

**ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Корчагина Никиты Павловича
на тему: «Сложность проблемы сюръективного гомоморфизма
для циклов»
по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра,
теория чисел и дискретная математика**

Актуальность исследования. Задача о гомоморфизме графов для заданного графа H состоит в ответе на вопрос о существовании гомоморфизма входного графа в граф H . Эта задача находит применения на практике и связана с другими задачами распознавания. В частности, известная задача о раскрашиваемости вершин графа в k цветов является задачей о гомоморфизме графов для полного графа с k вершинами. В 1990 г. P.Hell, J.Nesetril получили классификацию сложности этой задачи для неориентированных графов H . Для произвольных графов H классификация сложности получена в 2017 г. Тогда была установлена соответствующая классификация сложности для задачи CSP. А задача о гомоморфизме для графа H является частным случаем задачи CSP для единственного отношения, определяемого множеством ребер графа H . Надо отметить, что задача CSP(Γ) в зависимости от множества отношений Γ является только NP-полной или принадлежит классу P. Более того, ее сложность зависит исключительно от полиморфизмов множества отношений Γ . Как следствие получается, что сложность задачи о гомоморфизме для графа H зависит исключительно от полиморфизмов отношения, определяемого множеством ребер графа H . В задаче о сюръективном гомоморфизме на заданный граф H вводится дополнительное условие сюръективности искомого гомоморфизма. Несложно увидеть, что если для графа H задача о гомоморфизме NP-полна, то NP-полна и задача о сюръективном гомоморфизме на граф H . Поэтому изучаются случаи графов

H , для которых задача о гомоморфизме принадлежит классу P . В ряде работ найдена сложность задачи о сюръективном гомоморфизме для некоторых графов. В частности, в 2012 г. P.A.Golovach, D.Paulusma, J.Song получена классификация сложности задачи о сюръективном гомоморфизме на неориентированный граф H , не имеющий циклов, за исключением петель. В 2018 г. I.Lariviere, B.Larose, D.Pullas установили классификацию сложности задачи о сюръективном гомоморфизме на граф H , являющийся направленным циклом с петлями на всех вершинах. Однако вопрос о классификации сложности этой задачи для произвольных графов H все еще открыт. Следует отметить, что, как показано Д.Н.Жуком в 2021 г., сложность сюръективной задачи $SCSP(\Gamma)$ (в отличие от соответствующей несюръективной задачи $CSP(\Gamma)$) зависит, в общем случае, не только от полиморфизмов отношений из множества Γ . Это составляет дополнительную трудность в изучении задачи о сюръективном гомоморфизме. В диссертации исследуется сложность задачи о сюръективном гомоморфизме на граф H . Внимание сосредоточено на графах H , являющихся циклами с петлями на всех вершинах. Несложно увидеть, что несюръективная задача о гомоморфизме для таких графов H принадлежит классу P . Исходя из сказанного, можно заключить, что тема диссертационного исследования является актуальной.

Содержание работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на разделы, заключения и списка литературы. Во *введении* обосновывается актуальность исследования, приводится обзор работ, относящихся к тематике диссертации, описываются цели и задачи, положения, выносимые на защиту, апробация работы и публикации, а также структура диссертационного исследования. В *первой главе* приводятся основные определения и обозначения из теории графов, теории сложности вычислений и алгебры, а также их применяемые свойства. Диссертация посвящена исследованию сложности задачи распознавания $Surj-Hom(H)$, отвечающей на вопрос, существует ли сюръективный гомоморфизм входного

графа на граф H . В частности, в первой главе показывается, что эта задача является частным случаем сюръективной задачи распознавания $SCSP(E)$, в которой под отношением E понимается множество дуг (ребер) графа H . В диссертации рассматривается случай, когда граф H является рефлексивным циклом, т. е. циклом с петлями в каждой вершине. **Вторая глава** посвящена описанию основных предложенных диссертантом понятий и их свойств, применяющихся в диссертации при исследовании сложности рассматриваемых задач. Одно из них — сюръективное интерпретирование отношения на некотором множестве другим отношением на, возможно, другом множестве. Показывается, что наличие сюръективного интерпретирования одного отношения (в частности, одного рефлексивного цикла) другим отношением (в частности, другим рефлексивным циклом) обеспечивает полиномиальную сводимость задачи $SCSP$ для первого отношения к такой же задаче для второго отношения (в частности, задачи сюръективного гомоморфизма для первого цикла к такой же задаче для второго цикла). Два других вводятся для множества отношений на некотором множестве. Это наследование сюръективности полиморфизмами этого множества отношений, а также наследование в слабой форме. Показывается, что при выполнении некоторых дополнительных условий наследование сюръективности в слабой форме полиморфизмами конечного множества отношений обеспечивает NP -полноту задачи $SCSP$ для этого множества. В **третьей главе** изучаются структура и свойства рефлексивных циклов, т. е. циклов с петлями в любой их вершине. Основное содержание этой главы заключается в приведении другого доказательства теоремы, впервые полученной в 2023 г. I.Lariviere, B.Larose, D.Pullas, о существенной унарности любого сюръективного полиморфизма любого рефлексивного цикла, содержащего не менее четырех вершин. Обоснование проводится исключительно на основе структурных свойств рефлексивных циклов и введенных расстояний между вершинами в них, а также свойств

полиморфизмов. При доказательстве отдельно разбираются случаи неориентированных, строго ориентированных и смешанно ориентированных рефлексивных циклов. *Четвертая глава* посвящена доказательству основного результата диссертационной работы — теоремы о сложности задачи сюръективного гомоморфизма на заданный рефлексивный цикл. При этом при обосновании NP-полноты задач существенно применяется введенное понятие наследования сюръективности и его свойства. Более подробно, в этой главе устанавливается NP-полнота задач сюръективного гомоморфизма на заданный рефлексивный цикл следующих видов: 1) неориентированный цикл, содержащий не менее семи вершин; 2) смешанно ориентированный цикл, содержащий не менее двух ориентированных ребер и не менее четырех вершин; 3) смешанно ориентированный цикл, содержащий ровно одно ориентированное ребро и не менее семи вершин. Кроме того, в этой главе приводится другое, основанное на свойстве наследования сюръективности доказательство NP-полноты, впервые полученной в 2018 г. I.Lariviere, B.Larose, D.Pullas, для задачи сюръективного гомоморфизма на заданный рефлексивный строго ориентированный цикл, содержащий не менее четырех вершин, за исключением одного цикла из шести вершин. В завершение этой главы показывается, что для рефлексивных циклов, для которых в диссертации не установлена сложность задачи сюръективного гомоморфизма, не выполняется свойство наследования сюръективности в слабой форме. Из чего делается вывод, что исследование сложности задачи для этих циклов требует техники, отличной от рассматриваемой в диссертации. В *заключении* кратко перечисляются основные результаты работы. *Список литературы* содержит 49 наименований, включая 3 работы автора по теме диссертации. Объем диссертации составляет 118 страниц.

Научная новизна, обоснованность и достоверность положений работы. В диссертации получены следующие новые результаты.

1. Доказана NP-полнота задачи $\text{Surj-Hom}(H)$, если граф H является неориентированным рефлексивным циклом, содержащим не менее семи вершин.
2. Доказана NP-полнота задачи $\text{Surj-Hom}(H)$, если граф H является смешанно ориентированным рефлексивным циклом, содержащим не менее двух ориентированных ребер и не менее четырех вершин.
3. Доказана NP-полнота задачи $\text{Surj-Hom}(H)$, если граф H является смешанно ориентированным рефлексивным циклом, содержащим ровно одно ориентированное ребро и не менее семи вершин.

Кроме того, в диссертации приведены другие доказательства известных ранее результатов о существенной унарности сюръективных полиморфизмов рефлексивных циклов, содержащих не менее четырех вершин, а также об NP-полноте задачи $\text{Surj-Hom}(H)$, если граф H является строго ориентированным рефлексивным циклом, содержащим не менее четырех вершин (за исключением одного цикла). Приведенные в диссертации другие доказательства опираются на полученные в работе структурные свойства рефлексивных циклов. По мнению оппонента, основным достижением диссертации, помимо собственно полученных новых результатов о классификации сложности задачи Surj-Hom , являются предложенные автором понятия и техника их применения. Это понятия наследования и наследования в слабой форме сюръективности полиморфизмами множества отношений. В диссертации установлено, что при выполнении некоторых дополнительных условий наследование сюръективности в слабой форме полиморфизмами конечного множества отношений обеспечивает NP-полноту задачи SCSP для этого множества. Содержательные результаты диссертации получены применением этой предложенной автором техники. Таким образом, в диссертации получено существенное продвижение в исследовании сложности сюръективной задачи гомоморфизма на заданный граф. Все утверждения диссертации снабжены строгими доказательствами,

докладывались и обсуждались на научных семинарах и международных конференциях. Основные результаты работы опубликованы в трех рецензируемых научных изданиях из списков (основного и дополнительного), рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки). Список литературы достаточно полно отражает состояние дел в области тематики работы. Автореферат правильно отражает содержание работы.

Замечания по работе. На взгляд оппонента, работа достаточно хорошо выверена и вычитана. Можно отметить только нечастые мелкие замечания, которые не заслуживают того, чтобы их здесь упоминать, и не снижают общего положительного впечатления от работы.

Заключение. Оценивая работу в целом, следует отметить, что диссертация Корчагина Никиты Павловича «Сложность проблемы сюръективного гомоморфизма для циклов» является завершенным научным исследованием, в котором получены новые важные результаты в области теории алгоритмов и теории графов. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова; работа оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Таким образом, соискатель Корчагин Никита Павлович заслуживает присуждения ученой степени кандидата

физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры математической кибернетики
факультета вычислительной математики и кибернетики
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Селезнева Светлана Николаевна

20.05.2026 г.

Контактные данные:

тел.: 7(495)9395392, e-mail: selezn@cs.msu.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

Адрес места работы:

119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, д. 1,
стр. 52, 2-й учебный корпус, факультет ВМК,
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики,
Тел.: 7(495)9395392; e-mail: selezn@cs.msu.ru

Подпись сотрудника факультета вычислительной математики и кибернетики

Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

Селезневой Светланы Николаевны удостоверяю: