ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Никулина Михаила Александровича
на тему: «Некоторые свойства квантовых и классических
бильярдов на софокусных столах»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Диссертационная работа Никулина Михаила Александровича посвящена популярной в настоящее время и стремительно развивающейся тематике исследования математических бильярдов. Для привычных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, к которым относится и классический плоский бильярд, интегрируемость означает существование некоторого закона сохранения наряду с законом сохранения энергии, причём эти два закона должны быть независимы. Это достаточно сильное условие, значительно сужающее класс подобных систем. В фундаментальных работах Дж.Биркгофа было показано, что плоский математический бильярд, ограниченный эллипсом, с абсолютно упругим отражением от границы и свободным движением в промежутках между ударами является интегрируемым. Была выдвинута знаменитая гипотеза: плоский выпуклый бильярд, ограниченный гладким контуром, допускает интегрируемость лишь в случае эллипса. Локально эта гипотеза доказана В.Ю.Калошиным и А.Соррентино в 2018 году: выпуклое возмущение границы эллиптического бильярда сохраняет интегрируемость тогда и только тогда, когда граница остаётся эллипсом.

Давно известно, однако, что интегрируемостью обладают и более сложные бильярды, в частности, бильярды в областях, ограниченных дугами эллипсов и гипербол с общими фокусами. Топологическая структура таких систем исследуется в рамках теории классификации интегрируемых гамильтоновых систем А.Т.Фоменко и Х.Цишанга. Изучение соответствующих слоений Лиувилля для плоских бильярдов было начато В.Драговичем и М.Раднович, а затем систематически развито В.В.Ведюшкиной (Фокичевой) и А.Т.Фоменко. Если отказаться от возмущений границы и вместо этого возмущать динамику, открывается целое многообразие интегрируемых конструкций. Например, добавление к гамильтониану свободной частицы потенциала Гука или воздействие магнитного поля при определённых условиях сохраняет интегрируемость. Именно этому направлению посвящена, в частности, недавняя диссертация С.Е.Пустовойтова, в которой исследуются слоения Лиувилля интегрируемых возмущений классических и топологических бильярдов потенциалами и магнитным полем. Иной подход к возмущению динамики предложен М.А.Никулиным в его диссертационной работе: рассматривается бильярд в области, разделённой дугами тех же софокусных квадрик на несколько частей, каждой из которых приписан собственный показатель «оптической плотности», а на границах раздела областей движение частицы подчиняется косинусному закону преломления. Такая система оказывается интегрируемой и это нетривиальный факт, поскольку аналогичная система со стандартным законом Снеллиуса интегрируемости не имеет.

Таким образом, диссертационная работа М. А. Никулина охватывает два принципиально разных круга задач. Первый — квантовый: исследование асимптотического поведения уровней энергии оператора Шрёдингера в двух семействах плоских областей, ограниченных дугами гипербол и внешнего эллипса, при стремлении фокального расстояния к нулю, когда предельной областью является круговой сектор. Второй — классический: доказательство интегрируемости новой бильярдной системы с косинусным законом преломления и анализ слоения её изоэнергетического многообразия на поверхности постоянного уровня дополнительного интеграла для двух типов конфигурации разбивающих квадрик.

Текст диссертации изложен на 137 страницах и содержит введение, пять глав, заключение и список литературы из 34 наименований, из которых 4 работы автора по теме диссертации.

Во **введении** сформулированы цели работы, дан обзор исторического контекста, включая работы Биркгофа, Фоменко, Козлова, Драговича, Ведюшкиной и других, кратко изложены основные результаты и положения, выносимые на защиту. Условное деление диссертации на квантовую и классическую части чётко обозначено уже во введении.

В **первой главе** собраны необходимые предварительные сведения для квантовой части. Приводится теория функций Бесселя, угловое и радиальное уравнения Матьё, возникающие при разделении переменных уравнения

Гельмгольца в эллиптических координатах, элементы теорий Флоке и Штурма. Отдельный раздел посвящён квантовым бильярдам в круге, кольце и секторе — предельным областям, к которым апеллируют задачи следующей главы. Оригинальный результат диссертанта, завершающий эту главу, — теорема об асимптотике уровней энергии для «эллиптического кольца», выражающая их через нули функций Бесселя в явном аналитическом виде.

Вторая глава является центральной в квантовой части. В ней рассматривается свободная квантовая частица с потенциалом «бесконечной ямы» в двух типах областей: симметричной A_δ и несимметричной B_δ (симметрия понимается относительно оси абсцисс). Обе области при стремлении фокального параметра δ к нулю стягиваются к круговому сектору. Диссертантом доказаны теоремы 5 и 6, дающие явные аналитические формулы для собственных значений оператора Лапласа с точностью до второго порядка по δ: коэффициент при нулевом порядке совпадает со спектром в предельном секторе, а поправочный коэффициент при δ^2 выражается в терминах производных функций Бесселя и их нулей. Существенно, что наличие угловых точек на границе области делает задачу нахождения этих формул нетривиальной в сравнении с классическим случаем эллипса. Кроме того, в завершение главы вычислен спектр наблюдаемой, соответствующей дополнительному интегралу классической системы.

В **третьей главе** излагается конструкция интегрируемой классической системы. Внутренность эллипса Ω разбивается дугами одного семейства квадрик на области Ω_i с показателями преломления n_i. На общей границе Ω_i и Ω_j частица подчиняется закону (*): $n_i cos\theta_i = n_j cos\theta_j$, а при превышении критического угла происходит полное внутреннее отражение. Теорема 9 устанавливает интегрируемость системы и даёт явную формулу дополнительного интеграла Ξ через параметры каустики λ_j разделяющих квадрик и показатели n_j. Принципиально, что в случае попарно непересекающихся разделяющих квадрик (задача А) интеграл является однозначной кусочно-гладкой функцией на фазовом пространстве, тогда как в случае пересекающихся квадрик (задача Б) в точках их пересечения возникают ветвления и интеграл принимает значения в окружности.

Четвёртая глава посвящена задаче А для наиболее показательного случая: область состоит из двух частей Ω_{in} и Ω_{out}, разделённых одним эллипсом Q_{λ_1}. Значению Ξ ставится в соответствие точка на прямой L в плоскости с координатами $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$, что сводит топологический вопрос к анализу взаимного расположения L и специальной структурной диаграммы. Теорема 10 описывает 12 типов регулярных поверхностей уровня: в зависимости от области на диаграмме это сферы с пятью ручками, два дизъюнктных тора или один тор. Примечательно, что уже в простейшей конфигурации возникают поверхности высокого рода, что придаёт слоению весьма нетривиальный характер. Описаны также 13 типов бифуркаций, включая «двойные перестройки», соответствующие пересечению L с точками (b^2, a^2) и (a^2, b^2), с иллюстрациями для нетривиальных случаев.

Пятая глава посвящена задаче Б: область Ω разбита на фрагменты Ω_1 и Ω_2 таким образом, что границы раздела пересекаются, и дополнительный интеграл Ξ ветвится. Значению интеграла сопоставляется точка $P(\Xi) = (\rho_1^2, \rho_2^2)$ на прямой L в плоскости, а выделенная точка L_1 на этой прямой разделяет её на два режима, существенно различающихся по характеру слоения.

В первом режиме («ветвящийся интеграл») автором построена бифуркационная диаграмма, на которой фрагмент прямой L выглядит как горизонтальная прямая. Ключевое наблюдение состоит в том, что для любой фиксированной тройки параметров (r_1, n_1, n_2) точки $P(\Xi_m)$ и $P(\Xi_{m+1})$, отвечающие двум последовательным фрагментам бильярдной траектории T_m и T_{m+1}, соединяются вектором (1, 0), то есть при каждом пересечении дуги EF значение Ξ сдвигается на фиксированную величину. Бифуркационная диаграмма разбита тремя семействами особых прямых на области C_k и C_k'; регулярная поверхность уровня постоянного значения интеграла S_Ξ склеивается из вкладов всех областей C_k одного и того же индекса k, лежащих на одной горизонтали. Доказаны теоремы 11 и 12: при $n_1^2 < n_2^2$ поверхность S_Ξ является сферой с 2m ручками, если P(Ξ) ∈ C_m, и сферой с 2m − 1 ручками, если Р(Ξ) ∈ C'_m; при $n_1^2 > n_2^2$ число ручек увеличивается на единицу в каждом случае.

Во втором режиме («однозначный интеграл») доказана теорема 13: поверхность уровня Ξ = const есть либо сфера с двумя ручками, либо тор в зависимости от взаимного расположения параметров $\rho_1^2, \quad \rho_2^2, \quad r_1^2, \quad r_2^2$. В завершение главы приведено описание особых поверхностей для обоих режимов с иллюстрациями ключевых перестроек.

В **заключении** автор подводит итоги проведённой работы и намечает дальнейшие пути развития тематики диссертации.

Стоит также отметить, что предложенная диссертантом техника получения асимптотических формул для уровней энергии не ограничивается вторым порядком по δ: как указывается в заключении, метод в принципе позволяет продолжить разложение на сколь угодно высокие порядки, и ожидается, что все коэффициенты допускают аналитическое выражение в терминах специальных функций. Другим примечательным итогом является то, что регулярные поверхности уровня дополнительного интеграла не ограничиваются торами: уже в простейшей конфигурации задачи А возникают сферы с пятью ручками, а в задаче Б — сферы с произвольно большим числом ручек. Это обнаруживает нетривиальное богатство топологии слоений для бильярдных систем с косинусным законом преломления и открывает возможности для дальнейшего исследования.

Работа М. А. Никулина выполнена на высоком математическом уровне. Квантовая и классическая составляющие потребовали не только освоения существенно различного аппарата (теории специальных функций и краевых задач в первом случае и методов топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем — во втором), но и практических навыков применения специальных методов и проведения сложных технических вычислений. Все результаты диссертационного исследования являются новыми, оригинальными и опубликованы в журналах, индексируемых WoS и Scopus или входящих в список научных журналов, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ, а также прошли апробацию на различных российских и международных конференциях и научных семинарах.

Задачи, поставленные в рецензируемой работе, весьма нетривиальны. Полученные результаты, а также лежащие в основе методы, могут быть интересны специалистам в области исследований интегрируемых систем и математических бильярдов, а также классической механики и математической физики. Теоремы доказаны строго, с использованием многочисленных иллюстраций. Это позволяет наглядно понять идеи доказательств и увидеть возникающие эффекты. Текст диссертации хорошо проработан, содержит незначительные опечатки, которые не мешают пониманию. Среди замечаний можно отметить следующие:

1. Функция Λ (параметр касательной квадрики) полностью определена в разделе 3.1 главы 3. В последующих главах функция Λ определена повторно. Следует выделить определение функции Λ в формулу в разделе 3.1 и разместить ссылки к ней в главах 4 и 5.
2. Название второй главы («Асимптотика собственных значений») не охватывает весь её материал: завершающий раздел «Постоянная наблюдаемая величина» к асимптотике отношения не имеет. Возможно, следует перенести данный раздел в первую главу.
3. В заголовке подраздела 2.2.2.2, посвящённого особым случаям несимметричной области B_δ, порядок перечисления противоположен порядку, в котором эти случаи разбираются в тексте.
4. В четвёртой главе одновременно используются обозначения Ω и $\widetilde{\Omega}$. Различить эти обозначения при беглом чтении или на некоторых рисунках (например, 4.12) затруднительно. Было бы удобнее обозначить одно из семейств областей другой буквой, например W.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Никулин Михаил Александрович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой фундаментальной математики
факультета информатики, математики и компьютерных наук
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”», Нижегородский филиал

ПОЧИНКА Ольга Витальевна

14 мая 2026 г.

Контактные данные:
тел.: , e-mail:
Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
01.01.02 (дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление)

Адрес места работы:
603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12,
НИУ ВШЭ – Нижний Новгород,
факультет информатики, математики и компьютерных наук
Тел.: ; e-mail:

Подпись сотрудника
НИУ ВШЭ О.В. Починки удостоверяю: