

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Макиева Элина Игоревна

**Динамика тел, взаимодействующих с проскальзыванием
и разрушением**

1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2026

Диссертация подготовлена на кафедре прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

**Научный
Руководитель -**

Влахова Анастасия Владимировна,
доктор физико-математических наук, доцент

**Официальные
оппоненты -**

Бардин Борис Сабирович,
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор РАН,
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет),
кафедра № 921 «Прикладная математика», профессор,
и.о. заведующего кафедрой

Георгиевский Дмитрий Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАН,
МГУ имени М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра теории упругости, заведующий кафедрой

Мамаев Иван Сергеевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор РАН,
Ижевский государственный технический университет
имени М.Т. Калашникова, инженерно-технологический
факультет, кафедра «Мехатронные системы», научно-
учебная лаборатория «Мобильные системы»,
главный научный сотрудник

Защита диссертации состоится 25 сентября 2026 г. в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.7 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

E-mail: dissovet.msu.011.7@math.msu.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3995>

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, доцент

Ю.Д. Селюцкий

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации рассматриваются задачи моделирования динамики систем с трением, постановка которых учитывает малую деформируемость взаимодействующих тел и возможность их хрупкого разрушения вблизи области контакта. Первая часть работы посвящена внешней задаче - построению и исследованию математических моделей систем, которые содержат тела, взаимодействующие с малыми относительными проскальзываниями через промежуточную прослойку из выколотых при разрушении элементов (эти элементы также могут быть привнесены извне). Вторая часть работы связана с внутренней задачей – изучением движения элементов прослойки между телами. Выбранное направление актуально как для теории, так и для практики. Развитие возможностей эксперимента и подходов к описанию динамики систем с трением и разрушением позволяет обсудить пределы применимости результатов, полученных при помощи формально-аксиоматических методов теоретической механики. Помимо этого проводимые исследования могут оказаться полезными при формировании технологий обработки материалов.

Цели работы состоят в развитии подходов к моделированию динамики систем с проскальзыванием и хрупким разрушением, совершенствовании методов исследования таких систем и применении этих методов для решения классических и новых задач теоретической и прикладной механики.

Для достижения указанных целей необходимо решить следующие **задачи**.

1. Провести анализ предельных переходов к бесконечной жесткости касательных составляющих контактных сил в уравнениях динамики механической системы, которая содержит тела, взаимодействующие с малыми относительными проскальзываниями и хрупким разрушением, вызывающим появление между телами промежуточной прослойки, разделить ситуации, когда предельные модели различаются.

2. Исследовать применимость полученных результатов к задаче о движении железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода при наличии промежуточной прослойки между колесами и рельсами.

3. Построить математические модели динамики элементов промежуточной прослойки между контактирующими телами при различных условиях их трения, провести их аналитическое и численное исследование и сравнить полученные результаты с результатами экспериментов.

Научная новизна и основные результаты. Все результаты диссертации являются новыми. Предложен подход, позволяющий провести математическое моделирование систем с проскальзыванием и разрушением, и получить достаточные условия, при выполнении которых вместо условий непроскальзывания (в рамках аналога «промежуточной» модели вакономной механики) в системе реализуются модифицированные первичные связи Дирака (в рамках модели, где проскальзывания взаимодействующих тел системы сохраняются). Построена модель качения железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода, которая дает возможность оценить влияние промежуточной прослойки между колесами и рельсами на ее поперечную и угловую динамику, а также на эффекты, создаваемые возмущениями. Получены аналитические формулы для описания сближения шаровидных элементов промежуточной прослойки между контактирующими телами при трении, позволяющие получить представление о механизме изменения ее структуры, в ходе которого эти элементы выстраиваются в компактные образования.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты позволяют сформировать рекомендации для использования тех или иных моделей динамики механических систем с проскальзыванием и разрушением и оценить их качественное поведение. В главе 1 определены условия, при выполнении которых от аналога «промежуточной» модели вакономной механики с условиями непроскальзывания взаимодействующих тел следует перейти к описанию этих систем неклассической моделью с модифицированными первичными связями Дирака, для которой проскальзывания тел сохраняются. Полученные в главе 2 результаты дают представление об изменении структуры промежуточной прослойки между телами при трении, связанном с напряженно-деформированным состоянием в окрестности этих элементов.

Результаты работы могут применяться при чтении спецкурсов по математическому моделированию механических систем, при написании курсовых, дипломных и диссертационных работ, а также при проведении научных исследований в МГУ имени М.В.Ломоносова, НИИ механики МГУ, Институте проблем механики имени А.Ю.Ишлинского РАН и других научно-исследовательских центрах, занимающихся изучением динамики систем с трением.

Методология и методы исследования. Результаты работы получены с использованием подходов теоретической механики, классических и современных методов моделирования динамики систем с условиями непроскальзывания или первичными связями Дирака в системах с вырожденными лагранжианами, теории систем с трением, методов механики разрушения, подходов фракционного анализа и теории возмущений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предельный переход к бесконечной жесткости касательных составляющих контактных сил может привести уравнения динамики механической системы, которая содержит тела, взаимодействующие с малыми относительными проскальзываниями (в касательном направлении к их поверхностям) и хрупким разрушением, к аналогу «промежуточной» модели вакономной механики с условиями непроскальзывания тел или к (модифицированной) модели с первичными связями Дирака, возникающими из-за вырождения лагранжиана системы, для которой проскальзывания сохраняются.

2. Ситуации, когда реализуется та или иная предельная модель, разделяются после сравнения порядков величин слагаемых в правых и левых частях соотношений между скоростью проскальзывания тел и обобщенными скоростями. Если при движении системы обобщенные скорости существенно превосходят скорость проскальзывания, то возможна реализация условий непроскальзывания. Если порядки малости слагаемых в правых и левых частях указанных соотношений одинаковы за счет того, что часть обобщенных скоростей соизмерима со скоростью проскальзывания, а при части других обобщенных скоростей стоят малые множители, то в системе могут быть реализованы модифицированные первичные связи Дирака, возникающие из-за вырождения лагранжиана системы при переходе к нулевым значениям малых обобщенных скоростей.

3. При движении железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода наличие промежуточной прослойки между колесами и рельсами влияет на быстрый процесс перехода контактных сил (моментов) к значениям вблизи тех, которые уравнивают внешние возмущения (при упрощении смещения колес относительно рельсов через элементы прослойки этот процесс проходит менее интенсивно). Учет микропроскальзываний колес относительно рельсов в рамках подхода Дирака позволяет описать поперечные колебания пары вблизи средней линии пути с нарастающей амплитудой, не учитываемые моделями с условиями непроскальзывания.

4. Формализм Дирака для систем с вырожденными лагранжианами позволяет описывать динамику двух шаровидных элементов промежуточной прослойки между перемещающейся вдоль фиксированного направления жесткой плитой и неподвижной деформируемой подстилающей поверхностью в случаях, когда эти элементы взаимодействуют с плитой в режиме микропроскальзывания, а с подстилающей поверхностью – в режимах микропроскальзывания или скольжения. Построенная модель, имеющая более высокую точность по сравнению с моделью непроскальзывания элементов прослойки относительно плиты, подтверждает экспериментальный факт сближения элементов прослойки и дает аналитические формулы для описания этого процесса.

Достоверность и обоснованность. Результаты работы получены при помощи строгих математических методов и соответствуют результатам других авторов по данной тематике, результатам численного моделирования и данным эксперимента.

Апробация. Результаты работы прошли апробацию на международных научных конференциях:

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 11-25 апреля 2025 г. и 10-25 апреля 2026 г. (каф. прикладной механики и управления).

2. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, 2-5 декабря 2025 г.

3. Международная научная конференция «Асимптотические методы в математической физике» к 100-летию со дня рождения профессора А.Б. Васильевой и 75-летию со дня рождения профессора Н.Н. Нефедова, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 26-27 февраля 2026 г.

4. XVII Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Конференция Пятницкого), Москва, Россия, ИПУ РАН, 3-5 июня 2026 г.

Результаты были представлены соискателем на следующих научных семинарах:

1. Научный семинар имени акад. А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению под руководством проф. В.В. Александрова, Ю.В. Болотина, Н.А. Парусникова, кафедра прикладной механики и управления, механико-математический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова (2026).

2. Научный семинар «Математическое моделирование управляемых систем» под руководством проф. В.В. Александрова, Ю.В. Болотина и доц. П.А. Кручинина, кафедра прикладной механики и управления, механико-математический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова (2025, 2026).

3. Научный семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени проф. В.В. Трофимова под руководством членов-корреспондентов РАН, проф. Д.В. Георгиевского и М.В. Шамолина, а также проф. МГТУ им. Баумана С.А. Агафонова (2025).

4. Научный семинар Уральского математического центра УдГУ под руководством проф. РАН И.С. Мамаева и проф. А.А. Килина (2026).

5. Научный семинар «Динамические системы и механика» под руководством проф. П.С. Красильникова и проф. РАН Б.С. Бардина, кафедра 921 «Прикладная математика» НИУ Московского авиационного института (МАИ) (2026).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 3 научных работах, которые опубликованы в рецензируемых журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук. Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад. Все результаты, выносимые на защиту, получены лично автором. В работах [1-3] научный руководитель участвовал в постановке задач, обсуждении выбора математических методов их решения и интерпретации результатов. Личный вклад автора в работе [1] заключается в анализе характерных значений переменных рассматриваемой системы, получении предельных моделей, формулировке и доказательстве теорем и замечаний. Личный вклад автора в работах [2, 3] состоит в построении уравнений динамики системы, введении малых параметров, формировании приближенных моделей, исследовании их свойств и написании программы численного решения задач.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации 130 страниц, в том числе 72 рисунка. Список литературы содержит 70 наименований.

Основное содержание работы

Во введении приводится общая характеристика работы, определены ее цели, обоснованы актуальность, научная новизна теоретическая и практическая значимость исследования, описываются подходы к решению задач, дано краткое содержание работы. Приведены сведения об апробации результатов и публикациях по теме работы.

В первой главе в рамках внешней задачи обсуждаются условия реализации связей в системах с проскальзыванием и разрушением взаимодействующих тел.

Разделы 1.1 и 1.2 содержат основные предположения, позволяющие прийти к модели динамики, учитывающей изменение потенциальной энергии взаимодействующих тел при их смещении через элементы прослойки, и обзор литературы, ориентированной на решение вопросов реализации связи, запрещающей проскальзывание тел, путем перехода к бесконечной жесткости сил взаимодействия между ними.

Рассматривается механическая система с голономными стационарными идеальными связями, в которую входит пара подвижно сопряженных (без отрыва) тел – кинематическая пара, имеющая одну степень свободы в относительном движении. Если нагрузка по нормали к взаимодействующим поверхностям тел отсутствует, то они касаются друг друга в точке O , после приложения нагрузки возникает малая деформация тел в окрестности этой точки. Механические свойства деформируемых частей тел считаются одинаковыми, условия их трения – такими, что зона проскальзывания – составляющая малой области контакта тел, где их относительные смещения в касательном направлении отличны от нуля, во все время движения остается существенно меньше зоны сцепления, в которой эти смещения одинаковы (первой областью далее пренебрежем). Будем считать, что в области контакта тел присутствует тонкая промежуточная прослойка, элементы которой возникают после локального хрупкого разрушения приповерхностных слоев тел или внесены извне.

Масштабы изменения геометрических, силовых и временных параметров динамики системы существенно различаются, поэтому в работе используются подходы разделения движений (внешних и внутренних разложений в механике деформируемого твердого тела), в рамках которых при исследовании медленных движений быстрые процессы считаются завершенными, а при рассмотрении быстрых процессов медленные по отношению к ним переменные полагаются

фиксированными. На первом масштабном уровне самых медленных движений (макроуровне) с использованием подходов теоретической механики исследуется динамика системы в целом и ее составляющих: движения центров масс, движения относительно центров масс и проч. под действием заданных сил и моментов. Контакт тел кинематической пары считается точечным, а модели их взаимодействия друг с другом получаются после исследования процессов более мелких масштабных уровней (микроуровней), к которым относится деформирование тел вблизи области контакта и их разрушение (второй масштабный уровень более быстрых движений), а также структурирование элементов прослойки в области контакта, определяющее условия трения тел (третий масштабный уровень самых быстрых движений).

Анализ быстрых процессов второго и третьего масштабных уровней позволяет сделать следующие выводы о свойствах контактного взаимодействия тел (Н.М. Алексеев, Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко, А.В. Влахова).

Элементы прослойки, которые собираются в возникающих после разрушения трещиноподобных полостях между телами, аналогичны роликовому подшипнику: они расклинивают деформируемые части тел и упрощают их смещение в касательном направлении за счет возможности перекатывания (будем считать, что эти элементы абсолютно твердые, имеют шаровидную форму, и их перекатывание происходит без проскальзывания). В результате нормальные напряжения в области контакта тел увеличиваются, а касательные – уменьшаются по сравнению с соответствующими усредненными напряжениями для системы, отвечающей отсутствию разрушения. Следовательно, потенциальная энергия системы изменяется: ее увеличение связано с расклинивающим действием элементов прослойки, а ее уменьшение – с тем, что на части области контакта с прослойкой тела кинематической пары смещаются, перекатываясь через ее элементы.

В стационарном режиме существования элементов прослойки изменение потенциальной энергии определяется структурой их распределения вдоль области контакта тел кинематической пары. Эксперименты показывают три возможных структуры: равномерное распределение элементов с более-менее значительным удалением друг от друга и компактное распределение в виде цепочки или округлых образований, получающихся после смятия и слияния элементов. Реализуется структура распределения, при которой изменение потенциальной энергии минимально.

Формулы, определяющие изменение потенциальной энергии деформирования тел можно получить, проведя аналогию между трещиноподобными полостями с элементами прослойки и трещинами под действием нормальных и касательных напряжений, которые определяются расположением этих элементов и условиями деформирования тел.

В работе рассматривается случай, когда элементы прослойки располагаются раздельно или компактно в виде цепочки, то есть энергия, высвобождаемая из-за того, что смещение деформируемых частей тел кинематической пары в касательном направлении упрощается, принимает максимальные по порядку величины значения, и выясним, как ее учет сказывается на динамике рассматриваемой системы. На этом этапе исследования процессов первого масштабного уровня мы предполагаем, что тела кинематической пары контактируют в точке O , где приложены сила трения тел P и нормальная реакция N , равные главным векторам касательных и нормальных напряжений по области фактического взаимодействия тел, которые связаны линейной зависимостью

$$P = -\kappa N \zeta / \varepsilon, \quad \zeta = v/v^r, \quad |\zeta| < \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

Здесь κ – коэффициент трения тел, $v = v^e + v^r$, $|v| \ll |v^e| \sim |v^r|$ – скорость точки O , v^e и v^r – разности переносных и относительных скоростей недеформируемых (находящихся на удалении от области контакта) частей тел кинематической пары. Последнее неравенство (1) отвечает предположению о том, что тела взаимодействуют без потери сцепления друг с другом (не скользят): $|P| < \kappa N$. Параметр ε , который далее при проведении предельного перехода к бесконечной жесткости тел устремляется к нулю, характеризует малое относительное смещение (микроскользживание) их контактирующих поверхностей, обусловленное упругой или упругопластической касательной деформируемостью тел вблизи точки O ; переменная ζ называется относительным проскальзыванием.

Лагранжиан системы до появления прослойки а области контакта тел кинематической пары имеет вид:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \Pi(\mathbf{q}); \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2)$$

где $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ – вектор независимых обобщенных координат системы, T и $\mathbf{A}$ – ее кинетическая энергия и соответствующая матрица инерционных коэффициентов, Π – потенциальная энергия.

Материалы тел кинематической пары могут считаться как упругими, так и вязкоупругими. Для последних предполагается, что в ходе разрушения процессы их релаксации и вязкого деформирования в нормальном направлении практически полностью завершаются, а в касательном направлении они почти не успевают начаться, и вязкоупругие тела заменяются упругими с длительным модулем упругости $E_{\infty z}$ в нормальном направлении и мгновенным модулем упругости $E_{1x} \ll E_{\infty z}$ в касательном направлении.

Пусть после разрушения в области контакта тел кинематической пары возникло p трещиноподобных полостей с одиночным элементом прослойки и p_k полостей, содержащих цепочку из k элементов прослойки. Выражением для лагранжиана системы после появления прослойки служит

$$L_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\alpha \zeta^2}{2\varepsilon}, \quad \alpha = \pi h^2 \frac{E_{\infty z}^2}{E_{1x}} \frac{\kappa^2(p + p_k)}{\varepsilon}, \quad (3)$$

где h – половина характерного размера ее элемента. Слагаемое с множителем α отвечает уменьшению потенциальной энергии системы из-за упрощения сдвига деформируемых частей тел кинематической пары в касательном направлении; слагаемое, которое определяет ее увеличение из-за эффекта расклинивания, постоянно и поэтому не принимается во внимание. Соответствующие выражения для упругих тел кинематической пары получаются подстановкой в (3) вместо E_{1x} и $E_{\infty z}$ модуля упругости тел E . Таким образом, функция Лагранжа после разрушения приобретает дополнительную по отношению к (1) составляющую, аналогичную кинетической энергии «присоединенной массы» в закономерной механике (В.В. Козлов), а при $v^r = \text{const}$ совпадающую с ней.

