

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Колегов Никита Антонович

Системы образующих матричных колец инцидентности

Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел
и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Диссертация подготовлена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель — **Маркова Ольга Викторовна**,
кандидат физико-математических наук.

Официальные оппоненты — **Балаба Ирина Николаевна**,
доктор физико-математических наук, доцент,
Тульский государственный педагогический
университет им. Л.Н. Толстого, физико-
математический факультет, кафедра алгебры,
математического анализа и геометрии,
профессор.

Кожухов Игорь Борисович,
доктор физико-математических наук, профес-
сор, Национальный исследовательский универ-
ситет «Московский институт электронной тех-
ники», кафедра высшей математики № 1,
профессор.

Туганбаев Аскар Аканович,
доктор физико-математических наук, профес-
сор, Национальный исследовательский универ-
ситет «МЭИ», кафедра высшей математики,
профессор.

Защита диссертации состоится 30 октября 2026 года в 17 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/4005>

Автореферат разослан «___» сентября 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук

В.А. Кибкало

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Диссертация относится к области высшей алгебры, теории ассоциативных колец и алгебр. Исследуются системы образующих матричных колец инцидентности. Получены результаты о минимальной мощности систем образующих и о значениях функции длины.

Системы образующих, которые также называют порождающими подмножествами, связаны с рядом классических направлений исследований в теории колец и алгебр. Так, Амицур¹ использовал системы образующих для изучения полиномиальных тождеств в матричных алгебрах. Виктор Тимофеевич Марков² доказал достаточное условие, при котором алгебра матриц над необязательно ассоциативной алгеброй порождается двумя матрицами. Этот результат позволил ему решить проблему о вложении PI-алгебр.

Другое направление работы связано с поиском представлений алгебр в виде порождающих и определяющих соотношений. Этот вопрос изучался при помощи методов компьютерной алгебры в работе Карлсона и Мэтьюза³. Порождающие и определяющие соотношения исследовали Петренко и Сидки⁴ в случае матриц над кольцом целых чисел.

Известен классический результат Герштенхабера⁵, утверждающий, что размерность алгебры, порожденной двумя коммутирующими $n \times n$ матрицами с элементами в поле, не превосходит n . Ведутся исследования по аналогичной гипотезе для трех матриц⁶.

Обычно описание всех систем образующих алгебры является трудной за-

¹Amitsur S. A. Identities and generators of matrix ring // Selected Papers of S. A. Amitsur with Commentary. In 2 parts. Part 2 / ed. by A. Mann [et al.]. — Providence, RI : American Mathematical Society, 2001. — P. 39–44. — First published in: Bull. Res. Council Israel. Sect. A. — 1955. — Vol. 5. — No. 1. — P. 5–10.

²Марков В. Т. О матричных алгебрах с двумя образующими и о вложении PI-алгебр // УМН. — 1992. — Т. 47. — № 4 (286). — С. 199–200. — Англ. версия: Markov V. T. Matrix algebras with two generators and the embedding of PI-algebras // Russ. Math. Surv. — 1992. — Vol. 47. — No. 4. — P. 216–217.

³Carlson J. F., Matthews G. Generators and relations for matrix algebras // J. Algebra. — 2006. — 300. — No. 1. — P. 134–159.

⁴Petrenko B. V., Sidki S. N. On pairs of matrices generating matrix rings and their presentations // J. Algebra. — 2007. — Vol. 310. — No. 1. — P. 15–40.

⁵Gerstenhaber M. On dominance and varieties of commuting matrices // Ann. Math. — 1961. — Vol. 73. — No. 2. — P. 324–348.

⁶O’Meara, K. C. The Gerstenhaber problem for commuting triples of matrices is “decidable” // Commun. Algebra. — 2020. — Vol. 48. — No. 2. — P. 453–466.

дачей. Рассмотрим, например, случай алгебры $M_n(\mathbb{F})$ всех $n \times n$ матриц над алгебраически замкнутым полем. Множество матриц порождает $M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда у них нет общих нетривиальных инвариантных подпространств. Этот факт восходит к работе Уильяма Бёрнсайда⁷ 1905 года. Современную интерпретацию его результата можно найти в работах^{8,9}. Таким образом, имеется явный критерий, позволяющий установить, когда подмножество является системой образующих. Однако проблема нахождения общих инвариантных подпространств сама по себе является нетривиальной, см. монографию¹⁰. Лаффи^{11,12} исследовал ряд достаточных условий, при которых заданное семейство матриц порождает полную матричную алгебру.

Отдельно следует отметить исследования алгебр, порожденных идемпотентами. Простая алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$ характеристики $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ порождается идемпотентами, если содержит хотя бы один нетривиальный идемпотент. Этот факт вытекает из более общего результата Амицура¹³ об инвариантных подалгебрах. Простое независимое доказательство получил Брешар¹⁴. Лаффи¹⁵ показал, что некоммутативная простая алгебра, порожденная двумя идемпотентами, всегда изоморфна алгебре 2×2 матриц над простым расширением основного поля.

Структура необязательно простых алгебр, порожденных идемпотентами,

⁷Burnside W. On the condition of reducibility of any group of linear substitutions // Proc. London Math. Soc. — 1905. — Vol. 3. — P. 430—434.

⁸Lam T. Y. A theorem of Burnside on matrix rings // American Mathematical Monthly — 1998. — Vol. 105. — No. 7. — P. 651—653.

⁹Lomonosov V., Rosenthal P. The simplest proof of Burnside's theorem on matrix algebras // Linear Algebra and Its Applications — 2004. — Vol. 383. — P. 45—47.

¹⁰Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Invariant subspaces of matrices with applications. — Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. — 692 p.

¹¹Laffey T. J. A criterion for generating full matrix algebras // Linear Algebra and Its Applications — 1981. — Vol. 37. — P. 191—198.

¹²Laffey T. J. A note on matrix subalgebras containing a full Jordan block // Linear Algebra and Its Applications — 1981. — Vol. 37. — P. 187—189.

¹³Amitsur S. A. Invariant submodules of simple rings // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1956. — Vol. 7. — P. 987—989.

¹⁴Brešar M. Characterizing homomorphisms, derivations and multipliers in rings with idempotents // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. — 2007. — Vol. 137. — P. 9—21.

¹⁵Laffey T. J. Algebras generated by two idempotents // Linear Algebra Appl. — 1981. — Vol. 37. — P. 45—53.

была описана в работах Вайса¹⁶, Роуэна, Сегева¹⁷. Каваи¹⁸ доказал, что коммутативная бесконечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем порождена идемпотентами тогда и только тогда, когда она является гомоморфным образом групповой алгебры с определенными свойствами. Брешар¹⁹ показал, что конечномерная алгебра порождена идемпотентами тогда и только тогда, когда она определена нулевым произведением. Ху, Сяо²⁰ получили гомологическое описание конечномерных алгебр, порожденных идемпотентами. Алгебры, порожденные двумя квадратичными элементами, исследовали Дренски, Сигети, ван Вэйк²¹. Гейнз, Лаффи, Шапиро²² доказали, что размерность алгебры, порожденной двумя $n \times n$ матрицами с квадратичными минимальными многочленами, не превосходит $2n$, если n четно, и $2n - 1$, если n нечетно, причем эти оценки являются точными.

Исследуется также минимальное количество ν идемпотентов, порождающих алгебру. Лаффи²³ показал, что $\nu \leq 3$ для $\mathbb{F}$ -алгебры $n \times n$ матриц $M_n(D)$, где D — конечномерная $\mathbb{F}$ -алгебра с делением, а ее центр $Z(D)$ является сепарабельным расширением поля $\mathbb{F}$. Крупник²⁴ вычислил явное значение ν для $M_n(\mathbb{F})$. Келарев, ван дор Марве, ван Вэйк²⁵ определили ν для алгебры верхнетреугольных матриц над коммутативным кольцом. Этот результат был обобщен в работе²⁶ на случай полных блочно-треугольных алгебр матриц над бесконечным полем.

Среди других интересных исследований — оценка того, «как часто» набор

¹⁶Weiss Y. On Banach algebras generated by two idempotents // Algebraic Methods in Operator Theory / ed. by R. E. Curto, P. E. T. Jørgensen. — Boston, MA: Birkhäuser, 1994. — P. 90–97.

¹⁷Rowen L., Segev Y. Associative and Jordan algebras generated by two idempotents // Algebr. Represent. Theory. — 2017. — 20. — P. 1495–1504.

¹⁸Kawai H. Algebras generated by idempotents and commutative group algebras over a ring // Commun. Algebra. — 2002. — Vol. 30. — P. 119–128.

¹⁹Brešar M. Finite dimensional zero product determined algebras are generated by idempotents // Expo. Math. — 2016. — Vol. 34. — P. 130–143.

²⁰Hu W., Xiao Z. A characterization of algebras generated by idempotents // J. Pure Appl. Algebra. — 2021. — Vol. 225. — Article 106693.

²¹Drensky V., Szigeti J., van Wyk L. Algebras generated by two quadratic elements // Commun. Algebra. — 2011. — Vol. 39. — P. 1344–1355.

²²Gaines F. J., Laffey T. J., Shapiro H. M. Pairs of matrices with quadratic minimal polynomials // Linear Algebra Appl. — 1983. — Vol. 52. — P. 289–292.

²³Laffey T. J. Algebras generated by two idempotents // Linear Algebra and Its Applications — 1981. — Vol. 37. — P. 45–53.

²⁴Krupnik N., Minimal number of idempotent generators of matrix algebras over arbitrary field // Commun. Algebra. — 1992. — Vol. 20. — P. 3251–3257.

²⁵Kelarev A. V., van der Merwe A. B., van Wyk L. The minimum number of idempotent generators of an upper triangular matrix algebra // J. Algebra. — 1998. — Vol. 205. — No. 2. — P. 605–616.

²⁶van der Merwe A. B., van Wyk L. The minimum number of idempotent generators of a complete blocked triangular matrix algebra // J. Algebra. — 1999. — Vol. 222. — P. 190–203.

элементов кольца или алгебры является порождающим. Аккуратная постановка задачи и формулировка результата зависят от структуры рассматриваемого кольца или алгебры. Аюра, Какимура, Мурота²⁷ показали, что вещественная $*$ -алгебра порождается четырьмя «случайными» симметричными матрицами. Их исследования были мотивированы потенциальными приложениями к некоторым инженерным задачам. Кравченко, Мазур, Петренко²⁸ развили методы вычисления «вероятности» того, что набор элементов порождает заданную алгебру, которая является свободным модулем над порядком в некотором поле алгебраических чисел. Как следствие, они нашли новую интерпретацию для значений дзета-функции Римана. Нойман, Пригер²⁹ получили оценки вероятности того, что пара матриц порождает алгебру $M_n(\mathbb{F}_q)$ всех $n \times n$ матриц над полем из q элементов. В частности, эта вероятность стремится к единице, если мощность конечного поля неограниченно возрастает. Позднее Сёркам, Шалев³⁰ показали, что аналогичное свойство выполняется для более широкого семейства алгебр.

Важной характеристикой систем образующих конечномерных алгебр над полем является *длина*. Эта величина связана с комбинаторикой слов, она показывает, насколько «длинные» произведения элементов порождающего подмножества необходимо взять, чтобы их линейная оболочка совпала со всей алгеброй. При этом максимум длин всех возможных порождающих подмножеств заведомо существует, его называют длиной алгебры. Фактически это численный инвариант алгебры, характеризующий ее «мультипликативную сложность».

Впервые функция длины была рассмотрена для 3×3 матриц в связи с задачами из механики сплошных сред в статьях Спенсера, Ривлина^{31,32}. Систематическое исследование функции длины началось с работы Азари

²⁷Aiura D., Kakimura N., Murota K. On the number of matrices to generate a matrix $*$ -algebra over the real field // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 438. — P. 1252–1266.

²⁸Kravchenko R. V., Mazur M., Petrenko B. V. On the smallest number of generators and the probability of generating an algebra // Algebra Number Theory. — 2012. — Vol. 6. — No. 2. — P. 243–291.

²⁹Neumann P. M., Praeger C. E. Cyclic matrices over finite fields // J. Lond. Math. Soc. — 1995. — Vol. 52. — No. 2. — P. 263–284.

³⁰Sercombe D., Shalev A. Random generation of associative algebras // J. Lond. Math. Soc. — 2024. — Vol. 109. — No. 1. — Article e12827.

³¹Spencer A. J. M., Rivlin R. S. The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua // Arch. Rational Mech. Anal. — 1958. — Vol. 2. — P. 309–336.

³²Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Further results in the theory of matrix polynomials // Arch. Rational Mech. Anal. — 1959. — Vol. 4. — P. 214–230.

Паза³³, в которой он поставил задачу вычисления длины полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ над произвольным полем. Эта проблема до сих пор является открытой, хотя был достигнут значительный прогресс в ее решении^{34,35,36,37}. Следует также отметить приложения функции длины к вычислительной теории матриц^{38,39}.

В диссертационной работе исследуются системы образующих матричных колец специального вида — *кольца инцидентности*. Такие кольца состоят из всех матриц с определенным узором из нулей. Кольцо инцидентности является свободным модулем над кольцом коэффициентов с базисом, который состоит из некоторых матричных единиц. В качестве примеров колец инцидентности можно привести кольцо всех верхнетреугольных матриц и кольцо всех диагональных матриц.

Джан-Карло Рота в своей работе⁴⁰ нашел приложения колец инцидентности к ряду задач в комбинаторике и теории чисел. Он дал более общее определение кольца инцидентности как кольца функций на парах элементов некоторого локально-конечного частично упорядоченного множества. Если это множество на самом деле конечно, то кольцо инцидентности естественным образом можно считать матричным, в этом случае также используется термин *структурное матричное кольцо*. Со времени публикации работы Джан-Карло Роты⁴⁰ кольца инцидентности и различные их обобщения всесторонне исследовались. Необходимо отметить классическую монографию Шпигеля, О’Доннелла⁴¹.

Кольцо инцидентности конструируется на основе частично упорядоченно-

³³Paz A. An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables // Linear Multilinear Algebra. — 1984. — Vol. 15. — P. 161–170.

³⁴Guterman A. E., Laffey T. J., Markova O. V., Šmigoc H. A resolution of Paz’s conjecture in the presence of a nonderogatory matrix // Linear Algebra Appl. — 2018. — Vol. 543. — P. 234–250.

³⁵Pappacena C. J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — P. 535–545.

³⁶Shitov Ya. An improved bound for the lengths of matrix algebras // Algebra Number Theory. — 2019. — Vol. 13. — No. 6. — P. 1501–1507.

³⁷Wang C. On the length of generating sets with conditions on minimal polynomial // Commun. Appl. Math. Comput. — 2025. — Published online: 16 September 2025. — DOI: 10.1007/s42967-025-00507-0.

³⁸Маркова О. В. Функция длины и одновременная триангулируемость пар матриц // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2022. — Т. 514. — С. 126–137. — Англ. версия: Markova O. V. Length function and simultaneous triangularization of matrix pairs // J. Math. Sci. — 2023. — Vol. 272. P. 566–573.

³⁹Al’pin Y. A., Ikramov K. D. Reducibility theorems for pairs of matrices as rational criteria // Linear Algebra Appl. — 2000. — Vol. 313. — P. 155–161.

⁴⁰Rota G.-C. On the foundations of combinatorial theory: I. Theory of Möbius functions // Classic Papers in Combinatorics / ed. by I. Gessel, G.-C. Rota. — Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1987. — P. 332–360.

⁴¹Spiegel E. O’Donnell C. J. Incidence algebras. — New York: Marcel Dekker, 1997. — 346 p.

го множества. Поэтому многие исследования посвящены поиску связей между этими двумя объектами. В качестве примера можно привести проблему изоморфизма: верно ли, что из изоморфизма колец (алгебр) инцидентности вытекает изоморфизм соответствующих частично упорядоченных множеств. Эта проблема рассматривается в рамках различных подходов к определению кольца инцидентности, а также для различных колец коэффициентов. Согласно теореме Стенли⁴² проблема изоморфизма имеет положительное решение в случае, когда рассматриваются алгебры инцидентности над полем. Восс⁴³ получил обобщение на случай колец инцидентности над предпорядками в случае, когда кольцо коэффициентов является неразложимым по модулю радикала Джекобсона.

Описание порождающих систем матричных алгебр инцидентности над полем было получено в работе Лонгстаффа и Розенталя⁴⁴. Исследования длины матричных алгебр инцидентности были начаты в работах Ольги Викторовны Марковой. Ей принадлежат результаты о точном значении длин двух экстремальных алгебр инцидентности: алгебры треугольных матриц⁴⁵ и алгебры диагональных матриц⁴⁶. Кроме того, в ее работе⁴⁷ фактически было показано, что длины этих алгебр ограничивают длину любой матричной алгебры инцидентности. Из этих результатов следует, что если мощность основного поля не меньше, чем размер матриц n , то длина любой матричной алгебры инцидентности равна $n - 1$. В случае же малых конечных полей проблема вычисления длины пока остается открытой.

В диссертационной работе исследуются системы образующих колец инцидентности. Найдены необходимые и достаточные условия, позволяющие установить, является ли подмножество кольца инцидентности системой образую-

⁴²Stanley R. P. Structure of incidence algebras and their automorphism groups // Bull. Am. Math. Soc. — 1970. — Vol. 76. — No. 6. — P. 1236–1239.

⁴³Voss E. R. On the isomorphism problem for incidence rings // Illinois J. Math. — 1980. — Vol. 24. — No. 4. — P. 624–638.

⁴⁴Longstaff W. E., Rosenthal P. Generators of matrix incidence algebras // Australas. J. Combin. — 2000. — 22. — P. 117–121.

⁴⁵Маркова О. В. О длине алгебры верхнетреугольных матриц // УМН. — 2005. — Т. 60. — № 5 (365). — С. 177–178. — Англ. версия: Markova O. V. On the length of the algebra of upper-triangular matrices // Russ. Math. Surv. — 2005. — Vol. 60. — No. 5. — P. 984–985.

⁴⁶Маркова О. В. Верхняя оценка длины коммутативных алгебр // Мат. сборник. — 2009. — Т. 200. — № 12. — С. 41–62. — Англ. версия: Markova O. V. Upper bound for the length of commutative algebras // Sb. Math. — 2009. — Vol. 200. — No. 12. — P. 1767–1787.

⁴⁷Маркова О. В. Вычисление длин матричных подалгебр специального вида // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13. — № 4. — С. 165–197. — Англ. версия: Markova O. V. Length computation of matrix subalgebras of special type // J. Math. Sci. — 2008. — Vol. 155. — P. 908–931.

щих. Этот результат автора обобщает известный ранее критерий Лонгстаффа и Розенталя⁴⁴ со случая полей коэффициентов на произвольные ассоциативные кольца с единицей. Также в диссертации получена формула для вычисления минимальной мощности систем образующих в случае, когда кольцо коэффициентов является полулокальным. Для произвольного коммутативного кольца коэффициентов автором установлена формула для минимального количества идемпотентов, порождающих алгебру инцидентности, что обобщает результат Келарева, ван дор Марве, ван Вэйка²⁵, а также позволяет получить новую интерпретацию их результата в терминах вложений графов. Кроме того, в диссертации получена точная верхняя оценка длины алгебр инцидентности над полем. Найдено множество всех реализуемых значений длины для алгебр инцидентности над полем в случае квадратично-нильпотентного радикала.

Объект и предмет исследования

Объект исследования — системы образующих ассоциативных колец и алгебр. Предметом выступают системы образующих колец и алгебр инцидентности над конечными частично упорядоченными множествами.

Цели и задачи работы

- Исследовать системы образующих колец инцидентности над ассоциативными кольцами. Установить необходимые и достаточные условия того, что подмножество является порождающим.
- Получить оценки на минимальную мощность систем образующих при дополнительных ограничениях на кольцо коэффициентов.
- Исследовать идемпотентные образующие алгебр инцидентности над коммутативными кольцами. Оценить минимальную мощность систем идемпотентных образующих.
- Установить связь между длиной алгебры инцидентности над полем и структурой частично упорядоченного множества.

- Построить оценки длины алгебры инцидентности над полем при ограничениях на радикал. Найти все реализуемые значения функции длины в этом случае.

Научная новизна

В работе получены следующие новые результаты. Установлено, что вопрос о том, является ли подмножество порождающим, сводится к исследованию проекций на 2×2 подматрицы специального вида. Если при этом рассматриваемое подмножество содержит все скаляры, то критерий формулируется в терминах идеалов кольца коэффициентов. Этот критерий обобщает известную ранее теорему Лонгстаффа—Розенталя со случая поля на произвольное ассоциативное кольцо коэффициентов.

Полученный автором критерий используется для оценки минимальной мощности систем образующих. Установлены неравенства, связывающие эту величину с кликовым числом графа полных разностей. В ситуации, когда кольцо коэффициентов полулокальное или простое, найдены точные формулы для минимальной мощности порождающих подмножеств. В частности, эти формулы выполняются и в случае поля коэффициентов. Разработанная автором техника также позволяет получать оценки минимальной мощности порождающих подмножеств для ряда других колец. Получена верхняя оценка минимальной мощности порождающих подмножеств для произвольного кольца коэффициентов, построены примеры колец инцидентности, на которых эта оценка достигается.

В случае коммутативного кольца коэффициентов, отдельно рассматривается вопрос о системах образующих, состоящих из идемпотентов. В диссертации установлена их связь с вложениями диаграммы Хассе в дополнение булева куба. Это вложение позволяет автору получить формулу для вычисления минимального количества идемпотентов, порождающих алгебру инцидентности. Указанная формула обобщает результат Келарева, ван дор Марве, ван Вэйка⁴⁸ для алгебры треугольных матриц. Кроме того, автором получена новая интерпретация их результата в терминах вложений графов.

Для алгебр инцидентности над полем исследуется вопрос о значениях

⁴⁸Kelarev A. V., van der Merwe A. B., van Wyk L. The minimum number of idempotent generators of an upper triangular matrix algebra // J. Algebra. — 1998. — Vol. 205. — No. 2. — P. 605—616.

функции длины. Согласно результатам Ольги Викторовны Марковой⁴⁹, если мощность поля не меньше размера матриц n , то длина алгебры инцидентности равна $n - 1$. В диссертационной работе получен ряд результатов о длине алгебр инцидентности для случая малых конечных полей. Автором найдена верхняя оценка, которая связывает длину с такими инвариантами частично упорядоченного множества, как ширина и высота. Построены примеры, показывающие, что полученная оценка является точной.

Также в работе исследуются длины алгебр инцидентности над полем в случае, когда радикал квадратично-нильпотентен. Несмотря на такое сильное ограничение, функция длины ведет себя нетривиальным образом. В работе найдены все ее реализуемые значения в указанном случае. В частности, если мощность поля не меньше половины размера матриц, то реализуются, в принципе, все возможные значения длин алгебр инцидентности без ограничения на радикал.

Положения, выносимые на защиту

- Установлен критерий того, когда подмножество кольца инцидентности является системой образующих (теорема 2.1.4).
- Найдена наименьшая мощность системы образующих кольца инцидентности над полулокальным кольцом (теорема 2.3.2).
- Получена формула для наименьшего количества идемпотентных образующих алгебры инцидентности над произвольным коммутативным кольцом (теорема 3.3.6).
- Для длины алгебры инцидентности над полем получена точная верхняя оценка в терминах высоты и ширины частично упорядоченного множества (теорема 4.4.3).
- Описаны все реализуемые значения длины алгебры инцидентности над полем в случае квадратично-нильпотентного радикала (теорема 5.1.14).

⁴⁹Маркова О. В. Вычисление длин матричных подалгебр специального вида // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2007. — Т. 13. — № 4. — С. 165—197. — Англ. версия: Markova O. V. Length computation of matrix subalgebras of special type // *J. Math. Sci.* — 2008. — Vol. 155. — P. 908—931.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе используются классические методы теории колец, например, разложение полупростого кольца в прямое произведение колец матриц над телами согласно теореме Веддербёрна—Артина. Применяется техника работы с идемпотентами кольца: связь с разложением в прямую сумму, поднятие идемпотентов по модулю нильдеала. Диссертационная работа посвящена главным образом матричным кольцам, поэтому часто используются методы теории матриц и линейной алгебры.

Из методов теории графов следует отметить оценку кликового числа графов, ассоциированных с кольцами. При рассмотрении частичных порядков один из ключевых приемов — переход к отношению накрытия и построение соответствующей диаграммы Хассе. При исследовании функции длины алгебр используются комбинаторные методы при работе со словами от образующих.

В работе предложен ряд новых подходов, которые подталкивают к совершенствованию методов исследований на стыке теории колец и комбинаторных структур. Так, для оценки минимальной мощности систем образующих строится граф полных разностей кольца коэффициентов. При исследовании идемпотентных образующих рассматриваются вложения диаграммы Хассе в дополнение булева куба. Для построения оценок значений функции длины алгебр инцидентности, частично упорядоченное множество разбивается на антицепи и рассматривается как m -дольное. При исследовании реализуемых значений длины решается специальная задача дискретной оптимизации.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа имеет теоретический характер и представляет интерес для специалистов по алгебре. Полученные результаты могут быть использованы для исследования колец инцидентности и близких классов колец.

Степень достоверности и апробация результатов

Автор неоднократно выступал по теме диссертации на семинаре «Кольца, модули и матрицы» кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Были сделаны доклады на следующих

конференциях и семинарах:

- «Системы образующих колец инцидентности», Научно-исследовательский семинар по алгебре, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры, Москва, сентябрь, 2025.
- «Системы образующих колец инцидентности», Международная конференция «Мальцевские чтения 2023», институт математики им. С.Л. Соболева, СО РАН, Новосибирск, ноябрь, 2023.
- «Структурные матричные кольца и их системы образующих», 1338-е заседание семинара «Алгебраические системы», Уральский федеральный университет, Екатеринбург, ноябрь, 2023.
- «Идемпотентные образующие алгебр инцидентности», XXII Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», ТГПУ им. Л.Н. Толстого, Тула, сентябрь, 2023.
- «Образующие колец инцидентности», XXX Международная научная конференция «Ломоносов 2023», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, апрель, 2023.
- «Образующие алгебр инцидентности», XXIX Международная научная конференция «Ломоносов 2022», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, апрель, 2022.
- «О длине матричных алгебр инцидентности», XX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», ТГПУ им. Л.Н. Толстого, Тула, сентябрь, 2021.
- «О длине конечных алгебр инцидентности с квадратично-нильпотентным радикалом», XXVIII Международная научная конференция «Ломоносов 2021», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, апрель, 2021.
- «Системы образующих матричных алгебр инцидентности над конечными полями», XXVI Международная научная конференция студентов,

аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2019», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, апрель, 2019.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 статьях в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Общий объем работы составляет 123 страницы. Список литературы вместе с публикациями автора включает 73 наименования.

Основное содержание работы

В главе 1 приводятся основные определения, соглашения и известные ранее результаты, которые используются в работе. В § 1.1 рассматриваются кольца и алгебры. Следующий § 1.2 посвящен частично упорядоченным множествам. В § 1.3 затрагивается теория графов. Основным является § 1.4, где вводится понятие кольца инцидентности над конечным частично упорядоченным множеством.

Определение (1.4.5) Пусть $\preceq$ — отношение частичного порядка на множестве $\{1, \dots, n\}$. Рассмотрим кольцо всех $n \times n$ матриц $M_n(\mathcal{R})$ над некоторым ассоциативным кольцом $\mathcal{R}$ с единицей. Кольцо $M_n(\mathcal{R})$ является правым и левым свободным $\mathcal{R}$ -модулем со стандартным базисом из матричных единиц $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Тогда *кольцо инцидентности* определяется как

$$\mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R}) = \left\{ \sum_{i \preceq j} a_{ij} E_{ij} \mid a_{ij} \in \mathcal{R} \right\} = \{A \in M_n(\mathcal{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ при } i \not\preceq j\}.$$

В § 1.5 вводится понятие длины конечномерной ассоциативной алгебры

над полем, а также приводятся некоторые известные результаты о длинах матричных алгебр.

Глава 2 посвящена исследованию минимальной мощности систем образующих колец инцидентности в следующем смысле.

Определение (2.0.1) Обозначим через $\mathcal{R}E_n$ множество всех скалярных $n \times n$ матриц над кольцом $\mathcal{R}$. Для кольца инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ определим величину

$$\text{mgen}(\mathcal{A}) = \min\{|S| \mid S \subseteq \mathcal{A}, S \cup \mathcal{R}E_n \text{ порождает } \mathcal{A} \text{ как кольцо}\}.$$

В частности, если $\mathcal{R}$ коммутативно, то $\text{mgen}(\mathcal{A})$ совпадает с минимальной мощностью подмножества, порождающего $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру.

В § 2.1 доказывается критерий, когда множество матриц является порождающим в кольце инцидентности.

Теорема (2.1.4) Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Рассмотрим непустое подмножество $S \subseteq \mathcal{A}$. Для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $i \neq j$, рассмотрим следующие идеалы кольца $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{ij} &= \mathfrak{a}_{ij}(S) = \mathcal{R}\{(A)_{ii} - (A)_{jj} \mid A \in S\}\mathcal{R}, \\ \mathfrak{b}_{ij} &= \mathfrak{b}_{ij}(S) = \{(A)_{ij} \mid A \in \mathcal{R}(S \cup \{E_n\})\mathcal{R} : (A)_{ii} = (A)_{jj}\}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{R}(S \cup \{E_n\})\mathcal{R}$ обозначает под- $\mathcal{R}$ -бимодуль в $\mathcal{A}$, порожденный множеством $S \cup \{E_n\}$. Тогда множество $S \cup \mathcal{R}E_n$ порождает $\mathcal{A}$ как кольцо тогда и только тогда, когда

А. $\mathfrak{a}_{ij} = \mathcal{R}$ для всех пар $i < j$;

В. $\mathfrak{b}_{ij} = \mathcal{R}$ для всех пар $i \prec j$.

Здесь « $<$ » подразумевает стандартный линейный порядок на множестве чисел $\{1, \dots, n\}$. Отношение $i \prec j$ означает, что $i \prec j$ и нет такого k , что $i \prec k \prec j$.

В § 2.2 вводится понятие графа полных разностей и исследуется связь его кликового числа с величиной $\text{mgen}(\cdot)$.

Определение (2.2.1) Следуя работе⁵⁰, назовем элемент кольца $x \in \mathcal{R}$

⁵⁰Chen H. Full elements in regular rings // Taiwanese J. Math. — 2004.— Vol. 8. — No. 2. — P. 203—209.

полным, если $\mathcal{R}x\mathcal{R} = \mathcal{R}$. Другими словами, двусторонний идеал, порожденный (как $\mathcal{R}$ -бимодуль) элементом x , совпадает с кольцом $\mathcal{R}$. Тогда определим неориентированный *граф полных разностей* $\Phi(\mathcal{R})$ следующим образом. Пусть вершинами графа являются все элементы кольца $\mathcal{R}$. Две вершины $r, s \in \mathcal{R}$ соединены ребром, если разность $r - s$ является полным элементом кольца $\mathcal{R}$.

В § 2.3 получены точные формулы для величины $\text{mgen}(\cdot)$ в случаях, когда кольцо коэффициентов является полулокальным или простым. Сначала разбирается случай простого кольца.

Теорема (2.3.1) Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что кольцо $\mathcal{R}$ простое, но не является полем. Тогда

$$\text{mgen}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \lceil \log_{|\mathcal{R}|} n \rceil, & \text{если } \mathcal{R} \text{ конечно;} \\ 1, & \text{если } \mathcal{R} \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

В конце параграфа доказывается аналогичная формула для полулокального кольца коэффициентов. В частности, она выполняется и в случае поля.

Теорема (2.3.2) Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — кольцо инцидентности, $n \geq 2$. Предположим, что $\mathcal{R}$ — полулокальное кольцо. Обозначим через κ минимальную мощность колец $M_{n_i}(\mathcal{D}_i)$ в разложении Веддербёрна—Артина факторкольца по радикалу Джекобсона, то есть $\mathcal{R}/J(\mathcal{R}) \cong M_{n_1}(\mathcal{D}_1) \times \dots \times M_{n_d}(\mathcal{D}_d)$, где $n_1, \dots, n_d \geq 1$, а кольца $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^d$ являются телами. Тогда верны следующие утверждения.

1. Если $\kappa < n$, то $\text{mgen}(\mathcal{A}) = \lceil \log_{\kappa} n \rceil$.
2. Если $\kappa \geq n$ и $\mathcal{A} = D_n(\mathcal{R})$, то $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 1$.
3. Предположим, что $\kappa \geq n$, $\mathcal{A} \neq D_n(\mathcal{R})$, и существует такое $i \in \{1, \dots, d\}$ что $n_i = 1$ и $\mathcal{D}_i$ является полем. Тогда $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 2$.
4. Во всех остальных случаях выполнено $\text{mgen}(\mathcal{A}) = 1$.

В § 2.4 приводятся дополнительные оценки величины $\text{mgen}(\cdot)$ в ряде частных случаев.

В главе 3 исследуются системы образующих, состоящие из идемпотентных матриц. На протяжении всей главы предполагается, что кольцо коэффициентов коммутативно. Исследуется следующая величина.

Определение (3.0.1) Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$ — алгебра инцидентности над коммутативным кольцом $\mathcal{R}$. Обозначим через $\nu(\mathcal{A})$ минимальное количество идемпотентных матриц, которые порождают $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру.

В § 3.1 приводится конструкция вложения диаграммы Хассе в дополнение булева куба по заданной системе идемпотентных образующих. В § 3.2, наоборот, конструируются идемпотентные образующие по заданному вложению диаграммы Хассе в дополнение булева куба. В § 3.3 формулируется метод вычисления величины $\nu(\cdot)$, при этом используется следующее вспомогательное понятие.

Определение (3.3.3) Граф G на n вершинах принадлежит *нулевому классу идемпотентности*, если он изоморфен подграфу дополнения $\overline{\mathcal{Q}_{\lceil \log_2 n \rceil}}$ булева куба размерности $\lceil \log_2 n \rceil$. Если граф не принадлежит нулевому классу идемпотентности, то будем считать, что он принадлежит *первому классу идемпотентности*. Номер класса идемпотентности будет обозначаться через $\text{idem}(G)$. Таким образом, $\text{idem}(G) \in \{0, 1\}$.

Приводятся примеры, показывающие, что оба класса непустые. При помощи понятия класса идемпотентности формулируется основной результат главы.

Теорема (3.3.6) Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathcal{R})$. Тогда следующие величины совпадают.

1. Минимальное количество ν идемпотентных матриц, которые порождают $\mathcal{A}$ как $\mathcal{R}$ -алгебру.
2. Минимальное такое $m \in \mathbb{N}$, что диаграмма Хассе частичного порядка $\preceq$ может быть вложена в дополнение $\overline{\mathcal{Q}_m}$ булева куба размерности m .
3. Сумма $\lceil \log_2 n \rceil + \text{idem}(\prec)$, где $\text{idem}(\prec) \in \{0, 1\}$ — это номер класса идемпотентности диаграммы Хассе $\preceq$ в терминах определения 3.3.3.

Таким образом, величина $\nu(\cdot)$ заведомо известна с точностью до единицы, а ее конкретное значение может быть определено путем поиска специального подграфа в дополнении булева куба.

В главе 4 получены оценки длин алгебр инцидентности на основе структуры частично упорядоченного множества. В § 4.1 найдена верхняя оценка

длины алгебры инцидентности над полем. Показано, в каких случаях она лучше известной ранее границы $n - 1$. Приводится пример вычисления этой оценки на основе конкретной диаграммы Хассе. В § 4.2 вводится вспомогательное техническое понятие *подходящей пары* натуральных чисел. Найдено достаточное условие, при котором пара чисел является подходящей. В § 4.3 доказана нижняя оценка длины алгебры инцидентности в случае, когда частично упорядоченное множество является полным многодольным с рядом ограничений на числа Уитни. В § 4.4 установлена связь длины с другими инвариантами частично упорядоченного множества, доказывается следующий результат.

Теорема (4.4.3) Рассмотрим алгебру инцидентности $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$. Обозначим через h и w , соответственно, высоту и ширину рассматриваемого частично упорядоченного множества $(\{1, \dots, n\}, \preceq)$. Тогда

$$\ell(\mathcal{A}) \leq (\ell(D_w(\mathbb{F})) + 1) \cdot h - 1.$$

В этой формуле $\ell(D_w(\mathbb{F}))$ обозначает длину алгебры диагональных матриц. Более того, для любых $h', w' \in \mathbb{N}$ найдется $n' \in \mathbb{N}$ и такой частичный порядок $\preceq'$ на множестве $\{1, \dots, n'\}$, что высота и ширина равны h' и w' , соответственно, и при этом

$$\ell(\mathcal{A}_{n'}(\preceq', \mathbb{F})) = (\ell(D_{w'}(\mathbb{F})) + 1) \cdot h' - 1.$$

В параграфе 4.5 затрагивается вопрос о длине алгебр инцидентности в случае, когда частично упорядоченное множество содержит значительное количество изолированных точек.

Глава 5 посвящена исследованию длин алгебр инцидентности с квадратично-нильпотентным радикалом. В параграфе 5.1 найдены все реализуемые значения длин указанных алгебр.

Теорема (5.1.14) Пусть даны натуральное $n \geq 2$, произвольное поле $\mathbb{F}$, алгебра инцидентности $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ с квадратично-нильпотентным радикалом. Если $n \leq |\mathbb{F}| \leq \infty$ или $(n, |\mathbb{F}|) = (3, 2)$, то $\ell(\mathcal{A}) = n - 1$. Иначе

$$\ell(D_n(\mathbb{F})) \leq \ell(\mathcal{A}) \leq \ell(D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{F})) + \ell(D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(\mathbb{F})) + 1 + c,$$

$$c = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta_- \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \leq \delta_+ \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right), \\ 1, & \text{если } \delta_- \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) > \delta_+ \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right). \end{cases}$$

В этой формуле $\ell(D_x(\mathbb{F}))$ обозначает длину алгебры диагональных матриц. Функции δ_+, δ_- определяются как

$$\delta_+(n) = \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor q^{\lfloor \log_q n \rfloor} + q^{\lfloor \log_q n \rfloor} - 1 - n, \quad \delta_-(n) = n - \left\lfloor q^{\{\log_q n\}} \right\rfloor q^{\lfloor \log_q n \rfloor}$$

для $q = |\mathbb{F}|$. Более того, для каждого $k \in \mathbb{N}$ из промежутка

$$\ell(D_n(\mathbb{F})) \leq k \leq \ell(D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\mathbb{F})) + \ell(D_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(\mathbb{F})) + 1 + c,$$

существует алгебра инцидентности $\mathcal{A}_{(k)} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ с квадратично-нильпотентным радикалом, у которой $\ell(\mathcal{A}_{(k)}) = k$.

Если мощность поля не меньше половины размера матриц, то на указанных алгебрах реализуются, в принципе, все возможные значения длин алгебр инцидентности без ограничений на радикал. Известно, что для алгебры инцидентности⁵¹ $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n(\preceq, \mathbb{F})$ над полем $\mathbb{F}$ выполняется $\ell(D_n(\mathbb{F})) \leq \ell(\mathcal{A}) \leq n - 1$.

Следствие (5.1.15) Пусть даны натуральное $n \geq 2$, поле $\mathbb{F}$, $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq |\mathbb{F}|$. Тогда для всех натуральных k таких, что $\ell(D_n(\mathbb{F})) \leq k \leq n - 1$, существует алгебра инцидентности $\mathcal{A}_{(k)} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ с квадратично-нильпотентным радикалом, для которой выполнено $\ell(\mathcal{A}_{(k)}) = k$.

В § 5.2 доказана верхняя оценка длины алгебр инцидентности с квадратично-нильпотентным радикалом. В § 5.3 исследуется длина алгебр инцидентности, которые изоморфны прямой сумме алгебр треугольных матриц порядка 2.

⁵¹Маркова О. В. Вычисление длин матричных подалгебр специального вида // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13. — № 4. — С. 165—197. — Англ. версия: Markova O. V. Length computation of matrix subalgebras of special type // J. Math. Sci. — 2008. — Vol. 155. — P. 908—931.

Заключение

В диссертационной работе проведено исследование систем образующих колец инцидентности. Был установлен критерий, когда подмножество является системой образующих. Вычислена минимальная мощность систем образующих в случае, когда кольцо коэффициентов полулокально, а также для ряда других колец.

В случае алгебр инцидентности над коммутативным кольцом отдельно рассматривались системы образующих, состоящие из идемпотентных матриц. Установлена их связь с вложениями диаграммы Хассе в дополнение булева куба. Найдена формула для минимальной мощности идемпотентных систем образующих.

Для алгебр инцидентности над полем был исследован вопрос о значениях функции длины. Найдена точная верхняя оценка, связывающая длину с двумя инвариантами частично упорядоченного множества — высотой и шириной. В случае, когда радикал квадратично-нильпотентен, найдены все реализуемые значения длины.

Благодарность

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Марковой Ольге Викторовне за постановку задач, внимание к работе, полезные обсуждения. Автор признателен коллективу кафедры высшей алгебры за тёплую доброжелательную атмосферу.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

- [1] Kolegov N. A. A sharp upper bound for the length of incidence algebras // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2026. — Vol. 23. — No. 1. — pp. 29—49.

EDN: LKWYJK. Импакт-фактор 0,5 (JIF). 1,53 п.л.

- [2] Kolegov N. A., Idempotent generators of incidence algebras // Bulletin of the Australian Mathematical Society. — 2024. — Vol. 110. — No. 3. — pp. 488—497.

DOI: 10.1017/S0004972724000078. Импакт-фактор 0,5 (JIF). 0,68 п.л.

- [3] Kolegov N. A. On generators of incidence rings over finite posets // Journal of Algebra. — 2023. — Vol. 619. — pp. 686—706.

EDN: PSTBRC. Импакт-фактор 0,8 (JIF). 1,18 п.л.

- [4] Kolegov N. A. On the lengths of matrix incidence algebras with radicals of square zero // Linear and Multilinear Algebra. — 2023. — Vol. 71. — No. 10. — pp. 1736—1753.

EDN: SHSAXF. Импакт-фактор 1,0 (JIF). 1,04 п.л.

- [5] Kolegov N. A. On the probability of generating matrix incidence rings // Beiträge zur Algebra und Geometrie. — 2026. — Vol. 67. — pp. 619—628.

EDN: RYVIBG. Импакт-фактор 0,4 (JIF). 0,53 п.л.

- [6] Kolegov N. A., Markova O. V. Systems of generators of matrix incidence algebras over finite fields // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 240. — pp. 783—798.

EDN: RNVGXN. Импакт-фактор 0.253 (SJR). 1,21 п.л. Общая доля диссертанта составляет 50%.

- [7] Kolegov N. A., Markova O. V. The lengths of matrix incidence algebras over small finite fields // Journal of Mathematical Sciences. — 2022. — Vol. 262. — pp. 62—83.

EDN: HOOSWI. Импакт-фактор 0.253 (SJR). 1,38 п.л. Общая доля диссертанта составляет 50%.