесс.

Графики резинокорда таким свойством не обладают: можно заметить, что наклон линейной области при уменьшении скорости уменьшается, то есть модуль Юнга зависит от скорости (рисунок 3.9). Это означает, что модель Максвелла недостаточно точно может описать нелинейное поведение резинокорда, поэтому необходима более сложная модель для описания данного материала, например, модель Бергстрема – Бойса [4].

Однако из рисунка 3.9 видно, что при заданной постоянной скорости деформирования приращения напряжений и деформаций на определенном участке связаны линейно, как предсказывает модель Максвелла [18]. Для приращений можно записать между напряжениями и деформациями линейную связь типа закона Гука.

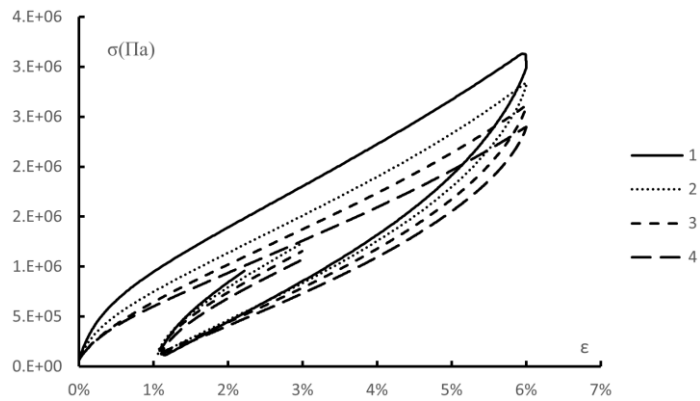


Рисунок 3.9. График зависимости одноосного напряжения от инженерной деформации при растяжении слоя из резинокорда с кордным углом 45 градусов при постоянной скорости деформации ($1 - 8 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $2 - 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $3 - 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $3 - 10^{-5} \text{ с}^{-1}$).

Гомогенизация каждого слоя резинокорда хорошо изучена в литературе [48; 54; 113] и используется производителями шин. Для осреднения двух слоев возможны два подхода к моделированию, схематично представленные на рисунке 3.10.

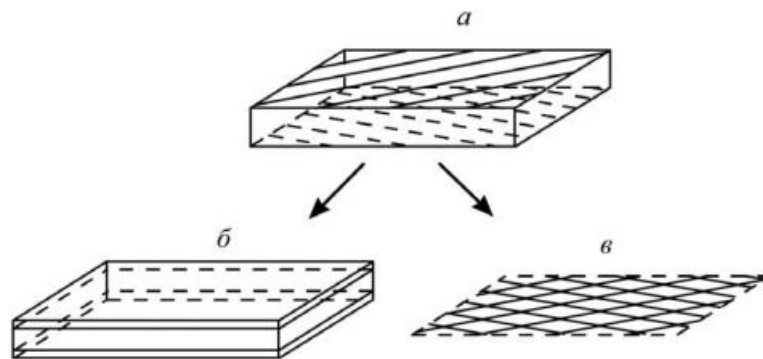


Рисунок 3.10. Два способа моделирования двухслойного композита.

На рисунке 3.10а изображен исходный двухслойный резинокордный образец, в котором слои разделены по высоте, представляя собой структуру с четко выраженными границами. Рисунок 3.10б демонстрирует подход, при котором слои корда не совмещаются, и структура в целом моделируется как трехмерная. В этом случае между двумя гомогенными слоями резинокорда находится слой резины. Полученная модель может быть применена для моделирования качения шины с использованием современных вычислительных ресурсов, требуя, однако, значительного времени расчета. Рисунок 3.10 иллюстрирует процесс усреднения

этих двух гомогенных слоев и слоя резины между ними, приводящий к образованию одного ортотропного слоя. Этот подход предполагает, что два слоя волокон полностью сцеплены друг с другом и находятся в одной плоскости [48; 54].

С вычислительной точки зрения второй подход (рисунок 3.10в) является более простым. Он может быть использован для решения простых задач, например задачи о раздувании шины внутренним давлением. Отметим, что в таком случае только узкая полоса вблизи краев брекера не имеет полного сцепления. Однако этот метод менее точен, чем первый (рисунок 3.10б). Например, он не учитывает закручивание образца двухслойного резинокорда, которое наблюдается в экспериментах на растяжение. Потому для анализа опыта на растяжение двухслойного образца используем трехмерную трехслойную модель.

Ставятся две задачи: 1) определение достаточной длины двухслойного образца, чтобы избавиться от влияния краевого эффекта от заземленных торцов, 2) выяснение возможности корректно определять модуль Юнга гомогенизированного короткого двухслойного образца. Для решения этих задач используется трехслойная модель, реализованная в рамках метода конечных элементов.

Проще всего реализовать корректные измерения продольного модуля Юнга для образца с углом корда $\pm 45^\circ$. Для этого кордного угла даже короткий образец не подвержен закручиванию в средней части и имеет зону однородного напряженного состояния.

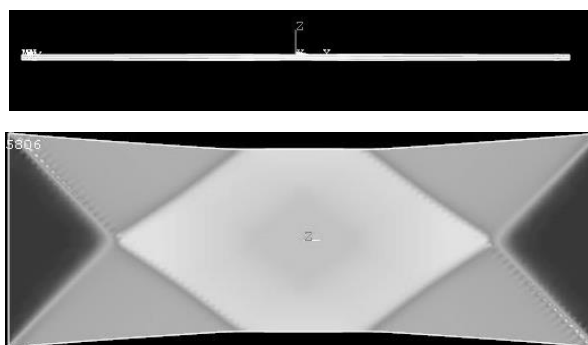


Рисунок 3.11. Вид сверху и сбоку двухслойного резинокордного образца.

Отсутствие закручивания при кордном угле 45 градусов следует из анализа формул (3.3), (3.4) более подробно записываемых в виде

$$\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & 0 & 0 & 0 & B_{1112}^{(1)} \\ A_{2211} & A_{2222} & 0 & 0 & 0 & B_{2221}^{(1)} \\ 0 & 0 & A_{1212} & B_{1211}^{(1)} & B_{1222}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & B_{1112}^{(2)} & D_{1111} & D_{1122} & 0 \\ 0 & 0 & B_{2212}^{(2)} & D_{2211} & D_{2222} & 0 \\ B_{1211}^{(2)} & B_{1222}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & D_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{pmatrix}$$

С достаточной точностью вычислить эффективные модули слоев для $i = 1, 2$ можно с помощью формул [48; 54; 113]:

$$\begin{aligned} C_{1111}^i &= \cos^4 \varphi_i E_L + E_T, & C_{1122}^{\text{eff}} &= \cos^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i E_L + \frac{E_T}{2}, \\ C_{2222}^i &= \sin^4 \varphi_i E_L + E_T, & C_{1112}^i &= \sin_i \varphi \cos_i^3 \varphi E_L, \\ C_{2212}^i &= \cos \varphi_i \sin^3 \varphi_i E_L, & C_{1212}^i &= \cos^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i E_L + \frac{E_T}{4}. \end{aligned}$$

Например,

$$B_{1112}^{(1)} = \int_{-h}^0 z C_{1112}^1 dz + \int_0^h z C_{1112}^2 dz = \frac{h^2}{2} (C_{1112}^1 - C_{1112}^2) = h^2 \sin \varphi \cos^3 \varphi E_L \neq 0,$$

т.е. имеет место быть связанность растяжения и сдвига.

В двухслойном резинокорде кручение (характеризуемое круткой κ_{12}) влияет на усилия T_{11} и T_{22} , в то время как крутящий момент M_{12} подвержен влиянию продольных деформаций ε_{11}^0 и ε_{22}^0 . Это приводит к тому, что при одноосном растяжении двухслойного резинокордного образца, когда отсутствуют изгибы и кручения ($\kappa_{IJ}=0$), возникает не только растягивающее усилие N_{11} , но и индуцируется крутящий момент M_{12} . Аналогично, при отсутствии внешних моментов ($M_{IJ}=0$, $I, J=1, 2$) образец деформируется с закручиванием, приобретая

ненулевую крутку κ_{12} . Однако для кордного угла 45 градусов закручивание отсутствует, поскольку $\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11}$.

Рассматриваем трехслойный резинокордный образец длиной L , шириной $b = 80$ мм и толщиной $h = 2$ мм. Два слоя резинокорда имеют угол корда $\pm 45^\circ$. Толщина промежуточного резинового слоя составляет 0.6 мм. Расчеты проводились для трех значений длины L , равных 200, 400 и 600 мм. Координата x выбрана вдоль оси растяжения и длины L , координата y выбрана в плоскости пластины вдоль ширины b , а координата z выбрана вдоль толщины h .

На рисунке 3.12 показано распределение в среднем сечении относительных осевых деформаций ε_{xx}^* вдоль координаты y для разных длин образца. Относительная осевая деформация ε_{xx}^* равна отношению локальной деформации, осредненной по толщине образца, к средней деформации растяжения по всему образцу.

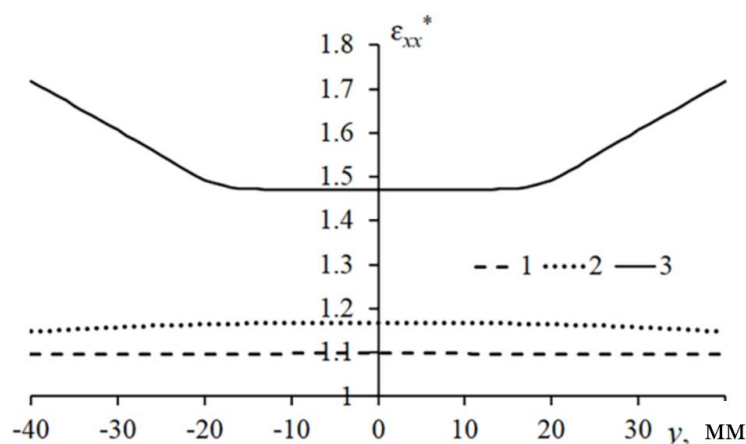


Рисунок 3.12. Распределение относительной продольной деформации ε_{xx}^* вдоль координаты y : 1) $L = 600$ мм; 2) $L = 400$ мм; 3) $L = 200$ мм.

Из рисунка 3.12 видно, что при достаточной длине образца $L = 600$ мм, т.е. при соотношении $\eta = L/b = 7.5$, распределение относительной продольной деформации практически равномерное. Если $L = 400$ мм и $\eta = 5$ распределение деформаций близко к равномерному, а в центральной части оно равномерно. Для

короткого образца с длиной $L = 200$ мм ($\eta = 2.5$) распределение деформаций равномерно только в центральной части образца, что позволяет использовать такой образец для измерений. В этом случае зона равномерного распределения деформаций занимает примерно половину ширины образца.

На рисунке 3.12 также показано, как можно рассчитать продольные деформации в средней части образца: для образцов длиной 600, 400 и 200 мм среднюю деформацию растяжения необходимо умножить на коэффициенты, равные 1.1, 1.17 и 1.47 соответственно.

На рисунке 3.13 показано распределение продольного напряжения, осредненного по толщине σ_{xx} . Горизонтальные линии изображают средние напряжения по ширине образца, соответствующие графикам 1, 2, 3 для образцов разной длины.

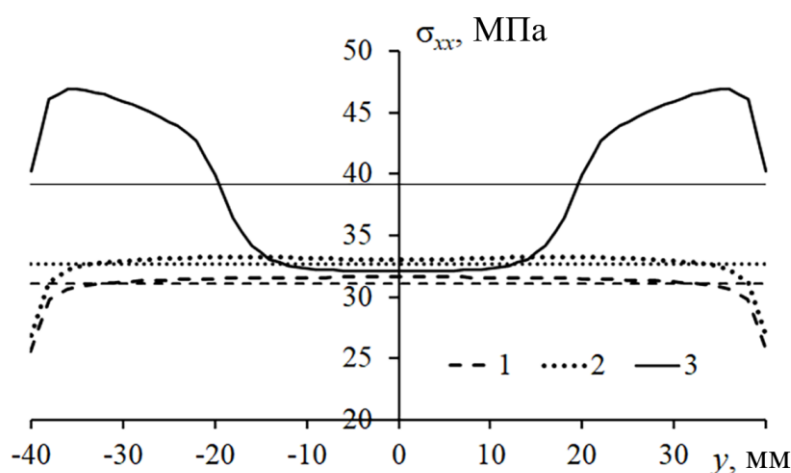


Рисунок 3.13. Распределение продольного напряжения σ_{xx} вдоль координаты y : 1) $L = 600$ мм; 2) $L = 400$ мм; 3) $L = 200$ мм.

