

ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ
на диссертационную работу Антипова Виктора Алексеевича
«О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый актив»,
представленную на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук по специальности
1.1.4 теория вероятностей и математическая статистика

Диссертационная работа В. А. Антипова посвящена, главным образом, изучению вероятности выхода обобщённого процесса Орнштейна–Уленбека (ООУ) за положительную полуось в зависимости от начальной точки. В стандартной символике ООУ задаётся как решение $X = X^u$ линейного стохастического уравнения

$$dX = X_-dR + dP, \quad X_0 = u > 0,$$

где R и P — независимые процессы Леви. Предметом интереса является вероятность выхода Ψ до момента T (в актуарной терминологии — вероятность разорения). Она задаётся формулой $\Psi(u, T) := \mathbf{P}(\tau^u < T)$, где $\tau^u := \inf\{t > 0: X^u \leq 0\}$; вероятность невыхода (вероятность выживания) обозначается $\Phi(u, T) = 1 - \Psi(u, T)$. Вероятности разорения и выживания на бесконечном интервале обозначаются $\Psi(u)$ и $\Phi(u)$.

За этой простой формулировкой (её можно обобщить и рассматривать уравнение, в котором пара (R, P) есть процесс Леви или даже семимартигал) скрывается большая математическая история и важные практические приложения. Самые первые задачи теории случайных процессов с непрерывным временем укладываются в эту схему. Луи Башелье в своей диссертации «Теория спекуляций» (1900) нашёл функцию $\Psi(u, T)$ для случая, когда R есть винеровский процесс, а $P = 0$. Филипп Лундберг, также в диссертации (1903), нашёл явный вид $\Psi(u)$, когда $R = 0$, а P есть составной процесс Пуассона со сносом и экспоненциально распределёнными скачками (термин процесс Пуассона появился именно в этой работе). В 30-е годы Харальд Крамер понял важность работ Лундберга и распространил теорию разорения (или теорию коллективного риска) на случай, когда функция распределения скачков F процесса P более общая. Результат Крамера оказался оптимистичным: в рассматриваемых моделях вероятность разорения убывает экспоненциально быстро с ростом начального капитала.

До 90-х годов практически во всех исследованиях процесс R не имел гауссовской компоненты. Гауссовская компонента у процесса P (диффузионная аппроксимация малых скачков) также встречалась очень редко. Этому есть очень простое объяснение. Процесс R описывает инвестиции в рисковый актив, а такая деятельность для страховых компаний (финансовые спекуляции) была законодательно запрещена. Но к 90-ым годам экономические реалии и развитие финансовой математики привели к ослаблению законодательных ограничений. Теория разорения с рисковыми инвестициями стали активно развиваться и её задачи являются по-прежнему актуальными, а многие из них до сих пор не имеют удовлетворительного решения. Одним из принципиальных выводов этой теории является количественное подтверждение тезиса, что рисковые инвестиции могут быть опасными: уже в модели Лундберга с инвестициями в рисковый актив, цена которого описывается геометрическим броуновским движением (т.е. R есть винеровский процесс со сносом), вероятность разорения убывает как степенная функция, а при высокой волатильности разорение оказывается неизбежным. Немедленно возникает вопрос: как устроена вероятность разорения в модели Крамера–Лундберга с рисковыми инвестициями.

До работы В. А. Антипова ответ на него был дан за счёт использования довольно тонких и трудоёмких методов. Один из подходов основывается на результатах асимптотической теории дифференциальных уравнений, но их получение требует доказательства априорной гладкости функции разорения, которое оказалось весьма непростым и требовало весьма ограничительных условий. Альтернативный подход основывается на неявной теории восстановления Кестена–Голди. Он был предложен Жостейном Паульсеном в его пионерской работе 1973 года. Теория Кестена–Голди сама по себе претерпела существенное развитие, которое нашло своё отражение в сравнительно недавней монографии Бурачевского–Дамек–Микоша. Итак, результаты получены, но как их излагать студентам-актуариям? Используемые математические результаты явно выходят за рамки университетской программы. Ответ даётся в **первой главе** диссертации. Оказывается, можно изучать интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ), которому удовлетворяет вероятность разорения, как самостоятельный объект, сводя его к интегральному уравнению (ИУ). Используя теорему о неподвижной точке, доказывается теорема о существовании решения ИУ, а затем найденное решение отождествляется с функцией разорения. Использованный метод можно считать прорывным.

Он позволяет получить и гладкость вероятности разорения, и её асимптотическое поведение при больших значениях начального капитала совершенно элементарными рассуждениями, причём всего лишь при условии непрерывности функции распределения скачков. Важно отметить, что это доказательство вполне доступно студентам магистерских программ. Стоит добавить, что результаты первой главы подкреплены симуляциями, которые показали, что константы, фигурирующие в асимптотике, могут быть получены численными методами и, значит, результаты могут быть использованы на практике.

К сожалению, метод интегральных уравнений работает только для моделей с односторонними скачками, то есть для модели страхования жизни и для модели аннуитетных платежей. Для моделей с двусторонними скачками требуются другие методы. Такая модель была рассмотрена В. А. Антиповым во **второй главе** диссертации. Используя результаты о гладкости вероятности разорения, исходное ИДУ для специального класса функций распределения сводится к ОДУ высокого порядка, которое, в свою очередь, может быть трансформировано в уравнение второго порядка для преобразования Лапласа с полиномиальными коэффициентами. Применяя метод Фробениуса, находится асимптотика преобразования Лапласа в нуле, из которой при помощи тауберовой теоремы получается асимптотика вероятности разорения в бесконечности.

Третья глава посвящена доказательству гладкости функции разорения для модели, в которой коэффициенты процесса R модулируются марковским процессом с конечным числом состояний. Приводится и вывод соответствующего ИДУ. Такие модели важны для актуарных задач с дальним горизонтом, когда в течение планируемого периода экономическая и финансовая ситуация может меняться. Рассуждения здесь следуют уже отработанному шаблону, а цель результата состоит в подготовке платформы для дальнейших исследований. Необходимо отметить, что в литературе имеются результаты для моделей такого типа, полученные методами теории Кестена–Голди, которая даёт асимптотику, но не даёт информации о соответствующих коэффициентах.

Наконец, в **четвёртой главе** диссертации, технически весьма сложной, изучается общая модель Орнштейна–Уленбека на конечном временном интервале. Получено интегро-дифференциальное уравнение для вероятности разорения, понимаемое в вязкостном смысле. Преиму-

щество такого подхода состоит в том, что его вывод очень прост: формула Ито—Мейера применяется к гладким тестовым функциям. Однако, доказательство единственности краевой задачи, которая и является основным результатом этой главы, использует весьма сложный аппарат теории вязкостных решений для уравнений со скачками. Кроме того, доказана непрерывность вероятности разорения как функции начального капитала и времени.

Хочу подчеркнуть, что результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично автором, являются новыми и обоснованы в виде строгих математических доказательств. В своём исследовании В. А. Антипов продемонстрировал высокий уровень научной зрелости, глубокое понимание проблематики теории разорения с инвестициями, умение работать с современными методами теории случайных процессов и дифференциальных уравнений. Также отмечу владение В. А. Антипова методами численного моделирования, которое позволило проиллюстрировать полученные результаты об асимптотике вероятности разорения в модели с инвестициями.

Основные идеи и положения изложены в 4 статьях (одна без соавторов) в ведущих рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности 1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика. Все перечисленные публикации соответствуют теме диссертации и полностью отражают ее содержание. В автореферате и диссертации для каждой работы с соавторами оценен личный вклад в публикацию В. А. Антипова. По форме и содержанию автореферат соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» и полностью отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа В. А. Антипова является законченным научным исследованием на актуальную тему и содержит новые интересные результаты, научная достоверность которых не вызывает сомнения. Результаты диссертации докладывались на многочисленных конференциях и семинарах, список которых приведен в автореферате и диссертации, среди которых, например, 16-й коллоквиум Башелье (Метабье, Франция) и семинар «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании» (руководители Т.А. Белкина, Э.Л. Пресман, А.Д. Сластников). Апробация диссертации проходила на Большом семинаре кафедры теории вероятностей (руководитель академик А.Н. Ширяев).

Считаю, что диссертационная работа В. А. Антипова «О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый актив», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика, полностью соответствует требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» и рекомендуется к защите в диссертационном совете МГУ.011.3.

Рекомендую принять диссертацию к защите в диссертационном совете МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика.

Научный руководитель
профессор кафедры эконометрики и математических методов экономики,
Московская школа экономики МГУ имени М.В. Ломоносова
(119991, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, д.1, стр. 61,
тел. +7(495) 5105267, email: mail@mse-msu.ru)
доктор физико-математических наук, профессор

Кабанов Юрий Михайлович

Подпись профессора
кафедры эконометрики и математических методов экономики,
доктора физико-математических наук,
профессора Ю.М. Кабанова удостоверяю.
Директор Московской школы экономики МГУ имени М.В. Ломоносова,
академик РАН, доктор экономических наук, профессор

Некипелов Александр Дмитриевич