ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук *Коняева Андрея Юрьевича*
на тему: «Геометрия Нийенхейса и её приложения»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Геометрия Нийенхейса относится к операторным полям на многообразиях, удовлетворяющих замечательному уравнению в частных производных: а именно, обращению в нуль тензора кручения Нийенхейса. Такие операторные поля называются Нийенхейсовыми (или операторами Нийенхейса). Она тесно связана со многими областями математики, такими как Риманова, симплектическая и Пуассонова геометрии, нормальные формы, левосимметрические алгебры, уравнения математической физики, включающие знаменитое уравнение Кортевега-де-Фриза.

Тензор кручения Нийенхейса был введён Альбертом Нийенхейсом в середине прошлого века в связи с исследованием задачи о приведении операторного поля к нормальной форме. Первые результаты в этом направлении принадлежат А.Нийенхейсу и Й.Хаантьесу, разобравшими случай различных вещественных функционально независимых собственных значений и доказавшим, что в этом случае в подходящей системе координат оператор Нийенхейса приводится к диагональному виду, где каждое собственное значение есть функция от одной координаты. Классическая теорема Ньюлендера—Ниренберга из многомерного комплексного анализа (середина прошлого века) утверждает, что почти комплексная структура является комплексной, если и только если оператор умножения на мнимую единицу является оператором Нийенхейса.

В работах И.М.Гельфанда, И.Я.Дорфман, П.Ж.Олвера, М.Антоновича и А.Форди было замечено, что подходящие операторы рекурсии, возникающие в Пуассоновой геометрии и математической физике, являются операторами Нийенхейса. Серьёзные результаты в описании пар геодезически эквивалентных метрик, т. е. имеющих одинаковые геодезические, были недавно полученны в совместных работах А.В.Болсинова и В.С.Матвеева (одна — совместно с А.Т.Фоменко) благодаря обнаружению и использованию операторов Нийенхейса, нетривиальным образом возникающих в этой задаче.

Диссертанту принадлежит серия замечательных результатов (часть — совместных с Болсиновым, Матвеевым и другими соавторами), благодаря которым, на настоящий момент, геометрия Нийенхейса с применениями в вышеупомянутых смежных областях расцвела и стала активно развивающейся областью математики.

Диссертация состоит из 14 глав, включая вводную главу 1.

В главе 2 доказывается теорема о расщеплении для операторов Нийенхейса, определённых в окрестности точки. Эта теорема и следствие из неё утверждают, что если в данной точке p оператор имеет собственные значения с заданными кратностями, то в подходящих координатах оператор имеет блочно-диагональный вид. Каждый блок отвечает либо одному вещественному, либо паре комплексно сопряжённых собственных значений в точке p. Он имеет размерность, равную кратности собственного значения (удвоенную в случае пары) и зависит только от своей группы координат, число которых равно размерности блока. Доказательство использует развитую автором теорию матричнозначных функций от операторов Нийенхейса с применением теоремы Мергеляна из комплексного анализа.

В главе 3 представлены теоремы о приведении операторов Нийенхейса к нормальным формам в окрестности точки общего положения, где характеристика Сегре, т. е. набор размерностей Жордановых блоков постоянна. В случае одного собственного значения доказана теорема, утверждающая, что оператор приводится к Жордановой нормальной форме локальной заменой координат, если и только если все распределения корневых подпространств интегрируемы. Доказан также её аналог для одной пары комплексно-сопряжённых собственных значений и комплексных корневых подпространств относительно почти комплексной структуры, введенной автором, в которой оператор комплексно-линеен. Из этих теорем выведен замечательный критерий приводимости произвольного операторного поля к постоянному виду: это имеет место тогда и только тогда, когда все собственные значения постоянны, кручение Нийенхейса равно нулю и все распределения вещественных (комплексных) корневых подпространств, отвечающих вещественным (соответственно, комплексным) собственным значениям, интегрируемы. Далее доказывается теорема о том, что в случае одной Жордановой клетки оператор Нийенхейса приводится к нормальной форме, отличающейся от Жордановой нормальной формы правым столбцом, состоящим из единицы и подходящих линейных функций от координат. Для доказательства рассматриваются распределения образов соответствующей нильпотентной жордановой клетки и доказывается их интегрируемость. В случае, когда собственное значение равно нулю в отмеченной точке, а его дифференциал не равен нулю, доказывается приводимость к Теплицевой нормальной форме.

Далее автор строит замечательный пример оператора Нийенхейса, связанного с пучком софокусных квадрик, и с помощью него доказывает теоремы о существовании глобального оператора Нийенхейса на всех сферах и о том, что на четырёхмерной сфере его спектр всегда вещественен.

В главе 4 представлена серия результатов о нормальных формах, связывающих геометрию Нийенхейса и левосимметрические алгебры. Теорема Винтерхалдера утверждает, что если компоненты операторного поля линейны по координатам, то его тензорные коэффициенты при координатах образуют набор структурных констант конечномерной левосимметрической алгебры. Используя эту теорему и красивые линейно-алгебраические рассуждения, диссертант получил полную классификацию двумерных левосимметрических алгебр: они образуют два непрерывных семейства и 10 исключительных алгебр. Доказан аналог теоремы Винтерхалдера для 1-струи оператора Нийенхейса, пропорционального тождественному в отмеченной точке. В размерности решена важная задача о приведении произвольного оператора Нийенхейса к линейному виду, т. е. к линейной зависимости от координат, с помощью аналитической или гладкой замены координат. А именно, для каждой категории (гладкая, аналитическая) получен полный список алгебр, таких что операторы Нийенхейса с соответствующими этим алгебрам 1-струями всегда линеаризуются в соответствующей категории. Доказательство использует теорию нормальных форм векторных полей на плоскости.

Глава 5 посвящена gl-регулярным операторам L, т. е. таким, у которых централизатор имеет минимальную размерность. А тогда он порождается степенями оператора L как векторное пространство. Доказаны две теоремы о приведении аналитического gl-регулярного оператора Нийенхейса к двум сопровождающим формам аналитической заменой координат. Эти формы получаются из Жордановой клетки максимальной размерности добавлением либо левого столбца (первая форма), либо нижней строки (вторая форма). Искомые замены строятся с помощью решений подходящих квазилинейных систем дифференциальных уравнений; их совместность автор доказывает. Далее доказывается теорема о приведении двумерных gl-регулярных операторов Нийенхейса, имеющих вид Жордановой клетки в отмеченной точке, к полиномиальным нормальным формам, построенным автором.

Глава 6 содержит серию результатов о симметриях и законах сохранения для операторов Нийенхейса. Имеется скобка <M,L> операторных полей, являющаяся билинейным аналогом тензора Нийенхейса и обладающая следующим свойством: M и L коммутируют и симметричная часть их скобки обращается в нуль, если и только если заданная ими квазилинейная система дифференциальных уравнений на функцию от двух переменных совместна. В этом случае M и L называются симметриями друг друга. А если они коммутируют и вся их скобка равна нулю, то они называются сильными симметриями. Дифференциальная 1-форма называется законом сохранения для оператора L, если её прообраз относительно L есть замкнутая форма. Автор доказывает усиление теоремы о расщеплении оператора Нийенхейса L, представленной в главе 2, состоящее в расщеплении всякой симметрии и всякого закона отражения в прямые суммы по блокам оператора L. В случае gl-регулярного оператора Нийенхейса L доказывается, что все его симметрии являются сильными симметриями его и друг друга, разделяют все его законы сохранения, и их векторное пространство имеет ту же размерность, что и рассматриваемое многообразие. А также, что законы сохранения образуют иерархию законов, получаемых из одного типичного закона применением степеней сопряжённого оператора. Показано, как локальные координаты, в которых L записывается в первой сопровождающей форме, могут быть получены из произвольной симметрии общего положения, так называемой регулярной симметрии. А также как координаты из второй сопровождающей формы получаются из иерархии законов сохранения. Доказаны также комплексные аналоги вышеупомянутых утверждений относительно почти комплексной структуры, связанной с оператором L. Даётся полное описание симметрий произвольного gl-регулярного оператора Нийенхейса. С помощью полученных результатов доказывается гладкий аналог теорем о приведении к сопровождающим формам в окрестности точки общего положения. А также интегрируемость в квадратурах подходящей переопределённой квазилинейной системы дифференциальных уравнений, построенной по L.

В главе 7 результаты предыдущих глав применяются к интегрируемым геодезическим потокам с потенциалами и геодезически эквивалентным метрикам. Вначале доказывается, что естественные подняния оператора Нийенхейса и его симметрий на кокасательное расслоение являются, соответственно, оператором Нийенхейса и его симметриями. Всякая невырожденная симметрия индуцирует скобку Пуассона на кокасательном расслоении. Для gl-регулярного оператора строится каноническая симметрия P его поднятия. Для произвольной симметрии Q поднятия, раскладывающейся в сходящийся ряд по P с коэффициентами, являющиеся симметриями, доказано, что коэффициенты её разложения по базису симметрий коммутируют как функции относительно любой из скобок Пуассона построенных по невырожденным симметриям. Автор установил замечательную связь с квадратично интегрируемыми геодезическими потоками. Он показал, как из частного случая, когда Q -- квадратичный полином по P с нулевым линейным членом, получаются геодезические потоки с потенциалом, допускающие нетривиальные квадратичные интегралы. Включая классические примеры Лиувиллевых метрик.

Автору принадлежит замечательная связь геометрии Нийенхейса и задачи описания метрик, геодезически эквивалентных данной. По двум заданным метрикам строится «сравнивающее» их операторное поле L. Геодезическая эквивалентность метрик оказывается эквивалентной линейному дифференциальному уравнению на L: уравнению Синюкова, записанное в терминах ковариантной производной относительно первой метрики. В этом случае первая метрика называется геодезически согласованной с L. Автор показал, что в случае, когда L есть gl-регулярный оператор Нийенхейса, всякая его невырожденная симметрия индуцирует геодезически эквивалентную метрику, и все геодезически эквивалентные метрики получаются из симметрий. В начале главе 8 автор доказывает замечательную теорему, полностью описывающую операторы

Нийенхейса, геодезически согласованные с плоской метрикой. Оказывается, оператор согласован с плоской метрикой, если и только если в плоских координатах его матрица является произведением метрического тензора и матричнозначной функции, элементы которой квадратично зависят от координат с подходящими ограничениями на коэффициенты квадратичных полиномов.

В главе 8 автор диссертации вводит понятие пучка Нийенхейса. Так называется линейное подпространство пространства всех операторных полей на многообразии, состоящее исключительно из операторов Нийенхейса. Простейший пример такого пучка на шаре строится так: выберем координаты и рассмотрим линейное пространство всех операторных полей, которые в данных координатах задаются постоянными матрицами. Тот факт, что это пучок Нийенхейса немедленно следует из формулы для кручения.

Разумеется, подпространство любого пучка Нийенхейса - это снова нийенхейсов пучок. Поэтому, естественно рассматривать максимальные по включению пучки. Оказывается, описанный выше пучок не является максимальным: автором доказана замечательная теорема, которая показывает, что существует ровно один максимальный пучок, содержаший описанный выше: в фиксированной выше системе его компоненты линейны. Если вместо всех постоянных матриц рассматривать симметрические матрицы, то максимальных пучков, содержащих такой пучок в качестве подпучка, будет всего два. Стоит отметить, что оба пучка будут конечномерными.

В завершении главы рассматриваемая теория пучков Нийенхейса прилагается к теории пуассоново согласованных метрик. В частности, с помощью разработанной техники показано, что существует единственный пучок пуассоново согласованных метрик вида g, Lg, ... с условием, что первые $n + 1$ метрика пучка будут плоскими, а метрика с номером $n + 2$ будет иметь постоянную секционную кривизну.

Глава 9 посвящена приложениям геометрии Нийенхейса к мультигамильтоновым системам, то есть гамильтоновым системам, у которых больше одного гамильтонова представления. В первой части главы рассматривается задача в конечномерном случае. Имеется две согласованные скобки Пуассона, одна из которых невырождена. Ф.Магри показал, что в этом случае оператор, связывающий пару таких скобок (оператор рекурсии), является оператором Нийенхейса. В силу линейно-алгебраических свойств характеристический многочлен такого оператора всегда точный квадрат.

Автором доказывается замечательная теорема, которая дает две нормальные формы для такой пары в случае, когда коэффициенты квадратного корня из определителя являются функционально независимыми. По сути речь идет об аналоге дифференциальной невырожденности для операторов рекурсии. Таких нормальных форм оказывается две: аналоги первой и второй сопровождающих форм из главы 6.

Вторая половина главы посвящена операторам Дарбу-Гамильтона - они представляют собой многомерные аналоги операторов с дисперсией, которые возникают в уравнении Кортвега-де Фриза. Такие операторы оказываются во взаимо однозначном соответствии с так называемыми фробениусовыми парами - это частный случай пар метрика и геодезически согласованный с ней оператор из главы 7.

Глава 10 посвящена алгебраическим операторам Нийенхейса. Так называют оператор на алгебре Ли с нулевым алгебраическим кручением Нийенхейса: формула такого кручения та же, только коммутатор векторных полей заменяется на коммутатор в смысле алгебры. Оператор Нийенхейса в этом смысле является частным случаем алгебраического оператора Нийенхейса, где в качестве алгебры взята алгебра Ли векторных полей на многообразии, а сам оператор, дополнительно, является линейным отображением в смысле естественной структуры кольца на этой алгебре.

На алгебре Ли с алгебраическим оператором Нийенхейса можно построить множество коммутаторов, согласованных с исходным. В свою очередь, если речь идет о конечномерных алгебрах, то на двойственном пространстве возникают согласованные скобки Пуассона. Главный результат этой главы - доказательство полноты такой интегрируемой системы, построенной на алгебре gl(n) с помощью так называемого оператора Соколова-Одесского.

Глава 11 носит технический характер и посвящена вопросам, связанных с когомологиями операторов Нийенхейса. Основное приложение полученных в этой главе результатов - доказательство теоремы о нормальной форме в первой части главы 9.

Автор выполнил значительное научное исследование на высоком профессиональном уровне. Результаты, полученные в рамках диссертационной работы, представляют представляет несомненный интерес для исследователей, занимающихся изучением интегрируемых систем, математической физики, алгебры и теории дифференциальных уравнений. Вместе с тем, имеются следующие замечания:

1) Глава 1.3. Там упоминаются естественные отображения из операторных полей в тензоры типа (1,2). На мой взгляд, недостаточно чётко сказано, какого типа отображения имеются в виду. Сказано, что они линейны по матричным элементам оператора и их первым производным. Однако, по-моему, правильнее сказать, что это — (1,2)-тензорнозначные билинейные формы от двух векторов: от вектора из всех матричных элементов оператора и от вектора из их всех первых частных производных.

2) Теорема 2.4.2, пункт 3: пропущено слово «относительно» перед J.

3) Глава 4. Таблицы в Теореме 4.2.1 было бы хорошо пометить как таблицы 1 и 2, так как именно под этими именами автор на них ссылается.

4) Раздел 7.5. Геодезическая согласованность оператора и заданной метрики эквивалетна уравнению Синюкова на оператор. Оказывается, из него следует Нийенхейсовость оператора, и это классический факт. Было бы полезно об этом сказать. Однако в диссертации это не написано.

5) Раздел 8.1. Теорема 8.1.1 полностью описывает операторы, геодезически согласованные с произвольной заданной плоской метрикой. Это -- критерий согласованности. Однако её явно написанная формулировка содержит лишь её основную часть: из согласованности следует, что в плоских координатах подходящая матрица имеет вид, указанный в теореме. Доказательство утверждения в обратную сторону неявно содержится в диссертации. Было бы полезно его явно сформулировать как часть теоремы, так чтобы теорема стала явно сформулированным критерием.

6) Глава 13, Приложение II, раздел 13.1, гамильтонов формализм. Понятия согласованной пары гамильтоновых операторов и гамильтоновой цепочки, представленные в данном разделе, тесно связаны между собой. Однако их связь не описана там достаточно явно. Есть Замечание 13.1.1, имеющее косвенное отношение к описанию их связи.

7) Автор работает с метриками различной сигнатуры, не только с положительно определёнными. Было бы полезно явно сказать об этом в соответствующих местах диссертации, включая её начало. По моему мнению, для большого количества читателей слово «метрика» ассоциируется с положительно определённой метрикой.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология по физико-математическим наукам, а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Коняев Андрей Юрьевич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
Лаборатории динамики и стохастики
сложных систем имени Р. Л. Добрушина
Высшей Школы Современной Математики
ФГАОУ ВО “Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)”

ГЛУЦЮК Алексей Антонович

01.12.2025

Контактные данные:
тел.: , e-mail:
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация: 01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Адрес места работы: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д.9.

Подпись сотрудника ФГАОУ ВО “Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) Глуцюка А.А. удостоверяю