Для образцов с соотношением $\eta = 7.5$ и $\eta = 5$ распределение продольного напряжения является равномерным, за исключением малых зон вблизи краев. В этом случае значение равномерно распределенного напряжения близко к среднему значению. Следовательно, значение напряжения в центральной части образца может быть рассчитано по значению растягивающей силы. Для образца с соотношением $\eta = 2.5$ среднее напряжение в среднем поперечном сечении

существенно отличается от напряжения в центральной части образца. Значение напряжения в центральной части короткого образца близко к среднему значению напряжения длинного образца и может быть определено делением значения растягивающей силы на площадь поперечного сечения образца.

Следует отметить, что значение напряжения, осредненного по толщине образца, отнесенное к деформации в центральной части образца:

$$E(y) = \left(\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(y, z) dz \right) / \varepsilon_{xx},$$

совпадает с достаточной точностью с предсказанием простой теоретической формулы:

$$E^{eff} = E_T \frac{(1 - 3c^2 s^2)}{s^4}, \quad E_T = \frac{4}{3} \frac{E_r}{\gamma_r},$$

здесь E_r — модуль Юнга резины, $\frac{E_r}{\gamma_r}$ — концентрация резины в резинокордном слое, s и c — синус и косинус угла корда соответственно.

Действительно, для $\eta = 7.5$ отношение $E(0) / E^{eff} = 0.94$, для $\eta = 5$ отношение $E(0) / E^{eff} = 0.93$, для $\eta = 2.5$ отношение $E(0) / E^{eff} = 0.87$. Для короткого образца ($\eta = 2.5$), с которым проводились эксперименты, различие в упругом модуле составляет только 13%, а для длинного ($\eta = 7.5$) различие составляет 6%.

Однако кордный угол для радиальных шин составляет 22 – 25 градусов. Рассмотрим НДС, возникающее в трехслойном образце толщиной $h = 2$ мм при кордном угле 30 градусов. Толщина прослойки равна 0.2 мм. Форма деформированного образца длиной 200 мм показана ниже на рисунке 3.14.

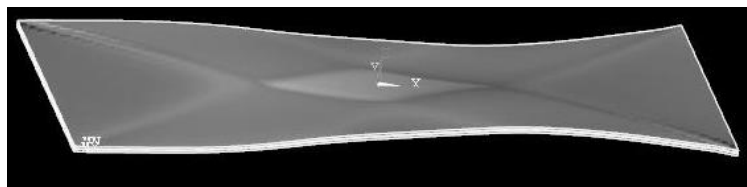


Рисунок 3.14. Закручивание двухслойного резинокордного образца с кордным углом 30 градусов.

Из рисунка следует, что НДС короткого двухслойного образца является существенно неоднородным. Образец закручивается, хотя растягиваемые торцы остаются параллельны друг другу. Поэтому актуальным является вопрос о возможности измерения эффективного продольного модуля Юнга E^{eff} из опыта с коротким образцом и вопрос определения длины образца, в котором можно наблюдать однородное НДС. Для этого сравним продольный модуль Юнга, вычисленный с помощью упрощенной теории (модуль для бесконечной длины образца) с модулем, вычисленным методом конечных элементов. Последний модуль вычислен как отношение средних напряжений к средним деформациям в среднем по длине сечении образца. Оба модуля для разных длин L приведены в таблице ниже.

Таблица 3.1. Сравнение теоретического и вычисленных при различных длинах образца эффективных модулей резинокорда с кордным углом 30 градусов

L, мм	E_{calc} , МПа	E_{eff} , МПа	Разница, %
200	210.3	329,6	36
400	215.7		35
800	307.0		7
1600	335.2		2

Из таблицы 3.1 видно, что для длин 800 мм и 1600 мм теоретически рассчитанный модуль хорошо совпадает с экспериментально определенным модулем Юнга. Вычисления, приведенные в этой таблице и в таблице ниже приведены для модуля Юнга резины, равного 32 МПа. Расчеты проведены с помощью квадратичных элементов.

Ниже аналогичная таблица приведена для угла 45 градусов.

Таблица 3.2. Сравнение теоретического и вычисленных при различных длинах образца эффективных модулей резинокорда с кордным углом 45 градусов

L, мм	E_{calc} , МПа	E_{eff} , МПа	Разница, %
200	45.6	48.4	6
400	51.9		7

Были проведены опыты по растяжению резинокордных образцов. Образцы резинокорда были получены научным руководителем в подарок от компании Michelin после успешного научного сотрудничества. Фотография установки с образцом, на которой проводились исследования, приведена на рисунке 3.15.



Рисунок 3.15. Фотография установки для проведения испытаний резинокордных образцов.

Сравнение модулей Юнга, вычисленных с помощью МКЭ при использовании разных типов элементов, дано в таблице 3.3 для длины образца 200 мм. Видно, что квадратичные элементы дают значения ближе к значению эффективного модуля и к значению измеренного модуля Юнга. Также видно, что вычисления с помощью элементов, в которых среднее гидростатическое давление выделяется в отдельную степень свободы, дают лучшие значения. Разница между вычисленным модулем и измеренным не лучше 15%.

Таблица 3.3. Сравнение теоретического, экспериментального и вычисленных при различных типах конечных элементов модулей резинокордных образцов с кордным углом 45 градусов

Тип элемента	E_{calc} , МПа	E_{eff} , МПа	Разница, %	E_{exp} , МПа	Разница, %
Квадр	45.6	48.4	6	56.7	20
Квадр, u/p	47.5		2		16
Лин	41.5		14		27
Лин, u/p	45.0		7		20

В таблице 3.4 приведено сравнение модулей Юнга, вычисленных с помощью МКЭ для кордного угла 30 градусов. В таблице представлено сравнение вычисленных значений модуля Юнга для двух типов элементов при длине $L=1600$ мм.

Таблица 3.4. Сравнение теоретического и вычисленных при различных типах конечных элементов модулей резинокордных образцов с кордным углом 30 градусов

Тип элемента	E_{calc} , МПа	E_{eff} , МПа	Разница, %
Квадр	335	330	1.5
Квадр, u/p	330		0

Как видно, такой длины образца вполне достаточно для проведения экспериментов с двухслойным образцом резинокорда.

Наконец, приведем в таблице 3.5 сравнение для вполне практического кордного угла 25 градусов при $L=1600$ мм.

Таблица 3.5. Сравнение теоретического и вычисленного модулей резинокордного образца длиной 1600 мм с кордным углом 25 градусов

Тип элемента	E_{calc} , МПа	E_{eff} , МПа	Разница, %
Квадр	795	802	1

Различие в значениях модулей (около 1%) означает, что длины $L=1600$ мм достаточно для проведения стандартных опытов с двухслойными образцами. С другой стороны, вычислив отношение значений $E_{\text{eff}} / E_{\text{calc}}$, можно получить значение эффективного модуля E_{eff} из опыта на коротком образце, умножив измеренное значение на это отношение.

3.5. Осреднение во втором приближении трехмерного неоднородного упругого материала

Для анализа связанностей для трехмерного метаматериала асимптотическим методом, необходимо рассмотреть первые два приближения этого метода.

Асимптотическое разложение. Рассмотрим периодичность во всех направлениях, то есть трехмерную периодичность. Используем асимптотическое разложение до второго порядка точности следующим образом:

$$u_i = v_i(\mathbf{x}) + \varepsilon N_{ipq}^1(\boldsymbol{\xi})v_{p,q}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 N_{ipq_1q_2}^2(\boldsymbol{\xi})v_{p,q_1q_2}(\mathbf{x}) + O(\varepsilon^3), \quad (3.5)$$

$$i = 1,2,3, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}.$$

Продифференцировав асимптотическое разложение (3.5) по медленной координате и заменив индекс q_1 на q :

$$u_{k,l} = v_{k,l} + N_{kpq,l}^1 v_{p,q} + \varepsilon N_{kpq}^1 v_{p,ql} + \varepsilon N_{kpq_2,l}^2 v_{p,q_2} + \varepsilon^2 N_{kpq_2}^2 v_{p,q_1q_2l}(\mathbf{x}) + O(\varepsilon^3),$$

подставим полученное выражение в закон Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} = (C_{ijpq} + C_{ijkl}N_{kpq,l}^1)v_{p,q} + \varepsilon C_{ijkl}N_{kpq}^1 v_{p,ql} + \varepsilon C_{ijkl}N_{kpq_2,l}^2 v_{p,q_2} + \varepsilon^2 C_{ijkl}N_{kpq_2}^2 v_{p,q_1q_2l} + O(\varepsilon^3). \quad (3.6)$$

Используя обозначения

$$P_{ijpq}^1 = C_{ijpq} + C_{ijkl}N_{kpq,l}^1$$

$$P_{ijpq_2}^2 = C_{ijkq_2} N_{kpq}^1 + C_{ijkl} N_{kpqq_2,l}^2$$

поле напряжений в формуле (3.6) представим в виде:

$$\sigma_{ij} = P_{ijpq}^1 v_{p,q} + \varepsilon P_{ijpq_2}^2 v_{p,q_2} + O(\varepsilon^2). \quad (3.7)$$

В формуле (3.7) локальные функции N_{ijpq}^1 и $N_{ijpq_2}^2$ определяются как решения локальных задач с условием периодичности, накладываемым на границы ячеек. Далее в тексте процедура будет описана подробно.

Используя уравнения (3.7), мы можем определить средние напряжения, заданные уравнениями (3.8):

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = A_{ijpq} \varepsilon_{pq} + \varepsilon B_{ijpq_2}^{(1)} \bar{\kappa}_{pq_2}, \quad (3.8)$$

где $\varepsilon_{pq} = v_{(p,q)}$ – малые деформации, а обобщенные кривизны определяются как $\bar{\kappa}_{pq_2} = v_{p,q_2}$. Жесткости в формуле (3.8) задаются следующим образом: $A_{ijpq} = \langle P_{ijpq}^1 \rangle$, $B_{ijpq_2}^{(1)} = \langle P_{ijpq_2}^2 \rangle$.

Уравнения равновесия, с учетом закона Гука (3.7), примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} = & \frac{1}{\varepsilon} P_{ijpq,j}^1 v_{p,q} + P_{ijpq}^1 v_{p,q,j} + P_{ijpq_2,j}^2 v_{p,q_2} + \varepsilon P_{ijpq_2}^2 v_{p,q_2,j} \\ & + \varepsilon (C_{ijkl} N_{kpqq_2}^2)_{,j} v_{p,q_2,l} + \varepsilon^2 C_{ijkl} N_{kpqq_2}^2 v_{p,q_2,l,j}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Локальная задача для **первого приближения** дает уравнение: $P_{ijpq,j}^1 = 0$. Или, с учетом введенных выше обозначений, запишем задачу для первого приближения в терминах функции N_{ipq}^1 :

$$(C_{ijpq} + C_{ijkl} N_{kpq,l}^1)_{,j} = 0 \quad (3.10)$$

Граничные условия, дополняющие задачу (3.10) для ячейки периодичности в форме параллелепипеда размера $l_1 * l_2 * l_3$, записываются в виде системы шести уравнений при $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} N_{ipq}^1 \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = N_{ipq}^1 \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} \\ C_{ijkl} N_{kpq,l}^1 n_j \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = -C_{ijkl} N_{kpq,l}^1 n_j \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} \end{cases} \quad (3.11)$$

Типичная ячейка периодичности показана ниже на рисунке 3.16.

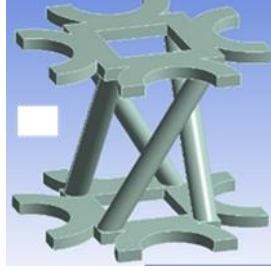


Рисунок 3.16. Ячейка периодичности трехмерного метаматериала.

Для метаматериалов условия (3.11) имеют место быть на тех частях границы, которые находятся на гранях отмеченного параллелепипеда. На внутренних границах заданы поверхностные силы вида $S_i = -C_{ijpq}n_j$. Наличие этих сил математически следует из (3.10), в которых имеются правые части в виде функций типа дельта-функций. Можно представить, что ячейка периодичности вне каркаса заполнена мягким материалом, модули упругости которого стремятся к нулю. Тогда на границе материала каркаса и фиктивного мягкого материала обычные в МСС условия равенства внутренних сил $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{fict})n_j = 0$ заменяются условием $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{fict})n_j + (C_{ijpq} - C_{ijkl}^{fict})n_j = 0$. Этот факт приводит к наличию отмеченных поверхностных сил при $\sigma_{ij}^{fict} \rightarrow 0$, $C_{ijkl}^{fict} \rightarrow 0$. Конечно, их наличие приводит к трудности решения локальной краевой задачи.

Удобным оказывается использование М-функций:

$$N_{kpq}^1 = M_{kpq}^1 - \frac{1}{2}(\xi_q \delta_{kp} + \delta_{kq} \xi_p) \quad (3.12)$$

Тогда краевая задача (3.10), (3.11) в терминах М-функций предстанет в виде (3.13):

$$\begin{cases} C_{ijkl}(\xi) \frac{\partial M_{kpq}^1}{\partial \xi_l} = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{ipq}^1 \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = M_{ipq}^1 \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} + \frac{1}{2}(l_q \delta_{ip} + \delta_{iq} l_p) \\ C_{ijkl} M_{kpq,l}^1 n_j \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = -C_{ijkl} M_{kpq,l}^1 n_j \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} \end{array} \right. \end{cases} \quad (3.13)$$

Дальнейшее упрощение задачи (3.13) связано с переходом в ее записи к перемещениям: $u_i(\xi) = \varepsilon M_{ipq}^1(\xi) \varepsilon_{pq}^0$. Тогда окончательно задача на ячейке периодичности в первом приближении примет вид:

$$\begin{cases} C_{ijkl}(\xi) \frac{\partial u_k(\xi)}{\partial \xi_l} = 0 \\ u_i|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = u_i|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} + \varepsilon_{ij}^0 l_j \\ C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} n_j \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = -C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_l} n_j \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} \end{cases} \quad (3.14)$$

На внутренних границах поверхностные силы равны нулю в задаче (3.14).

Решение данной задачи может быть реализовано стандартными процедурами в конечно-элементных пакетах программ. Средние по быстрой координате ξ напряжения для задачи периодичности в первом приближении в соответствии с (3.8) примут вид:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle P_{ijpq_2}^1 \rangle \varepsilon_{pq}^0. \quad (3.15)$$

Из (3.12) дифференцированием по быстрой координате получим:

$$N_{kpq,l}^1 = M_{kpq,l}^1 - \frac{1}{2} (\delta_{ql} \delta_{kp} + \delta_{kq} \delta_{pl}).$$

Откуда, очевидно, следует: $P_{ijpq}^1 = C_{ijpq} + C_{ijkl} N_{kpq,l}^1 = C_{ijkl} M_{kpq,l}^1$. Теперь задача (3.15) вычисления на макроуровне средних напряжений может быть решена стандартной вычислительной процедурой по макро перемещениям ε_{pq}^0 :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle C_{ijkl} M_{kpq,l}^1 \rangle \varepsilon_{pq}^0. \quad (3.16)$$

Тензор эффективных модулей упругости $h_{iq_2pq} = P_{iq_2pq}^1 + P_{ijpq_2,j}^2$ может быть вычислен из (3.16), или как $h_{iq_2pq} = \langle P_{iq_2pq}^1 \rangle$, поскольку среднее от второго члена при описанных выше граничных условиях равно нулю по ячейке периодичности.

В задаче для **второго приближения** уравнения равновесия (3.9) дают:

$$(C_{ijkl} N_{kpq_2,l}^2 + C_{ijkq_2} N_{kpq}^1)_{,j} + C_{iq_2kl} N_{kpq,l}^1 + C_{iq_2pq} = h_{iq_2pq}. \quad (3.17)$$

Функции N_{kpq}^1, h_{iq_2pq} в (3.17) известны из решения задачи на первом уровне. В (3.17) второй член выражения в круглых скобках так же, как в задаче первого приближения, приводит к трудности решения уравнения (3.17). Для обычного композита он дает скачок напряжений на границе компонент, определяемый величиной $C_{ijkq_2} N_{kpq}^1$. Численное решение задачи со скачком напряжений на границе компонент композита затруднительно. Однако для метаматериала вместо скачка имеем заданные поверхностные силы (так же как для задачи первого приближения), определяемые произведением $C_{ijkq_2} N_{kpq}^1$. Таким образом, в (3.17) надо решать $6 * 3$ локальных задач равновесия. Задачи заключаются в решении уравнений (3.17) с условиями периодичности на внешней границе ячейки периодичности (3.18):

$$\begin{cases} N_{kpqq_2}^2 \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = N_{kpqq_2}^2 \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} \\ C_{ijkl} N_{kpqq_2}^2 n_j \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = -C_{ijkl} N_{kpqq_2}^2 n_j \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} \end{cases} \quad (3.18)$$

и обычными условиями второго рода на внутренних границах ячейки периодичности (3.19):

$$(C_{ijkl} N_{kpqq_2,l}^2 + C_{ijkq_2} N_{kpq}^1) n_j = 0. \quad (3.19)$$

Некоторое неудобство условий (3.19) состоит в том, что граничные условия означают поверхностные силы, определяемые величиной $C_{ijkq_2} N_{kpq}^1$, которые нужно брать из решения локальных задач первого уровня.

Возможно перейти от функций $N_{kpqq_2}^2$ к функциям $M_{kpqq_2}^2$ следующим образом:

$$M_{kpqq_2}^2 = N_{kpqq_2}^2 + N_{kpq}^1 \xi_{q_2}.$$

Тем самым мы получим возможность придать задаче (3.17) – (3.19) более простой вид:

$$(C_{ijkl} M_{kpqq_2,l}^2)_j + C_{ijpq,j} \xi_{q_2} + C_{iq_2pq} - h_{iq_2pq} = 0. \quad (3.20)$$

Таким образом, видоизмененные условия периодичности для задачи второго приближения принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (M_{kpq q_2}^2 - N_{kpq}^1 \xi_{q_2}) \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = (M_{kpq q_2}^2 - N_{kpq}^1 \xi_{q_2}) \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} \\ C_{ijkl} (M_{kpq q_2}^2 - N_{kpq,l}^1 \xi_{q_2}) n_j \Big|_{\xi_\alpha = \frac{l_\alpha}{2}} = -C_{ijkl} (M_{kpq q_2}^2 - N_{kpq,l}^1 \xi_{q_2}) n_j \Big|_{\xi_\alpha = -\frac{l_\alpha}{2}} \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Соотношения на макроуровне. Теперь перейдем к определению средних моментных напряжений. Уравнение (3.6) дает возможность выяснить связь между моментными напряжениями и деформациями и обобщенными кривизнами. Моменты M_i вектора напряжений \mathbf{S} относительно начала координат определяются следующим образом:

$$M_i = \epsilon_{ist} x_s S_t. \quad (3.22)$$

Компоненты вектора напряжений S_t в формуле (3.22) определяются соотношениями $S_t = \sigma_{tr} n_r$. Вектор \mathbf{S} действует на площадку с внешним единичным вектором нормали \mathbf{n} в точке \mathbf{x} . Согласно идее двух масштабов, мы представляем \mathbf{x} для каждой ячейки в виде суммы двух членов: $x_s = x_s^c + \varepsilon \xi_s$, где x_i^c – координаты центра ячейки и ξ_s – координаты любой точки внутри ячейки на микроуровне. Тогда компоненты момента \mathbf{M} , осредненные по ячейке, будут:

$$\langle M_i \rangle = \epsilon_{ist} x_s^c \langle \sigma_{tr} \rangle n_r + \epsilon_{ist} \varepsilon \langle \xi_s \sigma_{tr} \rangle n_r,$$

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{x} \times \langle \mathbf{S} \rangle + \langle \mathbf{m} \rangle \cdot \mathbf{n}. \quad (3.23)$$

Первый член в уравнении (3.23) равен моменту осредненного вектора напряжений $\langle \mathbf{S} \rangle$ относительно начала координат, где $\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \mathbf{n}$. Этот член вписывается в рамки обычной линейной упругости. Второе слагаемое – это внутреннее моментное напряжение \mathbf{m} , которое выходит за рамки классической теории упругости. Этот тензор имеет компоненты $\langle m_{ir} \rangle = \varepsilon \epsilon_{ist} \langle \xi_s \sigma_{tr} \rangle$. Затем подставим σ_{ij} из уравнения (3.6) в последнюю формулу и получим второе осредненное определяющее соотношение осредненной среды:

$$\langle m_{ir} \rangle = \varepsilon B_{irpq}^{(2)} \varepsilon_{pq} + \varepsilon^2 D_{irpq_1 q_2} \bar{\kappa}_{pq_1 q_2},$$

где: $B_{irpq}^{(2)} = \epsilon_{ist} \langle \xi_s P_{trpq} \rangle$, $D_{irpq_1 q_2} = \epsilon_{ist} \langle \xi_s P_{trpq_1 q_2} \rangle$.

Теперь получены все определяющие соотношения осредненной среды. Напишем эти уравнения снова, чтобы подчеркнуть сходство с уравнениями (3.3):

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{ij} \rangle &= A_{ijpq} \varepsilon_{pq} + \varepsilon B_{ijpq_1q_2}^{(1)} \bar{\kappa}_{pq_1q_2}, \\ \langle m_{ir} \rangle &= \varepsilon B_{irpq}^{(2)} \varepsilon_{pq} + \varepsilon^2 D_{irpq_1q_2} \bar{\kappa}_{pq_1q_2}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

Уравнения (3.24) не являются уравнениями классической теории упругости. Неклассические теории упругости (например, теорию Коссера [114]) можно рассматривать как частный случай уравнений (3.24). Следовательно, теперь можно сделать общий важный вывод. Из формул (3.24) становится ясно, что осредненный материал обеспечивает связанность между напряжением и моментным напряжением только при $\varepsilon > 0$, то есть для конечного числа ячеек. Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\langle m_{ir} \rangle \rightarrow 0$. Это означает, что осредненный материал не проявляет связанности на макроуровне для бесконечного числа ячеек. Следовательно, он должен рассматриваться как метаматериал со свойством связанности, а не как обычный материал, который обеспечивает связанность напряжения с моментным напряжением. Поэтому никакая неклассическая упругая среда не может быть получена осреднением, если компоненты композитной среды подчиняются классическим уравнениям линейной упругости.

3.6. Связанность растяжения/сжатия с кручением для квазипериодической среды

Теоретические основы. Трехмерное асимптотическое представление верно и в этом случае. Однако теперь попытаемся получить связанность растяжения (или сжатия) с кручением, обеспечиваемую метаматериалом, используя только анизотропию и обычный закон Гука. Рассмотрим асимптотическое осреднение первого порядка:

$$u_i = v_i(\mathbf{x}) + \varepsilon N_{ipq}^1(\boldsymbol{\xi}) v_{p,q}(\mathbf{x}) + O(\varepsilon^2).$$

Теперь осредненное определяющее соотношение – это закон Гука для анизотропной среды:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = A_{ijpq} \varepsilon_{pq}.$$

Предположим, что мы рассматриваем растяжение-сжатие, приложенное вдоль оси x_3 . Краевая задача кручения для осредненного материала на макроуровне формулируется, как показано в (3.11):

$$\begin{aligned} A_{ijpq}v_{p,qj} &= 0, \quad x \in V, \\ A_{ijpq}v_{p,q}n_j &= 0, \quad x \in \Sigma_{\text{lat}}, \\ v &= 0, \quad x \in \Sigma_{\text{bot}}, \quad v_n = v_n^0, \quad v_T = 0, \quad x \in \Sigma_{\text{top}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Эффективные модули упругости A_{ijpq} в уравнениях (3.25) должны быть получены из решения локальной задачи на микроуровне. Оказалось, что можно сформулировать два типа локальных задач. Первая – это стандартная задача на ячейке, сформулированная для одной ячейки периодичности в виде уравнения равновесия:

$$P_{ijpq,j} = 0, \quad (3.26)$$

с условиями периодичности, сформулированными на всех границах ячейки.

Локальная задача второго типа формулируется для одного слоя ячеек, состоящего из всех ячеек в плоскости, ортогональной оси x_3 . Это означает, что уравнение (3.26) должно быть решено в объеме этого слоя, а не только одной ячейки. Граничные условия в последнем случае формулируются по-другому. Условия периодичности задаются только на верхней и нижней границах, а на боковой границе задается условие $P_{ijpq}n_j = 0$, $p, q = 1, 2, 3$. Второй вариант локальной задачи позволяет более точно удовлетворять граничным условиям на боковой границе. Это означает, что первый вариант является целесообразным, если количество ячеек велико и граничным эффектом можно пренебречь. Также очень важно отметить, что вычисления с использованием одной ячейки (первого типа) являются правильными только для декартовой системы координат. Наоборот, второй вариант подходит для любого числа ячеек в плоскости, перпендикулярной оси x_3 . Он также применим, если используется цилиндрическая система координат.

Независимо от типа локальной задачи связанность растяжения с кручением имеет место, если эффективный модуль упругости $A_{\varphi zzz}$ не равен нулю. Здесь

используются обозначения: φ обозначает направление по окружности, z совпадает с x_3 . Этот вывод сразу становится понятным, если мы напишем закон Гука в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{rr} \rangle &= A_{rrrr} \varepsilon_{rr} + A_{rr\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{rrzz} \varepsilon_{zz}, \\ \langle \sigma_{\varphi\varphi} \rangle &= A_{\varphi\varphi rr} \varepsilon_{rr} + A_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{\varphi\varphi zz} \varepsilon_{zz}, \\ \langle \sigma_{zz} \rangle &= A_{zzrr} \varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{zzzz} \varepsilon_{zz} + A_{zz\varphi} \varepsilon_{z\varphi},\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{r\varphi} \rangle &= A_{r\varphi r\varphi} \varepsilon_{r\varphi}, \\ \langle \sigma_{\varphi z} \rangle &= A_{\varphi z\varphi z} \varepsilon_{\varphi z} + A_{\varphi zzz} \varepsilon_{zz}, \\ \langle \sigma_{rz} \rangle &= A_{rzrz} \varepsilon_{rz}.\end{aligned}$$

Здесь следует отметить, что этот тип связанности определяется значением эффективного коэффициента $A_{\varphi zzz}$ и, следовательно, не зависит от количества ячеек. Таким образом, если модуль $A_{\varphi zzz}$ не равен нулю, то метаматериал является истинным материалом со связанностью растяжения и кручения. Коэффициент, выражающий меру этой связанности, легко представить в виде:

$$\beta_2 = F_3 / (M_3 / L), \quad (3.27)$$

где L – типичный размер тела в направлении, перпендикулярном оси вращения x_3 , $F_3 = \int_A \sigma_{zz} dA$ – сила растяжения-сжатия, а $M_3 = \int_A r \sigma_{z\varphi} dA$ обозначает момент вращения (крутящий момент). Ясно, что эффективные коэффициенты A_{1333} и A_{2333} равны нулю для любой антисимметричной ячейки (имеет форму, которая повторяется, если ячейка поворачивается на угол 180°). Пример такой ячейки показан на рисунке 3.17.

С другой стороны, коэффициент $A_{\varphi zzz}$ не равен нулю, если он рассчитан для одной ячейки. Когда количество ячеек увеличивается, рассчитанный для них модуль $A_{\varphi zzz}$ значительно уменьшается, как показано ниже.

3.7. Численные примеры

Периодичность в декартовой системе координат. Для изучения связанности растяжения и сжатия с кручением смоделировано закручивание посредством поворота верхней поверхности образца относительно нижней (рисунок 3.17). Геометрические структуры были построены аспирантом Д.М. Семеновым. Задача решалась методом конечных элементов в трехмерной постановке. При этом вычислялись вертикальная растягивающая сила и момент, возникающий при повороте.

Расчеты были сделаны для структур, состоящих из разного количества слоев ячеек по оси Z (1, 2, 3, 5, 7, 9) и разного числа ячеек (N) по осям X и Y ($N = 1, 2, \dots, 8$) (рисунки 3.17, 3.18). Граничные условия были заданы следующим образом: нижняя поверхность жестко закреплена, на верхней поверхности был задан поворот на 10° вокруг оси Z. Принятые в расчетах свойства материала стержня: модуль Юнга – 200000 МПа, коэффициент Пуассона – 0.3.

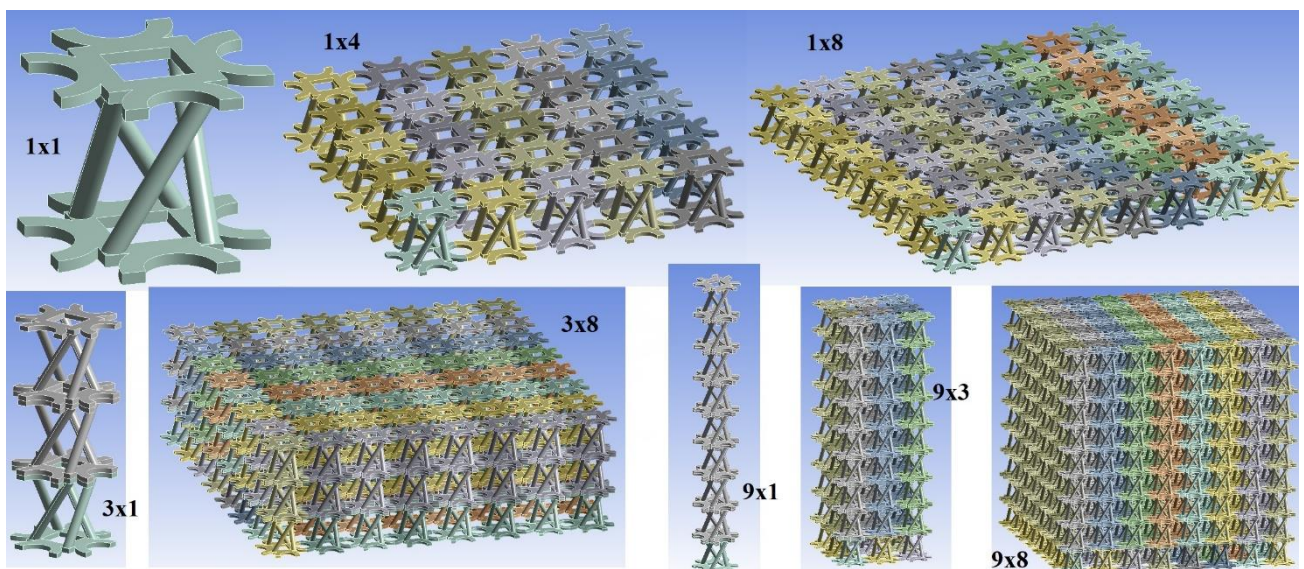


Рисунок 3.17. Изображение ячейки периодичности и конструкций ячеек, состыкованных в декартовом стиле (например, 3x8: 3 – число ячеек по оси Z, 8 – число ячеек по осям X и Y).

На рисунке 3.18 показаны примеры построения сетки в стержнях в конечно-элементной программе.

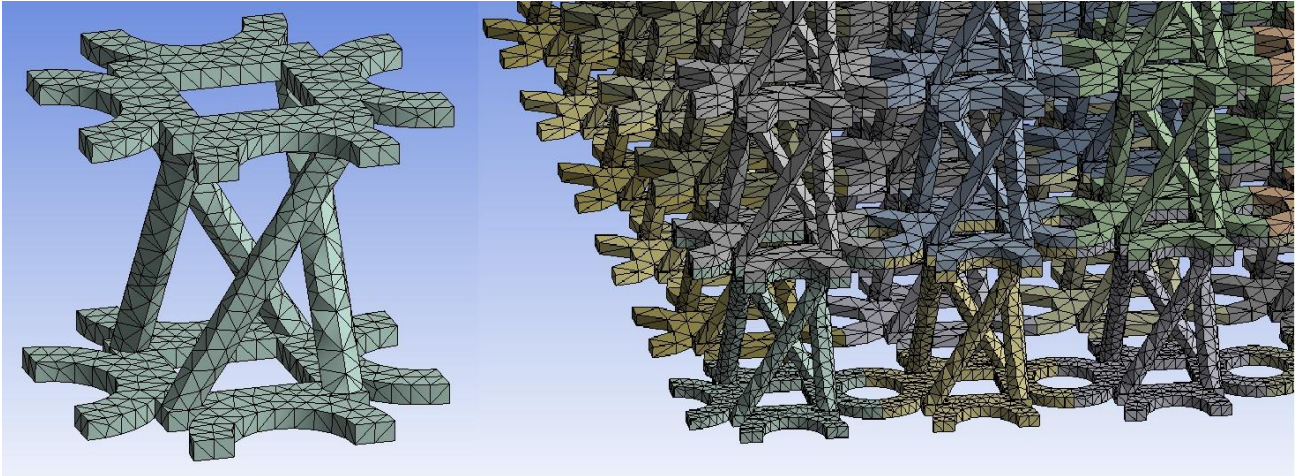


Рисунок 3.18. Примеры построения сетки для конструкций стержней.

В результате решения задачи на ячейке периодичности были рассчитаны эффективные модули C_{1313} , C_{2323} , C_{1333} , C_{2333} . Очевидно, что модули C_{1333} , C_{2333} оказались равными нулю.

На рисунке 3.19 видно, что с увеличением числа ячеек N вдоль осей X и Y мера связанности растяжения-кручения (β_2) уменьшается и стремится к нулю. Мера связанности слабо зависит от высоты стержня (количества ячеек по оси Z): для стержней, у которых число ячеек периодичности по оси Z больше трех, все графики практически совпадают.

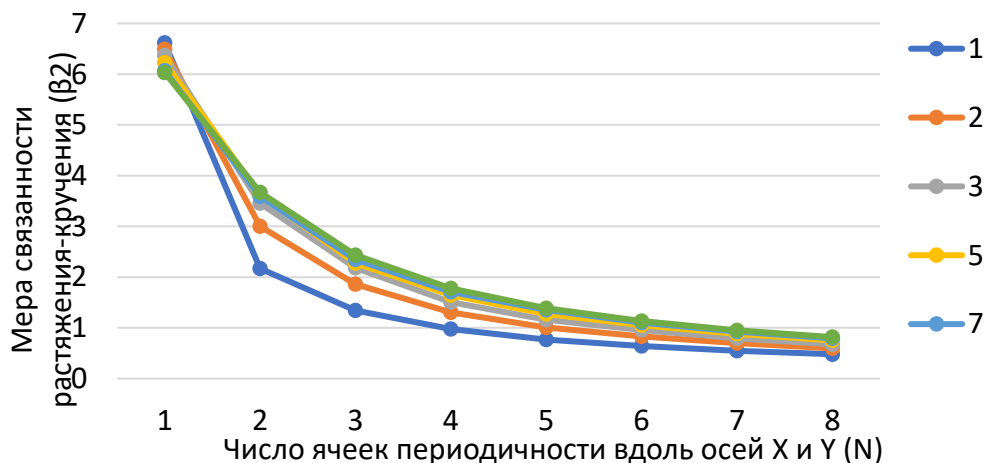


Рисунок 3.19. Зависимость меры связанности растяжения-кручения (β_2) от числа ячеек периодичности (N) вдоль осей X и Y для структур разной высоты (1, 2, 3, 5, 7, 9 – число ячеек периодичности вдоль оси Z).

Исследование зависимости решения от степени используемых конечных элементов (линейные или квадратичные) показано на рисунке 3.20. Показано, что при небольшом количестве ячеек возникает разница в параметре меры связанности, однако при увеличении количества ячеек кривые практически совпадают и стремятся к нулю.

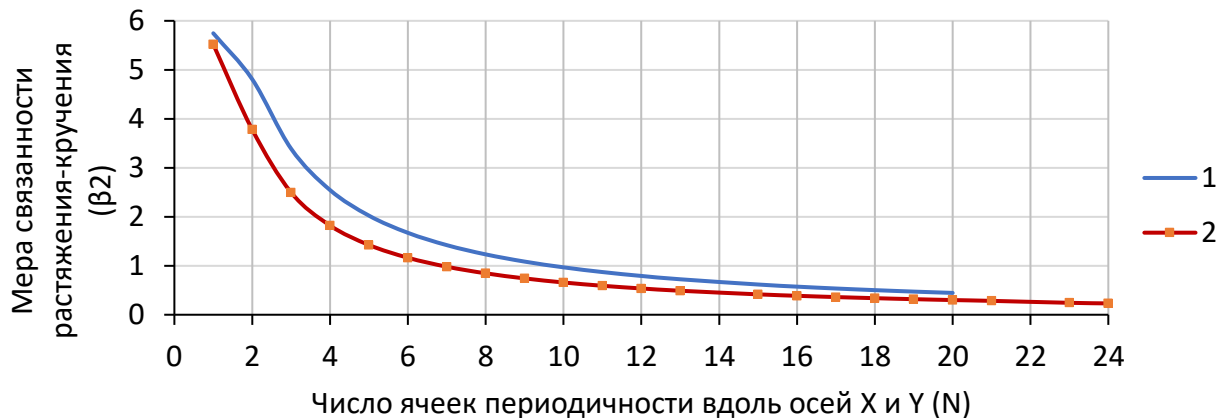


Рисунок 3.20. Зависимость меры связанности растяжения-кручения (β_2) от числа ячеек периодичности (N) вдоль осей X и Y для структуры высотой 3 ячейки периодичности вдоль оси Z . (Расчеты выполнены с квадратичными (1) и линейными (2) конечными элементами.)

Были проведены дополнительные численные эксперименты с ячейкой периодичности другой формы. Граничные условия изменены и имеют следующий вид: нижняя граница закреплена по всем направлениям, верхняя граница имеет фиксированное сжимающее перемещение вдоль оси Z , касательные напряжения равны нулю. Таким образом, верхняя часть образца может свободно поворачиваться вокруг оси Z под действием внутренних сил. Примеры пакетов ячеек можно при различных N можно увидеть на рисунке 3.21.

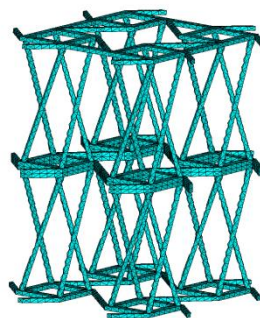


Рисунок 3.21. Изображение пакета ячеек периодичности.

Конструкции имели кубическое строение: вдоль каждого направления располагалось одинаковое количество ячеек периодичности. Было обнаружено, что при определенном значении количества используемых ячеек периодичности существует максимум угла поворота. То есть зависимость ведет себя не монотонно (рисунок 3.22).



Рисунок 3.22. Зависимость меры связанности растяжения-кручения β_2 от числа ячеек периодичности.

Исследован случай локального воздействия на периодическую в декартовой системе координат структуру. Для этого рассмотрена структура, состоящая из трех ячеек периодичности по высоте. Количество ячеек по ширине и длине было одинаковым и изменялось в расчетах. Граничное условие отличалось от рассмотренных выше задач и состояло в вертикальной силе, действующей только на одну ячейку периодичности, расположенную в середине образца. Силы по двум другим направлениям равны нулю. Остальные поверхности, кроме заделки на нижней границе, свободны от нагрузок. Результаты вычислений для различного числа ячеек периодичности в плане приведены на рисунке 3.23.

Видно, что под воздействием сжимающей силы средняя ячейка поворачивается. Остальные ячейки периодичности имеют незначительные перемещения. Результаты этих вычислений подтверждают теоретические выводы

о сохранении свойства связанности растяжения/кручения при конечном размере области воздействия, например при локально действующей силе.

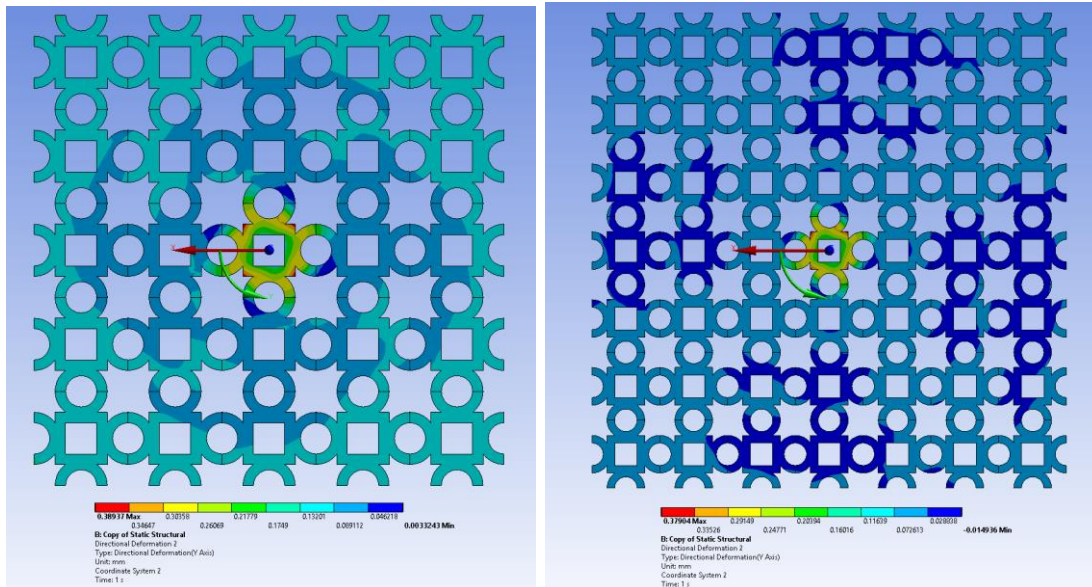


Рисунок 3.23. Перемещения, показывающие закручивание материала вблизи приложения локальной нагрузки. Слева – случай $N = 5$, справа – случай $N = 7$.

Подобный сценарий нагружения может реализовываться при динамических воздействиях в случае распространения волны возмущений по образцу.

Можно сделать выводы об асимптотическом осреднении материала с искусственной периодической структурой с эффектом связанности растяжения/кручения на уровне ячейки периодичности:

- 1) Свойство связанности растяжения/кручения, наблюдаемое на ячейке периодичности, проявляется при использовании классической теории упругости.
- 2) Два вида проведенных экспериментов определяют различные эффективные свойства структур, созданных из ячеек периодичности одинакового типа при малом N .
- 3) Если число ячеек в плоскости, перпендикулярной оси вращения, стремится к бесконечности, то осредненные свойства связанности растяжения/кручения материала исчезают.

4) При локальном воздействии на структуру (действие силы на одну ячейку периодичности) свойства связанности растяжения/кручения сохраняются в конечной области воздействия.

Квазипериодическая структура. Иная картина наблюдается для ячеек, состыкованных в стиле цилиндрической системы координат (рисунок 3.24). В этом случае задавалась осевое сжатие, а вычислялся крутящий момент.

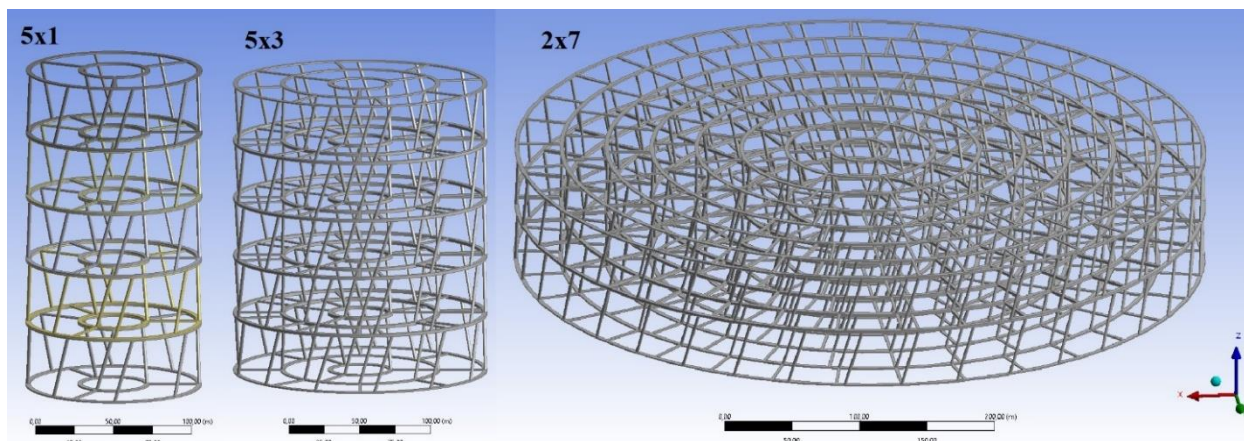


Рисунок 3.24. Изображение конструкций из ячеек, состыкованных в стиле цилиндрической системы координат (например, 5x3: 5 – число слоев по оси Z, 3 – число ячеек по радиусу).

На рисунке 3.25 показаны примеры построения сетки в цилиндрических стержнях в конечно-элементной программе.

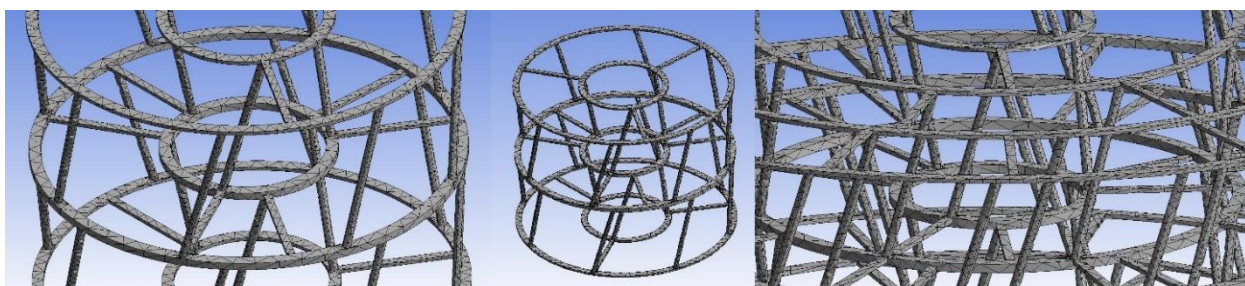


Рисунок 3.25. Примеры построения сетки для цилиндрических конструкций стержней.

На рисунке 3.26 показана зависимость меры связанности сжатия/кручения (β_2) от числа ячеек периодичности (N) по радиусу цилиндрического стержня для структур разной высоты. Как видно, связанность сжатия/кручения для цилиндрических стержней не зависит от числа слоев N по радиусу и не уменьшается при увеличении N. Также мера связанности не зависит от числа слоев

по вертикали: для стержней, у которых число слоев по оси Z больше двух, графики практически совпадают (рисунок 3.26).

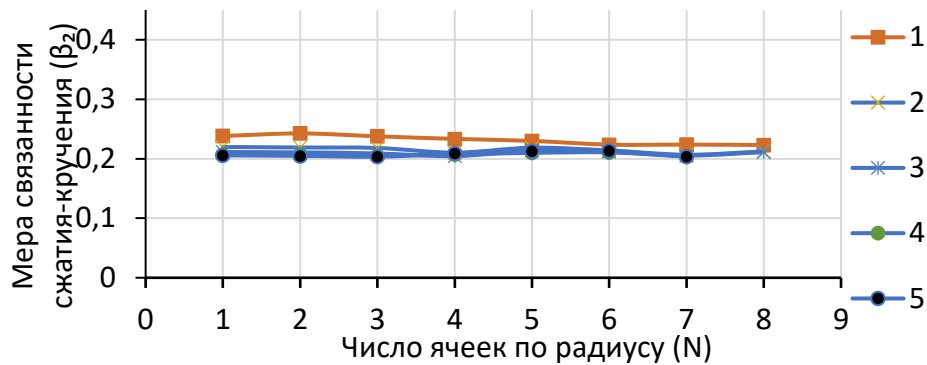


Рисунок 3.26. Зависимость меры связанности сжатия/кручения (β_2) от числа ячеек периодичности (N) по радиусу для структур разной высоты (1, 2, 3, 4, 5 – число слоев вдоль оси Z).

Заключение

В данной работе проведено комплексное исследование, посвященное двухуровневому анализу некоторых типов композитов и метаматериалов. В частности, рассматривались дисперсно-упрочненные композитные материалы, пористые среды и метаматериалы.

В рамках первой главы было осуществлено исследование эффективных упругих свойств алюминиевого сплава, армированного керамическими частицами карбида бора. Результат исследования состоит в том, что вычисленные значения модуля Юнга для 3D модельной и реальной структур отличаются от экспериментальных значений не более чем на 1%. Значения модуля Юнга для 2D реальной структуры меньше экспериментальных почти на 8%. Следовательно, модельные структуры, в которых керамические включения моделируются эллипсоидами, можно использовать для оценки эффективных упругих модулей композита $B_4C/2024Al$ (по крайней мере, для концентраций B_4C меньше 20%), а при использовании 2D моделей следует учитывать, что для концентраций B_4C от 14 до 20% значения модуля Юнга в двумерных численных экспериментах получаются на 6-8% ниже. При расчетах напряженно-деформированного состояния композита $B_4C/2024Al$ при статической нагрузке было выявлено, что концентрации интенсивностей напряжений по Мизесу во включениях и матрице примерно в 2-3 раза больше при использовании 3D модели реальной структуры по сравнению с 3D моделью эллипсоидальных включений.

Путем решения задач в представительной области получены осредненные диаграммы зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации для пористых материалов и дисперсного композита. Исследовано влияние пути деформирования на вид осредненной диаграммы. Также проведены серии расчетов для определения зависимости осредненных диаграмм от величины объемной деформации. Материал матрицы описывается классической теорией течения с изотропным упрочнением. Результаты численных экспериментов

показали, что в случае материала с угловатыми порами на макроуровне возникает зависимость осредненной диаграммы как от пути деформирования, так и от величины объемной деформации. Осредненная диаграмма для пути деформирования, состоящего из объемного деформирования и последующего сдвига, заметно отличается от диаграмм для других путей деформирования. Такой тип деформирования характерен для грунтовых массивов. Обнаружено, что во всех численных экспериментах с увеличением объемной деформации происходит уменьшение предела текучести. Для дисперсного композита заметного влияния пути деформирования и объемной деформации не обнаружено.

Во второй главе проведены серии численных экспериментов, посвященные сравнению алгоритмов численного моделирования прогрессирующего разрушения. Описаны возможные подходы к моделированию разрушений. По результатам расчетов модельной задачи показано, что алгоритм разрушения в точке интегрирования не позволяет получить качественно и количественно адекватные результаты в силу того, что результат существенно зависит от параметров расчета – размера конечно-элементной сетки и шага нагружения. Анализ результатов расчетов на тестовой задаче, полученных с помощью алгоритма разрушения конечного элемента целиком, показал, что при достаточном уменьшении среднего размера КЭ численные решения перестают существенно отличаться: при выборе достаточно малого размера конечных элементов данный метод может быть применен для моделирования прогрессирующего разрушения. Результаты вычислений на тестовой задаче показали, что алгоритм разрушения области фиксированного размера позволяет получать качественные и количественные результаты, не зависящие от размера сетки и, следовательно, тоже может быть применен для моделирования прогрессирующего разрушения в материале.

Показано, что учет реальной микроструктуры, полученной методом компьютерной томографии, и учет разрушения фаз дисперсного композита являются важными элементами моделирования композитных материалов с точки

зрения достижения соответствия расчетных диаграмм напряжение – деформация материала с экспериментальными данными. Аналогичные численные эксперименты с искусственно созданными структурами приводят к существенному несоответствию с экспериментальными данными из-за сложной формы включений, вызывающей неоднородное распределение напряжений.

В третьей главе исследованы механические свойства искусственных материалов с периодической структурой. Для одного из рассматриваемых материалов, резинокорда, при помощи численного моделирования определены размеры зон краевого эффекта и допустимые размеры образца. Показано, что короткие образцы также могут быть использованы при условии пересчета продольной деформации.

Асимптотический метод осреднения во втором приближении применялся для изучения осредненных определяющих соотношений неоднородной среды на макроуровне и прежде всего для изучения связанностей растяжения/изгиба и растяжения/кручения метаматериалов. В общем случае трехмерной среды показано, что связанность зависит от малого параметра, который обратно пропорционален количеству ячеек периодичности, составляющих метаматериал.

Более того, связанность классических напряжений и деформаций с моментными напряжениями и кривизнами/кручением исчезает, когда малый параметр стремится к нулю. Следовательно, любая композитная среда является структурой (малый параметр больше нуля), а не обычным материалом (параметр равен нулю) относительно типов связанности, отмеченных выше. Этот вывод справедлив для сред с компонентами, описываемыми классической упругостью, и для ячеек, состыкованных друг с другом вдоль осей декартовой системы координат.

В первых двух примерах, в которых были исследованы связанности растяжения/изгиба и растяжения/кручения для метаматериала, состоящего из ячеек, состыкованных друг с другом декартовым образом, расчеты показывают уменьшение коэффициента связанности при увеличении числа ячеек. Связанность

растяжения/кручения рассматривалась для среды, состоящей из ячеек, сложенных в стиле цилиндрической системы координат. В данном случае коэффициент связанности оставался постоянным.

Разработана и реализована методика решения локальных задач метода осреднения на периодической ячейке на примере одного типа метаматериала. Решение этих задач заменяет обычно применяемые вычисления для большого ансамбля ячеек.

Список литературы

1. Артамонова Н.Б. Асимптотический анализ уравнения равновесия флюидонасыщенной пористой среды методом осреднения / Н.Б. Артамонова, А.Ж. Мукатова, С.В. Шешенин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2017. – № 2. – С. 115-129.
2. Артамонова Н.Б. Численная реализация модели Био при больших деформациях : дис. ... канд. физико-математических наук: 01.02.04 / Н.Б. Артамонова. – Москва, 2020. – 157 с.
3. Бахвалов Н.С. Осреднение процессов в периодических средах / Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
4. Белкин А.Е. Теоретический и экспериментальный анализ контакта массивной шины с беговым барабаном / А.Е. Белкин, В.К. Семенов // Известия РАН. Сер. «Механика твердого тела». – 2016. – № 3. – С. 71-82.
5. Белякова Т.А. Термовязкогиперупругое поведение эластомерных материалов, модифицированных наночастицами наполнителя / Т.А. Белякова, Ю.П. Зезин, Е.В. Ломакин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 4. – С. 63-81.
6. Белякова Т.А. Упругопластическое деформирование дилатирующей среды вблизи вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния / Т.А. Белякова, Е.В. Ломакин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2004. – № 1. – С. 109-118.
7. Брюханов И.А. Атомистическое моделирование механических свойств хиральных металлических нанотрубок / И.А. Брюханов, В.А. Городцов, Д.С. Лисовенко // Физическая мезомеханика. – 2019. – Т. 22. – № 6. – С. 48-57.
8. Быков Д.Л. Определяющие соотношения деформирования и разрушения наполненных полимерных материалов в процессах преобладающего осевого растяжения в различных барометрических условиях / Д.Л. Быков, В.А.

- Пелешко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – № 6. – С. 40-65.
9. Васильев В.В. О корректных нелокальных обобщенных теориях упругости / В.В. Васильев, С.А. Лурье // Физическая мезомеханика. – 2016. – Т. 19. – № 1. – С. 47-59.
 10. Власов А.Н. Влияние углеродных добавок на механические характеристики эпоксидного связующего / А.Н. Власов, Д.Б. Волков-Богородский, Ю.В. Корнев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 3. – С. 92-103.
 11. Власов А.Н. Исследование механических свойств композитных сетчатых оболочек методом асимптотического усреднения / А.Н. Власов, Д.Б. Волков-Богородский, Ю.А. Уткин // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – Т. 29. – № 2. – С. 247-259.
 12. Влияние структуры металломатричного композита магний-нитрид алюминия на его сопротивление деформированию при квазистатическом и динамическом нагружении / А.П. Хрусталёв [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2018. – Т. 44. – № 20. – С. 21-49.
 13. Вычисление эффективных свойств геокомпозитов на основе изображений компьютерной томографии / Н.Б. Артамонова [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 3. – С. 83-94.
 14. Горбачев В.И. Осреднение линейных задач механики композитов при непериодической неоднородности / В.И. Горбачев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2001. – № 1. – С. 31-37.
 15. Городцов В.А. Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией / В.А. Городцов, Д.С. Лисовенко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 4. – С. 7-24.
 16. Два приложения асимптотического метода осреднения / С.В. Шешенин [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и

- гетерогенных сред. Сборник трудов 10-ой Всероссийской научной конференции с международным участием. Москва 17-19 ноября 2020. – М.: Силицея-Полиграф, 2020. – С. 215-221.
17. Димитриенко Ю.И. Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости / Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, С.В. Сборщиков // Математическое моделирование и численные методы. – 2016. – № 10. – С. 3-23.
 18. Ду И. Нелинейные модели резинокордных слоев и пневматической шины : дис. ... канд. физико-математических наук: 01.02.04 / И. Ду. – Москва, 2022. – 127 с.
 19. Зарецкий Ю.К. Лекции по современной механике грунтов / Ю.К. Зарецкий. – Ростов-н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1989. – 607 с.
 20. Звягин А.В. Численное моделирование ломаных трещин / А.В. Звягин, А.С. Удалов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2023. – № 1. – С. 44-48.
 21. Ильюшин А.А. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
 22. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести / Л.М. Качанов // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – № 8. – С. 26-31.
 23. Качанов Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 312 с.
 24. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 420 с.
 25. Клементьев П.Д. Мезоуровневый подход для вычисления диаграммы напряжение – деформация пористых материалов / П.Д. Клементьев, С.В. Шешенин, Н.Б. Артамонова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 5. – С. 30-41.

26. Клементьев П.Д. Сравнительный анализ методов прогрессирующего разрушения / П.Д. Клементьев, С.В. Шешенин, Н.Б. Артамонова // Сборник трудов 15-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. – Москва: ООО «Сам Полиграфист», 2025. – С. 219-228.
27. Клементьев П.Д. Мезомеханический подход к исследованию зависимости НДС композитных и пористых материалов от пути деформирования / П.Д. Клементьев, С.В. Шешенин // Математическое моделирование в естественных науках: материалы XXXIII Всероссийской конференции (г. Пермь, 2–4 октября 2024 г.). – Пермь: Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2024. – С. 172-175.
28. Клементьев П.Д. Сравнение методов моделирования прогрессирующего разрушения композита В4С/АL / П.Д. Клементьев, С.В. Шешенин // Сборник трудов 13-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского “Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред” 14-16 ноября 2023 г. – М.: Сам Полиграфист, 2023. – С. 90-98.
29. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности / В.Д. Ключников. – М.: Издательство Московского университета, 1979. – 208 с.
30. Курганова Ю.А. Разработка и применение дисперсно упрочненных алюмоматричных композиционных материалов в машиностроении : дис. ... докт. технических наук: 05.16.06 / Ю.А. Курганова. – Москва, 2008. – 243 с.
31. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред / Е.В. Ломакин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1991. – № 6. – С. 66-75.
32. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения для материалов со свойствами, зависящими от вида деформированного состояния / Е.В. Ломакин, П.В.

- Тишин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 6-1. – С. 52-62.
33. Ломакин Е.В. Упругопластическое деформирование дилатирующей среды вблизи вершины трещины в условиях плоского напряженного состояния / Е.В. Ломакин, О.П. Щендригина // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 4. – С. 25-33.
34. Лурье С.А. Метод идентификации параметров градиентных моделей неоднородных структур с использованием дискретно-атомистического моделирования / С.А. Лурье, Ю.О. Соляев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 3. – С. 89-112.
35. Многоуровневые модели неупругого деформирования материалов и их применение для описания эволюции внутренней структуры / П.В. Трусков [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т. 15. – № 1. – С. 33-56.
36. Муравлева Л.В. Об осреднении тонкостенных тел / Л.В. Муравлева, С.В. Шешенин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2004. – № 4. – С. 129-138.
37. Мясникова М.В. Численное моделирование деформации структурных составляющих алюминиевого металломатричного композита / М.В. Мясникова, Ю.В. Халевицкий // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Казань, 2015. – С. 2712-2714.
38. Неклассические свойства метаматериалов / С.В. Шешенин [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 9-ой Всероссийской научной конференции с международным участием. Москва 19-21 ноября 2019. – М.: ИПРИМ РАН, 2019. – С. 259-263.

39. Определение упругих свойств и тензора передачи порового давления горных пород методом осреднения / С.В. Шешенин [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 4: Геология. – 2015. – № 4. – С. 90-97.
40. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
41. Попович А.А. Перспективные материалы и технологии аддитивного производства. Новые материалы для аддитивных технологий. Т. 1 / А.А. Попович. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – 346 с.
42. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 80 с.
43. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 743 с.
44. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения / Ю.Н. Работнов // Вопросы прочности материалов и конструкций. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 5-7.
45. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
46. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
47. Савенкова М.И. Применение метода осреднения к материалам с физически нелинейными свойствами : дис. ... канд. физико-математических наук: 01.02.04 / М.И. Савенкова. – Москва, 2013. – 131 с.
48. Упругие свойства резинокорда. Учебное пособие по механическому практикуму / С.В. Шешенин [и др.]. – М.: Издательство мехмата МГУ, 2009.
49. Федулов Б.Н. Задачи пластического течения дилатирующих сред при плоской деформации : дис. ... канд. физико-математических наук: 01.02.04 / Б.Н. Федулов. – Москва, 2006. – 177 с.
50. Хрусталёв А.П. Исследование физико-механических свойств дисперсно-упрочнённых композитов на основе алюминия и магния : дис. ... канд.

- физико-математических наук: 01.02.04 / А.П. Хрусталёв. – Томск, 2018. – 127 с.
51. Численное исследование особенностей локализации пластической деформации и разрушения металломатричного композита Al/SiC / С.В. Смирнов [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2017. – Т. 20. – № 2. – С. 61-70.
 52. Шалимов А.С. Моделирование деформирования и разрушения пористых сред с учетом особенностей их морфологического строения / А.С. Шалимов, М.А. Ташкинов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 175-187.
 53. Шамина А.А. Взаимное влияние системы трещин в трехмерном упругом теле : дис. ... канд. физико-математических наук: 01.02.04 / А.А. Шамина. – Москва, 2021. – 130 с.
 54. Шешенин С.В. Численный анализ задач механики композитов / С.В. Шешенин, Н.Б. Артамонова. – М.: Издательство Московского университета, 2025. – 541 с.
 55. Шешенин С.В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин / С.В. Шешенин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2006. – № 6. – С. 71-79.
 56. Шешенин С.В. Гомогенизация резинокордного слоя при умеренно больших деформациях / С.В. Шешенин, Ду И // Механика композитных материалов. – 2021. – Т. 57. – № 3. – С. 395-410.
 57. Шешенин С.В. Анализ диаграммы напряжение – деформация для пористых материалов / С.В. Шешенин, П.Д. Клементьев, Н.Б. Артамонова // Материалы XXIV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2025), 7–13 сентября 2025 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2025. – С. 147-149.
 58. Шешенин С.В. Численное моделирование упругопластических свойств композита В4С/2024А1 / С.В. Шешенин, П.Д. Клементьев, Н.Б. Артамонова //

- Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 11-й Всероссийской научной конференции с международным участием. Москва, 23 – 25 ноября 2021 г. – М.: Сам Полиграфист, 2021. – С. 169-176.
59. Шешенин С.В. Моделирование прогрессирующего разрушения композита В4С/Al на мезоуровне / С.В. Шешенин, П.Д. Клементьев // Математическое моделирование в естественных науках: матер. XXXII Всероссийской конференции (4–7 октября 2023 г.). – Пермь: Перм. нац. исслед. политехн. ун-т, 2023. – С. 355-357.
60. Шешенин С.В. Осреднение нелинейных задач в механике композитов / С.В. Шешенин, М.И. Савенкова // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2012. – № 5. – С. 58-62.
61. Шешенин С.В. Эффективные жесткости гофрированной пластины / С.В. Шешенин, О.А. Ходос // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4. – № 2. – С. 128-139.
62. Экспериментальное и теоретическое определение модуля Юнга композита на основе фенольных смол, армированных короткими волокнами / С.В. Шешенин [и др.] // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2015. – № 4. – С. 61-65.
63. Экспериментальное и численное изучение механических свойств и особенностей деформирования и разрушения металлокерамического композита TiNi–TiB₂, полученного методом прямого лазерного выращивания / Р.А. Бакеев [и др.] // Физическая мезомеханика. – 2018. – Т. 21. – № 5. – С. 56-66.
64. 2D Mechanical Metamaterials with Widely Tunable Unusual Modes of Thermal Expansion / X. Ni [et al.] // Advanced Materials. – 2019. – Vol. 31. – № 48. – P. 1905405.

65. 3D Printing of Auxetic Metamaterials with Digitally Reprogrammable Shape / M. Lei [et al.] // *ACS Applied Materials & Interfaces*. – 2019. – Vol. 11. – № 25. – P. 22768-22776.
66. A classification of action origami as systems of spherical mechanisms / L.A. Bowen [et al.] // *Journal of Mechanical Design*. – 2013. – Vol. 135. – № 11. – P. 111008.
67. A comprehensive review on mechanical properties of Al-B4C stir casting fabricated composite / A. Nirala [et al.] // *Materials Today: Proceedings*. – 2019. – Vol. 21.
68. A mechanically driven form of Kirigami as a route to 3D mesostructures in micro/nanomembranes / Y. Zhang [et al.] // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2015. – Vol. 112. – № 38. – P. 11757-11764.
69. A novel metamaterial with tension-torsion coupling effect / B.-B. Zheng [et al.] // *Materials & Design*. – 2019. – Vol. 171. – P. 107700.
70. A numerical study of plastic strain localization and fracture across multiple spatial scales in materials with metal-matrix composite coatings / R.R. Balokhonov [et al.] // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2019. – Vol. 101. – P. 342-355.
71. A three-dimensional actuated origami-inspired transformable metamaterial with multiple degrees of freedom / J.T.B. Overvelde [et al.] // *Nature Communications*. – 2016. – Vol. 7. – № 1. – P. 10929.
72. Abdeljaber O. Optimization of chiral lattice based metastructures for broadband vibration suppression using genetic algorithms / O. Abdeljaber, O. Avci, D.J. Inman // *Journal of Sound and Vibration*. – 2016. – Vol. 369. – P. 50-62.
73. Abdollahi A. Tri-modal 2024 Al-B4C composites with super-high strength and ductility: Effect of coarse-grained aluminum fraction on mechanical behavior / A. Abdollahi, A. Alizadeh // *Journal of Ultrafine Grained and Nanostructured Materials*. – 2014. – Vol. 47. – № 2. – P. 77-88.

74. Accelerated corrosion tests of Al-B₄C neutron absorber used in spent nuclear fuel pool / Y. Jung [et al.] // *Journal of Nuclear Materials*. – 2021. – Vol. 552. – P. 153011.
75. Aklonis J.J. *Introduction to Polymer Viscoelasticity* / J.J. Aklonis. – New York: John Wiley, 1983.
76. Algorithmic lattice kirigami: A route to pluripotent materials / D.M. Sussman [et al.] // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2015. – Vol. 112. – № 24. – P. 7449-7453.
77. Alihosseini H. Microstructure characterization, mechanical properties, compressibility and sintering behavior of Al-B₄C nanocomposite powders / H. Alihosseini, K. Dehghani // *Advanced Powder Technology*. – Vol. 28. – P. 2126-2134.
78. An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials / V.A. Levin [et al.] // *Letters on Materials*. – 2017. – Vol. 7. – № 4. – P. 452-454.
79. An efficient viscoelastic formulation for steady-state rolling structures / L. Nasdala [et al.] // *Computational Mechanics*. – 1998. – Vol. 22. – № 5. – P. 395-403.
80. Approaching theoretical strength in glassy carbon nanolattices / J. Bauer [et al.] // *Nature Materials*. – 2016. – Vol. 15. – № 4. – P. 438-443.
81. Auxetic Mechanical Metamaterials to Enhance Sensitivity of Stretchable Strain Sensors / Y. Jiang [et al.] // *Advanced Materials*. – 2018. – Vol. 30. – № 12. – P. 1706589.
82. Balokhonov R. Microstructure-based analysis of deformation and fracture in metal-matrix composite materials / R. Balokhonov, V. Romanova, A. Kulkov // *Engineering Failure Analysis*. – 2020. – Vol. 110. – P. 104412.
83. Bažant Zdeněk P. Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress / Bažant Zdeněk P., Jirásek Milan // *Journal of Engineering Mechanics*. – 2002. – Vol. 128. – № 11. – P. 1119-1149.

84. Bažant Zdeněk P. Nonlocal Damage Theory Based on Micromechanics of Crack Interactions / Bažant Zdeněk P. // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1994. – Vol. 120. – № 3. – P. 593-617.
85. Becker R. Void growth dependence on loading path and mean stress from large-scale numerical simulations / R. Becker, K. Callaghan // *International Journal of Plasticity*. – 2020. – Vol. 134. – P. 102780.
86. Benveniste Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials / Y. Benveniste // *Mechanics of Materials*. – 1987. – Vol. 6. – № 2. – P. 147-157.
87. Benveniste Y. The effective mechanical behaviour of composite materials with imperfect contact between the constituents / Y. Benveniste // *Mechanics of Materials*. – 1985. – Vol. 4. – № 2. – P. 197-208.
88. Biomimetic superelastic graphene-based cellular monoliths / L. Qiu [et al.] // *Nature Communications*. – 2012. – Vol. 3. – № 1. – P. 1241.
89. Boatti E. Origami Metamaterials for Tunable Thermal Expansion / E. Boatti, N. Vasios, K. Bertoldi // *Advanced Materials*. – 2017. – Vol. 29. – № 26. – P. 1700360.
90. Cai K. Topology optimization of bi-modulus structures using the concept of bone remodeling / K. Cai, Z. Luo, Q. Qin // *Engineering Computations*. – 2014. – Vol. 31. – P. 1361-1378.
91. Chawla N. Microstructure-based finite element modeling of particle reinforced metal matrix composites / N. Chawla, K.K. Chawla // *Proceedings of 16th International Conference on Composite Materials*. – Citeseer, 2007. – P. 1-12.
92. Chen K. Establishment of the microstructure of porous materials and its relationship with effective mechanical properties / K. Chen, H. Qin, Z. Ren // *Scientific Reports*. – 2023. – Vol. 13. – № 1. – P. 18064.
93. Cheung K.C. Reversibly Assembled Cellular Composite Materials / K.C. Cheung, N. Gershenfeld // *Science*. – 2013. – Vol. 341. – № 6151. – P. 1219-1221.

94. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity / R.M. Christensen. – London: Academic Press, 1982.
95. Complex Ordered Patterns in Mechanical Instability Induced Geometrically Frustrated Triangular Cellular Structures / S.H. Kang [et al.] // Physical Review Letters. – 2014. – Vol. 112. – № 9. – P. 098701.
96. Composites with needle-like inclusions exhibiting negative thermal expansion: A preliminary investigation / J.N. Grima [et al.] // Metal Matrix Composites Reinforced with Nano-sized Reinforcements. – 2010. – Vol. 70. – № 16. – P. 2248-2252.
97. Computational homogenization of elasto-plastic porous metals / F. Fritzen [et al.] // International Journal of Plasticity. – 2012. – Vol. 29. – P. 102-119.
98. Controllable thermal expansion of large magnitude in chiral negative Poisson's ratio lattices / C.S. Ha [et al.] // physica status solidi (b). – 2015. – Vol. 252. – № 7. – P. 1431-1434.
99. Design, material, function, and fabrication of metamaterials / A.A. Zadpoor [et al.] // APL Materials. – 2023. – Vol. 11. – № 2. – P. 020401.
100. Duan S. A predictive micropolar continuum model for a novel three-dimensional chiral lattice with size effect and tension-twist coupling behavior / S. Duan, W. Wen, D. Fang // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2018. – Vol. 121. – P. 23-46.
101. Dynamic compressive deformation behavior of SiC-particulate-reinforced A356 Al alloy matrix composites fabricated by liquid pressing process / H. Lee [et al.] // Materials Science and Engineering: A. – 2017. – Vol. 680. – P. 368-377.
102. Effect of distribution of B4C on the mechanical behaviour of Al-6061/B4C composite / Z. Asghar [et al.] // Powder Metallurgy. – 2018. – Vol. 61. – № 4. – P. 293-300.
103. Effective thermo-elastic properties of random composites with orthotropic components and aligned ellipsoidal inhomogeneities / L. Nazarenko [et al.] //

- International Journal of Solids and Structures. – 2018. – Vols. 136-137. – P. 220-240.
104. Eidini M. Zigzag-base folded sheet cellular mechanical metamaterials / M. Eidini // *Extreme Mechanics Letters*. – 2016. – Vol. 6. – P. 96-102.
 105. Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading / A. Alderson [et al.] // *Special issue on Chiral Smart Honeycombs*. – 2010. – Vol. 70. – № 7. – P. 1042-1048.
 106. Elastic metamaterial beam with remotely tunable stiffness / W. Qian [et al.] // *Journal of Applied Physics*. – 2016. – Vol. 119. – № 5. – P. 055102.
 107. Elastic properties of chiral, anti-chiral, and hierarchical honeycombs: A simple energy-based approach / D. Mousanezhad [et al.] // *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. – 2016. – Vol. 6. – № 2. – P. 81-96.
 108. Elasticity of anti-tetrachiral anisotropic lattices / Y.J. Chen [et al.] // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. – Vol. 50. – № 6. – P. 996-1004.
 109. Enhanced mechanical properties of AA6061-B4C composites developed by a novel ultra-sonic assisted stir casting / S. Gudipudi [et al.] // *Engineering Science and Technology, an International Journal*. – 2020. – Vol. 23. – № 5. – P. 1233-1243.
 110. Evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fiber composites using a numerical homogenization technique / H. Berger [et al.] // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. – 2007. – Vol. 2.
 111. Experimental Study of the Rheonomic Properties of Breaker Rubber and Rubber-Cord Composite Under Quasi-Static Loading / S.V. Sheshenin [et al.] // *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. – 2023. – Vol. 14. – № 1. – P. 57-77.
 112. Faber J.A. Bioinspired spring origami / J.A. Faber, A.F. Arrieta, A.R. Studart // *Science*. – 2018. – Vol. 359. – № 6382. – P. 1386-1391.
 113. Feng K. Statische Berechnung des Gürtelreifens unter besonderer Berücksichtigung der kordverstärkten Lagen / K. Feng. – Berlin: VDI-Verlag, 1995. – 150 p.

114. Frenzel T. Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist / T. Frenzel, K. Muamer, M. Wegener // *Science*. – 2017. – Vol. 358. – P. 1072-1074.
115. Fu M. A novel category of 3D chiral material with negative Poisson's ratio / M. Fu, F. Liu, L. Hu // *Composites Science and Technology*. – 2018. – Vol. 160. – P. 111-118.
116. Fu M.-H. A novel chiral three-dimensional material with negative Poisson's ratio and the equivalent elastic parameters / M.-H. Fu, B.-B. Zheng, W.-H. Li // *Composite Structures*. – 2017. – Vol. 176. – P. 442-448.
117. Ge W. A computational framework to establish data-driven constitutive models for time- or path-dependent heterogeneous solids / W. Ge, V. Tagarielli // *Scientific Reports*. – 2021. – Vol. 11.
118. Göçer A. Production and Mechanical Characterization of Steel/Al-B4C Layered Circular Hybrid Composite Materials / A. Göçer, M.B. Karamis // *Arabian Journal for Science and Engineering*. – 2024. – Vol. 49. – № 8. – P. 11717-11735.
119. González C. An analysis of the effect of hydrostatic pressure on the tensile deformation of aluminum-matrix composites / C. González, J. Llorca // *Materials Science and Engineering: A*. – 2003. – Vol. 341. – № 1. – P. 256-263.
120. Hashin Z. Analysis of composite materials / Z. Hashin // a survey. *Journal of Applied Mechanics*. – 1983. – Vol. 50. – № 3. – P. 481-505.
121. Hazanov S. Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume / S. Hazanov, C. Huet // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1994. – Vol. 42. – № 12. – P. 1995-2011.
122. Hill R. The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate / R. Hill // *Proceedings of the Physical Society A*. – 1952. – Vol. 65. – № 5. – P. 349-354.
123. Hill R.W. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles / R.W. Hill // *Journal of Mechanics Physics of Solids*. – 1963. – Vol. 1963. – № 11. – P. 357-372.

124. Hot deformation behavior and microstructural evolution of particulate-reinforced AA6061/B4C composite during compression at elevated temperature / K. Wang [et al.] // *Materials Science & Engineering A*. – 2017. – Vol. 696. – P. 248-256.
125. Huang Xiaoshuang. An anisotropic visco-hyperelastic constitutive model for cord-rubber composites / Huang Xiaoshuang, Peng Xiongqi, Zhang Bichao // *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. – 2016. – Vol. 48. – № 1. – P. 140-145.
126. Hypervelocity impact damage behavior of B4C/Al composite for MMOD shielding application / X. Huang [et al.] // *Materials & Design*. – 2019. – Vol. 186. – P. 108323.
127. Ilic S. Application of the multiscale FEM to the modeling of nonlinear multiphase materials / S. Ilic, K. Hackl // *Journal of theoretical and applied mechanics*. – 2009. – Vol. 47. – № 3. – P. 537-551.
128. Image-based simulation of dispersed composites and porous rocks / S.V. Sheshenin [et al.] // *MATEC Web of Conferences*. – 2022. – Vol. 362. – P. 01029.
129. Impact Simulation and Ballistic Analysis of B4C Composite Armour Based on Target Plate Tests / Y. Zhang [et al.] // *Ceramics International*. – 2020. – Vol. 47.
130. In Situ X-Ray Tomography Studies of Microstructural Evolution Combined with 3D Modeling / J.-Y. Buffière [et al.] // *MRS Bulletin*. – 2008. – Vol. 33. – № 6. – P. 611-619.
131. Investigation of strain-rate effect on the compressive behaviour of closed-cell aluminium foam by 3D image-based modelling / Y. Sun [et al.] // *Materials & Design*. – 2016. – Vol. 89. – P. 215-224.
132. Ipek R. Adhesive wear behaviour of B4C and SiC reinforced 4147 Al matrix composites (Al/B4C-Al/SiC) / R. Ipek // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2005. – Vols. 162–163. – P. 71-75.
133. Jiao P. Artificial intelligence-enabled smart mechanical metamaterials: advent and future trends / P. Jiao, A.H. Alavi // *International Materials Reviews*. – 2021. – Vol. 66. – № 6. – P. 365-393.

134. Jin H. Fabrication of Double-Layer 2024Al-2024Al/B4C Composite by Plasma Activated Sintering and Its Mechanical Properties / H. Jin, S. Li, Q. Ouyang // *Engineering Science*. – 2017. – Vol. 2. – № 1. – P. 1-4.
135. Kaliske M. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains / M. Kaliske, H. Rothert // *Computational Mechanics*. – 1997. – Vol. 19. – № 3. – P. 228-239.
136. Klinge S. Application of the multiscale fem to the modeling of nonlinear composites with a random microstructure / S. Klinge, K. Hackl // *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. – 2012. – Vol. 10. – № 3. – P. 213-227.
137. Kouznetsova V. An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials / V. Kouznetsova, W.A.M. Brekelmans, F.P.T. Baaijens // *Computational Mechanics*. – 2001. – Vol. 27. – № 1. – P. 37-48.
138. Kröner E. Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen / E. Kröner // *Zeitschrift für Physik*. – 1953. – Vol. 136. – P. 402-410.
139. Kwon Y.W. Effect of Hydrostatic Pressure on Damage in Particulate Composites / Y.W. Kwon, C.T. Liu // *Proceedings of the ASME 2001 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Recent Advances in Solids and Structures*. – 2001. – P. 11-15.
140. Lewiński T. Plates, Laminates and Shells: Asymptotic Analysis and Homogenization / T. Lewiński, J. Telega. – 2000.
141. Liu D.S. The effects of superimposed hydrostatic pressure on deformation and fracture: Part II. Particulate-reinforced 6061 composites / D.S. Liu, J.J. Lewandowski // *Metallurgical Transactions A*. – 1993. – Vol. 24. – № 3. – P. 609-615.
142. Liu S. Topology optimization of continuum structures with different tensile and compressive properties in bridge layout design / S. Liu, H. Qiao // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. – 2011. – Vol. 43. – P. 369-380.

143. Lomakin E.V. Difference in the modules of composite materials / E.V. Lomakin // *Mechanics of Composite Materials*. – 1981. – Vol. 17. – № 1. – P. 18-24.
144. Lomakin E.V. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites / E.V. Lomakin, B.N. Fedulov // *Meccanica*. – 2015. – Vol. 50. – P. 1527-1535.
145. Lomakin E.V. Fracture properties of graphite materials and analysis of crack growth under bending conditions / E.V. Lomakin, M.P. Tretyakov // *Meccanica*. – 2016. – Vol. 51. – P. 2353-2364.
146. Low cycle fatigue behavior of additively manufactured Ti-6Al-4V under non-proportional and proportional loading / S. Bressan [et al.] // *Frattura ed Integrità Strutturale*. – 2019. – Vol. 13. – № 48. – P. 18-25.
147. Marvalova B. Viscoelastic Properties of Filled Rubber. Experimental Observations and Material Modeling / B. Marvalova // *Eng. Mech.* – 2007. – Vol. 14. – № 1-2. – P. 81-89.
148. Matsui K. Two-scale finite element analysis of heterogeneous solids with periodic microstructures / K. Matsui, K. Terada, K. Yuge // *Computers & Structures*. – 2004. – Vol. 82. – № 7. – P. 593-606.
149. Maurizi M. Predicting stress, strain and deformation fields in materials and structures with graph neural networks / M. Maurizi, C. Gao, F. Berto // *Scientific Reports*. – 2022. – Vol. 12.
150. Mazahery A. Influence of the hard coated B 4 C particulates on wear resistance of Al–Cu alloys / A. Mazahery, M.O. Shabani // *Composites Part B: Engineering*. – 2012. – Vol. 43. – № 3. – P. 1302-1308.
151. Michel J.C. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach / J.C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1999. – Vol. 172. – № 1. – P. 109-143.
152. Microstructure, mechanical and tribological properties of (APC+B4C)/Al hybrid composites prepared by hydrothermal carbonized deposition on chips / Y. He [et al.] // *Journal of Alloys and Compounds*. – Vol. 888. – P. 161578.

153. Nazarenko L. Thermo-elastic properties of random composites with unidirectional anisotropic short-fibers and interphases / L. Nazarenko, H. Stolarski, H. Altenbach // *European Journal of Mechanics, A/Solids*. – 2018. – Vol. 70. – P. 249-266.
154. Needleman A. An analysis of ductile rupture modes at a crack tip / A. Needleman, V. Tvergaard // *Journal of Mechanics Physics of Solids*. – 1987. – Vol. 35. – № 2. – P. 151-183.
155. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains / V.A. Levin [et al.] // *Composite Structures*. – 2015. – Vol. 131. – P. 25-36.
156. Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains / V.A. Levin [et al.] // *International Journal of Solids and Structures*. – 2013. – Vol. 50. – № 20. – P. 3119-3135.
157. Patel H. Radial tire cord-rubber composites / H. Patel, J. Turner, J.D. Walter // *Rubber chemistry and technology*. – 1976. – Vol. 49. – № 4. – P. 1095-1110.
158. Phase transformation and mechanical properties of B4C/Al composites / Z. Liu [et al.] // *Journal of Materials Research and Technology*. – 2020. – Vol. 9. – № 2. – P. 2116-2126.
159. Pidaparti R.M.V. Analysis of cord-rubber composite laminates under combined tension and torsion loading / R.M.V. Pidaparti // *Composites Part B: Engineering*. – 1997. – Vol. 28. – № 4. – P. 433-438.
160. Pidaparti R.M.V. Torsional stress analysis of cord-rubber composite laminates / R.M.V. Pidaparti, V. Kakarla // *Mechanics of Composite Materials and Structures*. – 1995. – Vol. 2. – № 2. – P. 93-109.
161. Pidaparti R.M.V. Three-dimensional stress analysis of two-ply cord-rubber composite laminates / R.M.V. Pidaparti, V.P. Kakarla // *Composite Structures*. – 1994. – Vol. 28. – № 4. – P. 433-440.
162. Pidaparti R.M.V. A micromechanical analysis to predict the cord-rubber composite properties / R.M.V. Pidaparti, A.W. May // *Composite Structures*. – 1996. – Vol. 34. – № 4. – P. 361-369.

163. Pijaudier-Cabot Gilles. Nonlocal Damage Theory / Pijaudier-Cabot Gilles, Bažant Zdeněk P. // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1987. – Vol. 113. – № 10. – P. 1512-1533.
164. Processing of complex-shaped collimators made via binder jet additive manufacturing of B4C and pressureless melt infiltration of Al / C. Cramer [et al.] // *Materials & Design*. – 2019. – Vol. 180. – P. 107956.
165. Production of Boron Carbide Reinforced 2024 Aluminum Matrix Composites by Mechanical Alloying / C.-Z. Nie [et al.] // *Materials Transactions - MATER TRANS*. – 2007. – Vol. 48. – P. 990-995.
166. Quantitative Characterization of Porosity and Determination of Elastic Modulus for Sintered Micro-silver Joints / J. Carr [et al.] // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2015. – Vol. 225. – P. 19-23.
167. Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Vol. 127 / E. Sanchez-Palencia. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980.
168. Schröder J. A numerical two-scale homogenization scheme: the FE2-method / J. Schröder // *Plasticity and Beyond: Microstructures, Crystal-Plasticity and Phase Transitions* / eds. J. Schröder, K. Hackl. – Vienna: Springer Vienna, 2014. – P. 1-64.
169. Segurado J. A numerical approximation to the elastic properties of sphere-reinforced composites / J. Segurado, J. Llorca // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2002. – Vol. 50. – № 10. – P. 2107-2121.
170. Sheshenin S. Applications of the asymptotic homogenization to materials with periodic and non-periodic micro structures / S. Sheshenin, N. Artamonova, P. Klementyev // *Proceedings in applied mathematics and mechanics*. – 2021. – Vol. 21. – № 1. – P. e202100170.
171. Sheshenin S.V. Two applications of the asymptotic homogenization method / S.V. Sheshenin, N.B. Artamonova, P.D. Klementyev // *Proceedings in applied mathematics and mechanics*. – 2021. – Vol. 20. – № 1. – P. e202000268.

172. Sheshenin S.V. Averging the Viscoelastic Properties of a Rubber-Cord Ply in a Plane Stress State / S.V. Sheshenin, M.E. Gritchenko, P.V. Chistyakov // *Mechanics of Composite Materials*. – 2021. – Vol. 57. – № 4. – P. 469-480.
173. Simulation of particle size effect on dynamic properties and fracture of PTFE-W-Al composites / E.B. Herbold [et al.] // *AIP Conference Proceedings*. – 2007. – Vol. 955. – № 1. – P. 785-788.
174. Smit R.J.M. Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling / R.J.M. Smit, W.A.M. Brekelmans, H.E.H. Meijer // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1998. – Vol. 155. – № 1. – P. 181-192.
175. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for / A.V. Vershinin [et al.] // *Advances in Engineering Software*. – 2015. – Vol. 86. – P. 80-84.
176. Stier B. Comparing experimental results to a numerical meso-scale approach for woven fiber reinforced plastics / B. Stier, J.-W. Simon, S. Reese // *Composite Structures*. – 2015. – Vol. 122. – P. 553-560.
177. Study of the elastic and elastoplastic properties of a dispersed composite based on computational experiments / S.V. Sheshenin [et al.] // *Mechanics of Composite Materials*. – 2021. – Vol. 57. – № 1. – P. 19-30.
178. Tensile behavior of B4C particulate reinforced Al2024 alloy metal matrix composites / M. Nagaral [et al.] // *FME Transactions*. – 2017. – № 45. – P. 93-96.
179. Tensile properties and strengthening effects of 6061Al/12 wt%B4C composites reinforced with nano-Al2O3 particles / X. Pang [et al.] // *Journal of Alloys and Compounds*. – 2018. – Vol. 768. – P. 476-484.
180. The effective properties of dispersed composites B4C/2024Al / S.V. Sheshenin [et al.] // *AIP Conference Proceedings*. – 2020. – Vol. 2216. – № 1. – P. 040017-1-040017-7.

181. The microstructure and influence of hot extrusion on tensile properties of (Gd+B4C)/Al composite / Z.G. Xu [et al.] // Journal of Alloys and Compounds. – 2017. – Vol. 729. – P. 1234-1243.
182. Trofimov A. Effective elastic properties of composites with particles of polyhedral shapes / A. Trofimov, B. Drach, I. Sevostianov // International Journal of Solids and Structures. – 2017. – Vol. 120. – P. 157-170.
183. Tvergaard V. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar / V. Tvergaard, A. Needleman // Acta Metallurgica. – 1984. – Vol. 32. – P. 157-169.
184. Viscoelastic Constitutive Model of Cord-Rubber Composite / F. Zhang [et al.] // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2005. – Vol. 24. – № 12. – P. 1311-1320.
185. Void growth and failure in notched bars / R. Becker [et al.] // Journal of Mechanics Physics of Solids. – 1988. – Vol. 36. – № 3. – P. 317-351.
186. Wang W. Experimental verification and finite element modeling of radial truck tire under static loading / W. Wang, S. Yan, S. Zhao // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2013. – Vol. 32. – № 7. – P. 490-498.
187. Yan X. Nonlinear Three-Dimensional Finite Element Analysis of Steady Rolling Radial Tires / X. Yan // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2003. – Vol. 22. – № 8. – P. 733-750.