ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
Коняева Андрея Юрьевича
на тему: «Геометрия Нийенхейса и ее приложения»
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология

Кручение Нийенхейса возникло в работах А. Нийенхейса в 50-х годах прошлого века в контексте изучения вопроса диагонализации операторного поля с простым вещественным спектром в подходящей системе координат. Позже А. Ньюландер и Л. Ниренберг показали, что почти комплексная структура является комплексной тогда и только тогда, когда ее кручение Нийенхейса обращается в ноль.

За прошедшие годы операторные поля с нулевым кручением Нийенхейса (операторы Нийенхейса) возникали в самых различных задачах геометрии, математической физики и теории дифференциальных уравнений. Можно вспомнить теорию согласованных скобок Пуассона, структуры Пуассона-Нийенхейса и плоские пучки, предложенные Б.А. Дубровиным в связи с изучением фробениусовых многообразий и многие другие.

Диссертационная работа А.Ю. Коняева закладывает основы нового направления дифференциальной геометрии --- геометрии Нийенхейса. Основным объектом изучения является многообразие, снабженное операторным полем с нулевым кручением Нийенхейса.

Диссертацию условно можно разделить на две основные части. В первой части (главы со второй по шестую включительно и глава 11) строится общая локальная теория многообразий Нийенхейса, вводится понятие точки общего положения и особой точки. Решаются вопросы о локальных нормальных и полунормальных формах.

Глава 2 содержит базовые результаты по геометрии Нийенхейса: там даются основные определения и развивается техника, которая потребуется в дальнейшем. В частности, речь идет о функциях от операторных полей на многообразии с нулевым кручением Нийенхейса, теореме о расщеплении, существовании естественной комплексной структуры, связанной с оператором

Нийенхейса. Здесь же приводятся классические результаты Хаантьеса и Нийенхейса и их обобщения, которые вытекают из полученных результатов. Нийенхейса. Все утверждения в этих разделах снабжены доказательствами, так как не являются общеизвестными.

Теорема о расщеплении из главы 2 сводит описание нормальной формы оператора Нийенхейса к задаче описания нормальной формы для жорданова блока. Глава 3 посвящена решению именно этой задачи: вопрос оказывается существенно разным для постоянного и непостоянного собственного значения. Для непостоянного доказана теорема о приведении к теплицевой форме. Там же получен критерий приведения операторного поля к постоянному виду. В этой же главе строятся примеры компактных многообразий Нийенхейса и описываются их свойства. Так, например, показано, что сфера произвольной размерности является оператором Нийенхейса, а на четырехмерной сфере у любого оператора Нийенхейса собственные значения обязаны быть вещественными.

Глава 4 посвящена левосимметрическим алгебрам. Изначально эти алгебры возникли в работах Э. Винберга в контексте изучения однородных выпуклых конусов. Оказывается, в геометрии Нийенхейса эти алгебры играют ту же роль, что алгебры Ли в пуассоновой геометрии: они находятся во взаимнооднозначном соответствии с операторами Нийенхейса, который линейно зависят от плоских координат некоторой аффинной связности. Здесь приводится классификация соответствующих операторов Нийенхейса в размерности два (их оказывается 12 классов, два из которых содержат непрерывный параметр), ставится и решается задача линеаризации операторного поля с нулевым кручение Нийенхейса в окрестности точки скалярного типа (то есть в окрестности такой точки, где оператор Нийенхейса становится скалярным). Задача линеаризации решается в размерности два, причем ответы в гладком и аналитическом случае оказываются существенно разными.

В главе 5 рассматриваются нормальные формы gl-регулярного оператора Нийенхейса в вещественно-аналитическом случае. Доказаны замечательные теоремы о приведении такого оператора Нийенхейса к первой и второй сопровождающим формам. Там же интегрируются возникающие в этой задаче уравнения --- они оказываются многокомпонентным аналогом уравнений Хопфа. В размерности два получены полиномиальные нормальные формы

(сопрвождающие формы – это полунормальные формы, они допускают довольно большую группу симметрий).
В особых точках таких нормальных форм оказывается 8 бесконечных серий, параметризованных как дискретными, так и непрерывными параметрами, и два специальных класса.

Глава 6 посвящена симметриям и законам сохранения операторов Нийенхейса. Там же доказывается теорема о расщеплении, получены базовые свойства этих объектов для gl-регулярных операторов Нийенхейса. Там же устанавливается связь между регулярными симметриями и законами сохранения, а также координатами, в которых оператор L принимает первую или вторую сопровождающую форму. Благодаря этому удается получить теорему о приведении к первой и второй сопровождающей форме в гладком случае в окрестности регулярной точки.

В главе 11 излагается теория когомологий Нийенхейса. Оказывается, с оператором Нийенхейса связано сразу две когомологические теории - большая (на векторозначных дифференциальных формах) и малая (на обычных дифференциальных формах). В этой главе доказывается теорема о расщеплении для малых когомологий, а также вычисляются когомологии для некоторых классов операторов Нийенхейса.

Вторая половина диссертации (главы с 7 по 10 включительно) посвящена приложением результатов из глав 1-7 и 11. Эмпирически установлено, что ключевым элементом для приложения оператора Нийенхейса является наличие вспомогательного (партнерского) объекта. Такой объект обычно так же имеет дифференциально геометрическую природу.

В главе 7 в качестве партнерского объекта выступает закон сохранения. В этом разделе приводится схема построения конечномерных интегрируемых систем, связанных с базисами в пространстве симметрий оператора Нийенхейса. С помощью общего подхода удается построить новые интегрируемые системы, которые оказываются родственниками систем, допускающих ортогональное разделение переменных. Частным случаем полученных систем оказываются системы Бененти (и их ранее неизвестные недиагональные обобщения!), которые тесно связаны с геодезически эквивалентными метриками. С помощью разработанной техники решается задача описания всех метрик, геодезически согласованных с данным gl-регулярным (не обязательно диагональным!) оператором Нийенхейса.

Глава 8 посвящена теории нийенхейсовых пучков. Этот объект возникает в теории согласованных скобок гидродинамического типа (и не только). Описаны специальные классы конечномерных максимальных пучков, которые возникают в приложениях, включая описание операторов Нийенхейса, геодезически согласованных с плоской метрикой. Строится так называемый AFF-пучок и доказывается его единственность. В частности, приводится замечательное характеристическое свойство этого пучка: в размерности n первые n + 1 метрики такого пучка оказываются плоскими, а метрика с номером n + 2 имеет постоянную секционную кривизну.

Глава 9 посвящена приложению геометрии Нийенхейса в теории бигамильтоновых систем. Доказывается теорема о нормальной форме для струткуры Пуассона-Нийенхейса. Вводится понятие оператора Дарбу-Гамильтона. Такие операторы оказываются связаны с уравнениями мелкой воды - в частности, многокомпонентными аналогами уравнений Кортвега - де Фриза и Камассы-Холма. Для операторов
устанавливается
связь между такими операторами и парой метрика-оператор Нийенхейса со специальными свойствами. Для согласованных операторов общего положения доказано, что соответствующие пучки вложены в дисперсионную версию AFF-пучка из главы 8.

В главе 10 рассматривается случай алгебраического оператора Нийенхейса. Доказывается полнота интегрируемых систем, полученных на алгебре Ли gl(n) с помощью операторов Соколова-Одесского.

Резюмируя все вышесказанное, автор провел замечательное исследование на высоком математическом уровне. Полученные в диссертации глубокие результаты не только привносят существенный вклад в уже существующие математические области, но и закладывают новые направления исследований. Диссертация, несомненно, будет интересна специалистам по интегрируемым системам, математической физике, алгебре и теории дифференциальных уравнений.

В качестве замечаний можно отметить избыточный объем. Доказательства некоторых технических утверждений из главы 2, например, можно было бы заменить ссылками на собственные статьи А.Ю. Коняева.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по естественным наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель А.Ю. Коняев заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:

Член корр. РАН, доктор физико-математических наук, и.о. директора Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Миронов Андрей Евгеньевич 01.12.2025 г.

Контактные данные:

Телефон: + 7 (383) 333 28 92 E-mail: mironov@math.nsc.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.04 Геометрия и топология

Адрес места работы:

1630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, д. 4

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН)

Подпись и.о. директора ИМ СО РАН Миронова А.Е. удостоверяю: