

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Степанянц Петр Суренович

**Орторекурсивные разложения по функциональным
системам специального вида**

Специальность

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Диссертация подготовлена на кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Лукашенко Тарас Павлович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Виноградов Олег Леонидович**
доктор физико-математических наук, доцент,
Санкт-Петербургский государственный университет, профессор кафедры математического анализа математико-механического факультета

Шейпак Игорь Анатольевич
доктор физико-математических наук, доцент,
МГУ имени М.В. Ломоносова, профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета

Никитин Алексей Антонович
кандидат физико-математических наук, доцент,
МГУ имени М.В. Ломоносова, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики

Защита диссертации состоится «25» сентября 2026 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 1624.

E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/4021>

Автореферат разослан « » августа 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

Е.Д. Алферова

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. Проблема представления функций в виде разложений по специальным системам является фундаментальным направлением математического анализа. Истоки данного вопроса восходят к работе Б. Тейлора 1715 года¹, заложившей основы представления функций суммами и рядами по многочленам. Качественный скачок произошёл в начале XIX века, когда Ж.-Б.Ж. Фурье применил тригонометрическую систему для решения уравнения теплопроводности, что положило начало теории ортогональных разложений². Дальнейшее развитие теории потребовало расширения классов приближаемых функций и исследования сходимости рядов. При этом было обнаружено, что для частичных сумм тригонометрического ряда Фурье разрывных функций возникает явление Гиббса, выражающееся в колебаниях в окрестностях точек разрыва³.

Возникновение теории гильбертовых пространств в начале XX века создало теоретическую основу для обобщения понятия рядов Фурье⁴. В рамках этого подхода возникли ортогональные ряды Фурье по произвольным ортонормированным системам в пространстве функций, интегрируемых с квадратом на заданном отрезке. Знаковым результатом стало построение А. Хааром⁵ в 1910 году ортонормированного базиса в пространстве $L_2[0; 1]$, состоящего из кусочно-постоянных функций. Система функций, предложенная Хааром и впоследствии названная его именем, положила начало целому ряду связанных с ней исследований. Параллельно развивалась теория банаховых пространств. В 1910 году Ф. Рисс⁶ формализовал пространства L_p , доказав их полноту, а в 1922 году С. Банах⁷ сформулировал общее определение полных нормированных пространств.

Появление вычислительной техники и информационных технологий во второй половине XX века способствовало развитию гармонического анализа. Существенным достижением стала реализация быстрого преобразования Фурье в 1965 году⁸. Однако у классической тригонометрической системы имеются особенности, проявляющиеся в явлении Гиббса и отсут-

¹Taylor B. Methodus Incrementorum Directa et Inversa // Impensis Gulielmi Innys, Londini — 1715.

²Fourier J.-B.J. Memoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides // Nouveau Bulletin des Sciences par la Société Philomathique de Paris. — 1808. — Vol. 1, No. 6. — P. 112–116.

³Gibbs J. W. Fourier's Series // Nature. — 1899. — Vol. 59, No. 1539. — P. 606.

⁴Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen // B.G. Teubner, Leipzig. — 1912.

⁵Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Mathematische Annalen. — 1910. — Vol. 69, No. 3. — P. 331–371.

⁶Riesz F. Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen // Mathematische Annalen. — 1910. — Vol. 69. — P. 449–497.

⁷Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales // Fundamenta Mathematicae. — 1922. — Vol. 3, No. 1. — P. 133–181.

⁸Cooley J.W., Tukey J.W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Mathematics of Computation. — 1965. — Vol. 19, No. 90. — P. 297–301.

ствии временной локализации. Это привело к разработке и внедрению других базисов, прежде всего ортогональных, полученных как системы сжатий и сдвигов некоторой исходной функции на числовой прямой. Они стали известны как всплески, или вейвлеты. Исторически система Хаара может рассматриваться как прототип таких систем. Теория всплесков дала начало отдельному направлению исследований, сохраняющему научную и прикладную актуальность (см., например, монографию И.Я. Новикова, В.Ю. Протасова и М.А. Скопиной⁹). К ключевым областям их применения относятся решение уравнений с частными производными, подавление шумов в сигналах, анализ данных и алгоритмы сжатия аудиозаписей и изображений, например JPEG 2000.

Ортогональные разложения нашли широкое применение в прикладных задачах благодаря простоте вычисления коэффициентов и удобным свойствам, таким как тождество Бесселя, неравенство Бесселя и эквивалентность сходимости равенству Парсеваля. Стоит отметить также свойство оперативности, благодаря которому можно одновременно осуществлять разложение и передавать уже вычисленные коэффициенты. Однако данным разложениям присущи определённые недостатки. Во-первых, требование ортогональности накладывает жёсткие ограничения на выбор системы разложения. Во-вторых, возникшие в процессе вычисления коэффициентов ошибки не исправляются, что приводит к сходимости к элементу, отличному от разлагаемого. Указанные ограничения возможно устранить, если использовать вместо ортогональных разложений орторекурсивные, которые рассматриваются в настоящей работе.

Орторекурсивные разложения были введены Т.П. Лукашенко как обобщение ортогональных рядов¹⁰. В этом методе элемент гильбертова пространства раскладывается по счётной системе элементов, причём на каждом шаге коэффициент разложения определяется по проекции текущего остатка на одномерное подпространство, порождённое очередным элементом системы. В результате возникает орторекурсивный ряд Фурье. Орторекурсивные разложения сохраняют важнейшие свойства ортогональных разложений. Для них выполняется аналог тождества Бесселя, аналог неравенства Бесселя и, кроме того, сходимость орторекурсивного ряда к исходному элементу по норме пространства эквивалентна выполнению аналога равенства Парсеваля¹¹.

Схема орторекурсивного разложения допускает два принципиально различных подхода: использование заранее пронумерованной фиксирован-

⁹Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков // Физматлит, Москва. — 2005.

¹⁰Лукашенко Т.П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. — 2001. — № 1. — С. 6–10.

¹¹Там же.

ной системы элементов или выбор элементов на каждом шаге из заданного множества, характерный для жадных разложений¹². Ключевое отличие заключается в свойстве линейности. Орторекурсивные разложения линейны по разлагаемому элементу, тогда как жадные алгоритмы принципиально нелинейны из-за зависимости выбора элемента разложения от текущего остатка. При орторекурсивном подходе исключена эта ресурсоёмкая процедура выбора элемента при каждой итерации. Поэтому в настоящей работе ограничимся рассмотрением разложений по фиксированным системам.

При орторекурсивном разложении по ортогональной системе полученный орторекурсивный ряд Фурье совпадает с классическим рядом Фурье. В связи с этим особый интерес представляют разложения по неортогональным, в частности, по переполненным системам. Важным преимуществом разложений по таким системам является абсолютная устойчивость к погрешностям в вычислении коэффициентов, а также абсолютная устойчивость к малым изменениям системы¹³. В данной работе исследуются свойства орторекурсивных разложений по системе Фабера–Шаудера и её модификации.

Система Фабера–Шаудера получила своё название в честь математиков, исследовавших данную систему. Г. Фабер¹⁴ в 1910 году построил её, проинтегрировав функции Хаара. Ю.П. Шаудер¹⁵ в 1927 году ввёл понятие базиса в банаховом пространстве и переоткрыл систему Фабера–Шаудера как исторически первый пример базиса в банаховом пространстве непрерывных на отрезке функций. Система Фабера–Шаудера может быть определена также как система сжатий и сдвигов кусочно–линейной непрерывной функции.

В первоначальных исследованиях система Фабера–Шаудера рассматривалась преимущественно для разложения непрерывных функций. Однако в дальнейшем были получены фундаментальные результаты о применении её к значительно более широким классам функций. А.А. Талалян¹⁶ доказал, что рядами по системе Фабера–Шаудера можно почти всюду представить произвольные измеримые функции. Из работы П.Л. Ульянова¹⁷

¹²DeVore R. A., Temlyakov V. N. Some Remarks on Greedy Algorithms // *Advances in Computational Mathematics*. — 1996. — Vol. 5. — P. 173–187.

¹³Галатенко В.В. Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // *Известия РАН. Серия математическая*. — 2005. — Т. 69, № 1. — С. 3–16.

¹⁴Faber G. Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // *Deutsche Mathematiker- Vereinigung*. — 1910. — Vol. 19. — P. 104–112.

¹⁵Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // *Mathematische Zeitschrift*. — 1927. — Vol. 26. — P. 47–65.

¹⁶Талалян А.А. Представление произвольной измеримой функции рядами по функциям системы Шаудера // *Известия АН Армянской ССР. Серия физико- математических наук*. — 1959. — Т. 12, № 3. — С. 3–12.

¹⁷Ульянов П.Л. Представление функций рядами и классами $\varphi(L)$ // *Успехи математических наук*. — 1972. — Т. 27, № 2. — С. 3–52.

следует, что система Фабера–Шаудера является также системой представления (сходимость понимается по норме соответствующего пространства) в пространствах $L_p[0; 1]$. Впоследствии В.И. Филиппов и П. Освальд¹⁸ обобщили этот результат, показав, что произвольная система сжатий и сдвигов, порождённая функцией с ненулевым средним, также образует систему представления в $L_p[0; 1]$.

Система Фабера–Шаудера не является базисом в пространствах $L_p[0; 1]$, поскольку разложение функции в ряд по данной системе не обладает свойством единственности. В связи с этим естественно возникает вопрос о характеристике её подсистем, которые остаются системами представления. Р. Зинк¹⁹ показал, что для всех измеримых функций подсистемы сохраняют свойство сходимости почти всюду при условии, что точки отрезка $[0; 1]$, принадлежащие носителям лишь конечного числа функций подсистемы, образуют меру нуль. В.Г. Кротов²⁰ установил, что это условие необходимо и достаточно, чтобы подсистема была системой представления в $L_p[0; 1]$.

Отмеченные результаты показывают, что система Фабера–Шаудера применима в качестве системы представления как для измеримых функций в смысле сходимости почти всюду, так и в лебеговых пространствах в смысле сходимости по норме пространства. Более того, имеет место принципиальная неединственность коэффициентов — их выбор возможен бесконечным числом способов. В упомянутых выше работах не получены явные формулы для вычисления этих коэффициентов, тогда как в случае непрерывных функций такие формулы известны. Наша задача — применить методы гармонического анализа для построения алгоритма поиска коэффициентов представления. Прямой подход предполагает ортогонализацию системы методом Грама–Шмидта, вычисление коэффициентов Фурье в полученном ортогональном базисе и их обратный перерасчёт для исходной системы. Ортогонализация системы Фабера–Шаудера относительно скалярного произведения в $L_2[0; 1]$ приводит к системе Франклина. Хотя ряды Фурье–Франклина сходятся в пространствах $C[0; 1]$ и $L_p[0; 1]$ ²¹, они наследуют недостатки ортогональных разложений. Поэтому в отличие от данного подхода, мы рассмотрим орторекурсивные разложения, сохранив при этом классическую структуру функций системы Фабера–Шаудера.

Для орторекурсивных разложений по системам сжатий и сдвигов из-

¹⁸Filippov V.I., Oswald P. Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // Journal of Approximation Theory. — 1995. — Vol. 82, № 1. — P. 15–29.

¹⁹Zink R. On a theorem of Goffman concerning Schauder series // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1969. — Vol. 21, № 3. — P. 523–529.

²⁰Кротов В.Г. Представление измеримых функций рядами по системе Фабера–Шаудера и универсальные ряды // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1977. — Т. 41, № 1. — С. 215–229.

²¹Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. — 1984. — Гл. 6, § 3.

вестны результаты, допускающие перенос на систему Фабера–Шаудера. Из работы А.В. Политова²² следует, что при достаточно общих условиях на порождающую функцию ϕ орторекурсивное разложение любой функции из $L_2[0; 1]$ по системе сжатий и сдвигов функции ϕ сходится к разлагаемой функции по норме пространства $L_2[0; 1]$. Кроме того, В.В. Галатенко, Т.П. Лукашенко и В.А. Садовничий²³ установили, что при некоторых других условиях на порождающую функцию ϕ для любой функции f из $L_2[0; 1]$ орторекурсивный ряд Фурье по системе сжатий и сдвигов ϕ сходится к f почти во всех точках непрерывности функции f .

Отметим, что существующие результаты о сходимости орторекурсивных разложений преимущественно относятся к функциям из пространства $L_2[0; 1]$, причём исследуется, как правило, сходимость по норме $L_2[0; 1]$ и значительно реже — сходимость почти всюду. Вместе с тем, для ряда систем, в частности для системы Фабера–Шаудера, возможно распространение разложений на функции из $L_1[0; 1]$. Целью настоящей работы является получение результатов о сходимости орторекурсивных разложений по системе Фабера–Шаудера в пространствах $L_p[0; 1]$, а также исследование сходимости почти всюду для функций из $L_1[0; 1]$. Следует подчеркнуть, что орторекурсивное разложение непрерывной функции по системе Фабера–Шаудера, вообще говоря, не сходится всюду на отрезке $[0; 1]$. Эффективность использования орторекурсивных разложений в значительной степени проявляется для переполненных систем. В связи с этим Т.П. Лукашенко²⁴ была предложена модификация системы Фабера–Шаудера, дополненная так называемыми половинными сдвигами. В настоящей работе также изучаются разложения по модифицированной системе.

Цель работы.

В работе рассматриваются орторекурсивные разложения по классической системе Фабера–Шаудера, а также по её модификации. Целью работы является изучение различных видов сходимости этих разложений. В соответствии с поставленной целью были сформулированы следующие задачи:

- Установить алгоритм, позволяющий получить частичные суммы орторекурсивного разложения по классической и по модифицированной системам Фабера–Шаудера.
- Исследовать поточечную сходимость разложений по системе Фабера–

²²Политов А.В. Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2010. — Т. 65, № 3. — С. 95–99.

²³Galatenko V.V., Lukashenko T.P., Sadovnichiy V.A. Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansions in Systems of Translates and Dilates // Modern Mathematics and Mechanics. — 2019. — P. 3–11.

²⁴Лукашенко Т.П. Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы. — 2000. — С. 83.

Шаудера в пространстве непрерывных на отрезке функций, сходимость почти всюду для суммируемых функций и сходимость в лебеговых пространствах.

- Ввести модифицированную систему и провести орторекурсивное разложение по подпоследовательности её пачек. Изучить сходимость разложений в банаховых пространствах $C(S^1)$ и $L_p(S^1)$, где S^1 — окружность единичной меры и $1 \leq p < \infty$, а также сходимость почти всюду для функций из $L_1(S^1)$.

Научная новизна. В работе получены результаты о сходимости орторекурсивных разложений по классической системе Фабера–Шаудера и по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. При разложении непрерывных функций доказана равномерная сходимость в случае подпоследовательности пачек модифицированной системы, а для классической системы — поточечная сходимость всюду за исключением точек максимума функций базиса Фабера–Шаудера. Для обеих систем установлена сходимость почти всюду при разложении суммируемой функции. Также получены результаты о сходимости в пространствах $L_p[0; 1]$ при $1 \leq p < \infty$. Перечисленные результаты являются новыми и получены лично автором.

Методы исследования. В работе применяются методы математического анализа, методы функционального анализа, методы теории меры и интеграла, методы гармонического анализа, а также методы линейной алгебры и топологии. В работе также используются алгоритмы, специально разработанные для изучения орторекурсивных разложений.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по орторекурсивным разложениям и по анализу Фурье, а также в прикладных задачах обработки данных и передачи информации.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучается сходимость орторекурсивных разложений, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ по направлению «вещественный анализ».

Положения, выносимые на защиту.

1. Установлена поточечная сходимость орторекурсивного ряда Фурье при разложении непрерывной функции по классической системе Фабера–Шаудера.

2. Показано, что при разложении суммируемой функции по классической системе Фабера–Шаудера орторекурсивный ряд Фурье сходится почти всюду.
3. Получена теорема о сходимости по норме $L_p[0; 1]$, где $1 \leq p < \infty$, орторекурсивного ряда Фурье при разложении функции из $L_p[0; 1]$ по классической системе Фабера–Шаудера.
4. Установлена равномерная сходимость орторекурсивного ряда Фурье при разложении непрерывной функции по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера.
5. Доказана теорема о сходимости почти всюду орторекурсивного ряда Фурье при разложении суммируемой функции по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера.
6. Показано, что орторекурсивный ряд Фурье сходится по норме $L_p(S^1)$, где $1 \leq p < \infty$, при разложении функции из $L_p(S^1)$ по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных **конференциях**:

- XXXI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2024 г.);
- XXXII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2025 г.);
- XXXIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2026 г.);
- XXIII Международная Саратовская зимняя математическая школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2026 г.).

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих **научно-исследовательских семинарах**:

- научный семинар «Ортоподобные системы» механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора Т.П. Лукашенко, доцента В.В. Галатенко, доцента Т.В. Родионова (многократно, 2021—2023 гг.);

- научный семинар «Тригонометрические и ортогональные ряды» механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством профессора В.А. Скворцова, профессора Т.П. Лукашенко, профессора М.И. Дьяченко, доцента А.П. Солодова (многократно, 2024–2026 гг.);
- научный семинар «Операторные модели в математической физике» механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством члена-корреспондента РАН А.А. Шкаликова, профессора И.А. Шейпака, профессора К.А. Мирзоева (2026 г.);
- Санкт–Петербургский городской семинар по конструктивной теории функций под руководством профессора М.А. Скопиной, доцента А.В. Кривошеина (2026 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 4 публикациях автора, из них 3 работы ([1]–[3]) опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук.

Необходимо отметить, что работа [1] выполнена совместно с А.К. Пауновым. В ней автору настоящей диссертации принадлежат результаты о сходимости разложений в лебеговых пространствах (леммы 3, 4, 5 и теоремы 2, 3), описание процесса изменения частичных сумм при разложении функции по модифицированной системе Фабера–Шаудера и оценка коэффициентов (лемма 2), играющая ключевую роль в доказательстве теоремы о равномерной сходимости.

Личный вклад автора. Диссертантом совместно с научным руководителем проводился выбор темы, а также осуществлялось планирование всей работы. Автору диссертации принадлежат доказательства основных результатов, приведенных в диссертации.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы из 46 наименований. Работа включает 11 рисунков. Общий объём работы составляет 93 страницы.

Основное содержание работы

Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте работы.

Во **Введении** представлен общий обзор проблематики исследования, сформулированы поставленные задачи и приводятся основные результаты работы. Там же приведены определения основных изучаемых объектов: системы Фабера–Шаудера и орторекурсивного разложения.

Основным результатом **Главы 1** является разработка алгоритма изменения частичных сумм для орторекурсивных разложений по классической и модифицированной системам Фабера–Шаудера, который позволяет обойтись без непосредственного вычисления остатков разложения на каждом шагу. В связи с этим первая часть главы посвящена введению необходимых определений и обозначений, которые используются как при описании данного алгоритма, так и в последующих главах. В частности, вводится топологическое пространство S^1 и определяется модифицированная система Фабера–Шаудера. Здесь же определяются пространства D^n — пространства ломаных с областью определения S^1 , которые в дальнейшем служат для приближения функций из $C(S^1)$ и из $L_p(S^1)$.

Следует подчеркнуть, что ломаные играют ключевую роль в доказательстве основных утверждений данной работы. Общая схема рассуждений выглядит следующим образом: сначала устанавливается сходимость орторекурсивных разложений для ломаных, затем проводятся оценки коэффициентов, входящих в представление частичных сумм, что позволяет оценить частичные суммы по норме или через максимальную функцию Харди–Литлвуда; на заключительном этапе, опираясь на линейность орторекурсивных разложений по функциональному аргументу, произвольная функция приближается ломаными, что даёт возможность оценить остаток разложения. В соответствии с этим планом в Главе 1 приведено определение максимальной функции Харди–Литлвуда и указаны её свойства.

Вторая часть Главы 1 посвящена описанию процесса изменения частичных сумм. Выделено три этапа: база, шаг по пачке и переход от одной пачки к другой. Помимо алгоритма изменения частичных сумм указано, как на упомянутых этапах изменяются коэффициенты, входящие в представление частичных сумм.

В **Главе 2** приведены результаты о сходимости орторекурсивных разложений по классической системе Фабера–Шаудера. Значение орторекурсивного ряда Фурье в каждой точке максимума базисных функций Фабера–Шаудера зависит исключительно от значения соответствующего коэффициента орторекурсивного ряда Фурье, который, вообще говоря, не совпадает с коэффициентом разложения непрерывной функции по базису Фабера–Шаудера. В связи с этим орторекурсивное разложение по системе Фабера–Шаудера не обладает свойством равномерной сходимости. Однако во всех остальных точках удалось установить поточечную сходимость:

Теорема 2.1. *Пусть проводится орторекурсивное разложение непрерывной на отрезке $[0; 1]$ функции f по системе Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f во всех точках, кроме, быть может, точек максимума функций системы и точек 0 и 1.*

Класс функций, для которых орторекурсивное разложение по системе Фабера–Шаудера сходится почти всюду, может быть расширен до $L_1[0; 1]$, при этом не требуется условие на точки непрерывности разлагаемой функции.

Теорема 2.2. Пусть проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_1[0; 1]$, по системе Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f почти всюду на отрезке $[0; 1]$.

В Главе 2 приведён также результат о сходимости орторекурсивного разложения по классической системе в лебеговых пространствах. Результат о сходимости орторекурсивных разложений в $L_2[0; 1]$ является частным случаем приведённого ниже результата.

Теорема 2.3. Пусть $1 \leq p < \infty$ и проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_p[0; 1]$, по системе Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f по норме пространства $L_p[0; 1]$.

Глава 3 посвящена исследованию сходимости орторекурсивных разложений по модифицированной системе Фабера–Шаудера. В ней рассматривается подсистема, образованная подпоследовательностью так называемых пачек элементов модифицированной системы с произвольной нумерацией внутри каждой пачки. Показано, что даже для такой подсистемы сохраняется свойство равномерной сходимости орторекурсивного разложения произвольной непрерывной функции:

Теорема 3.1. Пусть проводится орторекурсивное разложение непрерывной на S^1 функции f по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f равномерно на S^1 .

Модифицированная система не представляет собой систему сжатий и сдвигов в чистом виде. Тем не менее, любая её подсистема, образованная подпоследовательностью пачек, является системой представления для суммируемых функций относительно сходимости почти всюду, причём коэффициенты этого представления могут быть получены с помощью орторекурсивных разложений.

Теорема 3.2. Пусть проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_1(S^1)$, по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f почти всюду на S^1 .

Как и в случае классической системы, для модифицированной системы справедлив результат о сходимости в лебеговых пространствах, который приведён в Главе 3.

Теорема 3.3. *Пусть $1 \leq p < \infty$ и проводится орторекурсивное разложение функции f , принадлежащей лебегову пространству $L_p(S^1)$, по подпоследовательности пачек модифицированной системы Фабера–Шаудера. Тогда полученный орторекурсивный ряд Фурье сходится к f по норме пространства $L_p(S^1)$.*

В Главе 3 также вводится понятие α -дальности, необходимое для оценки коэффициентов в представлении частичных сумм в случае разложения по модифицированной системе. Эти оценки потребуются для доказательства основных утверждений главы.

Следует отметить, что результаты о сходимости орторекурсивных разложений как по классической, так и по модифицированной системам Фабера–Шаудера в лебеговых пространствах в случае $p = 1$ требуют отдельного рассмотрения и получения других оценок на норму частичных сумм. Данные оценки приведены в соответствующих разделах Глав 2 и 3.

Заключение.

Обзор проведенного исследования. Тематика диссертации относится к области действительного анализа. В диссертации изучены вопросы сходимости орторекурсивных разложений по системам типа Фабера–Шаудера. Основные результаты работы состоят в следующем.

1. В работе рассмотрена классическая система Фабера–Шаудера, а также определена её модификация, орторекурсивные разложения по которой равномерно сходятся к разлагаемой непрерывной функции. Для классической системы и для подпоследовательности пачек модифицированной системы получены новые алгоритмы вычисления частичных сумм орторекурсивных разложений. А именно показано, что частичные суммы можно вычислить не только с помощью коэффициентов Фурье по определению орторекурсивного разложения, но и по свойствам самой системы Фабера–Шаудера, минуя затратный этап вычисления остатков на каждом шаге.
2. В диссертации исследованы орторекурсивные разложения непрерывной функции по классической системе Фабера–Шаудера. Показано, что орторекурсивный ряд сходится к разлагаемой функции поточечно, за исключением, быть может, точек максимума функций системы

Фабера–Шаудера. Этот результат неулучшаем в том смысле, что, вообще говоря, добиться сходимости в проблемных точках в случае классической системы невозможно. В целях установления сходимости всюду при разложении непрерывной функции введена модифицированная система Фабера–Шаудера. В работе показано, что орторекурсивные разложения непрерывных функций по любой её подсистеме, состоящей из подпоследовательности пачек, сходятся равномерно к разлагаемой функции.

3. В работе изучен вопрос сходимости в лебеговых пространствах по вышеупомянутым системам. Результаты большинства работ по данной тематике ограничены рассмотрением сходимости в гильбертовом пространстве L_2 , скалярное произведение которого фигурирует в определении орторекурсивного разложения. В частности, известны результаты о сходимости орторекурсивных разложений по норме L_2 для данных систем. В настоящей работе получены результаты о сходимости в произвольных лебеговых пространствах. При разложении функции из L_p по классической системе и по подпоследовательности пачек модифицированной системы доказана сходимость по норме L_p для $1 \leq p < \infty$.
4. В диссертации исследована сходимость почти всюду орторекурсивных разложений по данным системам. Результаты, относящиеся к сходимости почти всюду, являются редкими и обычно используют разлагаемые функции из пространств L_2 . В данной работе удалось доказать сходимость почти всюду орторекурсивных разложений по классической системе и по подпоследовательности пачек модифицированной системы при разложении любой интегрируемой по Лебегу функции.

Таким образом, в диссертации исследованы орторекурсивные разложения по классической и по модифицированной системам Фабера–Шаудера и даны положительные ответы на вопросы о сходимости орторекурсивного ряда к разлагаемому элементу при представлении функций из различных пространств. А именно, при разложении произвольной суммируемой функции по каждой из систем имеет место сходимость почти всюду и сходимость по норме пространства L_1 . Если разлагаемая функция также принадлежит пространству L_p при $1 < p < \infty$, то имеет место ещё и сходимость в пространстве L_p . Наконец, разложение непрерывной функции по модифицированной системе обладает свойством равномерной сходимости, а по классической — поточечной всюду, за исключением счётного множества. В работе также доказано, что для модифицированной системы её подсистема, состоящая из подпоследовательности пачек, сохраняет все вышеперечисленные

виды сходимости. Кроме того, для обеих систем показано, что перенумерация системы, заключающаяся в смене нумерации внутри каждой пачки, не влияет на сходимость разложений.

Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы. Из направлений для дальнейшего исследования по тематике диссертации можно выделить следующее:

1. Исследование подсистем модифицированной системы Фабера–Шаудера, сохраняющих свойство равномерной сходимости орторекурсивных разложений по ним. Отметим, что в настоящей работе показано, что классическая система, являющаяся в свою очередь подсистемой модифицированной, это свойство утрачивает.
2. Исследование подсистем модифицированной (или, в частности, классической) системы, орторекурсивными разложениями по которым можно представить функции в лебеговых пространствах L_p в смысле сходимости по норме или суммируемые функции в смысле сходимости почти всюду. Напомним, что условие из работы Р. Зинка²⁵ является необходимым и достаточным для того, чтобы подсистема классической системы Фабера–Шаудера являлась системой представления в указанных смыслах. Возникает вопрос, сохраняют ли орторекурсивные разложения по подсистемам с данным условием свойства сходимости в L_p или почти всюду.
3. Изучение вопроса о том, какие перестановки элементов классической или модифицированной систем Фабера–Шаудера можно совершить, чтобы орторекурсивные разложения по полученной системе сходились в одном из указанных выше смыслах.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Тарасу Павловичу Лукашенко и кандидату физико-математических наук Владимиру Владимировичу Галатенко за постановку задачи, внимание к работе, ценные рекомендации и плодотворные обсуждения. Также автор благодарит Александра Константиновича Паунова за совместную работу, которая способствовала развитию данных исследований.

²⁵Zink R. On a theorem of Goffman concerning Schauder series — P. 523–529.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук

- [1] Степанянц П. С., Паунов А. К. Орторекурсивное разложение по модификации системы Фабера–Шаудера // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2023. — № 4. — С. 15–22. EDN: WHJTQI, Импакт-фактор 0.323 (РИНЦ) / 0.55 п. л. / вклад соискателя 0.44 п. л.

Stepanyants P. S., Paunov A. K. Orthorecursive Expansion with Respect to Modified Faber–Schauder System // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2023. — Vol. 78. — P. 170–178.

EDN: ODOKJP, Импакт-фактор 0.243 (SJR) / 0.55 п. л. / вклад соискателя 0.44 п. л.

Работа [1] выполнена совместно с А.К. Пауновым. В ней автору настоящей диссертации принадлежат результаты о сходимости разложений в лебеговых пространствах (леммы 3, 4, 5 и теоремы 2, 3), описание процесса изменения частичных сумм при разложении функции по модифицированной системе Фабера–Шаудера и оценка коэффициентов (лемма 2), играющая ключевую роль в доказательстве теоремы о равномерной сходимости.

- [2] Stepanyants P. S. Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansion with Respect to Modified Faber–Schauder System // Lobachevskii Journal of Mathematics — 2024. — Vol. 45, № 12. — P. 6610–6623.

EDN: BNQAJE, Импакт-фактор 0.829 (РИНЦ) / 0.75 п. л.

- [3] Степанянц П. С. Орторекурсивное разложение по системе Фабера–Шаудера // Чебышевский сборник — 2026. — Т. 27, № 2. — С. 97–117.

EDN: UVGXRR, Импакт-фактор 0.432 (РИНЦ) / 1.22 п. л.

Иные публикации

- [4] Степанянц П. С. О представлении функций орторекурсивными рядами по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения — 2026. — Т. 23. — С. 278–282.
EDN: NBWQKA / 0.23 п. л.