Примем

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{v}^r = \mathbf{c}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T, \quad \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \quad (4)$$

и будем считать, что $\|\mathbf{b}\|$ и $\|\mathbf{c}\|$ принимают конечные значения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Движение рассматриваемой системы после разрушения (появления прослойки) с учетом выражения для отвечающей P из (1), (4) обобщенной силы описывается уравнениями Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{b}P, \quad (5)$$

где $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)^T$ – вектор обобщенных сил, отвечающий активным силам и отличным от P силам трения. Начальными условиями для (5) служат

$$\mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (6)$$

Обозначим $T_* = R/V_*$, $V_* = \max\{|v^e|, |v^r|\}$ характерное время изменения скоростей v^e и v^r . Здесь $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$, где R_1 и R_2 – радиусы кривизны тел в точке O , – их относительный радиус кривизны в этой точке, и рассмотрим случай, когда отношение

$$\mu = \frac{\alpha}{\kappa N_* V_* T_*} \quad (7)$$

характерного значения $\alpha/(V_* T_*)$ составляющих системы (5) с множителем α к характерному значению $P_* = \kappa N_*$ силы трения тел (1) (N_* – характерное значение N) принимает конечные значения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В случае, когда характерные значения слагаемых правой части соотношения для переменной ζ из (1), записанного с учетом (4), существенно превосходят характерное значение ε левой части этого соотношения, предельная при $\varepsilon \rightarrow 0$ для (5) система со связью

$$v = 0, \quad (8)$$

запрещающей проскальзывание тел кинематической пары, отличается от классической неголономной модели движения рассматриваемой механической системы (А.В. Влахова). При $v^r = \text{const}$, $N = \text{const}$ она совпадает с «промежуточной» моделью В.В. Козлова, содержащей «неголономные» и «вакономные» составляющие с множителями κN и α соответственно.

В настоящей работе изучается случай, когда слагаемые правой части соотношения для переменной ζ имеют порядок ε , то есть соизмеримы с характерным значением левой части этого соотношения. Так будет, если при выполнении последнего ограничения (1) компоненты вектора $\mathbf{c}$ принимают конечные значения при $\varepsilon \rightarrow 0$, а для компонент векторов $\dot{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{b}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= (\dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2)^T, \quad \mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)^T, \\ \dot{\mathbf{q}}_1 &= (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)^T, \quad \dot{\mathbf{q}}_2 = (\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n)^T, \quad \|\dot{\mathbf{q}}_1\| = O(1), \quad \|\dot{\mathbf{q}}_2\| = O(\varepsilon), \\ \mathbf{b}_1 &= (b_1, \dots, b_m)^T, \quad \mathbf{b}_2 = (b_{m+1}, \dots, b_n)^T, \quad \|\mathbf{b}_1\| = O(\varepsilon), \quad \|\mathbf{b}_2\| = O(1). \end{aligned} \quad (9)$$

В случае (9) при $\varepsilon \rightarrow 0$ замена выражения $\zeta = (\mathbf{b}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{q}}_2)/(\mathbf{c}^T \dot{\mathbf{q}})$ уравнением (8) теряет обоснование.

Для формализации перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ проводится замена

$$\dot{\mathbf{q}}_2 = \varepsilon \boldsymbol{\theta}, \quad (10)$$

благодаря которой (5) принимает сингулярно возмущенную по ε форму с быстрыми переменными $\boldsymbol{\theta}$. При $\varepsilon = 0$ приходим к невозмущенной (вырожденной, квазистатической) системе, которая получается, если отбросить в (5) ускорения $\ddot{\mathbf{q}}_2$, принять $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_{20}$ ($\mathbf{q}_{20} = \mathbf{q}_2|_{t=0}$) и положить $\dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ везде, за исключением выражения

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta / \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v / (\varepsilon v^r) = \frac{\mathbf{b}_1^T \dot{\mathbf{q}}_1 / \varepsilon + \mathbf{b}_2^T \boldsymbol{\theta}}{v^r}. \quad (11)$$

(Если выражение $\mathbf{Q}|_{\varepsilon=0}$ зависит от $\boldsymbol{\theta}$, то его также следует оставить.)

Теорема 1. При выполнении условий теоремы А.Б. Васильевой о возможности построения асимптотических разложений решений систем с малым параметром при старших производных для достаточно малых ε решение $\mathbf{q}(t, \varepsilon)$, $\dot{\mathbf{q}}(t, \varepsilon)$ возмущенной системы (5), (6) и соответствующее решение $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(t)$, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t)$ невозмущенной системы с начальными условиями $\bar{\mathbf{q}}_1(0) = \mathbf{q}_{10}$, $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(0) = \dot{\mathbf{q}}_{10}$ ($\mathbf{q}_{10} = \mathbf{q}_1|_{t=0}$, $\dot{\mathbf{q}}_{10} = \dot{\mathbf{q}}_1|_{t=0}$), а также переменные $\boldsymbol{\theta}(t, \varepsilon)$ и $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1, t)$ возмущенной и невозмущенной систем (последние вычисляются из конечного уравнения, получаемого после отбрасывания в (5) ускорений $\ddot{\mathbf{q}}_2$) удовлетворяют оценкам

$$\|\mathbf{q}(t, \varepsilon) - \bar{\mathbf{q}}(t)\| = O(\varepsilon), \quad \|\dot{\mathbf{q}}(t, \varepsilon) - \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t)\| = O(\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq t';$$

$$\|\boldsymbol{\theta}(t, \varepsilon) - \boldsymbol{\theta}^0(t)\| = O(\varepsilon), \quad \Delta \leq t \leq t', \quad \Delta = O(-\varepsilon \ln \varepsilon).$$

В силу (11) связь $\dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{0}$, запрещающая изменение переменных $\mathbf{q}_2$, а также условие (8) непроскальзывания тел кинематической пары, в ситуации (9), как правило, не реализуются.

Уточнить решение невозмущенной системы можно с применением формализма Дирака для систем с вырожденными лагранжианами. Запишем (5) в виде

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}, \quad (12)$$

где вектор $\mathbf{F}$ правых частей не зависит от обобщенных ускорений.

При значении

$$\alpha = 0, \quad (13)$$

когда эффект упрощения сдвига тел кинематической пары пренебрежимо мал или прослойка в области их контакта отсутствует, решение возмущенной системы (5) ((12)) при $\varepsilon \rightarrow 0$ развивается (А.В. Влахова) вблизи многообразия, определяемого первичными связями Дирака

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}_2 - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}, \quad (14)$$

которые возникают между обобщенными координатами и импульсами

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{A}_{11}\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_{12}\dot{\mathbf{q}}_2, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{A}_{21}\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_{22}\dot{\mathbf{q}}_2 \quad (15)$$

системы после отбрасывания вектора $\dot{\mathbf{q}}_2$ малых обобщенных скоростей. Здесь

$$\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{n-m})^T; \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)^T, \mathbf{p}_1 = (p_1, \dots, p_m)^T, \mathbf{p}_2 = (p_{m+1}, \dots, p_n)^T, \\ p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i \quad (i = 1, \dots, n);$$

функция L введена в (2); матрицы $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{21}$ и $\mathbf{A}_{22}$ определены соответствующим (9) разбиением

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} m & n-m \\ n-m \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{12}^T \quad (16)$$

Уравнениями динамики системы со связями (14) в переменных Лагранжа служат

$$\mathbf{A}_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_{12}\ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{F}_1|_{\alpha=0}, \quad -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{F}_1|_{\alpha=0} + \mathbf{F}_2|_{\alpha=0} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

где $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ – правые части первых m и последних $n - m$ уравнений (12). Второе уравнение, не содержащее обобщенных ускорений, отвечает уравнению лагранжевых связей – условию $\dot{\Phi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{0}$ сохранения связей (14) на траекториях системы.

При $\alpha \neq 0$ в силу (1) и (4) элементы матрицы $\mathbf{M}$ из (12) – функции $\mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{q}}$, поскольку зависят от ζ и v^r . В настоящей работе показано, что, несмотря на это, приближенное решение рассматриваемой системы можно описывать системой вида (17):

$$\mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{M}_{12}\ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{F}_1, \quad -\mathbf{M}_{21}\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \quad (18)$$

для (модифицированных) первичных связей

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}_2 - \mathbf{M}_{21}\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}, \quad (19)$$

получаемых по аналогии с (14), (15) если (формально) считать ζ и v^r параметрами. Матрицы $\mathbf{M}_{11}$, $\mathbf{M}_{12}$, $\mathbf{M}_{21} = \mathbf{M}_{12}^T$ и $\mathbf{M}_{22}$ отвечают тому же, что и в (16), разбиению матрицы $\mathbf{M}$. При выполнении условий теоремы 1 переменная $\dot{\mathbf{q}}_2$ определяется из второго уравнения (18) приближенным равенством

$$\dot{\mathbf{q}}_2 = \dot{\mathbf{q}}_2^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1, t, \varepsilon) = \varepsilon \theta^0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1, t) + O(\varepsilon^2). \quad (20)$$

Решение $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(t, \varepsilon)$, $\dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(t, \varepsilon)$ модифицированной модели Дирака находится из системы, образованной первым уравнением (18) и равенством (20). Поскольку для построенной системы $\mathbf{q}_2$ медленно изменяется во времени ($\mathbf{q}_2 \neq \mathbf{q}_{20}$), ее порядок $n + m$ превышает порядок $2m$ невозмущенной системы, но остается меньше порядка $2n$ возмущенной системы (5) ((12)).

Рассогласование между решениями систем (5) ((12)) и (18) при $\varepsilon \rightarrow 0$ определяется начальными условиями, выбираемыми для последней модели.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 для достаточно малых ε решение $\mathbf{q}(t, \varepsilon)$, $\dot{\mathbf{q}}(t, \varepsilon)$ возмущенной системы (5) ((12)), (6) и решение $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(t, \varepsilon)$, $\dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(t, \varepsilon)$ системы (18) с начальными условиями

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}(0, \varepsilon) &= \mathbf{q}_0, \quad \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(0, \varepsilon) = \dot{\mathbf{q}}_{10} + \varepsilon \dot{\mathbf{q}}_1^{(1)}, \\ \dot{\mathbf{q}}_1^{(1)} &= \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_0) \int_0^\infty \left((\mathbf{F}_1 - \mathbf{M}_{12} \mathbf{Z}) \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_1=\dot{\mathbf{q}}_{10}, \\ \boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^0(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0)+\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \\ t=0, \varepsilon=0}} - \mathbf{F}_1 \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_1=\dot{\mathbf{q}}_{10}, \\ \boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^0(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0), \\ t=0, \varepsilon=0}} \right) d\tau, \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{H}^{-1} \left(-\mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \right), \quad \mathbf{H} = \mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\tau)$ – решение уравнения

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{d\tau} = \mathbf{Z} \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_1=\dot{\mathbf{q}}_{10}, \\ \boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^0(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0)+\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \\ t=0, \varepsilon=0}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}}(0) = \boldsymbol{\theta}_0 - \boldsymbol{\theta}^0(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_{10}, 0), \quad \boldsymbol{\theta}_0 = \dot{\mathbf{q}}_{20}/\varepsilon,$$

а также функция $\dot{\mathbf{q}}_2^*(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1, t, \varepsilon)$ из (20) удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}(t, \varepsilon) - \bar{\mathbf{q}}(t, \varepsilon)\| &= O(\varepsilon^2), \quad 0 \leq t \leq t'; \\ \|\dot{\mathbf{q}}_1(t, \varepsilon) - \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(t, \varepsilon)\| &= O(\varepsilon^2), \quad \|\dot{\mathbf{q}}_2(t, \varepsilon) - \dot{\mathbf{q}}_2^*\| = O(\varepsilon^2), \\ \Delta \leq t \leq t', \quad \Delta &= O(-\varepsilon \ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Решение $\bar{\mathbf{q}}(t, \varepsilon)$, $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(t, \varepsilon)$ системы (18) с начальными условиями

$$\mathbf{q}(0, \varepsilon) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}_1(0, \varepsilon) = \dot{\mathbf{q}}_{10}$$

