

ОТЗЫВ НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

на диссертационную работу Антона Павловича Науменко «Диофантовы неравенства с простыми числами» представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

Пусть $N(\sigma, T)$ – число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma \leq \text{Re } s < 1; 0 < \text{Im } s \leq T$.

Оценки вида

$$N(\sigma, T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^{c_1} T, c_1 \geq 1 \quad (1)$$

называются плотностными теоремами.

Наилучшее на данный момент значение λ на всем промежутке $1/2 \leq \sigma < 1$ $\lambda = \frac{6}{5}$ было получено Хаксли в 1972 году. Заметим, что в 2024 году вышел препринт J. Maynard и L. Guth, в котором $\lambda = \frac{15}{13}$.

Хорошо известны формулы, выражающие суммы по простым числам через суммы по нетривиальным нулям рядов Дирихле. Такие формулы называются явными. Одной из самых известных явных формул является следующее выражение для функции Чебышева:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\text{Im } \rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ – нетривиальные нули дзета-функции Римана.

В сороковых годах двадцатого века Ю.В. Линник разработал новую технику решения задач с простыми числами, основанную на явных формулах и плотностных теоремах. Эта техника получила название плотностной.

В монографии С.М. Воронина и А.А. Карацубы "Дзета-функция Римана" на основе плотностной техники доказано, что неравенство

$$|p - N| \leq H \quad (2)$$

разрешимо в простых числах p при $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$.

В 2012 году в работе С.А. Гриценко и Н.Т. Ча при помощи плотностной техники получили ряд результатов о разрешимости нелинейных диофантовых неравенств с простыми числами. В частности, было показано, что неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H, \quad (3)$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2 при $H > \sqrt{N} \exp(\ln^{-0.1} N)$.

Интересно сравнить результат о разрешимости неравенства (3) с результатом о разрешимости неравенства (2). В неравенстве (3) параметр H можно выбрать меньше $\sqrt{N}$, тогда как разрешимость (2) при $H = \sqrt{N}$ не следует

даже из гипотезы Римана.

Основным результатом данной диссертации является доказательство разрешимости неравенства (3) при $H \geq N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon}$ для любого $N \geq N_0(\varepsilon)$, где ε – произвольное положительное число.

Указанный результат основан на весьма точной оценке интегралов специального вида и на применении современных плотностных теорем. Диссертант проявил хорошее владение плотностной техникой, изобретательность и самостоятельность в работе.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертации на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Рекомендую диссертацию к защите в диссертационном совете МГУ.011.4 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математических и
компьютерных методов анализа
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский
государственный университет
имени М.В. Ломоносова»

С.А. Гриценко

Подпись профессора кафедры
математических и компьютерных
методов анализа
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский
государственный университет имени
М.В. Ломоносова» Гриценко С.А.
удостоверяю:

Декан механико-математического
факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова,
член-корреспондент РАН
«27» июня 2025 г.

А.И. Шафаревич