и отвечающая ему функция $\dot{\mathbf{q}}_2^*(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1, t, \varepsilon)$ удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned}\|\mathbf{q}_1(t, \varepsilon) - \bar{\mathbf{q}}_1(t, \varepsilon)\| &= O(\varepsilon), \quad \|\dot{\mathbf{q}}_1(t, \varepsilon) - \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon), \\ \|\mathbf{q}_2(t, \varepsilon) - \bar{\mathbf{q}}_2(t, \varepsilon)\| &= O(\varepsilon^2), \quad 0 \leq t \leq t'; \\ \|\dot{\mathbf{q}}_2(t, \varepsilon) - \dot{\mathbf{q}}_2^*\| &= O(\varepsilon^2), \quad \Delta \leq t \leq t', \quad \Delta = O(-\varepsilon \ln \varepsilon).\end{aligned}$$

В разделе 1.4 рассмотрена задача о качении железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода – промежуточном зазоре между гребнями колес и боковыми гранями рельсов, контакт которых считается отсутствующим. Считается, что колеса не теряют сцепление с рельсами, то есть, как и в (1), взаимодействуют посредством микропроскальзывания, их отрыва друг от друга не происходит. Рассматривая контакт колес и рельсов через элементы прослойки (ими могут быть, в том числе, частицы песка, который насыпают на рельсы для предотвращения скольжения колес), ограничимся малыми значениями $\mu = O(\varepsilon)$ (см. (7)), тогда амплитуды поперечных и угловых движений пары невелики, и, как и в случае (13), для моделирования ее динамики применим подход Дирака.

Показано, что наличие прослойки влияет на быстрое изменение контактных сил (моментов) до значений, уравнивающих внешние возмущающие силы (моменты) соответственно, увеличение α делает этот процесс менее интенсивным. Учет микропроскальзываний колес относительно рельсов в рамках подхода Дирака позволяет описать поперечные колебания пары вблизи средней линии пути с нарастающей (в пределах зоны свободного хода) амплитудой, не учитываемые моделями с условиями непроскальзывания. На границе зоны свободного хода эти колебания сдерживаются ребордами колес. Построенная для случая пренебрежимо малых внешних возмущений «промежуточная» модель вакономной механики описывает быстрое изменение реакций связей, запрещающих проскальзывание колес, от начальных значений до значений в ε -окрестности реакций неголономной модели.

Как указывалось выше, то, как будет происходить смещение тел кинематической пары через элементы прослойки, в существенной степени зависит от структуры расположения этих элементов вдоль области контакта. Для рассматриваемой в первой главе постановки задачи условие сближения элементов прослойки определяется критерием минимума изменения потенциальной энергии тел, сформулированным для внешней задачи анализа частей области контакта с элементами прослойки. Для отыскания других причин изменения структур прослойки следует обратиться к анализу внутренней задачи более мелкого

(четвертого) масштабного уровня, в рамках которой исследуется взаимодействие соседних элементов (блоков элементов), определяемое напряженно-деформированным состоянием в их окрестности.

Вторая глава, посвященная внутренней задаче исследования закономерностей движения шаровидных твердых элементов промежуточной прослойки между контактирующими телами (четвертый масштабный уровень), состоит из разделов 2.1–2.5. Как и в работах Р.В. Гольдштейна и Н.М. Осипенко, где проводилось ее аналитическое и экспериментальное изучение, рассматривались два соседних элемента прослойки. Если предположить, что тела обладают схожими свойствами деформирования, а элементы прослойки – одинаковые и находятся в условиях близких силовых воздействий, то от рассматриваемой задачи можно перейти к задаче о динамике двух шариков 1 и 2 радиуса R в фиксированном промежутке между твердой горизонтальной подвижной плитой, к которой приложена нормальная нагрузка $2P$, и деформируемой (упругой) неподвижной подстилающей поверхностью (рис. 1). Центры O_1 и O_2 шариков расположены на конечном расстоянии $L \geq 2R$ друг от друга. Под действием нагрузок P шарики вдавливаются в подстилающую поверхность и начинают взаимодействовать с малыми силами F_{12} и $F_{21} = -F_{12}$, возникающими из-за того, что поля вертикальных смещений точек подстилающей поверхности, симметричные для одного шарика, накладываются друг на друга, и области контакта шариков и подстилающей поверхности перекашиваются во внешнюю сторону шариков.

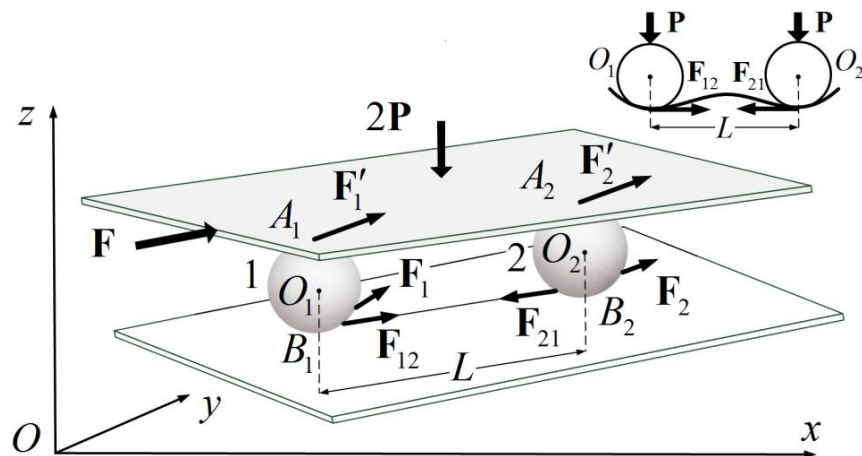


Рис. 1. Модель взаимодействия тел и элементов прослойки

Выражение для проекции силы $\mathbf{F}_{12}$ на линию O_1O_2 имеет вид (Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко)

$$F_{12} = a/L^2, \quad a = (1 - \nu^2)P^2/(\pi E) > 0,$$

где E и ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона подстилающей поверхности, $P = |\mathbf{P}|$ - нормальная реакция. При статической нагрузке наличие сил $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$, как правило, не вынуждает шарики перемещаться. Однако, если приложить к плите силу $\mathbf{F}$ вдоль заданного направления Oy по касательной к ее плоскости, то при достаточно плавном ее изменении шарики начинают смещаться не только в сторону движения плиты, но и навстречу друг другу вдоль линии O_1O_2 .

В разделе 2.1 дано объяснение причин сближения шариков, предложенное Р.В. Гольдштейном и Н.М. Осипенко. Поскольку скорость сближения шариков мала по сравнению со скоростью движения плиты, можно заменить составляющие сил сухого трения при контакте шариков и подстилающей поверхности вдоль линии O_1O_2 вязким трением. Уравнение равновесия этих составляющих и сил взаимодействия шариков после интегрирования дает аналитическую формулу, связывающую L и путь $|Y|$, пройденный плитой:

$$L = \left(L^3(0) - \frac{3a}{kP} |Y| \right)^{1/3}, \quad (21)$$

где k - коэффициент трения между шариками и подстилающей поверхностью. При выводе (21) контакт шариков с плитой не принимался во внимание и считалось, что линии O_1O_2 и Oy ортогональны. Эксперименты показали, что полученная формула пригодна и для случая произвольного расположения шариков.

В разделе 2.2 ставится задача для более широкого класса движений: взаимодействие шариков с плитой (в точках A_1 и A_2) считается происходящим в режиме микропроскальзывания, а взаимодействие шариков с подстилающей поверхностью (в точках B_1 и B_2) - в режиме микропроскальзывания или скольжения (как и в первой главе, контакт сводится к точечному).

В разделах 2.3 и 2.4 анализируются системы дифференциальных уравнений с иерархической структурой малых параметров при производных, отражающих малость масс шариков по сравнению с массой плиты (с учетом нагрузки), малость моментов инерции шариков, малость их деформаций при микропроскальзывании,

малость отношения составляющих скоростей их центров масс поперек (ось Ox) и вдоль направления Oy движения плиты. Вырожденная система более низкого порядка, отвечающая нулевым значениям ускорений точек A_1 и A_2 и нулевым значениям составляющих ускорений точек O_1 и O_2 в направлении Ox , описывает динамику системы по окончании быстрых процессов, в ходе которых составляющие сил F_1 и F_2 взаимодействия шариков с подстилающей поверхностью в направлении Ox (рис. 1) уравниваются соответствующими составляющими сил F_{12} и F_{21} их притяжения друг к другу. При помощи теории А.Н. Тихонова-А.Б. Васильевой показано, что достаточные условия затухания этих быстрых процессов служат условиями реализации первичных связей Дирака вида (14), обусловленных вырождением лагранжиана системы, и, совместно с этим, - условиями реализации связей, запрещающих проскальзывание шариков относительно плиты в направлении Ox . Использование формализма Дирака позволяет формировать модели, которые, в отличие от модели, полностью запрещающей проскальзывание шариков в точках A_1 и A_2 , являются более точными и не имеют ограниченного применения. Они позволяют установить, что для рассматриваемых условий движения системы шары сближаются. Получены аналитические формулы, описывающие зависимость расстояния L между их центрами от пути, пройденного точкой B_1 или B_2 в направлении Oy (для случая скольжения шариков относительно подстилающей поверхности) или от пути, пройденного плитой либо центром одного из шариков в направлении Oy (для случая микропроскальзывания шариков в точках B_1 и B_2).

В разделе 2.5 проводится численное моделирование рассматриваемых в работе исходных систем уравнений и их асимптотических моделей для случая, когда плита совершает плавное возвратно-поступательное движение под действием заданной периодической силы, и сравнение его результатов с результатами экспериментов Р.В. Гольдштейна и Н.М. Осипенко. Моделирование показывает, что поведение переменных исходных систем и асимптотических моделей отвечает теоретическим оценкам точности и при конечных значениях малых параметров. Ниже приведены выводы для случая микропроскальзывания шариков относительно плиты и скольжения относительно подстилающей поверхности. На рис 2 показаны результаты экспериментов для начальных значений угла α между линией O_1O_2 и осью Ox : $\alpha(0) = 0$ ($\square$), $\alpha(0) = \pi/4$ ($\circ$), $\alpha(0) = \pi/2$ ($\times$), и

соответствующие численные зависимости $L(|Y|)$. Сплошные кривые отвечают решениям исходной (возмущенной по малым параметрам) системы для тех же $\alpha(0)$, пунктирные кривые – соответствующим решениям вырожденной системы первой очереди, получаемой в пренебрежении ускорениями точек A_1 и A_2 .

На рис. 3 представлены те же, что на рис. 2, экспериментальные данные и зависимости $L(|Y|)$, полученные при анализе вырожденной системы второй очереди, которая отвечает пренебрежению составляющими ускорений точек O_1 и O_2 в направлении Ox . Сплошные кривые построены для аналитических формул, связывающих L и путь, пройденный точкой B_1 или B_2 в направлении Oy , пунктирная кривая – для аналитической формулы (21).

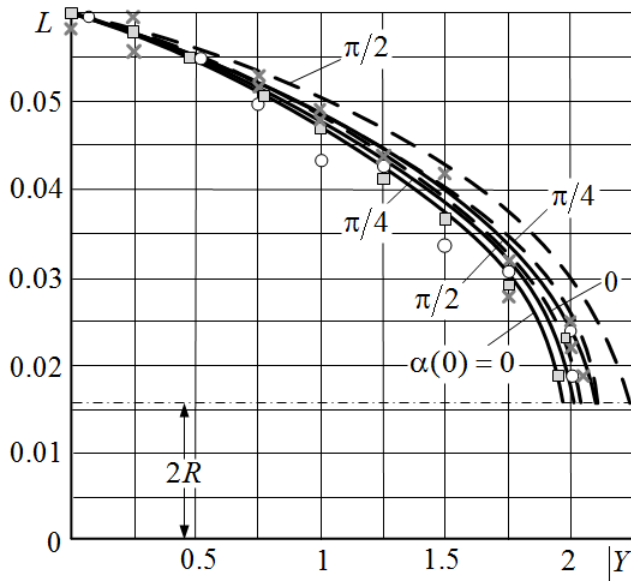


Рис. 2. Результаты экспериментов и зависимости $L(|Y|)$ для системы, получаемой пренебрежением ускорениями точек A_1 и A_2

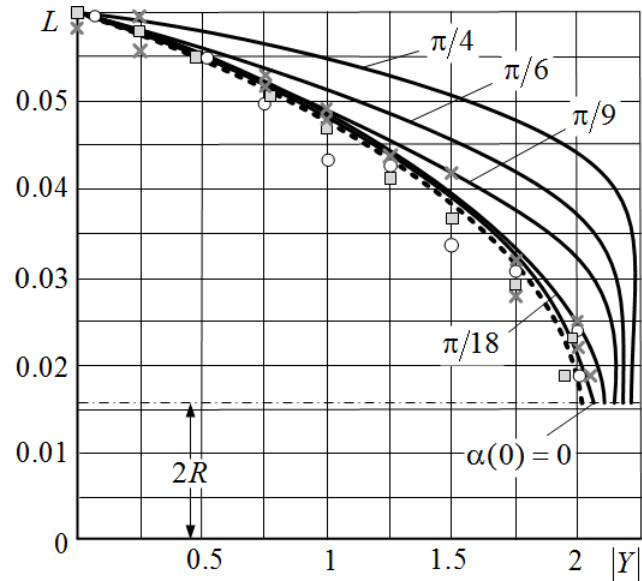


Рис. 3. Результаты экспериментов и зависимости $L(|Y|)$ для системы, получаемой пренебрежением составляющими ускорений точек O_1 и O_2 в направлении Ox

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Предложены методы построения математических моделей динамики систем, которые содержат тела, взаимодействующие с малыми относительными проскальзываниями и хрупким разрушением, путем предельного перехода к бесконечной жесткости касательных составляющих контактных сил (по направлению проскальзывания тел). Разделены случаи, когда предельный переход

приводит систему к аналогу «промежуточной» модели вакономной механики или к (модифицированной) модели с первичными связями Дирака, возникающими из-за вырождения лагранжиана системы, в рамках которой проскальзывания тел сохраняются. Для второго случая определено рассогласование между решениями исходной и предельной систем.

2. Показано, что при движении железнодорожной колесной пары в зоне свободного хода наличие промежуточной прослойки между колесами и рельсами определяет быстрый процесс перехода контактных сил (моментов) к значениям вблизи тех, которые уравнивают внешние возмущения (при упрощении смещения колес и рельсов через элементы прослойки этот процесс является менее интенсивным). Учет микропроскальзываний колес относительно рельсов в рамках подхода Дирака позволяет описать поперечные колебания пары вблизи средней линии пути с нарастающей амплитудой, не учитываемые моделями с условиями непроскальзывания.

3. Найдены достаточные условия, которые позволяют пренебречь ускорениями точек контакта элементов прослойки с плитой и составляющими ускорений центров масс элементов прослойки в направлении, ортогональном ее смещению, то есть дают возможность моделировать динамику системы в рамках формализма Дирака для систем с вырожденными лагранжианами. Показано, что эти достаточные условия служат условиями реализации связей, запрещающих проскальзывания элементов прослойки относительно плиты в направлении, ортогональном ее смещению. Такой подход позволяет формировать модели более высокой точности по сравнению с моделью, запрещающей проскальзывание элементов прослойки относительно плиты.

4. Установлено, что для рассматриваемых условий движения системы элементы прослойки сближаются. Получены аналитические формулы, описывающие изменение расстояния между их центрами масс в зависимости от пути, пройденного плитой или центром масс одного из элементов в направлении ее смещения (для случая движения элементов прослойки в режиме микропроскальзывания относительно подстилающей поверхности) или от пути, пройденного точкой контакта элемента прослойки с подстилающей поверхностью в направлении смещения плиты (для случая, когда элементы прослойки скользят относительно подстилающей поверхности).

Публикации по теме диссертации

По результатам диссертации опубликованы следующие статьи в рецензируемых журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук:

1. *Влахова А.В., Макиева Э.И.* Реализация связей в задачах динамики систем с проскальзыванием и разрушением // Докл. Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2026. Т. 528. № 1. С. 60-74. (Импакт-фактор 0,500 (РИНЦ), EDN: MBXCGL, 1,03 п.л. / авторский вклад определен). DOI: 10.7868/S3034504926010084

2. *Влахова А.В., Макиева Э.И.* Моделирование динамики элементов промежуточного слоя между контактирующими телами // Изв. РАН. МТТ. 2026. № 1. С. 95–123. (Импакт-фактор 0,856 (РИНЦ), EDN: GYFQXH, 1,21 п.л. / авторский вклад определен). DOI: 10.31857/S1026351926010051

3. *Влахова А.В., Макиева Э.И.* Моделирование динамики в промежуточном слое между контактирующими телами // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2026. № 2. С. 46–57. (Импакт-фактор 0,548 (РИНЦ), EDN: DXJHMT, 0,62 п.л. / авторский вклад определен). DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-67-2-6