

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Белоненко Алексей Вячеславич

**Экспериментальное исследование  
релятивистских гравитационных эффектов на  
космических аппаратах с квантовыми  
стандартами времени и частоты**

Специальность 1.3.1. Физика космоса, астрономия

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный  
руководитель:  
доктор  
физико-математических  
наук, профессор  
Руденко Валентин Николаевич

## Оглавление

|                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Введение</b> .....                                                                                           | 4  |
| Общая характеристика работы .....                                                                               | 4  |
| Эксплуатация технической базы КРТ «РадиоАстрон» .....                                                           | 8  |
| Актуальность темы диссертационного исследования .....                                                           | 9  |
| Цели работы .....                                                                                               | 11 |
| Основные задачи .....                                                                                           | 11 |
| Научная новизна .....                                                                                           | 12 |
| Методы исследования .....                                                                                       | 13 |
| Теоретическая и практическая значимость .....                                                                   | 15 |
| Положения, выносимые на защиту .....                                                                            | 16 |
| Апробация результатов .....                                                                                     | 18 |
| Структура и обзор диссертации .....                                                                             | 20 |
| <b>Глава 1 Измерение «RedShift» эффекта с «online»<br/>компенсацией доминирующих кинематических помех</b> ..... | 23 |
| 1.1 Краткий обзор экспериментов по измерению «RedShift»<br>эффекта .....                                        | 23 |
| 1.2 Возможные методы проверки ПЭЭ с использованием<br>«RedShift» эффекта .....                                  | 24 |
| 1.3 Подробный анализ эксперимента Gravity Probe A .....                                                         | 26 |
| 1.4 GREAT .....                                                                                                 | 30 |
| 1.5 Проектирование гравитационных измерений с КРТ<br>«РадиоАстрон» .....                                        | 32 |
| 1.5.1 Параметры целевой орбиты .....                                                                            | 33 |
| 1.6 Аппаратно-технический комплекс миссии<br>«РадиоАстрон» в гравитационном эксперименте .....                  | 35 |
| 1.7 Чередование режимов: устранение Доплеровского сдвига<br>частоты 1-го порядка .....                          | 42 |

|                                                                                                                             |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 1.8 Краевые эффекты в цепочке измерительных интервалов . . . . .                                                            | 46         |
| 1.9 Проблемы, сопутствующие online компенсации доплеровского сдвига 1-го порядка . . . . .                                  | 47         |
| 1.10 Ошибка оценки частоты на интервалах конечной длительности . . . . .                                                    | 50         |
| 1.11 Компенсация эффекта Допплера 2-го порядка малости . . . . .                                                            | 52         |
| 1.12 Наземные эксперименты и оценки их точности . . . . .                                                                   | 55         |
| 1.13 Последующие эксперименты . . . . .                                                                                     | 55         |
| <b>Глава 2 Фильтрация атмосферных помех и учет фликкер-шумов в экспериментальных данных . . . . .</b>                       | <b>57</b>  |
| 2.1 Компенсация тропосферного и ионосферного сдвига радиочастоты . . . . .                                                  | 57         |
| 2.2 Модель тропосферного сдвига частоты . . . . .                                                                           | 77         |
| 2.3 Фликкер-шум в водородных стандартах частоты и методы его подавления . . . . .                                           | 85         |
| 2.4 Анализ гравитационных воздействий Солнца и Луны на измерение RedShift . . . . .                                         | 88         |
| <b>Глава 3 Синтез накопленных «RedShift» измерений с оценкой параметра нарушения ОТО <math>\varepsilon</math> . . . . .</b> | <b>90</b>  |
| 3.1 Первичная обработка записей: спектральный алгоритм оценки частоты . . . . .                                             | 90         |
| 3.2 Алгоритм детектирования частоты сигнала. Моделирование данных . . . . .                                                 | 95         |
| 3.3 Оценка погрешности детектирования частоты . . . . .                                                                     | 101        |
| 3.4 Оценка теоретического гравитационного сдвига . . . . .                                                                  | 103        |
| 3.5 Оценка совокупного параметра нарушения $\varepsilon$ на основе данных сеансов за 2017-2019 гг. . . . .                  | 105        |
| 3.6 Результаты . . . . .                                                                                                    | 107        |
| 3.7 Обсуждение . . . . .                                                                                                    | 108        |
| <b>Заключение . . . . .</b>                                                                                                 | <b>110</b> |
| <b>Благодарности . . . . .</b>                                                                                              | <b>112</b> |
| <b>Список литературы . . . . .</b>                                                                                          | <b>113</b> |

# Введение

## Общая характеристика работы

Настоящее исследование направлено на экспериментальную проверку ключевого постулата релятивистской физики – принципа эквивалентности Эйнштейна (ПЭЭ) [1], составляющего концептуальную основу общей теории относительности (ОТО) [2]. Согласно данному принципу, гравитация и ускорение локально неотличимы друг от друга. Частью ПЭЭ является эффект смещения частоты электромагнитных волн при их проходе между разнесенными в пространстве позициями с ненулевой разностью гравитационных потенциалов. Для прецизионного измерения данного эффекта нами была разработана экспериментальная методика, основанная на использовании высокоточных атомных стандартов частоты, размещенных как на наземной станции слежения (НВСЧ), так и на борту околоземного космического аппарата (БВСЧ).

Исторически первая последовательная теория гравитации была сформулирована И. Ньютоном и опубликована в его фундаментальном труде «Математические начала натуральной философии» в 1687 году. В рамках ньютоновской теории свободные массивные тела (частицы) существуют и перемещаются в абсолютном пространстве-времени только под действием сил взаимного притяжения или «сил гравитации». Численно сила притяжения пары точечных (или сферически симметричных частиц однородной плотности) представляется законом всемирного тяготения Ньютона («закон обратных квадратов»), в котором естественно вводится эмпирическая константа «гравитационная постоянная», характеризующая гравитационное взаимодействие тел.

## Уточнение (проверка) эмпирических основ ОТО

Уникальное свойство гравитационного поля придавать материальным телам одно и то же ускорение независимо от массы было известно уже родоначальникам физической механики из экспериментов со свободным падением (Галилей 1630 г.), с колебаниями механических маятников и наблюдениями за динамикой спутников Юпитера (Ньютон 1686 г.). При тех же начальных условиях тождественность ускорений пробных тел означает равенство их «инертных» и «гравитационных» масс и совпадение их траекторий в зоне гравитационного поля. Впоследствии совпадение гравитационных траекторий получило название «слабого принципа эквивалентности» (СПЭ) или «универсальности свободного падения» (FFU на английском) [1]. Погрешность этого утверждения исторически постоянно снижалась в результате улучшения тестовых экспериментов. Начиная с относительной ошибки  $10^{-2} \div 10^{-3}$  (Галилей и Ньютон), погрешность пришла на уровни:  $10^{-8}$  (Этвёш) [6],  $10^{-11}$  (Дикке и др. 1962 г.) [4],  $10^{-13}$  (лазерная локация Луны 2010 г.) [5],  $10^{-15}$  (космический эксперимент «MICROSCOPE» 2022 г.) [10]. В результате современная формулировка СПЭ гласит, что траектория свободно падающего пробного тела не зависит от его массы и внутренней структуры (молекулярно-атомного состава).

Заметим, что СПЭ является частью эмпирической (опытной) базы ПЭЭ. Теоретическая база ПЭЭ включает в себя специальную теорию относительности (СТО)[11], которая утверждает равноправие инерциальных (неускоренных) систем отсчета при отказе от «гипотезы дальнего действия Ньютона» и принятии постулата о наличии «максимальной скорости распространения взаимодействий» равной скорости света. Последнее ведет к изменениям математической формулировки «принципа относительности» инерциальных систем отсчета, а именно: замене «преобразований Галилея» на «преобразования Лоренца». Это, в свою очередь, означает упразднение категории абсолютного времени и распространение принципа относительности на всё пространство-время. Кроме того, гарантируется инвариантность электродинамических уравнений Максвелла [12], изотропия скорости света и вводится новый релятивистский закон сложения скоростей. В итоге, СТО (представленная Эйнштейном в 1905 г.) дала новую теоретическую основу

для понимания физических процессов при скоростях, близких к скорости света.

Вернемся снова к более детальному описанию принципа эквивалентности Эйнштейна. Эта обобщенная формулировка принципов ОТО, разработанная Робертом Дикке, была опубликована в его лекциях на научной школе в Лез-Уше 1964 года [8]. Согласно Дикке, ПЭЭ состоит из трех фундаментальных положений, а именно, имеют место:

1. справедливость слабого принципа эквивалентности (СПЭ), устанавливающего равенство инертной и гравитационной масс и факт универсальности траекторий свободного падения (UFF);
2. локальная лоренц-инвариантность (LLI), т.е. независимость результатов любых локальных негравитационных экспериментов от скорости свободно падающей системы отсчета;
3. локальная позиционная инвариантность (или универсальность «RedShift») (LPI, URS), т.е. инвариантность результатов локальных негравитационных экспериментов относительно их положения в пространстве-времени.

Под локальным негравитационным экспериментом [9] здесь понимается такой, который проводится в достаточно малой области пространства-времени и не связан с прямым измерением гравитационных взаимодействий. Таким образом, если три перечисленных положения выполняются одновременно, то справедлив ПЭЭ. Тогда в локальных свободно падающих системах отсчета законы, управляющие экспериментами, не должны зависеть **от скорости системы отсчета** (локальная лоренц-инвариантность), а также **от местоположения системы отсчета** (локальная позиционная инвариантность), что предполагает постоянство атомных констант в этих системах отсчета.

Законы, которые удовлетворяют этому, совместимы со специальной теорией относительности – такие как уравнения электромагнитного поля (уравнения Максвелла) и стандартная модель физики элементарных частиц.

Также в локальных свободно падающих системах отсчета пробные тела не имеют ускорения и движутся по универсальным траекториям - прямым

линиям, которые соответствуют «геодезическим» в терминах искривленного пространства-времени, т.е. выполняется (UFF).

Эмпирическими основаниями положений ПЭЭ являлись:

- для (1) – эксперименты по наблюдению свободного падения тел,
- для (2) – наблюдения поведения пробных тел (включая фотоны) во вращающихся системах отсчета,
- для (3) – наблюдения смещения спектральных линий удаленных звезд («RedShift» эффект).

Комментируя третий пункт ПЭЭ, «позиционная инвариантность», напомним, что эффект «RedShift» – функция только разности потенциалов между точками прохода ЕМ волны без ограничений на положения этих точек во Вселенной, т.е. это тест её однородности; равно, как фиксация постоянства атомных констант по спектрам удаленных звезд.

Ключевое значение ПЭЭ заключается в том, что он устанавливает глубокую связь между гравитацией и геометрией пространства-времени. Теории гравитации, которые полностью реализуют ПЭЭ, должны удовлетворять постулатам метрических теорий гравитации, а именно:

- пространство-время обладает симметричной метрикой, которая определяет его геометрические свойства и служит математическим инструментом для описания характера его искривления;
- движение свободных пробных тел происходит по геодезическим линиям, определяемым данной метрикой (тела движутся по кратчайшим путям в искривленном пространстве-времени);
- в локальных свободно падающих системах отсчета негравитационные физические законы принимают ту же форму, что и в специальной теории относительности, что обеспечивает локальную эквивалентность между гравитационными и инерциальными эффектами.

В итоге, наблюдаемые гравитационные эффекты можно рассматривать как геометрические свойства искривленного пространственно-временного континуума.

Заканчивая наше представление различных аспектов принципа эквивалентности Эйнштейна (ПЭЭ) уместно напомнить, так называемую «гипотезу Шиффа» [13], состоящую в следующем утверждении: «Любая полная самосогласованная теория гравитации, включающая в себя слабый принцип эквивалентности (СПЭ), обязательно включает также и ПЭЭ». Данная гипотеза выглядит обоснованной, по крайней мере, для теорий, в которых выполняется закон сохранения энергии.

## **Эксплуатация технической базы КРТ «РадиоАстрон»**

Значимым достижением экспериментальной астрономии стала успешная реализация проекта КРТ «РадиоАстрон» со спутником Спектр-Р, несущим параболическую антенну с диаметром  $\approx 10$  метров. В сочетании с наземными антеннами этот космический радиотелескоп формировал интерферометр с рекордной длиной базы, достигающей около 350,000 км. Использование микроволновых стандартов частоты как на спутнике, так и на наземных станциях, привело к значительному улучшению углового разрешения радиоинтерферометрических измерений [14]. Это достижение открывало новые горизонты в астрофизике, позволяя получать более детализированные и точные данные о космических объектах и явлениях. Всего за время работы КРТ, с 2011 по 2019 годы, на нём было реализовано до десяти различных астрономических программ. Отчёты об этих исследованиях хранятся в Астрокосмическом центре Физического института имени П. Н. Лебедева (АКЦ ФИАН), а их результаты опубликованы в многочисленных научных статьях, подготовленных группой «РадиоАстрон». Основной целью миссии РА являлось функционирование КРТ в качестве космического радиоинтерферометра и выполнение прецизионных астрометрических измерений. Однако ещё на этапе проектирования рассматривались и другие потенциальные применения этого уникального инструмента для изучения фундаментальных физических проблем. В частности, указывалось на важность измерения релятивистских гравитационных эффектов в условиях существенного отличия гравитационных потенциалов между апогеем ( $\sim 3 \times 10^5$  км). и перигеем ( $\sim 1 \times 10^4$  км) орбиты спутника Спектр-Р [15]. Благоприятным фактором являлось наличие бортовых и наземных

водородных стандартов частоты (стабильностью не хуже  $1 \times 10^{-14}$ ), что позволяло осуществить проверку эффекта гравитационного смещения частоты электромагнитного излучения.

Выполненные нами исследования были посвящены прецизионной проверке такого аспекта ПЭЭ как «RedShift» эффект с помощью «атомных часов».

Использовались следующие элементы технической базы КРТ «Радио-Астрон»:

- наземные станции слежения (НСС) в Пуццино (Россия) и Грин Бэнк (США), обладающие возможностью не только принимать, но и передавать сигналы (команды) на космический аппарат (КА) Спектр-Р;
- водородные стандарты частоты, установленные на борту КА (БВСЧ) и НСС (НВСЧ), обеспечивали стабильность коммуникационных сигналов и высокоточную синхронизацию измерений по времени;
- сеть вспомогательных наземных радиолокационных станций и станций лазерной дальнометрии, обеспечивающие высокоточное восстановление реконструированной орбиты КА;
- телекоммуникационное оборудование (комплекс ВИРК) обеспечивало надежную передачу данных между КА и НСС с их предварительной обработкой.

Коммуникационные частоты 8,4 ГГц и 15 ГГц использовались для передачи информации о времени и частоте. Интегральная информация со всех указанных измерительных узлов позволила проводить эксперименты по уточнению ПЭЭ с относительной погрешностью, не превышающей  $10^{-4}$ .

## **Актуальность темы диссертационного исследования**

Современная теоретическая физика столкнулась с фундаментальным вызовом, связанным с необходимостью объединения двух наиболее успешных физических теорий XX века – общей теории относительности (ОТО) и квантовой теории поля. Однако эти теории, составляющие основу нашего понимания Вселенной на макро- и микроуровнях соответственно, на

текущий момент содержат противоречия в своих базовых постулатах и математическом аппарате.

Особую тестовую значимость в этом контексте приобретает ПЭЭ – краугольный камень ОТО. Этот принцип, утверждающий эквивалентность гравитационной и инертной масс, прошел многочисленные экспериментальные проверки с высокой точностью. Однако современные теории квантовой гравитации (включая теорию струн, петлевую квантовую гравитацию и другие подходы) часто предсказывают возможные нарушения ПЭЭ на определенных масштабах.

Наше исследование, выполненное в данной диссертации, направлено на разработку методики проверки ПЭЭ с использованием «RedShift» эффекта и её имплементация.

1. Проверка справедливости равенства:

$$\frac{\Delta f_{grav}}{f} = \frac{\Delta U}{c^2} \approx 10^{-10}, \quad (0.1)$$

где  $\Delta U$  – разность гравитационных потенциалов на КА «РадиоАстрон» и НСС.

2. Достижение точности измерения гравитационного красного смещения с погрешностью, не превышающей:

$$\delta\varepsilon = \frac{\Delta f}{f_0} < 1 \times 10^{-4}. \quad (0.2)$$

Результаты работы будут иметь значение для:

- селекции конкурирующих релятивистских теорий гравитации (скалярно-тензорных и биметрических, теории струн, моделей квантовой теории гравитации и др.),
- космологических моделей ранней Вселенной,
- развития фундаментальной метрологии.

В целом, проведение данного экспериментального исследования обнаружения отклонений от предсказаний ОТО и ПЭЭ приобретает ключевое значение для уточнения и развития современных представлений о физической природе мира. Решение этой задачи может открыть путь к созданию единой теории, способной объяснить все фундаментальные взаимодействия во Вселенной.

## Цели работы

Цель диссертационной работы заключается в проведении высокоточных измерений гравитационного смещения частоты (эффекта «RedShift») с использованием космического аппарата «РадиоАстрон» и наземных станций слежения для экспериментальной проверки предсказаний общей теории относительности.

В качестве базовых элементов частотного обеспечения экспериментальной установки были использованы водородные стандарты частоты модели **VCH-1010**, произведенные отечественной компанией «Время-Ч»<sup>1</sup>. Стабильность этих стандартов выражается в терминах дисперсии Аллана и составляет  $\Delta f/f = 7.0 \times 10^{-15}$  при времени усреднения  $\sim 10^2$  с. Применение столь высокостабильных эталонов частоты обеспечило решение следующих ключевых задач исследования:

1. прецизионное измерение гравитационного сдвига частоты электромагнитного излучения с потенциальной относительной погрешностью менее  $10^{-4}$ ,
2. выделение релятивистской компоненты на фоне других доминирующих негравитационных факторов,
3. проверка теоретических предсказаний ОТО в условиях удаленных гравитационных полей.

## Основные задачи

Обнаружение гравитационного сдвига частот не является сложной задачей в теории, однако для проведения высокоточных измерений необходимо учитывать множество сопутствующих шумов, которые могут возникать на линии связи между космическим аппаратом (КА) и наземными станциями (НСС), а также в самих стандартах частоты.

Эти шумы могут включать в себя:

1. кинематические эффекты: эффект Доплера 1-го и 2-го порядка малости [17];

---

<sup>1</sup><https://www.vremya-ch.com/index.php/projects-ru/spaceapplications-ru/vch-1010-ru/index.html>

2. атмосферные помехи: влияние тропосферы и ионосферы на передачу сигналов между наземными станциями и спутником;
3. технические шумы аппаратуры: несовершенство оборудования, применяемого для генерации и передачи сигналов, может вызывать дополнительные флуктуации;
4. гравитационное влияние других космических объектов и приливного потенциала Земли [18].

Для минимизации влияния этих шумов применялись следующие подходы:

1. использование чередования режимов передачи сигнала: двухпутевой НСС-КА-НСС и однопутевой КА-НСС;
2. анализ использования моделей компенсации влияния ионосферы и тропосферы: данные о полном электронном содержании (ТЕС) в ионосфере, а также о влажности, давлении и температуре в тропосфере [21];
3. расчет гравитационного потенциала Луны, Солнца, а также учет несферичности Земли [17].

## Научная новизна

В рамках проведенной работы впервые осуществлены прецизионные измерения гравитационного смещения частоты (эффекта «RedShift») в уникальных условиях – на орбитальных расстояниях, соответствующих лунной дистанции ( $\sim 400$  тыс. км).

Идея космического эксперимента по измерению гравитационного красного смещения впервые была реализована в миссии «Gravity-Probe A» в 1976 году [47]. В рамках этой миссии водородный стандарт частоты был поднят на высоту  $10^4$  км с помощью баллистической ракеты. В апогее траектории его частота сравнивалась с аналогичным наземным мазером. Информация о частотных вариациях передавалась посредством коммуникационных радиосигналов. Для онлайн компенсации доминирующего эффекта Доплера первого порядка была разработана специальная техника, комбинирующая однопутевые (1w) сигналы, синхронизированные по бортовому стандарту, и

двухпутевые (или петлевые) ( $2w$ ) сигналы с опорой на наземный стандарт частоты. Результатом эксперимента «Gravity-Probe A» стало подтверждение ОТО с точностью до сотых долей процента, а именно  $\sim 1.4 \times 10^{-4}$ . Этот результат оставался актуальным к моменту начала проведения гравитационного эксперимента с КРТ «РадиоАстрон». Такие преимущества «РадиоАстрона», как более чем на порядок лучшая стабильность бортового стандарта частоты, возможность многократного повторения эксперимента и применение комплексного подхода к восстановлению орбиты космического аппарата с использованием различных методов, позволяли ожидать улучшения точности измерения параметра нарушения до  $\sim 10^{-5}$ . Помимо повышения точности измерений, следует подчеркнуть, что космический аппарат «РадиоАстрон» функционировал на расстояниях, сопоставимых с дистанцией до Луны. Это уникальное свойство, отсутствующее у других экспериментов, таких как «Gravity Probe A» и «GREAT», открывало новые возможности для проведения высокоточных измерений в условиях, недоступных для наземных и низкоорбитальных миссий.

## Методы исследования

Работа была посвящена исследованию гравитационного смещения частоты электромагнитных сигналов в рамках общей теории относительности (ОТО) с использованием данных космического радиотелескопа «РадиоАстрон». Теоретико-методологической базой диссертации являются работы [1, 6, 4] (ПЭЭ и критерии теорий гравитации Дикке), [40, 47, 44, 45, 10, 42] (Эксперименты по проверке ПЭЭ проведенные ранее). Для измерения гравитационного смещения частоты использовался космический радиотелескоп «РадиоАстрон», оснащённый высокостабильным бортовым стандартом частоты. Данные накапливались в течение 2016 - 2018 гг. с использованием наземных станций, оснащённых также бортовым стандартом частоты. Для анализа гравитационного смещения частоты применялись уравнения ОТО, в частности, соотношения, связывающие разность гравитационных потенциалов с относительным смещением частоты. Эти уравнения позволяют количественно описать влияние гравитационного поля на частоту электромагнитных сигналов. В данной диссертационной работе применя-

ется адаптированный компенсационный алгоритм эффекта Доплера 1-го порядка, ранее предложенный в работе [47]. Для этого были проведены теоретические оценки возможности реализации компенсационной схемы, основанной на попеременном использовании однопутёвого (1w) и двухпутёвого (2w) режимов работы, с целью устранения влияния эффекта Доплера первого порядка.

В ходе работы был применён оценочно-компенсационный алгоритм [34], который позволил преодолеть ограничения, связанные с невозможностью одновременного использования (1w) и (2w) режимов. Данный подход позволил компенсировать эффект Доплера первого порядка и влияние тропосферы. В ходе исследования были учтены вклады ионосферы, гравитационного потенциала Луны и Солнца, а также несферичности Земли. Кроме того, проведена оценка величины фликкер-шума бортового стандарта частоты, что способствовало повышению точности измерений. Получены уточнённые значения гравитационного смещения частоты, подтверждающие предсказания ОТО с точностью, превосходящей эксперимент «Gravity Probe A». Также были выведены аналитические выражения для описания смещения частоты, обусловленного эффектом Доплера 2-го порядка малости, что позволило учесть релятивистские эффекты, возникающие при относительном движении источника и приёмника сигналов. Полученные результаты компенсации кинематических эффектов имеют важное значение для повышения точности измерений, поскольку в эксперименте «Gravity Probe A» точность определения скорости КА стала ключевым фактором, ограничивающим финальную ошибку измерения параметра нарушения  $\varepsilon$ .

Для обработки данных применялись различные методы детектирования частоты сигнала. На начальном этапе использовалось грубое детектирование, основанное на стандартном спектральном методе, который включает применение алгоритма быстрого преобразования Фурье (FFT) с последующим определением частоты сигнала по положению максимума амплитуды в спектре. Первичная обработка данных осуществлялась с использованием спектрального измерителя, установленного на станциях слежения, частотные данные которого были размещены на сервере webinet. Точность данного измерителя составляла  $2 \times 10^{-3}$  Гц, что ограничивало его применение для задач, требующих высокой точности измерений ( $\delta\varepsilon < 10^{-4}$ ).

В рамках нашего исследования был применён метод измерения частоты, основанный на обработке первичных данных, представленных в формате RDF (Radioastron Data Format), который структурно близок к формату Mark5B. Экспериментальные данные были представлены в виде временных рядов, содержащих в себе зависимость амплитуды сигнала от времени. Для анализа использовался итеративный метод остановки фазы сигнала, позволяющий повысить точность определения частоты [22].

Для компенсации кинематических эффектов, связанных с движением космического аппарата, были использованы данные о реконструированной орбите. Разработанное программное обеспечение для обработки данных включало использование специализированных библиотек, таких как SOFA (Standards of Fundamental Astronomy) [35], `astropy` и `pumpy`.

Результат нашего эксперимента сравнивался с ранее проведенными экспериментами «Gravity Probe A» [47] и «GREAT» [44, 45].

## **Теоретическая и практическая значимость**

Теоретическая значимость работы заключается в уточнении параметров гравитационного смещения частоты электромагнитных сигналов на больших расстояниях от Земли в рамках ОТО. Полученные результаты вносят вклад в развитие современных представлений о гравитации и её влиянии на распространение электромагнитных волн в условиях слабых гравитационных полей [36]. Разработанные методы обработки данных, включая алгоритмы компенсации кинематических эффектов и итеративные методы анализа фазы сигнала, позволяют существенно повысить точность измерений последующих прецизионных экспериментов. Это открывает новые возможности для экспериментальной проверки предсказаний ОТО и других фундаментальных физических теорий с использованием космических аппаратов.

Практическая значимость исследования заключается в возможности применения разработанных методов и алгоритмов в системах спутниковой навигации для повышения точности позиционирования, а также в проектах, связанных с изучением гравитационных волн и релятивистских эффектов. Результаты работы могут быть использованы для калибровки оборудова-

ния и улучшения точности измерений в космических миссиях, направленных на изучение гравитационных полей и тестирование фундаментальных физических законов.

Кроме того, проведённое исследование создаёт основу для дальнейших работ в области релятивистской астрофизики, квантовой гравитации и космологии, способствуя развитию новых подходов к изучению гравитационных взаимодействий [37, 38].

## **Положения, выносимые на защиту**

1. Теоретический прогноз общей теории относительности для гравитационного смещения частоты соответствует экспериментальным данным с точностью  $(1.57 \pm 3.96) \times 10^{-5}$  по параметру отклонения  $\varepsilon$ , который в случае подтверждения теории должен быть равен нулю, и в этом случае значимой величиной является только ошибка, с которой получено  $\varepsilon$ . Данный результат устанавливает новые ограничения для модифицированных теорий гравитации.
2. Разработанная методика онлайн подавления доминирующих помех за счет смены режимов синхронизации коммуникационных сигналов по наземному и бортовому стандартам частоты позволяет на порядок повысить точность измерения гравитационного сдвига частоты, также может быть применена для последующих прецизионных проверок общей теории относительности.
3. Разработанная и реализованная методика измерения гравитационного смещения частоты радиосигналов впервые была применена в условиях орбитального эксперимента для масштабов, сравнимых с расстоянием до Луны, и установила новые ограничения на возможные отклонения от принципа эквивалентности Эйнштейна в аспекте однородности релятивистского пространства-времени.
4. Разработанное программное обеспечение с использованием библиотек SOFA и astropy позволило выделить гравитационный сдвиг частоты на фоне релятивистского эффекта Доплера.

5. Разработанный комплекс программ позволяет проанализировать вклад атмосферных помех в частоту сигнала «РадиоАстрон». Компенсация ионосферного сдвига частоты на основе модели тонкой ионосферы и данных об электронной плотности позволяет выделить гравитационный сдвиг на фоне атмосферных эффектов.

## Публикации по теме диссертации

Результаты диссертационной работы опубликованы в 6 статьях, из них в 5 статьях в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базе ядра РИНЦ «eLibrary Science Index», международными базами данных (Web of Science, Scopus, RSCI) и рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.3.1. Физика космоса, астрономия:

1. Litvinov D.A., Rudenko V.N., **A.V. Belonenko**, Filetkin A.I., Gusev A.V., Kulagin V.V., Porayko N.K., A.V.Alakoz, U.Bach, N.Bartel, K.G.Belousov, M.Bietenholz, A.V.Biriukov, R.Carman, G.Cimó, D.Dirx, C.Courde, A.I.Filetkin, D.A.Duev, G.Granato, L.I.Gurvits, R.Haas, G.Herold, A.Kahlon, B.Z.Kanevsky, V.L.Kauts, G.D.Kopelyansky, G.Kronshnab, A.V.Kovalenko, A.M.Kutkin, M.Lindqvist, J.E.J.Lovell, H.Mariey, J.McCallum, G.Molera Calvés, C.Moore, K.Moore, A.Neidhardt, C.Plötz, S.V.Pogrebenko, A.Pollard, J.Quick, A.I.Smirnov, K.V.Sokolovsky, V.A.Stepanyants, J.Yang, J.-M.Torre, P.de Vicente, M.V.Zakhvat / Probing the gravitational RedShift with an earth-orbiting satellite // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics. — 2018. — Vol. 382, no. 33. — P. 2192–2198. EDN: YENKYA. Импакт-фактор 0.69 (JCI). Личный вклад 25%. Объем 0.84 печатных листов.
2. **Belonenko A. V.**, Popov S. M., Rudenko V. N. Compensation of atmospheric hindrances in measuring the gravitational RedShift using satellites on-board clocks // Gravitation and Cosmology. — 2020. — Vol. 26, no. 2. — P. 128–135. EDN: VRUSCN. Импакт-фактор 0.25 (JCI). Личный вклад 90%. Объем 0.96 печатных листов.
3. **Belonenko A. V.**, Gusev A. V., Rudenko V. N. / Precision measurement of gravitational frequency shift of radio signals using rao-cramer estimates

// Gravitation and Cosmology. — 2021. — Vol. 27, no. 4. — P. 383–391. EDN: RUCZSW. Импакт-фактор 0.25 (JCI). Личный вклад 75%. Объем 1.08 печатных листов.

4. N. V. Nunes, N. Bartel, **A. V. Belonenko** G. D. Manucharyan, S. M. Popov, V. N. Rudenko, L. I. Gurvits, G. Cimò, G. Molera Calvés, M. V. Zakhvatkin / Gravitational RedShift test of eep from near earth to the distance of the moon with radioastron // Classical and Quantum Gravity. — 2023. — Vol. 40, no. 2. EDN: FRZLTM. Импакт-фактор 0.93 (JCI). Личный вклад 25%. Объем 2.4 печатных листов.
5. Руденко В.Н., **Белоненко А.В.**, Гусев А.В., Гурин Ф.С., Кулагин В.В., Попов С.М., Манучарян Г.Д., Захваткин М.В., Коваленко А.В. Прецизионное измерение гравитационного смещения частоты электромагнитных сигналов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. - 2024. - Т. 166. - №5. - С. 632-640. EDN: GUEJRO. Импакт-фактор 1.31 (РИНЦ). Личный вклад 50%. Объем 1.08 печатных листов.

## Иные публикации

6. **Белоненко А. В.**, Руденко В. Н., Попов С. М. Прецизионное измерение гравитационного смещения радиочастот околоземных космических аппаратов // Альманах современной метрологии. — 2020. — Т. 24, № 4. — С. 27–31. EDN: HOSYUQ. Импакт-фактор 0.213 (РИНЦ). Личный вклад 90%. Объем 0.6 печатных листов.

## Апробация результатов

Работа была представлена в докладах на следующих конференциях:

1. 2020 Тестирование Принципа Эквивалентности по данным космического эксперимента со спутником Радиоастрон (Устный) Авторы: Белоненко А.В., Гусев А.В., Руденко В.Н. 4-я Российская конференция "Основания фундаментальной физики и математики" (РУДН), Москва, Россия, 11-12 декабря 2020

2. 2021 Einstein Equivalence Principle test with RadioAstron (Устный) Авторы: Litvinov D.A., Rudenko V.N., Bartel N., Belonenko A.V., Gurvitz L.I., Nunes N., et al. 43rd COSPAR Scientific assembly, 2021, Сидней, Австралия, 28 января - 4 февраля 2021 - 2020
3. 2021 Update on the gravitational RedShift measured with RadioAstron at distances up to 350,000 km from Earth (Устный) Авторы: Nunes N.V., Bartel N., Belonenko A.V., Litvinov D.A., Rudenko V.N., Zakhvatkin M.V., et al. первая виртуальная конференция CASC 2021, Canadian Association of Science Centres 100 Ramsey Lake Road Sudbury, ON. P3E 5S9, Канада, 1-3 июня 2021
4. 2021 Measurement of the gravitational RedShift effect using the satellite Spectr-R in the "RadioAstron" mission (Устный) Авторы: Белоненко А.В., Руденко В.Н., Гусев А.В., Попов Сергей Михайлович Sixteenth Marcel Grossmann Meeting - MG16, Virtual Meeting, Италия, 5-10 июля 2021
5. 2021 Testing the principle of equivalence at a very large distance from the Earth according to the data of the Radioastron space experiment (Стендовый) Авторы: Белоненко А.В., Руденко В.Н., Гусев А.В., Попов С.М., Physical Interpretations of Relativity Theory - 2021, Москва, Россия, 7 июля 2021
6. 2022 TESTING THE EINSTEIN EQUIVALENCE PRINCIPLE WITH RADIOASTRON (Устный) Авторы: Nunes N., Bartel N., Belonenko A.V., Gusev A., Manucharyan G., Popov S., Rudenko V. 44th COSPAR Scientific Assembly 2022, Athens, Греция, 16-24 июля 2022
7. Measurements of the gravitational frequency shift of radio communication signals with RadioAstron satellite on a highly eccentric orbit (стендовый) Авторы: A.V. Belonenko, A.V. Gusev, V.V. Kulagin, G. D. Manucharyan, S.M. Popov, V.N. Rudenko et al.; Rencontres de Moriond 2023, Gravitation, La Thuile, 18-25 March 2023

## Структура и обзор диссертации

Диссертация состоит из введения, основной части, содержащей три главы, и заключения, а также приложения. В диссертации 127 страницы, включая 44 рисунка и 3 таблицы.

Во **Введении** представлено теоретическое обоснование актуальности темы диссертационного исследования. Сформулированы цели и основные задачи работы, подчеркнуты элементы научной новизны и практической значимости полученных результатов. Изложены основные положения, выносимые на защиту. Отдельно указан личный вклад автора в проведенное исследование, включая разработку методик, анализ данных и интерпретацию результатов. Приведен перечень публикаций по теме диссертации, а также список конференций, на которых докладывались промежуточные и итоговые результаты. Структура диссертации кратко описана с обоснованием логики изложения материала. Кроме того, дан обзор ключевых экспериментальных работ, выполненных ранее в данной области.

**Глава 1** посвящена разработке метода онлайн-компенсации доминирующего доплеровского сдвига первого порядка, который маскирует гравитационное смещение частоты в экспериментах с КА «РадиоАстрон». Представлен обзор технических характеристик спутника и проведен анализ систематических погрешностей, связанных с невозможностью одновременной работы режимов однопутевой ( $1w$ , КА-НСС) и двухпутевой ( $2w$ , НСС-КА-НСС) передачи сигнала. Детально излагается принцип работы компенсационной схемы для эффекта Доплера первого порядка, включая математическое описание метода. Особое внимание уделено сравнительному анализу режимов передачи сигнала ( $1w$  и  $2w$ ) и оценке предельной точности измерений на основе характеристик бортового водородного стандарта частоты, с приведением и интерпретацией графиков дисперсии Аллана. Обсуждаются технические сложности, возникающие при реализации онлайн-компенсации доплеровского сдвига. В разделе, посвященном компенсации эффектов второго порядка, представлена формула для остаточного сдвига эффекта Доплера 2-го порядка после применения компенсационной схемы и метод его подавления с использованием библиотек SOFA и astropy. Наглядно демонстрируется относительный вклад различных остаточных

эффектов через серию графических зависимостей. Глава включает расширенный сравнительный анализ ранее проведенных экспериментов с целью выявления факторов, ограничивающих точность определения параметра нарушения  $\varepsilon$ . Завершается глава описанием наземных экспериментов по измерению «RedShift» эффекта и перспективными планами будущих космических миссий.

**Глава 2** посвящена комплексному анализу атмосферных эффектов, оказывающих влияние на частоту принимаемого сигнала наземной станции слежения, а также исследованию фликкер-шума. В первой части главы рассматривается влияние ионосферы, включая детальное описание ее характеристик и состава. Анализируются существующие методы компенсации ионосферных возмущений, среди которых особое внимание уделено модели однослойной тонкой ионосферы, где ключевыми параметрами выступают полное электронное содержание (ТЕС) и картирующая функция. Проведены расчеты ионосферного сдвига частоты с использованием различных ионосферных карт, а также рассмотрен двухчастотный метод компенсации данного эффекта. Сравнительный анализ эффективности методов компенсации выполнен для космического аппарата «РадиоАстрон» и спутников системы GPS.

Во второй части главы исследуется тропосферный сдвиг частоты сигнала. Дана оценка величины этого эффекта и проанализированы различные подходы к его компенсации. Приведены результаты расчетов тропосферного сдвига на основе моделей тропосферных задержек, а также отмечена частотная независимость данного эффекта в рабочем диапазоне частот «РадиоАстрона».

В заключительном разделе главы представлена оценка влияния фликкер-шума на точность измерений и обсуждаются возможные методы его учета в рамках проводимого эксперимента.

**Глава 3** представляет окончательные результаты эксперимента по измерению гравитационного смещения частоты с космическим аппаратом «РадиоАстрон». В начале главы рассматривается разработанный метод детектирования частоты сигнала, основанный на спектральном алгоритме частотной оценки. Детально описывается схема частотных преобразований в высокоинформативном радиокomплексе (ВИРК), сопровождаемая теоре-

тической оценкой предельной точности измерений с использованием информационной матрицы Фишера и неравенства Крамера-Рао.

Экспериментальная часть включает демонстрацию практического применения алгоритма остановки фазы сигнала с последующим определением частоты на НСС. Для оценки погрешностей проведено моделирование сигнала с параметрами, соответствующими орбитальной динамике «Радио-Астрона», подтвердившее, что погрешность алгоритма детектирования не превышает ошибок, вносимых бортовым стандартом частоты.

Теоретический анализ включает расчёт гравитационного потенциала наземной станции в модели EGM2008, с количественным сопоставлением вклада других эффектов. Ключевым результатом главы является итоговая оценка параметра нарушения  $\varepsilon$ , полученная по совокупности экспериментальных сеансов:  $\varepsilon_{opt} = (1.57 \pm 3.96) \times 10^{-5}$  – что свидетельствует о значительном прогрессе достигнутой точности измерений и их соответствии теоретическим предсказаниям. Полученные данные подводят итог комплексному исследованию и устанавливают новые границы точности в экспериментальной проверке «RedShift» эффекта в дальней зоне земного гравитационного поля на расстояниях, сопоставимых с дистанцией до Луны.

# Глава 1

## Измерение «RedShift» эффекта с «online» компенсацией доминирующих кинематических помех

### 1.1 Краткий обзор экспериментов по измерению «RedShift» эффекта

Разработка общей теории относительности (ОТО) Эйнштейном основывалась на принципе эквивалентности и требовании согласованности со специальной теорией относительности. Теория получила подтверждение через три классических теста:

1. Объяснение аномального смещения перигелия Меркурия ( $43''/\text{век}$ ), неразрешимого в ньютоновской механике. ОТО дала точное предсказание без введения *ad hoc* гипотез.
2. Гравитационное отклонение света, подтверждённое наблюдениями во время солнечных затмений [39].
3. Гравитационное красное смещение, верифицированное в астрофизических наблюдениях Адамса, а затем в эксперименте Паунда–Рибки (1960) [40].

---

*Данная глава основана на работах 1, 3, 4 из списка публикаций по теме диссертации*

## 1.2 Возможные методы проверки ПЭЭ с использованием «RedShift» эффекта

Согласно общей теории относительности Эйнштейна, часы, находящиеся в точках с разными гравитационными потенциалами, идут с разной скоростью. Это явление известно как гравитационное смещение или «RedShift» эффект. Величина изменения скорости хода часов записывается как:

$$\frac{\Delta T_{grav}}{T} = \frac{\Delta U}{c^2}, \quad (1.1)$$

где  $T$  - длительность интервала времени, измеряемого часами в лабораторной системе,  $\Delta T_{grav}$  - разность хода часов,  $\Delta U$  - разность гравитационных потенциалов,  $c$  - скорость света. С точки зрения частоты, эффект «RedShift» означает, что при излучении электромагнитной волны в точке с гравитационным потенциалом  $U_1$  и последующем приёме в точке с потенциалом  $U_2$ , её частота изменяется на величину:

$$\frac{\Delta f_{grav}}{f} = \frac{\Delta U}{c^2}, \quad (1.2)$$

где  $\Delta f_{grav}/f$  - измеренный частотный гравитационный сдвиг,  $\Delta U$  - разность гравитационных потенциалов в точках послылки и приема сигнала,  $c$  - скорость света.

В постоянном гравитационном поле, когда компоненты метрического тензора не зависят от  $x^0$ , и с учётом связи истинного времени с  $x^0$ , получаем [41]:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad (1.3)$$

$$g_{00} = -(1 - h_{00}) + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (1.4)$$

$$h_{00} = -\frac{2GM}{rc^2} + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (1.5)$$

где

- $g_{00}$  – временная компонента метрического тензора,
- $h_{00}$  – возмущение метрики первого порядка,

- $r$  – координата,
- $M$  – масса объекта,
- $\omega$  – частота
- $c$  – скорость света,
- $\mathcal{O}(c^{-4})$  – члены четвёртого порядка малости по  $1/c$ .

Частота колебаний  $\omega_0$ , понимаемая как число колебаний в единицу координатного времени  $x^0/c$ , не изменяется при распространении электромагнитной волны. Напротив,  $\omega$ , измеренная в собственном времени, в силу зависимости  $g_{00}$  от координат будет различной в разных точках пространства.

В линейном приближении слабого стационарного гравитационного поля, характеризуемого ньютоновским потенциалом  $\varphi(\mathbf{r})$ , получаем соотношение:

$$\omega \simeq \omega_0 \left( 1 - \frac{\varphi(\mathbf{r})}{c^2} \right) \quad (1.6)$$

Смещение частоты ЭМ волны  $\Delta\omega$  при переходе от одной точки к другой можно определить как:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 \left( 1 - \frac{\varphi_2}{c^2} \right) - \omega_0 \left( 1 - \frac{\varphi_1}{c^2} \right) = \omega_0 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} \quad (1.7)$$

В рамках ОТО гравитационный потенциал  $\varphi$  отрицателен для притягивающих масс, поэтому можем определить:

- для случая  $\varphi_{\text{ист}} < \varphi_{\text{приём}}$  (излучение, распространяющееся в область с меньшим абсолютным значением потенциала) наблюдается: увеличение частоты ( $\omega > \omega_0$ ) при  $\Delta\varphi > 0$  («гравитационное синее смещение»),
- уменьшение частоты ( $\omega < \omega_0$ ) при  $\Delta\varphi < 0$  («гравитационное красное смещение»).

В лабораторных условиях на Земле сдвиг частоты ничтожно мал:  $\Delta\omega \sim 10^{-16}$  Гц при вариациях высоты  $\Delta h = 1$  метр. Для того, чтобы измерить такой малый сдвиг частоты в лаборатории на Земле, требуется использование высокоточного спектроскопического оборудования. Самый первый

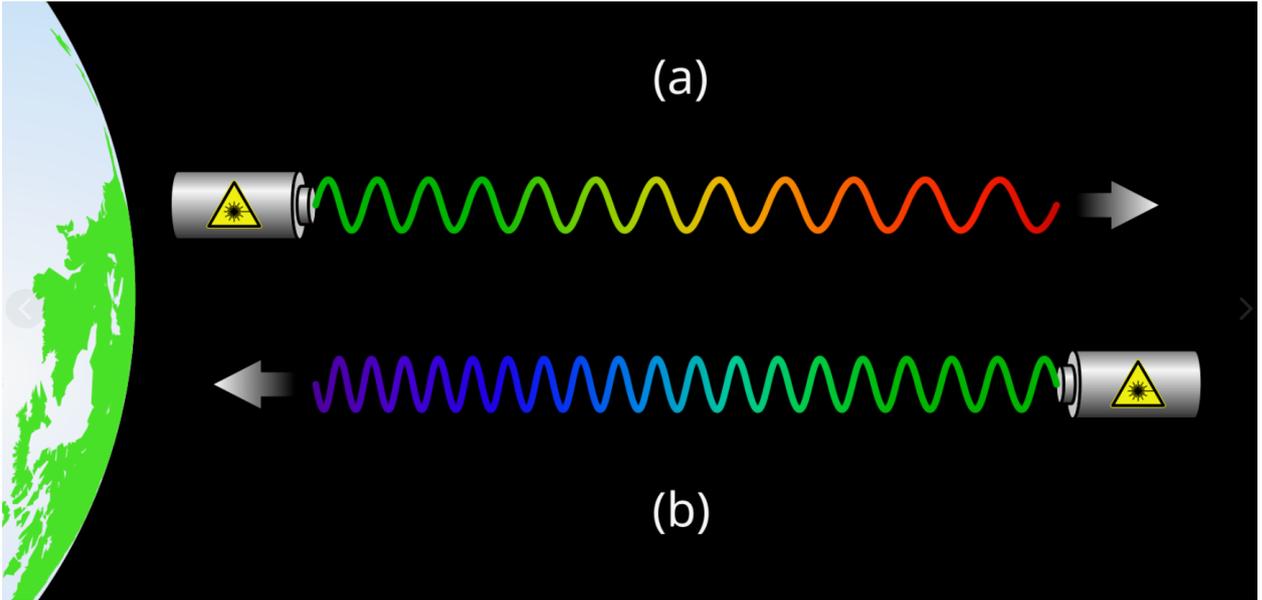


Рис. 1.1: Гравитационное смещение частоты для часов, расположенных в различных гравитационных потенциалах

эксперимент такого типа был проведен после открытия эффекта Месбауэра в 1958 году Паундом и Ребкой (1960 г.) [40]. Точность этого эксперимента составила 1% при вариациях высоты порядка 30 метров. В 2020 году с использованием токийской телебашни были получены результаты измерения параметра нарушения:  $(1,4 \pm 9,1) \times 10^{-5}$  для  $\Delta h = 450$  метров [42].

Следующим этапом повышения точности экспериментальных исследований стали эксперименты с большей вариацией гравитационного потенциала. Наиболее перспективным методом реализации таких исследований являются космические эксперименты со спутниками, оснащёнными высокоточными стандартами частоты. В условиях околоземного пространства, где гравитационный потенциал Земли существенно отличается от поверхностного, такие эксперименты могли бы обеспечить более точные измерения гравитационных эффектов.

### 1.3 Подробный анализ эксперимента Gravity Probe A

Развитие атомных стандартов частоты стало стимулом для проведения экспериментов по измерению «RedShift» эффекта. Как видно из формулы (1.2), для максимизации величины гравитационного сдвига необходимо поместить стандарты частоты в точках с наибольшей разностью гравитационных потенциалов. Для этих целей лучше всего использовать космические

аппараты. Исторически первым экспериментом такого типа стала миссия «Gravity-Probe A» (1976 г.), в ходе которой Н-стандарт был поднят на высоту  $10^4$  км баллистической ракетой. В апогее траектории, где разность гравитационных потенциалов была максимальна, данные со стандарта частоты, расположенного на КА, сравнивались с показаниями аналогичного наземного стандарта. Информация о частотных вариациях передавалась коммуникационными радиосигналами. Для проверки «RedShift» эффекта вводился специальный параметр нарушения теории  $\varepsilon$ , ошибка измерения которого позволяла сравнить результат эксперимента с предсказаниями формулы ОТО:

$$\frac{\Delta f_{grav}}{f} = \frac{\Delta U}{c^2}(1 + \varepsilon), \quad (1.8)$$

где  $\Delta f_{grav}$  - гравитационный сдвиг частоты,  $f$  - номинальная частота посылки сигнала с КА,  $\Delta U$  - разность гравитационных потенциалов,  $c$  - скорость света.

Параметр  $\varepsilon$  играет ключевую роль в экспериментах по выявлению расхождений между экспериментальными данными и предсказаниями существующих теорий гравитации, а также  $\varepsilon$  служит количественной оценкой степени несоответствия между теоретическими предсказаниями и реальными гравитационными эффектами. В частности, при проверке ОТО можно утверждать о согласованности теории и эксперимента, если величина  $\varepsilon$  не превышает погрешность её измерения. Параметр  $\varepsilon$  служит ключевым инструментом для сопоставления экспериментальных данных с теоретическими предсказаниями в гравитации. Его анализ позволяет оценить меру отличия предлагаемых модифицированных моделей гравитации от ОТО.

Для повышения точности оценки  $\varepsilon$  необходимо было учесть и компенсировать все когерентные эффекты, величина которых по порядку сопоставима с точностью используемых стандартов частоты или даже превышает её. Для компенсации эффекта смещения частоты, вызванного доминирующим эффектом Доплера первого порядка малости, в работе «Gravity Probe A» была разработана и реализована ключевая схема его online компенсации за счет **одновременных измерений в обоих режимах синхронизации** — однопутевом (1w) и двухпутевом (2w) — данный подход позволил эффективно устранить доплеровское смещение первого порядка малости, обеспе-

чив точность компенсации на уровне ограничения стабильности стандарта частоты.

Помимо доминирующего линейного доплеровского сдвига, систематическая погрешность измерений определялась совокупностью релятивистских, гравиметрических и геофизических эффектов. Их согласованный учет требовал разработки комплексной поправочной модели, учитывающей взаимное влияние гравитационного красного смещения, релятивистских поправок второго порядка, неоднородностей гравитационного поля и внешних электромагнитных возмущений.

1. **Гравитационное смещение:** точное определение гравитационного сдвига частоты требует совместного расчёта орбитальных координат КА и НСС, поскольку их пространственное положение непосредственно определяет локальные значения гравитационного потенциала.

2. **Эффект Доплера второго порядка малости:** хотя этот эффект менее значим по сравнению с эффектом первого порядка, однако он превышает собственную погрешность частотных стандартов. В конечном счете его компенсация определила точность всего эксперимента.

3. **Атмосферная задержка:** тропосферные и ионосферные эффекты распространения радиосигналов, обусловленные вариациями атмосферных параметров, вносят вклад в систематическую погрешность измерений.

4. **Несферичность Земли:** Земля не является идеальной сферой, её форма имеет отклонения, которые влияют на гравитационное поле и, соответственно, на частоту сигналов. Учёт этих несферичных эффектов позволяет точнее определять гравитационный потенциал.

Комплексный учет и коррекция систематических эффектов позволили повысить точность гравитационных измерений на четыре порядка по сравнению с классическими экспериментами Паунда-Ребки. Для лучшего понимания концепции эксперимента приведем краткое описание технических параметров космического аппарата и станции слежения. Основные элементы полезной нагрузки КА включали:

- **водородный мазер**, как высокостабильный квантовый генератор, обеспечивал эталонную частоту с относительной нестабильностью порядка  $\sim 10^{-14}$  на интервале длительности эксперимента,

- **фазово-синхронизированный S-диапазонный (2-4 ГГц) преобразователь**, сопряженный с водородным стандартом частоты, обеспечивал трансляцию высокостабильного сигнала для дальней космической связи,
- **специализированный S-диапазонный приемопередатчик** осуществлял двусторонний обмен радиосигналами с сохранением метрологических характеристик.

Вся полезная нагрузка массой 57 кг была стабилизирована вращением для сохранения ориентации в инерциальном пространстве.

Принципиальным элементом эксперимента стала система активной компенсации доплеровского сдвига в реальном времени, основанная на принципе когерентной двухканальной синхронизации. Эта система позволяет компенсировать изменения частоты, вызванные движением космического аппарата (КА) относительно наземной станции слежения (НСС). Компенсационная схема, разработанная для реализации этой концепции, состояла из двух каналов связи. Каждый из этих каналов выполнял специфические функции, необходимые для минимизации доплеровского сдвига и обеспечения стабильной передачи данных:

- Однопутевой канал связи ( $1w$ ) обеспечивал ретрансляцию сигнала с бортового стандарта частоты, несущего в себе совокупный гравитационный и релятивистский частотный сдвиг, включая все сопутствующие систематические эффекты.
- Двухпутевой канал связи, функционировавший по принципу «туда-обратно» или « $2w$ », базировался на фазово-когерентном микроволновом приемопередатчике, гравитационный сдвиг частоты в нем отсутствовал. Этот канал обеспечивал передачу данных доплеровской частоты в обоих направлениях, представляя разностную частоту в виде  $f_0 - f_{2w}$ .

Затем требовалось разделить эту разность на два и вычесть её из сигнала разностной частоты нисходящего канала, который был сдвинут на  $f_0 - f_{1w}$  из-за эффектов доплеровского сдвига первого порядка малости и релятивистских эффектов, включающих доплеровский сдвиг второго порядка ма-

лости и гравитационное красное смещение («RedShift»). После вычитания удалось устранить эффект доплеровского сдвига первого порядка, что позволило выделить релятивистские эффекты для их последующего измерения. Для этого требовалось учесть и компенсировать влияние ионосферы. Это было достигнуто путем тщательного подбора соотношений частот в режимах «1w» и «2w», что позволило нивелировать ионосферный сдвиг с относительной точностью не хуже  $5 \cdot 10^{-15}$ . Кроме того, для оценки вклада шумов стандарта частоты была проведена оценка дисперсии Аллана в апогее траектории КА.

Точность любого космического теста принципа эквивалентности существенно зависит от точного определения положения и скорости КА относительно наземной станции. Для достижения высокой точности компенсации доплеровского сдвига второго порядка и компонентов гравитационного красного смещения на уровне  $\pm 3 \cdot 10^{-15}$  необходимы следующие параметры:

- точность определения положения:  $\pm 100$  м,
- точность определения скорости:  $\pm 6$  см/с, вблизи апогея траектории КА.

В рамках эксперимента «Gravity Probe A» точное определение координат и скорости космического аппарата стало ключевым фактором, обеспечившим финальную точность всего исследования. Авторы представили два значимых результата своей работы: первый — с разделением гравитационного сдвига от релятивистского эффекта Доплера, второй — демонстрирующий совместный эффект [43]. Важно отметить, что в итоговом результате с разделенным эффектом недостаточная точность компенсации релятивистского эффекта Доплера была решающим фактором точности измерения  $\varepsilon$ .

## 1.4 GREAT

В 2018 году завершился космический эксперимент с использованием спутников глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС) GALILEO. Спутники Galileo GSAT0201 и GSAT0202 были запущены на ракете «Союз» в августе 2014 года, но из-за технической проблемы оказались на некор-

ректной орбите. Вместо запланированной круговой орбиты они оказались на вытянутой эллиптической орбите.

После запуска Европейское космическое агентство (ESA) стремилось найти подходящую орбиту для восстановления работоспособности спутников. Было проведено в общей сложности 11 маневров, чтобы сделать орбиту круговой.

В результате, конечная орбита двух спутников все равно осталась эксцентричной ( $\sim e = 0.1$ ), поэтому использовать их по прямому назначению для навигационных задач было нельзя. При этом спутники, обладающие достаточно большим эксцентриситетом, оказались хорошими кандидатами для проверки гравитационного красного смещения. Эллиптическая орбита вызывала периодическую модуляцию собственного времени часов с орбитальной частотой.

В ходе экспериментального исследования был задействован водородный атомный стандарт частоты, характеризующийся высокой стабильностью. Наземные испытания относительной стабильности частоты данного стандарта выявили преобладание фликкер-шума, уровень которого характеризуется дисперсией Аллана  $\sigma = 10^{-14}$  (относительная частота  $\frac{\Delta f}{f}$ ) при усреднении на интервале времени, соответствующем орбитальному периоду  $T = 12,94$  часа. Отсутствие доплеровской нерелятивистской схемы (наличие режимов 1w и 2w) компенсации потребовало высокоточного восстановления орбиты спутников. Наличие обширной сети лазерного слежения за ГНСС позволило авторам исследования использовать эти данные для компенсации доплеровского эффекта первого порядка малости.

Благодаря тщательному моделированию систематических эффектов и продолжительному накоплению данных, авторы эксперимента смогли достичь уровня точности измерения  $\sim 3 \times 10^{-5}$  [44, 45]. Точность измерений в данном исследовании на порядок превосходит результаты, достигнутые в рамках миссии «Gravity Probe-A».

## 1.5 Проектирование гравитационных измерений с КРТ «РадиоАстрон»

КРТ «РадиоАстрон» – уникальный аппарат для приёма сверхслабых радиосигналов в сантиметровом и дециметровом диапазонах. Работая как космическое плечо интерферометра, «РадиоАстрон» достиг рекордного углового разрешения, позволившего изучать чёрные дыры, пульсары и межзвёздную среду. Бортовой комплекс аппаратуры телескопа предназначен для решения ключевой научной задачи: многочастотный приём радиоизлучения слабых радиосигналов и многоступенчатое преобразование этих сигналов с предельно достижимыми фазовыми стабильностями к видеочастотам в полосе от 0 до 16 МГц, обеспечивающим высокоскоростную передачу и регистрацию бортовых данных на Земле. Запуск ракеты «Зенит-3Ф» с космическим аппаратом «Спектр-Р» состоялся 18 июля 2011 года в 5 часов 31 минуту 17,91 секунды по московскому декретному времени с 45-й площадки космодрома «Байконур». Антенна космического радиотелескопа была успешно раскрыта 23 июля 2011 года.

КА «Спектр-Р» представляет собой 10-метровый рефлектор, интегрированный с многодиапазонным приемным комплексом аппаратуры для работы на длинах волн 1.35, 6.2, 18 и 92 см. Для установки всего антенно-аппаратурного комплекса «РадиоАстрон» на космическом аппарате «Спектр-Р» используется базовая космическая платформа «Навигатор». Компоновка космического радиотелескопа (КРТ) и аппаратурного комплекса на модуле «Навигатор» показана на рис. 1.2

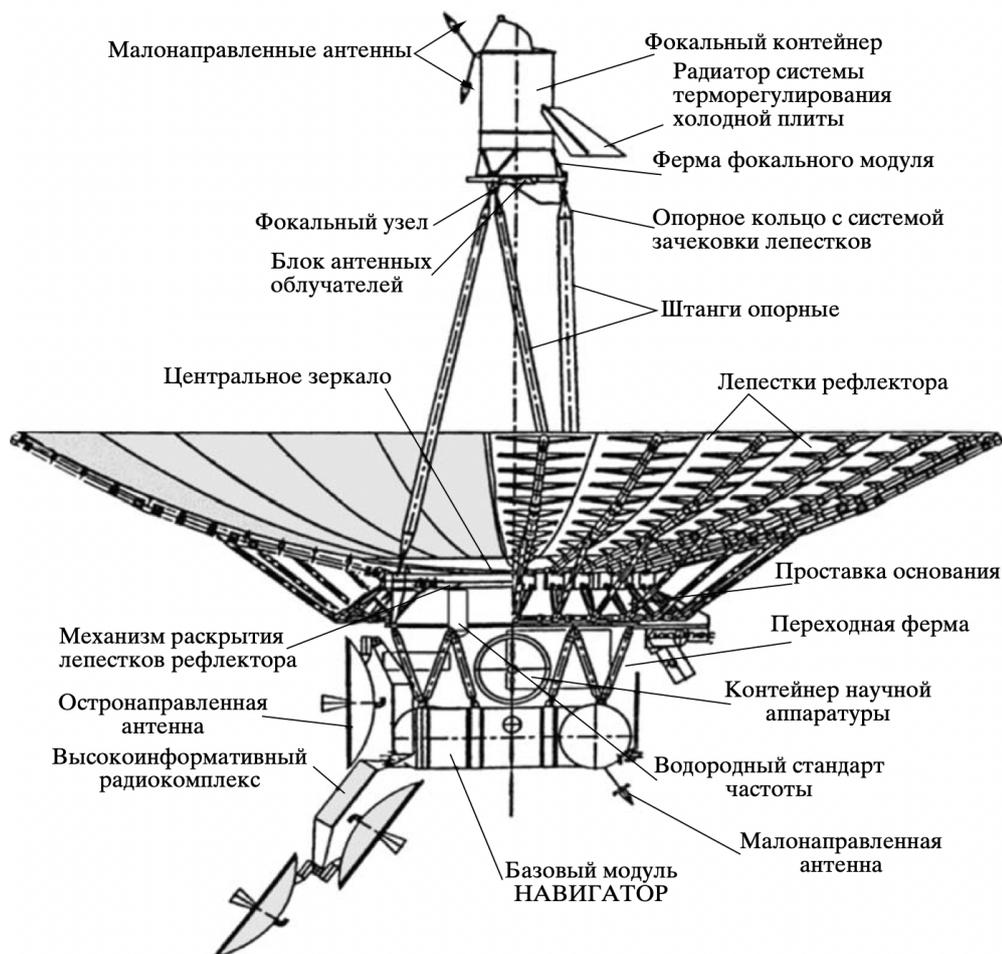


Рис. 1.2: Компоновка космического радиотелескопа на базовом модуле «Навигатор»

### 1.5.1 Параметры целевой орбиты

Целевая орбита характеризуется следующими параметрами:

- высота перигея  $h_p = 577$  км,
- высота апогея  $h_a = 336\,863$  км,
- наклонение орбиты  $i = 51.6^\circ$ .

Эти параметры определяют форму и ориентацию орбиты космического аппарата в пространстве.

Начальный этап летных испытаний КРТ в 2011 году характеризовался следующими ключевыми событиями: в период с середины сентября 2011 года осуществлено первое успешное включение радиоастрономических приемников, после чего начался этап плановых испытаний бортового научного оборудования. Начиная с 27 сентября, приступили к проведению радиометрических измерений характеристик космического радиотелескопа, в ходе

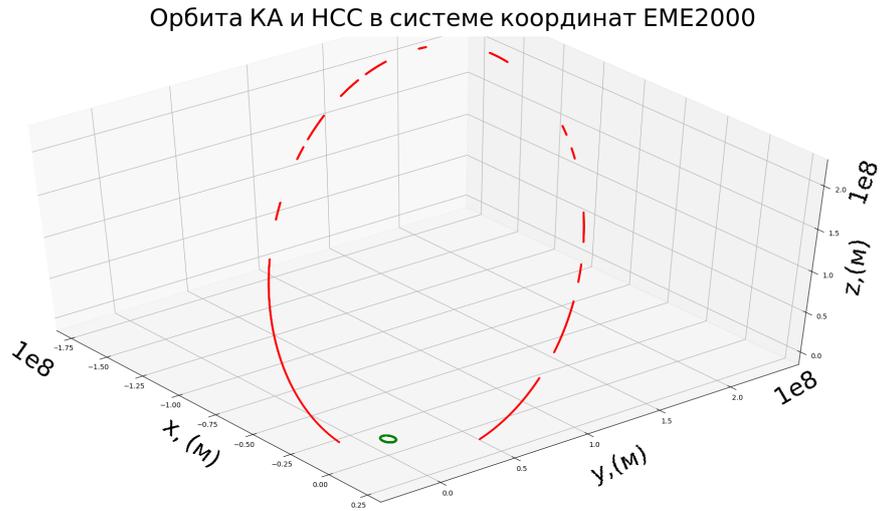


Рис. 1.3: Орбита КА полного цикла. Красным цветом показана орбита КА, разрывы в данных связаны с отсутствием реконструированной орбиты в эти периоды. Зеленым цветом показано движение НСС (вращение Земли) за время полного цикла КА на орбите

которых выполнялись наблюдения различных астрономических объектов в автономном режиме работы (без образования интерферометрической базы с наземными телескопами).

Разработка бортового научного комплекса КРТ велась с 1985 года совместными усилиями российских и международных организаций. Проект реализовывался в соответствии с едиными техническими требованиями к научной аппаратуре космического аппарата «Спектр-Р» и специфическими техническими заданиями для каждого научного прибора. Научное руководство проектом «РадиоАстрон» осуществлял астрофизический отдел ИКИ АН СССР (с 1990 года - Астрокосмический центр ФИАН) [46]. Создание космического аппарата было выполнено специалистами НПО имени С.А. Лавочкина.

## 1.6 Аппаратно-технический комплекс миссии «РадиоАстрон» в гравитационном эксперименте

Научный комплекс космического радиотелескопа состоит из следующих приборов и блоков, расположенных в соответствующих модулях:

### Фокальный модуль

В термостабилизированном охлаждаемом фокальном узле находятся:

- Блок соосных антенных облучателей на радиоастрономические диапазоны 1.35, 6.2, 18 и 92 см для левой и правой круговых поляризаций.
- Блоки малошумящих усилителей (МШУ), вынесенные из приемников диапазонов 1.35, 6.2 и 18 см.

### Фокальный контейнер

В охлаждаемом герметичном фокальном контейнере размещены:

- Научные приемники указанных четырех диапазонов (обозначены ПРМ на рисунке 1.2) с отдельными источниками вторичного электропитания для обеих поляризаций принимаемого радиоизлучения.
- МШУ диапазона 92 см находится внутри соответствующего приемника, который объединен с блоком импульсной фазовой калибровки для всех диапазонов.
- Селектор ПЧ, коммутирующий выходные сигналы приемников на промежуточной частоте (ПЧ) на соответствующие входы преобразователей частоты форматора (блок П-КРТ-Пр) для дальнейших преобразований сигналов к более низким частотам.
- Частотный формирователь ГСВЧ, состоящий из двух блоков формирователя гетеродинных сверхвысоких частот (ФГСВЧ-1 и ФГСВЧ-2) с источниками вторичного электропитания (ИВЭП ФГСВЧ).
- Задублированный блок управления и анализа состояний (БУАС-Ф) с блоком коммутации питания (БКП-Ф).

## Приборный модуль

В приборном модуле установлены:

- Два бортовых водородных стандарта частоты (БВСЧ).
- В термостабилизированном герметичном научном контейнере размещены два бортовых рубидиевых стандарта частоты (БРСЧ, Rb-стандарт на рисунке 2), частотный формирователь ГТЧ со сдвоенным блоком формирователя гетеродинных и тактовых частот (ФГТЧ) и двумя источниками питания (ИВЭП ФГТЧ) для них.
- Два аналого-цифровых преобразователя сигналов блока П-КРТ-Пр (Форматор).
- Задублированный блок управления и анализа состояний научного контейнера (БУАС-П) с блоками питания.

Схема соединения приборов для калибровки канала 15 ГГц

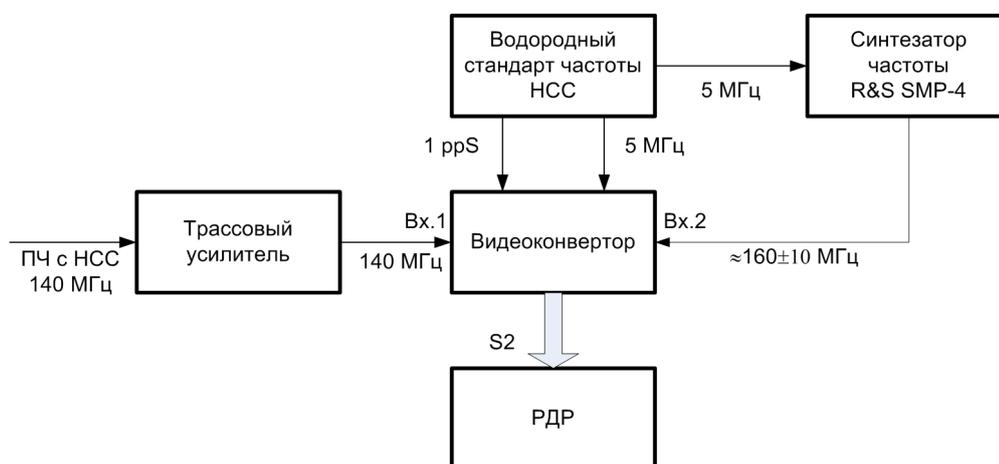


Рис. 1.4: Схема соединения приборов для калибровки канала 15 ГГц

Для успешного решения задачи все приборы линии «бортовой приёмник → преобразователь частот → бортовой передатчик → наземная станция приёма» должны работать безупречно. Потеря сигнала или фазовой стабильности в одном из элементов приведёт к потере информации и дорогого наблюдательного времени для радиотелескопов наземно-космического радиоинтерферометра. По этой причине в бортовой научный комплекс введены аппаратное дублирование блоков и приборов и функциональная из-

Схема соединения приборов  
для одновременной записи сигналов из каналов 8,4 ГГц и 15 ГГц

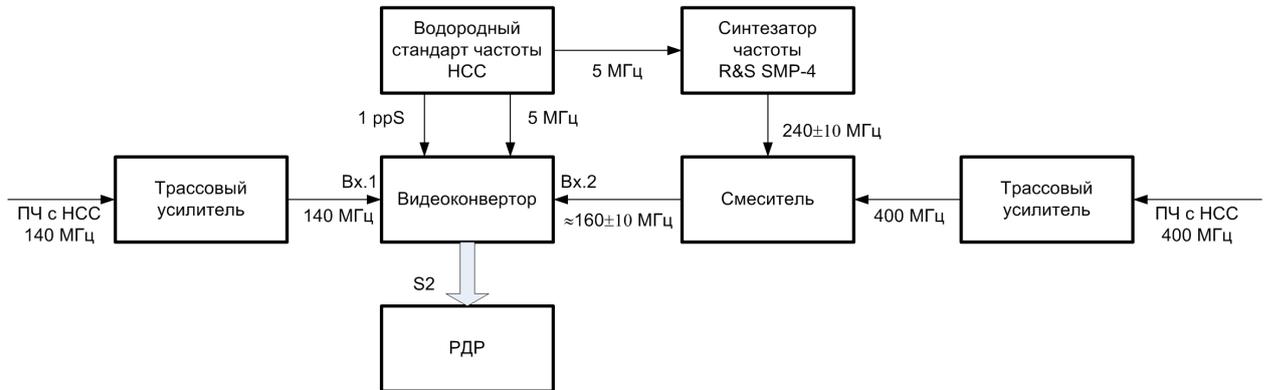


Рис. 1.5: Схема соединения приборов для одновременной записи сигналов 8.4 и 15 ГГц

быточность, что позволило компоновать эту последовательную линию из большого числа сочетаний приборов и блоков. Всё это существенно повысило надёжность работы комплекса в целом. Положительный эффект такого подхода сказался уже на этапе лётных испытаний КРТ. Так, из двух установленных на борту и испытанных в полёте водородных стандартов частоты только один оказался соответствующим проектным требованиям.

## Бортовые стандарты частоты

В радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами ключевую роль играет стабильность частоты (фазы), определяемая стандартом частоты, сигнал которого используется в качестве первичного опорного для последовательных частотных преобразований. Благодаря наличию такого стандарта можно было проводить прецизионные эксперименты по измерению «RedShift» эффекта.

Функционирование КРТ предусматривает работу с опорными сигналами от трёх источников:

- Бортового водородного стандарта частоты **БВСЧ** (5 МГц или 15 МГц).
- Сигнала 15 МГц петли фазовой синхронизации **ПФС ВИРК**, синхронизированного с сигналом наземного водородного стандарта частоты на станции слежения.
- Бортового рубидиевого стандарта частоты **БРСЧ** (5 МГц).

**БВСЧ КРТ** — первый в мире бортовой активный водородный стандарт частоты на околоземной орбите, успешно участвующий в реализации орбитальной программы более года. Его создание в ЗАО «Время-Ч» включало решение специальных задач:

- Вакуумирование термостатов за счёт космического вакуума.
- Усиление механической стойкости конструкции резонатора и накопительной колбы для жёстких условий вывода на орбиту.
- Температурная стабилизация стандарта с помощью системы обеспечения температурного режима и теплоизоляции конструкции.
- Проведение наземных испытаний в условиях космического вакуума.
- Решение технологических проблем, связанных с эксплуатацией в космическом вакууме.

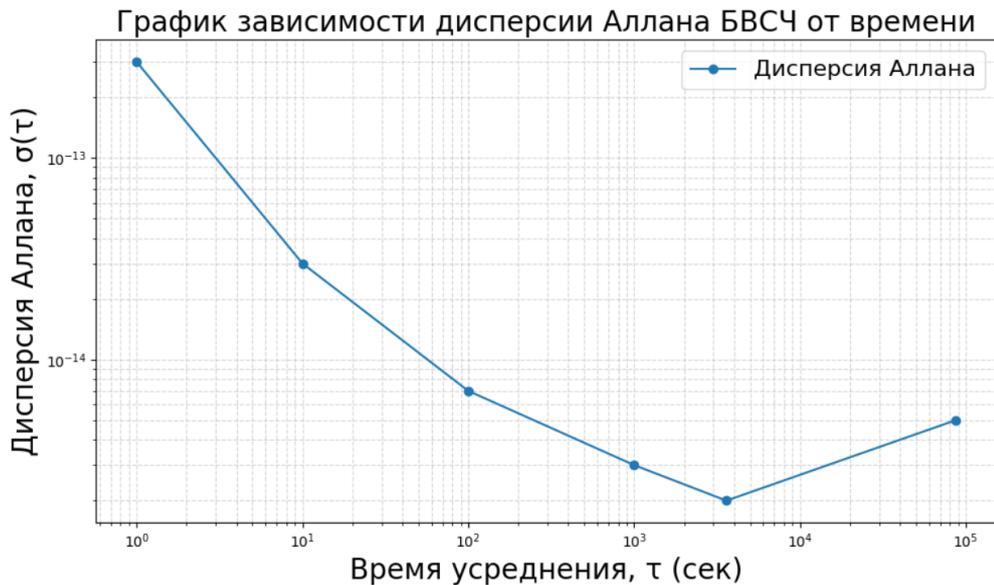


Рис. 1.6: Нестабильность частоты (среднеквадратическое относительное двухвыборочное отклонение частоты выходного сигнала 5 МГц) при изменении температуры окружающей среды в пределах  $\pm 1^\circ\text{C}$  в рабочем диапазоне температур и скорости изменения температуры не более  $0,3^\circ\text{C}/\text{час}$

## Высокоинформативная радиолиния «КРТ–Земля»

В состав высокоинформативной радиолинии входят бортовой комплекс ВПК и наземная станция слежения и сбора научной информации, созданная на

базе радиотелескопа РТ-22 ФИАН Пушчинской радиоастрономической обсерватории им. В.В. Виткевича АКЦ ФИАН (г. Пушино, Московская область).

### **Бортовой комплекс ВИРК**

Высокоинформативный радиоканал и бортовой комплекс ВИРК предназначены для передачи высокоскоростной видеоинформации от космического радиотелескопа на наземную станцию слежения и для синхронизации бортовой опорной частоты сигналом от наземного водородного стандарта в одном из режимов работы КРТ и ВИРК.

Комплекс ВИРК может функционировать в одном из двух режимов:

- **«КОГЕРЕНТ» или 2w:**

- Синхронизация бортового опорного сигнала на частоте 15 МГц для системы формирования частот **КРТ**.
- Синхронизация сигналов передатчиков **ВИРК** на частотах 8.4 ГГц (мощностью 2 Вт) и 15 ГГц (мощностью 40 Вт) от наземной станции на основе наземного водородного стандарта частоты и передаваемым на борт с наземной станции слежения.

- **«Н-мазер» или 1w:**

- Синхронизация сигналов передатчиков **ВИРК** осуществляется на частоте 15 МГц от бортового водородного стандарта частоты.
- Возможна работа комплекса **ВИРК** с пониженным уровнем излучения мощности передатчика (4 Вт) на частоте 15 ГГц.

Этот комплекс обеспечивает надежную и стабильную передачу данных, необходимую для работы КРТ, в различных режимах работы.

В состав ВИРК входят антенно-фидерная система и бортовой радиотехнический комплекс:

### **Бортовой радиотехнический комплекс ВИРК**

Бортовой радиотехнический комплекс ВИРК содержит:

- приёмответчик петли фазовой синхронизации на частоту 7.2/8.4 ГГц,

- радиопередающее устройство РПДУ-15 на частоту 15 ГГц.

Наземная станция слежения и сбора научной информации является частью высокоинформативной радиолинии «КРТ–Земля» в проекте «Радио-Астрон». Структурная схема станции приведена на рис. 1.7.

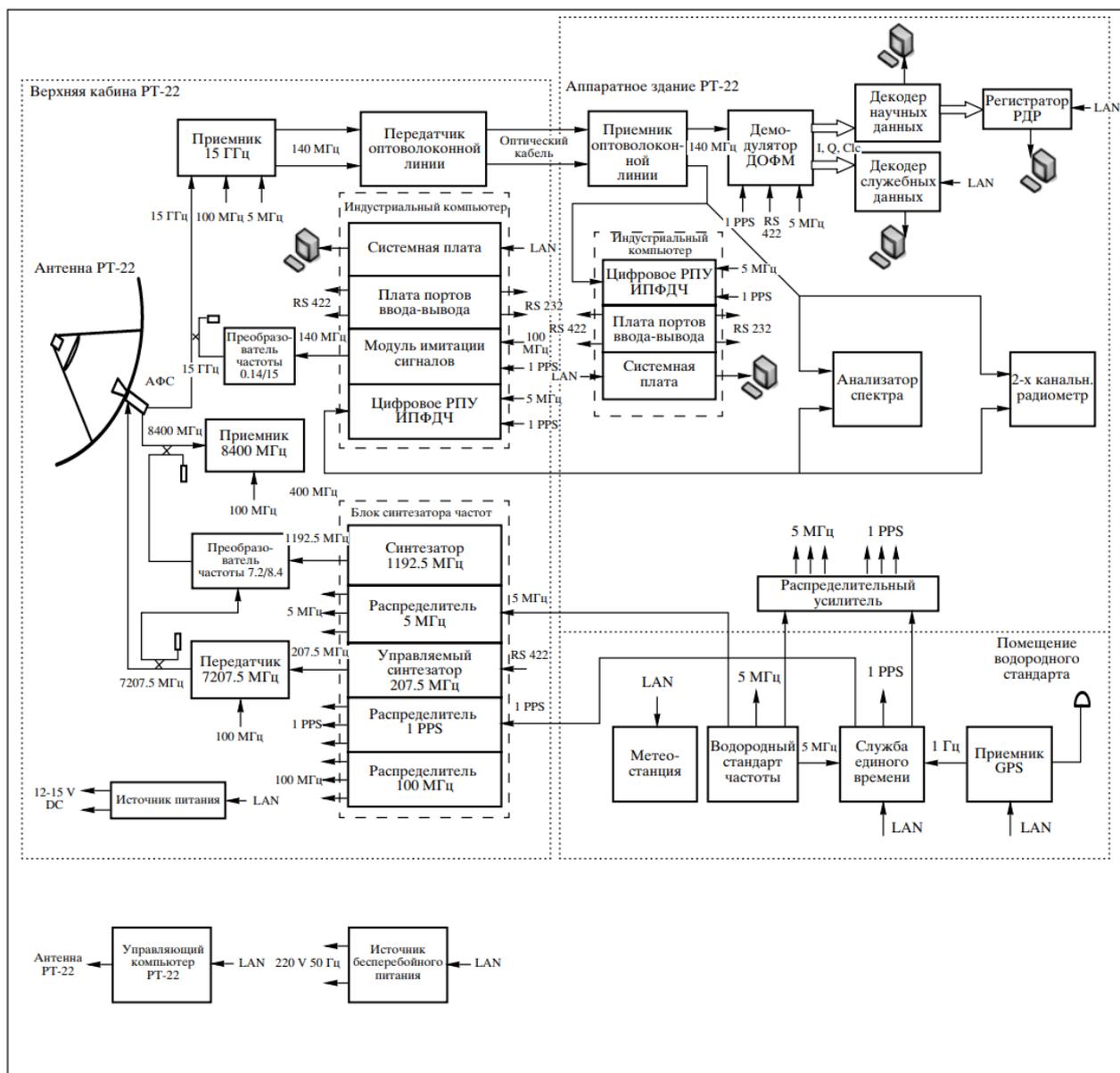


Рис. 1.7: Структурная схема наземной станции слежения в Пуцзино

## Антенно-фидерная система

Антенно-фидерная система включает в себя:

- двухзеркальную приёмо-передающая остронаправленная антенна диаметром 1.5 м,
- вращающееся волноводное сочленение, соединённое с приводом этой антенны,
- волноводный тракт и фильтры.

Станция предназначена для:

1. Наведения наземного радиотелескопа РТ-22 ФИАН на КРТ и слежения за ним в течение сеанса связи.
2. Приёма и регистрации потока научных и служебных данных с борта космического аппарата.
3. Передачи на борт аппарата фазостабильного опорного сигнала, синхронизированного наземным водородным стандартом частоты («Н-мазером» станции слежения).
4. Приёма когерентно преобразованного на борту космического аппарата ответного сигнала, измерения текущей частоты остаточного доплеровского сдвига и текущей разности фаз ответного и запросного сигнала, регистрации этих измерений с привязкой к текущему времени.
5. Приёма внешних данных, необходимых для работы наземной станции, и выдачи потребителям информации о состоянии наземной станции слежения и сбора данных.

В состав наземной станции слежения входят:

- Антенна радиотелескопа РТ-22 ФИАН, система наведения, облучатель и антенно-фидерные тракты на диапазоны частот 15, 8.4 и 7.2 ГГц.
- Приёмо-передающая система фазовой синхронизации в диапазонах частот 7.2 и 8.4 ГГц.

- Система приёма научных и служебных данных в диапазоне 15 ГГц.
- Система измерения остаточного доплеровского сдвига и вариации фазы сигналов ВИРК.
- Система регистрации научных и служебных данных.
- Система опорных частот, служба времени и метеостанция.
- Управляющий компьютер и программное обеспечение станции.
- Аппаратура контроля работоспособности станции.
- Аппаратура внешней связи и распределительная кабельная сеть.

Проведены измерения эффективной площади антенны РТ-22 с антенно-фидерной системой станции слежения и шумовой температуры приёмной системы. Измеренная величина эффективной площади РТ-22 на частоте 15 ГГц составила  $170 \text{ м}^2$ . Шумовая температура приёмной системы на частотах 8.4 и 15 ГГц составила около 100 К.

## **1.7 Чередование режимов: устранение Доплеровского сдвига частоты 1-го порядка**

Нерелятивистский эффект Доплера представляет собой один из ключевых факторов, влияющих на сдвиг частоты радиосигналов в спутниковых экспериментах. Этот эффект обусловлен относительным движением источника сигнала (КА) и станции слежения, расположенной на Земле. Для проведения прецизионных измерений, таких как определение гравитационного смещения частоты или исследование релятивистских эффектов, необходимо учитывать и компенсировать влияние эффекта Доплера. Основным методом компенсации является использование данных о радиальной скорости космического аппарата, что позволяет минимизировать искажения, вызванные относительным движением.

В эксперименте с использованием спутников Galileo нерелятивистский эффект Доплера компенсировался с высокой точностью благодаря применению двух ключевых методов:

- **Сеть стационарных ГНСС станций слежения:** обеспечивали непрерывный мониторинг положения и скорости спутников, что позволяло точно определять радиальную скорость КА.
- **Метод лазерной дальнометрии:** лазерные измерения расстояния до спутников обеспечивали дополнительные поправки в определении их траекторий.

Такой подход позволил достичь точности компенсации эффекта Доплера, достаточной для измерения гравитационного сдвига частоты с относительной погрешностью не хуже  $3 \times 10^{-5}$ .

Эксперимент с космическим радиотелескопом «РадиоАстрон» предъявляет более строгие требования к точности компенсации эффекта Доплера. Для достижения точности лучше  $10^{-4}$ , необходимо учитывать эффект Доплера с точностью, соответствующей радиальной скорости КА порядка 1 мкм/с. Однако методы оценки радиальной скорости спутника РадиоАстрон обеспечивали точность лишь на уровне 3 мм/с, что на три порядка хуже требуемого значения.

Для компенсации эффекта Доплера без привлечения данных о скорости КА, на этапе подготовки программы гравитационных сеансов была разработана схема чередования двух режимов работы высокоинформативного радиоканала (ВИРК) [15].

Разработанная схема была похожа на схему, реализованную в эксперименте «Gravity Probe A», и базировалась на двух режимах связи: «1w» и «2w». В режиме 1w (однопутевая линия «КА - НСС», синхронизированная по бортовому стандарту частоты), принятый сигнал на НСС имел смещение частоты:

$$\frac{\Delta f_{1w}}{f_{\text{номинал}}} = -\frac{\dot{D}}{c} + \frac{\Delta U}{c^2} + \frac{|\vec{v}_e - \vec{v}_s|^2}{2c^2} + \frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_s}{c^2} + \frac{\Delta f_{\text{тропо}}}{f_{\text{номинал}}} + \frac{\Delta f_{\text{ионо}}}{f_{\text{номинал}}^2} + \frac{\Delta f_{3rd}}{f_{\text{номинал}}} \quad (1.9)$$

где  $\dot{D}$  – скорость изменения величины вектора дальности  $\vec{D}$ ,  $\vec{v}_e$  – вектор скорости НСС,  $\vec{v}_s$  – вектор скорости КА,  $\frac{\Delta f_{\text{тропо}}}{f_{\text{номинал}}}$  – относительный тропосферный сдвиг,  $\frac{\Delta f_{\text{ионо}}}{f_{\text{номинал}}^2}$  – относительный ионосферный сдвиг,  $\vec{a}_s$  – ускорение космического аппарата,  $\frac{\Delta f_{3rd}}{f_{\text{номинал}}}$  – включает эффекты третьего порядка малости, в том числе эффект движения фазового центра.

В режиме «2w» (двухпутевая линия «НСС - КА - НСС», синхронизированная по наземному стандарту частоты) формула для смещения частоты сигнала имела вид:

$$\frac{\Delta f_{2w}}{f_{\text{номинал}}} = -2\frac{\dot{D}}{c} + 2\frac{|\vec{v}_e - \vec{v}_s|^2}{2c^2} + 2\frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_s}{c^2} - \quad (1.10)$$

$$2\frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_e}{c^2} + 2\frac{\Delta f_{\text{тропо}}}{f_{\text{номинал}}} + \frac{\Delta f_{2w, \text{ионо}}}{f^2} + \frac{\Delta f_{2w, 3rd}}{f_{\text{номинал}}}$$

где  $\vec{a}_e$  – ускорение наземной станции слежения,  $\frac{\Delta f_{2w, \text{ионо}}}{f^2}$  – относительный ионосферный сдвиг в режиме 2w, который не равен ионосферному сдвигу в режиме 1w и  $\frac{\Delta f_{2w, 3rd}}{f_{\text{номинал}}}$  – малые эффекты, аналогичные 1.9. Все остальные обозначения совпадают с формулой 1.9.

Особенность рассматриваемого режима заключается в том, что сигнал «2w» не содержит гравитационного сдвига частоты, который является ключевым объектом исследования. Однако «2w» сигнал подвергается удвоенному доплеровскому и тропосферному сдвигу частоты по сравнению с сигналом «1w», а также содержит удвоенные вклады шумов среды распространения и ряда инструментальных эффектов.

Комплексная обработка данных «1w» и «2w» позволяет эффективно компенсировать указанные эффекты. В частности:

- **Доплеровский сдвиг:** удвоенный доплеровский сдвиг в сигнале «2w» может быть вычтен из данных «1w», что позволяет устранить его влияние.
- **Тропосферный сдвиг:** аналогичным образом компенсируется тропосферный сдвиг, который также удваивается в сигнале «2w».

Компенсационная схема с использованием «1w» и «2w» режимов связи дает:

$$\frac{\Delta f_{1w}}{f_{\text{номинал}}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta f_{2w}}{f_{\text{номинал}}} = \frac{\Delta U}{c^2} - \frac{|\vec{v}_e - \vec{v}_s|^2}{2c^2} + \frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_e}{c^2} + \frac{\Delta f_{\text{ионо}}}{f^2} + \frac{\Delta f_{3rd}}{f_{\text{номинал}}} \quad (1.11)$$

Во втором и третьем слагаемом учитывается остаточный эффект Доплера 2-го порядка после применения компенсационной схемы, в последнем слагаемом учитываются остаточные эффекты, такие как влияние оста-

точного вклада тропосферы, остаточный вклад ионосферы, движение фазового центра антенны, а также вклад эффекта Доплера третьего порядка малости. Для достижения запланированной точности эксперимента необходимо учитывать относительные сдвиги частоты, превышающие величину  $10^{-14}$ , включая некоторые слагаемые третьего порядка по  $\frac{v}{c}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f_{3rd}}{f_{nominal}} = & -\frac{D}{c^3}(\vec{D} \cdot \vec{j}_e + (\vec{v}_e - \vec{v}_s) \cdot \vec{a}_s + \nabla U_s \cdot \vec{v}_s) \\ & -\frac{\dot{D}}{c^3}\vec{D} \cdot \vec{a}_e + \frac{D}{c^3}(2(\vec{v}_e - \vec{v}_s) \cdot \vec{a}_e + \nabla U_e \cdot \vec{v}_e) \\ & -\frac{\dot{D}}{c^3}[\Delta U - \frac{1}{2}|\vec{v}_e - \vec{v}_s|^2] + O(v/c)^4 \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $\vec{j}_e$  – член, описывающий неравномерность вращения НСС.

В отличие от эксперимента «Gravity Probe-A», в миссии «РадиоАстрон» одновременная передача данных в режимах «1w» и «2w» была невозможна из-за аппаратных ограничений КА. Чтобы использовать преимущества обоих режимов работы, была разработана и реализована следующая схема проведения гравитационных сеансов:

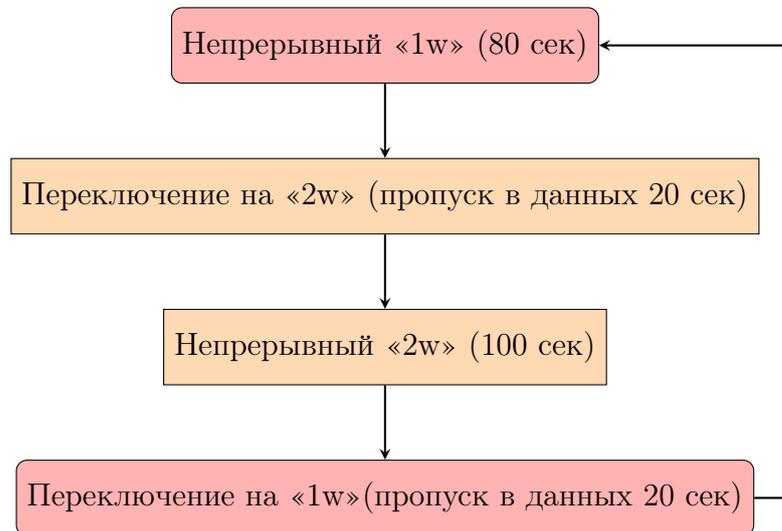


Рис. 1.8: Принципиальная блок-схема проведения гравитационных сеансов. После завершения одной итерации процесс повторялся. Всего выполнялось 10 итераций, что позволяло накопить достаточное количество данных.

## 1.8 Краевые эффекты в цепочке измерительных интервалов

В процессе формирования сигнала на КА бортовой комплекс связи выполняет последовательность преобразований, включая переключения между стандартами частоты, гетеродинирование и другие технические операции. Данные преобразования, несмотря на соответствие регламентированной циклограмме, приводят к кратковременной нестабильности сигнала в начальный момент приема на НСС. Наблюдаемые искажения проявляются в первые секунды после активации каждого из режимов работы, что обусловлено переходными процессами в аппаратном тракте, включая установление частоты и фазы. На рисунке 1.9 визуально видны выбросы, объясняемые потерей захвата сигнала.

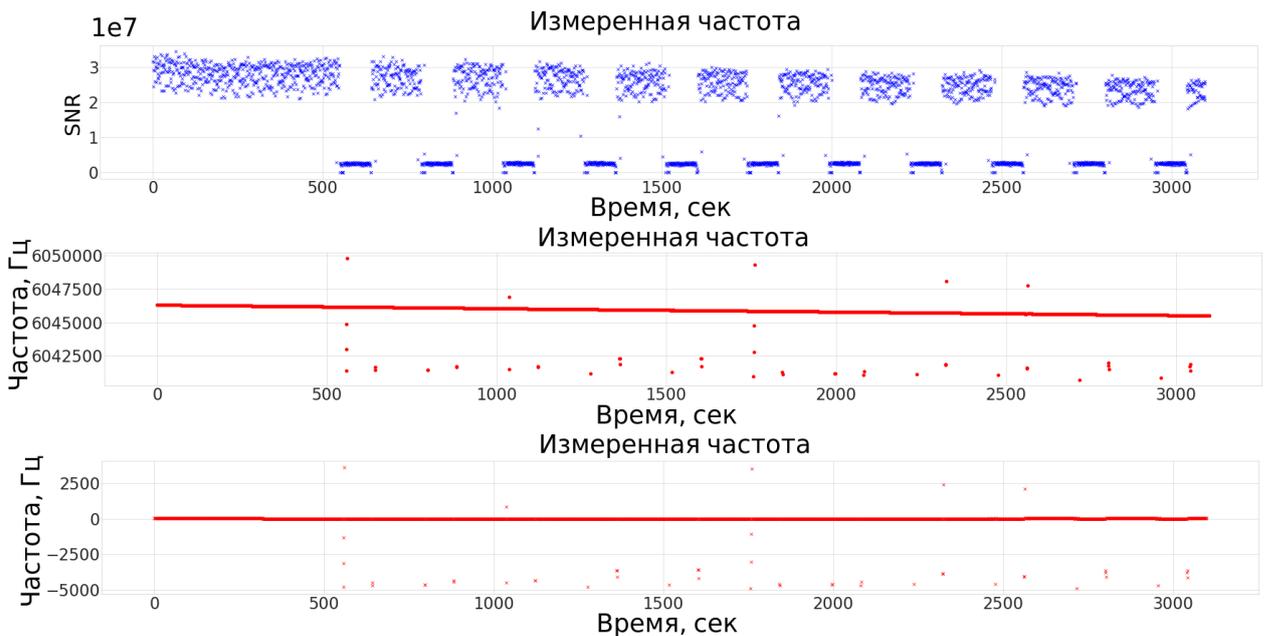


Рис. 1.9: Пример записи сигнала с переключениями. Выпадающие точки вызваны краевыми эффектами во время смены режима работы ВПК.

Для минимизации влияния зашумленных участков на последующую обработку применялся автоматизированный алгоритм исключения фрагментов с низким отношением сигнал-шум (SNR), а также критерий  $3\sigma$  [16]. Однако в отдельных сеансах связи требовалось дополнительное ручное маскирование данных, поскольку автоматические методы не всегда обеспечивали достаточную точность идентификации полезного сигнала на фоне переходных процессов. Удаление нестабильных участков приводило к сокращению

общей длительности анализируемого сигнала на 7–12 секунд, что в ряде случаев оказывало влияние на точность оценки частоты, особенно в условиях ограниченного времени сеанса.

## 1.9 Проблемы, сопутствующие online компенсации доплеровского сдвига 1-го порядка

На схеме (на рис. 1.10) режимов работы в «1w» и «2w» линии кратко представлены основные этапы преобразования частот восходящей и нисходящей линий связи. В режиме 2w сигнал посылается на КА с частотой 7.2 ГГц, а затем преобразовывается на 8.4 и 15 ГГц. Компенсационная схема требует учета времени распространения сигнала в «2w» режиме до КА от НСС и от КА на НСС. За время  $\Delta t$  станция совершает поворот и сигнал, который вернулся с КА приходит в другую точку. Для этого введем ряд обозначений на рис. 1.11.

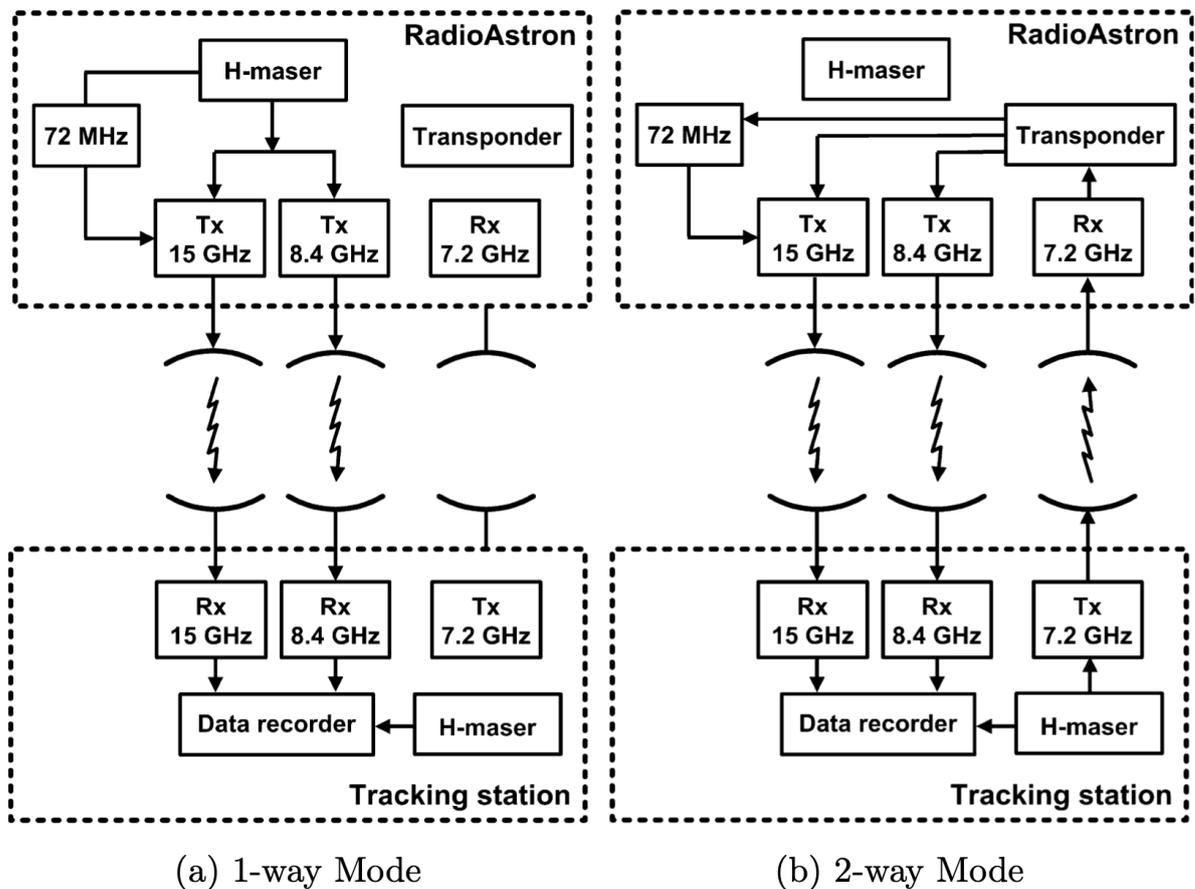


Рис. 1.10: Схема режима работы в «1w» и «2w» линии. H-maser - водородный стандарт частоты

Передача сигнала с КА на НСС происходит не мгновенно, а с задержкой, связанной с временем распространения сигнала. Для учета этой задержки рассмотрим три ключевых события, связанных с передачей сигналов между НСС и КА:

**1. Посылка сигнала фазовой синхронизации восходящей линии:**

- Момент времени:  $t_1$  (обозначен как событие 1).
- Действие: наземная станция отправляет сигнал фазовой синхронизации по восходящей линии связи.

**2. Прием сигнала восходящей линии и посылка сигнала нисходящей линии:**

- Момент времени:  $t_2$  (обозначен как событие 2).
- Действие: КА принимает сигнал восходящей линии и «одновременно» отправляет сигнал нисходящей линии.

**3. Прием сигнала нисходящей линии на наземной станции:**

- Момент времени:  $t_3$  (обозначен как событие 3).
- Действие: НСС принимает сигнал нисходящей линии.

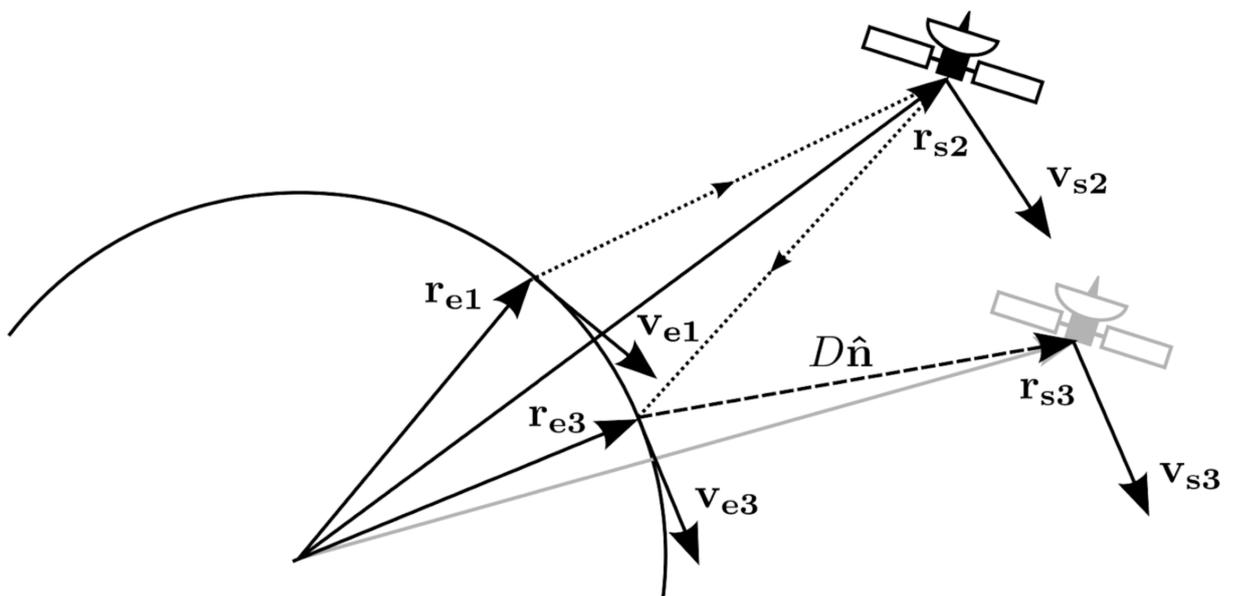


Рис. 1.11: Вектора-состояния в моменты посылки, ретрансляции и приема сигнала

## Определение векторов состояния

Вектор дальности  $\vec{D}$  определяется как разность векторов положения космического аппарата  $\vec{r}_s$  и наземной станции  $\vec{r}_e$  в момент времени  $t_3$ :

$$\vec{D} = \vec{r}_s - \vec{r}_e = D\hat{n},$$

где  $D$  — расстояние между аппаратом и станцией, а  $\hat{n}$  — единичный вектор направления.

Все остальные векторы состояния также определяются в момент времени  $t_3$ , что позволяет синхронизировать измерения и упростить анализ данных.

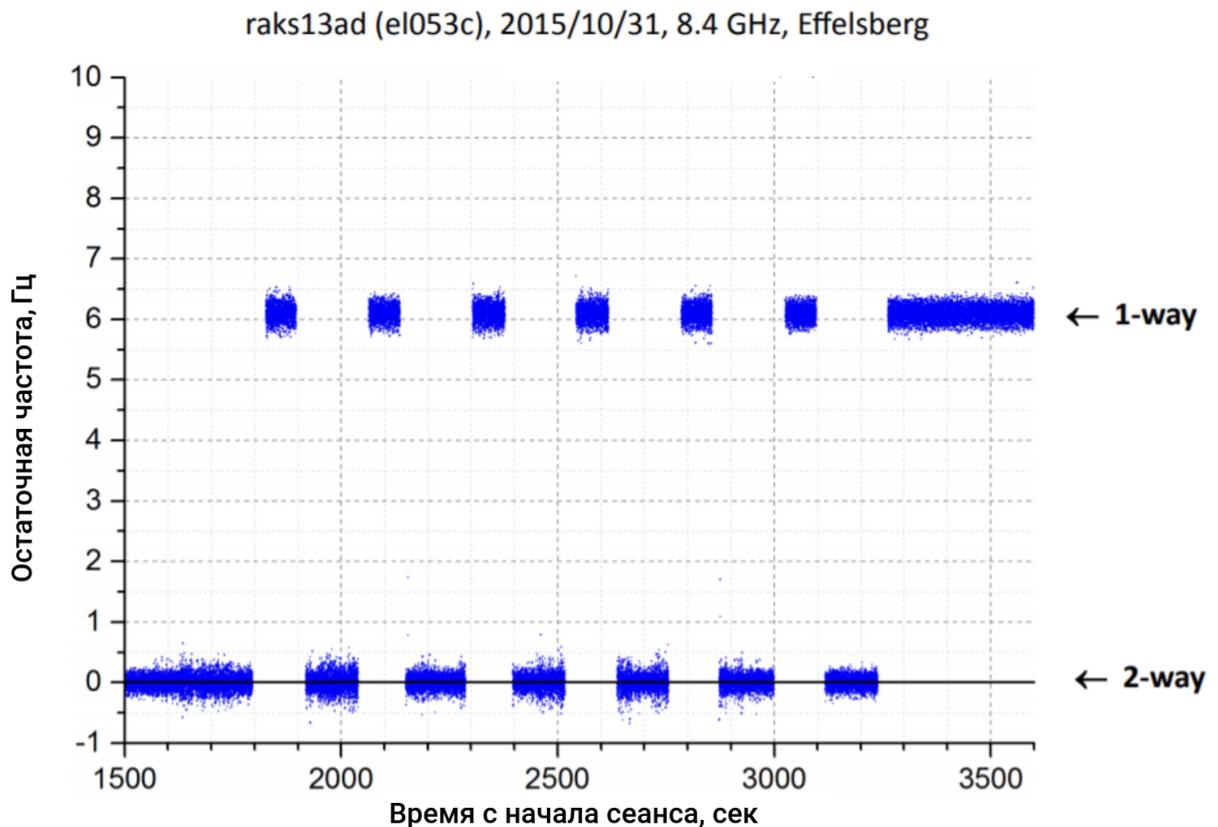


Рис. 1.12: Пример сеанса с «1w» и «2w» переключениями

Для восстановления данных в режиме «2w» на участках, соответствующих работе в режиме «1w», а также для заполнения пропусков в данных (визуально различимы на рис. 1.12, общее время пропуска между соседними интервалами «2w» не более 120 сек) использовались данные соседних интервалов, близких к интервалу с «1w» данными. Для интерполяции применялся полином второй степени по частоте, что позволило обеспечить плавное восстановление сигнала с достаточной точностью. В результате была получена синхронная запись частоты сигнала для обоих режимов

связи («1w» и «2w»), что обеспечило возможность их совместного анализа и компенсации систематических погрешностей.

## 1.10 Ошибка оценки частоты на интервалах конечной длительности

Измерения гравитационного смещения частоты («RedShift» эффект) коммуникационных радиосигналов в рамках миссии RadioAstron (RA) на уровне практических действий сводятся к многократному повторению измерений несущей частоты сигнала и его «ширины линии» (которая фактически задает ошибку определения несущей). Очевидно, что в этом случае максимальная точность (или минимальная относительная ошибка) может быть равна или больше относительной стабильности опорного водородного стандарта (H-Maser), используемого в процессе синхронизации радиосигналов. У миссии RadioAstron в терминах дисперсии Аллана это была величина  $\Delta f/f \approx 10^{-14}$  при времени усреднения  $\sim 10^2$  сек, что в 2-3 раза лучше чем в эксперименте «Gravity Probe-A».

Процедура измерения частоты сигнала выполнялась online на НСС. Типичный эмпирический алгоритм содержит ряд преобразований между частотными и временными пространствами (областями). Обычно вначале строился спектр сигнала. Затем область максимума частотных компонент фильтруется спектральным окном и смещается в низкочастотную зону. Возвращение к временной области воспроизводит медленную эволюцию фазы на интервале наблюдения; фазовый дрейф оценивается с помощью LSM (метод наименьших квадратов), что приводит к построению кривой регрессии. После вычитания её из полной фазы получают «остатки», называемые «остановленной фазой». Производная «остановленной фазы» как выходной сигнал алгоритма JIVE [22] дает оценку значения частоты.

Процедура «RedShift» измерений выполнялась в комбинированной моде одно- и двухпутевого режимов с соответствующим переключением между опорными стандартами частотной синхронизации (бортовым и наземным). Для получения однократного измерения гравитационного сдвига требовалось использовать два двухпутевых отрезка с интерполяционной оценкой частоты коммуникационного сигнала между ними, где уже имелось изме-

ренное значение однопутевой частоты. В итоге на специализированном гравитационном сеансе, длительностью порядка  $40 \div 60$  мин, могло набраться до 12 независимых измерений гравитационного сдвига.

Частые переключения режимов синхронизации, однако, повлекли за собой ухудшение разрешающей способности алгоритма JIVE по измерению параметров коммуникационных радиосигналов. Хотя средняя частота несущей как прежде допускала измерительную оценку, её точность, т.е. «ширина линии» теперь не могла быть измерена достоверно. Алгоритм JIVE эффективно работает только для длинных сигналов. В частности, в миссии РадиоАстрон это коммуникационные сигналы с длительностью 20 минут и более.

В этих условиях практически единственной возможностью остается обращение к алгоритму максимального правдоподобия в задаче оптимальной оценки параметров принимаемого сигнала (в данном случае, его несущей частоты). Математический аппарат соответствующей теории хорошо разработан, особенно на фоне гауссовых шумов. В рамках данного подхода имеет место эффективная (несмещенная) оценка дисперсии несущей частоты  $D_f$  сигнала в форме, так называемого «неравенства Крамера-Рао» в виде:

$$D_f \geq (1/I_f), \quad (1.13)$$

где  $I_f$  – информационная матрица Фишера (в случае вектора параметров и инфо-модуль для единичного элемента). Её связь с логарифмом функции правдоподобия  $\Lambda(f)$  определена формулой  $|I_f| = \frac{\partial^2 \log \Lambda(f)}{\partial f^2}$ . Таким образом, «граница Крамера-Рао» определяет минимальное значение дисперсии измеряемого параметра. Ключевым вопросом для практики служит вопрос, при каких условиях в реальном эксперименте неравенство в формуле (1.13) можно заменить равенством. Эта проблема неоднократно обсуждалась как с чисто теоретико-математической точки зрения [23, 24, 25, 26, 27], так и практическими измерителями в связи с разнообразными задачами предельных измерений, главным образом в радионавигации и радиолокации [29, 30, 31, 32, 33].

Так, в математической монографии [25] указывается, что в выражении (1.13) можно использовать знак равенства для выборок с невырожденной

матрицей Фишера и несмещенными (эффективными) оценками. В работах [29, 30, 31] рассматривались вопросы оптимальной оценки и компенсации доплеровской деформации (сдвига), а также задержки сигналов летательных аппаратов при их наземном и космическом приеме. Показано, что стандартную задачу - формирование уравнений для получения оценки информационных параметров и вычисление их дисперсий - при большом отношении сигнал/шум оптимально решать по методу максимального правдоподобия. Известно, что максимально правдоподобные оценки (вычисленные с усреднением по фазе функционала правдоподобия или без) асимптотически состоятельны и эффективны, т. е. их дисперсия совпадает с нижней границей Крамера-Рао. В публикациях [32, 33] аналогичные вопросы обсуждаются уже в оптическом диапазоне длин волн, примерно с теми же рекомендациями по увеличению отношения SNR в трансляционных и локационных сигналах. Возвращаясь к результатам миссии «РадиоАстрон» укажем, что оценка точности измерения гравитационного сдвига была выполнена на основе вычисления предела Крамера-Рао в измерительных сеансах с отношением  $SNR = 10^5 \div 10^6$  [34].

### 1.11 Компенсация эффекта Доплера 2-го порядка малости

Для измерения параметра нарушения с точностью не хуже  $10^{-5}$  необходимо учитывать эффект Доплера 2-го порядка малости. Этот эффект возникает из-за относительного движения космического аппарата (КА) и наземной станции. Для этой цели были использованы формулы из работы [18]. Релятивистский эффект Доплера оценивается с использованием векторов орбитального состояния космического аппарата, наряду с векторами состояния наземных станций, вычисленными с использованием модели вращения Земли IAU, реализованной в библиотеке SOFA.

Далее рассматривается вывод формулы для компенсации релятивистского эффекта Доплера. Сначала рассмотрим кинематические эффекты в режиме «1w» :

$$\frac{\Delta f_{1w}}{f_{nominal}} = -\frac{\dot{D}}{c} + \frac{|\vec{v}_e - \vec{v}_s|^2}{2c^2} + \frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_s}{c^2} \quad (1.14)$$



Рис. 1.13: Зависимость вклада эффекта Доплера 2-го порядка на одном орбитальном цикле

Далее рассмотрим кинематические эффекты в режиме «2w» :

$$\frac{\Delta f_{2w}}{f_{nominal}} = -2\frac{\dot{D}}{c} + 2\frac{|\vec{v}_e - \vec{v}_s|^2}{c^2} + 2\frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_s}{c^2} - 2\frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_e}{c^2} \quad (1.15)$$

Применяя компенсационную схему 1.11, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta f_{1w}^{kin}}{f_{nominal}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta f_{2w}^{kin}}{f_{nominal}} = \\ & = -\frac{\dot{D}}{c} - \frac{1}{2} \left( -2\frac{\dot{D}}{c} \right) + \frac{|\vec{v}_e - \vec{v}_s|^2}{2c^2} - \frac{1}{2} \left( 2\frac{|\vec{v}_e - \vec{v}_s|^2}{c^2} \right) + \\ & + \frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_s}{c^2} - \frac{1}{2} \left( 2\frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_s}{c^2} \right) - \frac{1}{2} \left( -2\frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_e}{c^2} \right) = -\frac{|\vec{v}_e - \vec{v}_s|^2}{c^2} + \frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_e}{c^2} = \\ & = -\frac{|\vec{v}_e - \vec{v}_s|^2}{c^2} + \frac{\vec{a}_e \cdot \hat{n}_{32}}{c} \Delta t \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для того чтобы найти ускорение станции  $\vec{a}_e$ , мы используем навигационный пакет SOFA, который выдает нам данные в системе GCRS (Geocentric Celestial Reference System). Данные о скорости КА мы берем от баллистической группы сопровождения. Расчет орбиты проводится сложным образом [19], учитывается влияние солнечного ветра, магнитного поля, корректировок положения КА на орбите с помощью двигателей, влияние тропосферы, а также проводилась корректировка данных реконструированной орбиты

в течение периода работы КА. Мы пользовались последней версией реконструированной орбиты, которая была доступна в базе данных webinet. Орбитальные данные КА представляют собой таблицу со значениями векторов скорости и координаты КА в системе координат EME2000.

Точность определения скорости – 2 мм/с, координаты – 300 м. Подставляя данные о скорости КА и НСС в формулу 1.16, мы получали рассчитанную величину релятивистского Доплер-эффекта. Для упрощения процедуры обработки мы автоматизировали процесс загрузки и расчета данных.

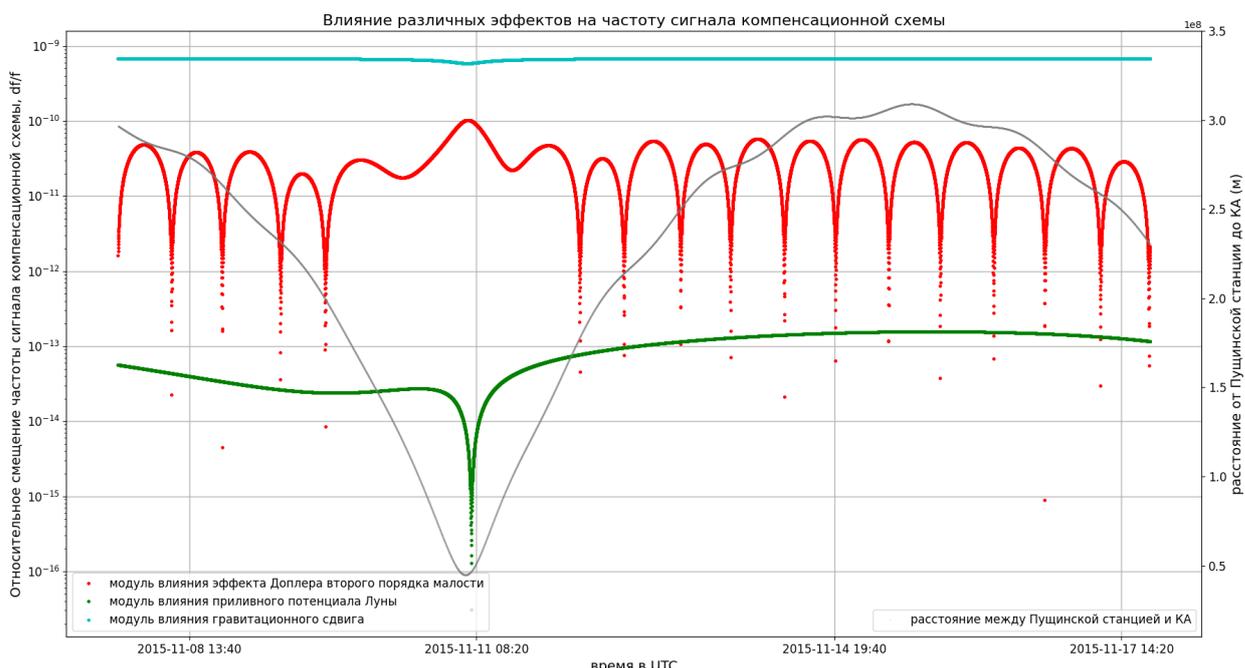


Рис. 1.14: Относительный вклад различных эффектов

## 1.12 Наземные эксперименты и оценки их точности

Одним из последних успешных экспериментов по измерению «RedShift» эффекта стал лабораторный тест гравитационного красного смещения с помощью миниатюрной сети часов, проведенный группой ученых в 2023 году [20].

Оптические часы в настоящее время достигли уровня нестабильности и неточности на уровне  $10^{-18}$  и ниже. Это делает их чувствительным инструментом для исследования геопотенциала на субсантиметровой шкале. Эксперимент проводился с использованием камеры, в которой размещался массив из 5 ансамблей атомов  $^{87}\text{Sr}$  (пронумерованных от 1 до 5 сверху вниз). Атомы были захвачены в вертикальную одномерную оптическую решётку для дифференциальных сравнений часов. Расстояние между соседними ансамблями составляло 0.25 см, охватывая общую разницу высот в 1 см.

Из-за гравитационного красного смещения часы в ансамблях, находящихся в более высоком гравитационном потенциале, шли быстрее, чем часы в более низком потенциале. Это различие позволило точно измерять гравитационные потенциалы, используя эффект, предсказанный ОТО. Посредством финальной линейной аппроксимации был найден частотный градиент, равный  $(-11.9 \pm 2.5) \times 10^{-19}/\text{см}$ , что согласовывалось с ожидаемым значением «RedShift». Доминирующим фактором являлась систематическая погрешность, обусловленная дифференциальным сдвигом плотности. Авторы отмечают, что в будущих экспериментах возможно уменьшение систематической погрешности за счет внедрения новой техники компенсации сдвига плотности.

## 1.13 Последующие эксперименты

The Atomic Clock Ensemble in Space (ACES) реализуется Европейским космическим агентством, планируется установка на Международную космическую станцию (МКС) пары атомных стандартов частоты и времени – водородного H-мазера и цезиевого фонтана PHARAO. Эксперимент предполагает накопление данных в течение 30 месяцев, причем каждый сеанс

данных будет длиться 25 дней. Полезный сигнал ACES будет передаваться на сеть наземных часов посредством двух временных и частотных звеньев: микроволновой связью (MWL), работающей на микроволновых частотах, и оптической связью European Laser Timing (ELT).

Наземные терминалы MWL в Европе, Великобритании, США и Японии будут взаимодействовать с ACES для обмена информацией о времени, компенсируя воздействие атмосферы.

Точность эксперимента оценивается в  $(2 - 3) \times 10^{-6}$ .

## Глава 2

# Фильтрация атмосферных помех и учет фликкер-шумов в экспериментальных данных

### 2.1 Компенсация тропосферного и ионосферного сдвига радиочастоты

Атмосфера представляет собой газовую оболочку, окружающую планету Земля и участвующую в её суточном вращении как единое целое, состоящую из смеси газов и водяных паров [48]. Основные компоненты атмосферы приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1: Состав атмосферы и концентрация основных компонентов

|                |        |                          |
|----------------|--------|--------------------------|
| Азот           | $N_2$  | 78.11%                   |
| Кислород       | $O_2$  | 20.95%                   |
| Аргон          | $Ar$   | 0.93%                    |
| Неон           | $Ne$   | $18.18 \cdot 10^{-4} \%$ |
| Гелий          | $He$   | $5.24 \cdot 10^{-4} \%$  |
| Вода           | $H_2O$ | от 0 до 7%               |
| Углекислый газ | $CO_2$ | от 0.01 до 0.1%          |
| Озон           | $O_3$  | от 0 до 0.00001%         |

За исключением молекулярного кислорода, другие компоненты химически неактивны и поэтому сохраняют одинаковую объемную концентрацию

до высоты 100–110 км [49]. Неактивные компоненты, такие как диоксид углерода, играют важную роль в энергетическом балансе, в то время как активные компоненты, такие как озон, несмотря на его очень низкую концентрацию, играют важную роль в поглощении УФ-излучения и рентгеновских лучей. Важным параметром атмосферы является давление  $p$ , равное 101.3 кПа на уровне моря и уменьшающееся вместе с плотностью  $\rho$  при увеличении высоты. Давление  $p$  на высоте  $h$  определяется на единицу площади поверхности как вес всего воздуха выше  $h$ :

$$p = p_0 - \int_0^h g(h')\rho(h')dh', \quad (2.1)$$

где  $p_0$  - давление на уровне моря,  $g$  - ускорение свободного падения на высоте  $h'$ . Другим существенным параметром, характеризующим нейтральную атмосферу, является высота однородной атмосферы:

$$H = \frac{kT}{gm}, \quad (2.2)$$

где  $m$  - средняя масса молекулы смеси газов в воздухе,  $T$  - температура в Кельвинах,  $k$  - постоянная Больцмана.

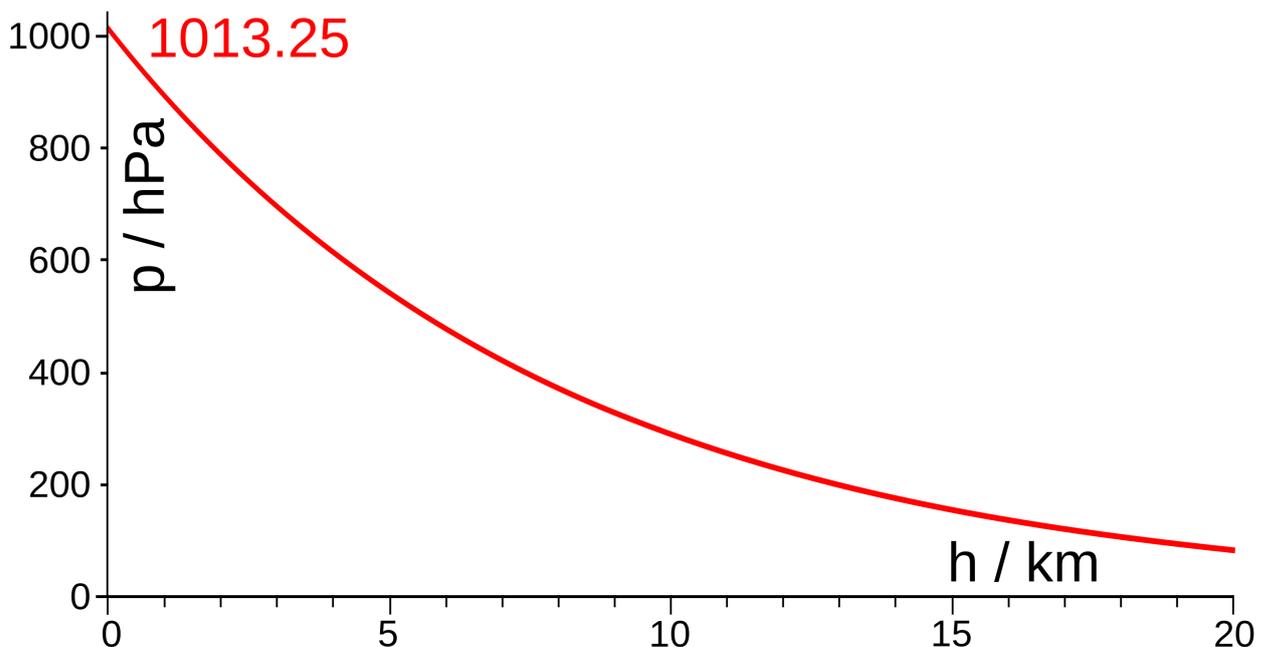


Рис. 2.1: График давления в земной атмосфере от высоты

При условии постоянства температуры и состава атмосферы на всех высотах, зависимость давления и концентрации от высоты описывается сле-

дующими барометрическими формулами:

$$p = p_0 \exp \left( - \int_0^h \frac{gM}{T} dh \right) = p_0 \exp \left( - \int_0^h \frac{dh}{H} \right), \quad (2.3)$$

где  $M$  - молекулярная масса.

Ключевым параметром, используемым для описания вертикальной структуры и областей атмосферы, является поведение температуры с высотой, поскольку эта зависимость отражает многочисленные физические и химические процессы в атмосфере. Далее будет показано, что электронная плотность может быть использована для описания вертикальной структуры ионосферы. От поверхности Земли до 10 км над полюсами и до 15 км над экваториальными районами среднее снижение температуры составляет около 6.5 градусов на км до уровня, называемого тропопаузой [50]. До этого уровня находится часть атмосферы, где преобладают термодинамические процессы. Причиной такого снижения температуры является вертикальное конвективное движение воздуха: газ, контактирующий с теплой поверхностью Земли, расширяется и охлаждается при движении вверх. Над тропосферой и тропопаузой температура снова начинает повышаться с -70 до 0 °С, до высоты 50 км, ограниченной стратопаузой. Выше максимальной высоты, около 50 км, температура начинает снова снижаться в переходной области, называемой мезосферой, продолжаясь примерно до 90 км, где температура достигает примерно от -70 до -90°С. Верхний предел мезосферы - это мезопауза, над которой находится термосфера, в ней температура снова возрастает из-за поглощения ультрафиолетовых лучей кислородом и азотом, достигая температуры 1500°С на высоте 200–300 км. Вещество на этой высоте имеет чрезвычайно низкую плотность и, следовательно, температурный параметр не имеет смысла, и лучше учитывать среднюю квадратичную скорость частиц. В термосфере и верхней области экзосферы сильное УФ-излучение и рентгеновское излучение вызывают интенсивную ионизацию, поэтому эти две области перекрываются с ионосферой. График распределения слоев в атмосфере Земли и зависимость температуры представлена на рис. 2.2

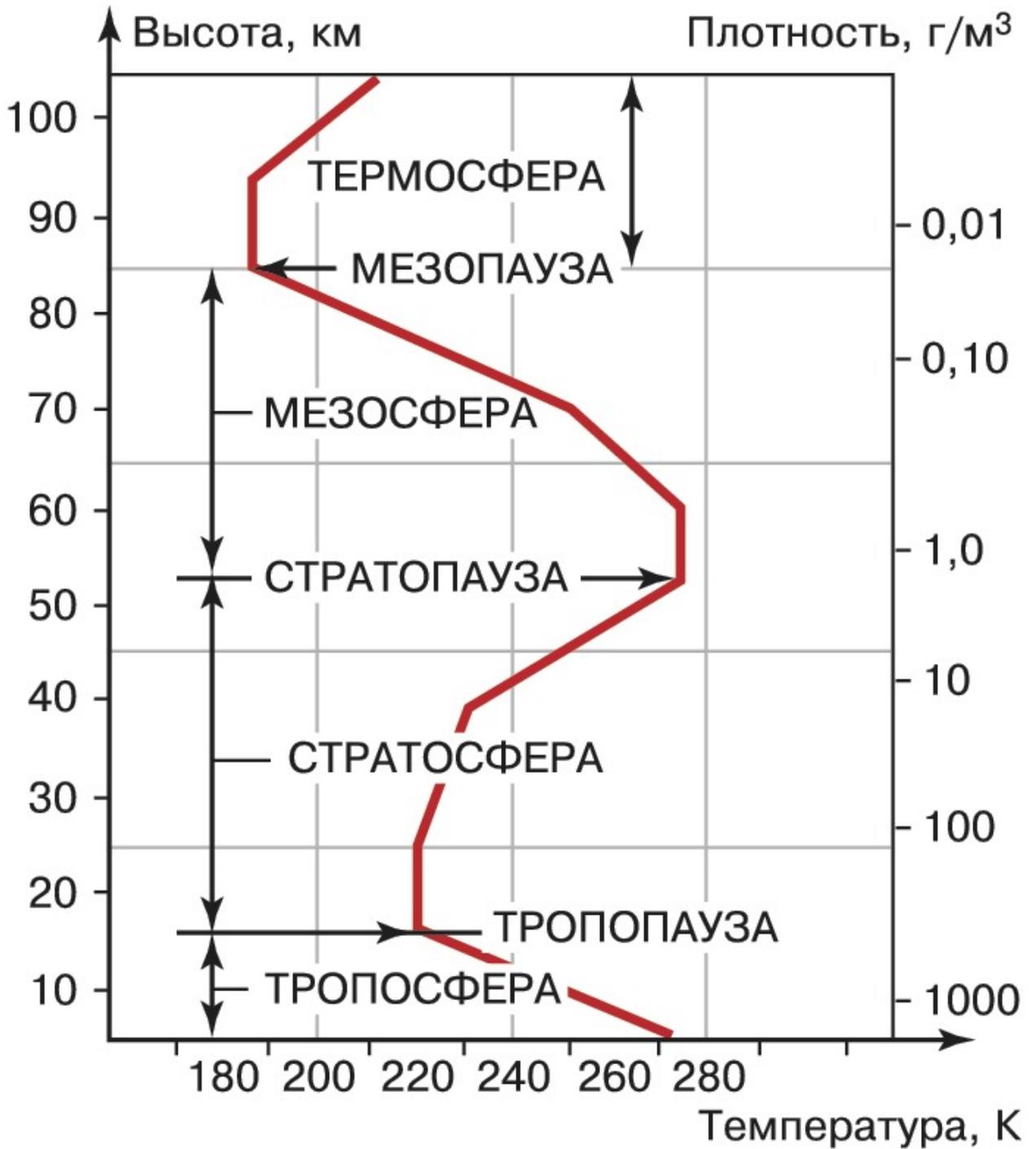


Рис. 2.2: График зависимости температуры в земной атмосфере от высоты

Влияние атмосферы приводит к систематическим сдвигам сигнала КА «РадиоАстрон», который проявляется через несколько физических механизмов:

1. Систематические сдвиги сигнала возникают из-за рефракции радиоволн в атмосфере, временных вариаций показателя преломления, нестационарности атмосферных параметров.
2. В нестационарной среде показатель преломления  $n(t)$  меняется со вре-

менем, что приводит к частотным сдвигам электромагнитных волн, искажению фазовой структуры сигнала, временным задержкам распространения.

3. Основные факторы влияния атмосферы: вертикальная неоднородность атмосферы, турбулентные флуктуации, сезонные и суточные вариации.
4. Изменение  $n(t)$ , вызванное движением КА по орбите.

Главным образом, вариация частоты сигнала связана с:

1. Нестационарностью самих сред ионосферы и тропосферы.
2. Изменением расстояния «прямой видимости» (пути радиолуча в атмосфере) за счет орбитального движения спутника - далее будет показано, что этот эффект доминирующий.

На относительно коротких сеансах связи спутника с НСС (менее часа) вторая причина является доминирующей (дает сдвиг более чем на порядок превышающий сдвиг «нестационарности» среды ионосферы и тропосферы).

Расчет кинематического сдвига методически одинаков для ионосферы и тропосферы. Существенное отличие связано с дисперсионными свойствами этих сред:

1. Тропосферный сдвиг не зависит от частоты электромагнитного сигнала, если она меньше 15 ГГц [51].
2. Относительный ионосферный сдвиг обратно пропорционален квадрату частоты ( $\frac{1}{f^2}$ ) несущего сигнала [54].

В «однопутевом» типе связи (спутник  $\rightarrow$  НСС) сигнал с опорой на бортовой Н-стандарт содержит как гравитационный сдвиг частоты, так и другие сдвиги:

1. Доплеровский сдвиг -  $\frac{v}{c}$ ,
2. Ионосферный сдвиг  $\sim 1/f^2$ ,
3. Тропосферный сдвиг,

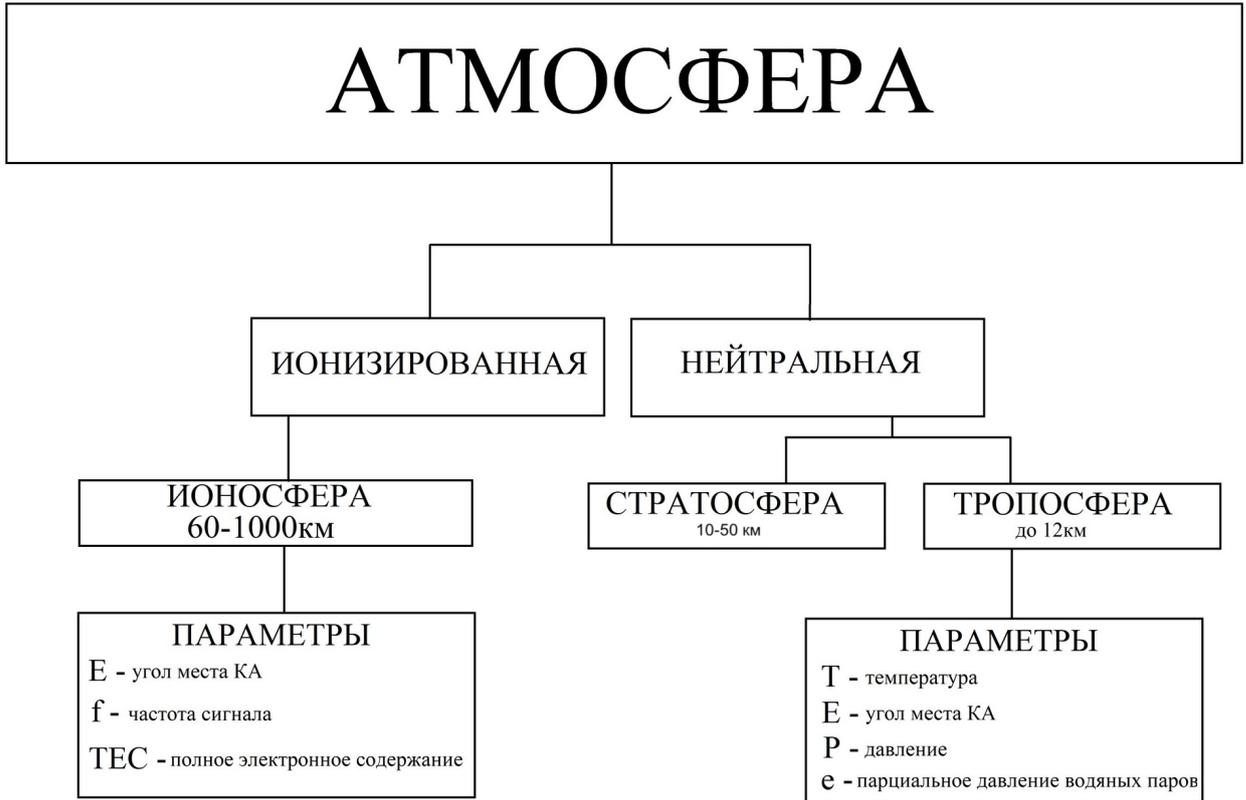


Рис. 2.3: Атмосфера

#### 4. Доплеровский сдвиг второго порядка - $(\frac{v}{c})^2$ .

В «двухпутевом» (спутник $\leftrightarrow$ НСС) типе связи, сигнал содержит только негравитационные помехи, которые удвоены из-за увеличения пути сигнала в 2 раза. Благодаря удвоению эффектов мы можем применять компенсационную схему для сдвигов, которые не имеют частотной зависимости.

В атмосфере, как правило, воздушные массы участвуют в непрерывном движении (горизонтальная и вертикальная циркуляция, ветры, струйные течения и т.д.) и в случайном турбулентном движении [55]. Все это приводит к быстрым пространственным изменениям физических свойств атмосферы (давление, температура, влажность, запылённость, концентрация заряженных частиц и т.д.) и, соответственно, ее электромагнитных свойств. Электромагнитные характеристики земной атмосферы преимущественно обусловлены газовой составляющей воздушной среды (как нейтральной, так и ионизированной фракцией), а также парциальным давлением водяного пара. Вследствие неоднородности плотности плазменного и газового компонентов атмосферы наблюдается пространственно-временная измен-

чивость показателя преломления электромагнитных волн. Существование градиента показателя преломления приводит к тому, что траектория распространения электромагнитного сигнала приобретает увеличенный геометрический путь по сравнению с траекторией в отсутствие атмосферной среды.

Электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении  $x$ , записывается так:

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (2.4)$$

где  $\omega = 2\pi/T$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $T$  - период,  $k$  - волновое число.

Скорость, с которой перемещаются плоскости равной фазы, называется фазовой скоростью:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} \quad (2.5)$$

Величина, характеризующая скорость распространения пакета волн, или групповая скорость есть:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.6)$$

Когда  $\omega \approx k$ , то  $v_{gr} = v_{ph}$  - среда не обладает дисперсией. В условиях отсутствия дисперсии фазовая скорость волн демонстрирует независимость от их частоты. Показатель преломления  $n$ , являющийся ключевым оптическим параметром среды, определяется как отношение скорости распространения электромагнитного сигнала в вакууме  $c$  к скорости его распространения в данной среде. Поэтому для групповой и фазовой скорости можно определить два разных показателя преломления [56]:

$$n_{ph} = \frac{c}{v_{ph}} \quad \text{и} \quad n_{gr} = \frac{c}{v_{gr}} \quad (2.7)$$

Таким образом, показатель преломления выступает в качестве интегральной характеристики среды, определяющей её оптические свойства и позволяющей количественно оценить влияние среды на распространение электромагнитных волн.

Ионосфера представляет собой природную плазменную среду с частичной степенью ионизации, характеризующуюся значительной пространственной изменчивостью параметров заряженных компонентов. Вертикальное и

горизонтальное распределение концентраций ионизированных частиц демонстрирует выраженную неоднородность, обусловленную комплексными физико-химическими процессами в данной области атмосферы.

Эта часть атмосферы, включая слои, называемые мезосферой, термосферой и экзосферой, определяется как ионосфера. Нижние 100 км ионосферы оказывают несущественное влияние на сигнал «РадиоАстрона». Процессы ионизации молекул и атомов газовых компонентов атмосферы преимущественно инициируются интенсивным воздействием солнечной радиации, в частности, её рентгеновского и ультрафиолетового спектральных диапазонов.

Скорость распространения электромагнитных сигналов демонстрирует прямую зависимость от электронной концентрации, которая регулируется двумя процессами.

В течение суток наблюдаются следующие циклические изменения:

1. Дневной режим:

- (a) Превалирование процессов фотоионизации
- (b) Воздействие солнечного излучения
- (c) Ионизация нейтральных атомов и молекул

2. Ночной режим:

- (a) Доминирование процессов рекомбинации
- (b) Рекомбинация свободных электронов с ионами
- (c) Формирование нейтральных частиц
- (d) Снижение электронной концентрации

Процесс рекомбинации при низких плотностях воздуха протекает гораздо медленнее ионизации - таким образом, в ионосфере всегда сохраняется довольно высокая концентрация электронов. Пространственное распределение электронной концентрации в ионосфере характеризуется выраженной высотной зависимостью с максимумом в диапазоне 300-500 километров. Вертикальная структура ионосферы определяется следующими особенно-

стями:

1. Высотное распределение:
  - (a) Постепенное увеличение электронной плотности с высотой
  - (b) Формирование пика концентрации на высоте 300-500 км
  - (c) Снижение концентрации в нижних слоях
2. Горизонтальная неоднородность:
  - (a) Изменения параметров по географическим координатам
  - (b) Зависимость от широтного расположения
  - (c) Влияние локальных атмосферных процессов
3. Структурные характеристики:
  - (a) Наличие дискретных слоев ионизации (D, E, F)
  - (b) Переменность границ слоев
  - (c) Динамическая изменчивость параметров
4. Факторы неоднородности:
  - (a) Солнечная активность
  - (b) Сезонные колебания
  - (c) Геомагнитные условия
  - (d) Суточные вариации

Таким образом, электронная структура ионосферы представляет собой сложную пространственную систему с выраженными высотными максимумами и значительной географической изменчивостью параметров, что определяет её неоднородное влияние на распространение радиоволн над поверхностью Земли.

Среда, в которой угловая частота и волновое число не пропорциональны, является дисперсионной средой, то есть скорость распространения электромагнитных волн, и, следовательно, показатель преломления зависят от частоты. Это относится к ионосфере, где  $\omega$  и  $k$  в первом приближении связаны:

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2, \quad (2.8)$$

где  $\omega_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\varepsilon_0 m}}$ ,  $e$  – заряд электрона,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $k$  – волновое число,  $N_e$  – электронная плотность. Это уравнение называется дисперсионным уравнением ионосферы, а  $\omega_p$  – критической частотой, в том смысле, что сигналы с  $\omega < \omega_p$  будут отражаться, а сигналы с  $\omega > \omega_p$  будут проходить через ионосферу.

Как было упомянуто выше, максимум электронной плотности достигается на высоте 300-500 км. Электромагнитные сигналы с  $f > f_p \approx 10^6$  Гц будут проходить через ионосферу. Несущая частота сигнала «РадиоАстро-на» 8.4 ГГц и 15 ГГц.

С учетом  $\omega = 2\pi f$  следует:

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_p/f)^2}} \quad (2.9)$$

Таким образом, показатель преломления фазы для ионосферы может быть аппроксимирован как:

$$n_{ph} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{f_p}{f}\right)^2 = 1 - \frac{40.3}{f^2} N_e \quad (2.10)$$

$$n_{gr} = 1 + \frac{\kappa}{f^2} N_e, \quad (2.11)$$

где  $\kappa = \frac{e^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 m_e} \approx 40.3$

Разница между измеренным диапазоном расстояния (оптическим путем) и евклидовым расстоянием между спутником и приемником определена формулами:

$$\Delta_{ph,f}^{iono} = -\frac{40.3}{f^2} \int N_e dl, \quad \Delta_{gr,f}^{iono} = +\frac{40.3}{f^2} \int N_e dl, \quad (2.12)$$

$\Delta_{ph,f}^{iono}$  - фазовое и  $\Delta_{gr,f}^{iono}$  - групповое преломление, а интеграл определяется как наклонный STEC (Slant Total Electron Content):

$$TEC = \int N_e dl \quad (2.13)$$

Обычно ТЕС задается в единицах ТЕС (TECUs),  $1 \text{ TECU} = 10^{16} e^-/m^2$ , и ионосферная задержка выглядит так:

$$I_f \equiv \Delta_{gr,f}^{iono} = \alpha_f STEC \quad \text{в метрах задержки;} \quad (2.14)$$

$$\alpha_f = \frac{40.3 \cdot 10^{16}}{f^2} m/TECU \quad (2.15)$$

ТЕС и, следовательно, ионосферная рефракция зависят от географического местоположения приемника, времени суток и интенсивности солнечной активности.

На этапе планирования эксперимента предполагалось компенсировать ионосферный сдвиг путем комбинации двух частот 8.4 ГГц и 15 ГГц, однако при проведении эксперимента комбинация двух частот давала частотный сдвиг с ошибкой более чем на 2 порядка больше теоретических оценок. Это потребовало проверки на моделях одночастотной компенсации ионосферы с использованием ионосферных карт (детали см. ниже). В результате была обнаружена техническая проблема с данными 15 ГГц, которые были не достаточно качественными, по причине больших шумов приемника данных на 15 ГГц.

В условиях одночастотных наблюдений возникает необходимость применения метода, позволяющего определить ионосферный интеграл на основе экспериментальных данных о состоянии ионосферы и параметров орбиты космического аппарата. Для решения данной задачи применяется модель однослойной ионосферы, базирующаяся на следующих допущениях:

1. Всё полное содержание электронов сосредоточено на определенной высоте равной 350 км.
2. Расчет наклонной задержки:
  - (a) Определение вертикальной задержки в точке пересечения луча с ионосферным слоем (Ionospheric Pierce Point) см рис. 2.4.
  - (b) Применение картирующей функции для вычисления искомой величины.
  - (c) Учет геометрических параметров распространения сигнала.

Таким образом, наклонная задержка вычисляется из вертикальной задержки в подионосферной точке (Ionospheric Pierce Point), т.е. пересечение

луча с ионосферным слоем на высоте 350 км путем умножения на коэффициент наклона.

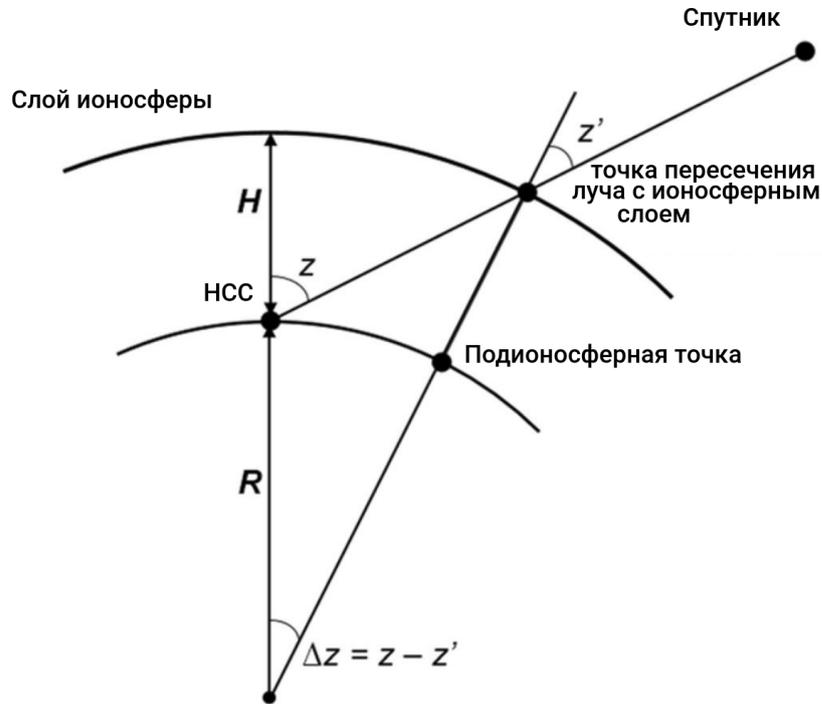


Рис. 2.4: Зенитный угол и под-ионосферная точка

Коэффициент наклона ( $h$  - высота ионосферного слоя):

$$F = \left( 1 - \left( \frac{R_{Earth}}{R_{Earth} + h} \cos E \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (2.16)$$

где  $E$  - угол места спутника,  $R_{Earth}$  - радиус Земли.

$$Ion_{vert} = \frac{40.3}{f^2 c} \cdot VTEC, \quad (2.17)$$

где VTEC - это вертикальный TEC. Формула для перехода от вертикальной задержки к наклонной записывается с использованием картирующей функции 2.16 и VTEC:

$$Ion_{slant} = \frac{40.3}{f^2 c} \cdot VTEC \times F(E), \quad (2.18)$$

Для перехода к частотной задержке необходимо продифференцировать (2.18) по времени:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{40.3}{f^2 c} \cdot \frac{dVTEC}{dt} \cdot F(E) + \frac{40.3}{f^2 c} \cdot VTEC \cdot \frac{dF(E)}{dt}, \quad (2.19)$$

где  $E$  - угол места КА,  $c$  - скорость света,  $f$  - номинальная частота сигнала.

При расчете ионосферного сдвига по модели тонкой однослойной ионосферы можно выделить два члена, которые связаны со статическими вариациями самой среды распространения (медленные) и динамическими вариациями, связанными с движением КА по орбите.

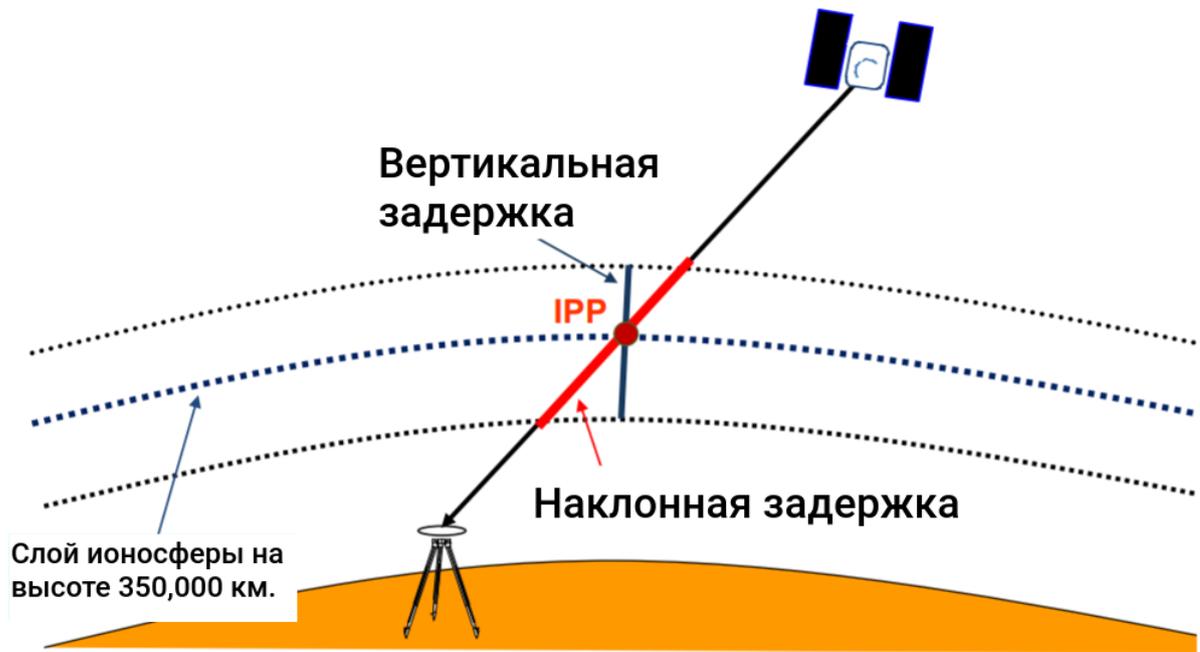


Рис. 2.5: Под-ионосферные точки, иллюстрация вертикальной и наклонной задержки

Для учета статического члена важно знать параметр TEC. Для его нахождения существуют службы GNSS (Global Navigation Satellite System), которые дают информация о распределении TEC в виде ионосферных карт [58].

Ниже представлено пространственное распределение TEC с использованием ионосферных карт UQRG. Помимо этого существуют карты ROBR, IGRG, EHRG. Для их сравнительного анализа воспользуемся сеансом GPS 4 декабря 2016 года 11:00-11:40 со станции Эффельсберг.

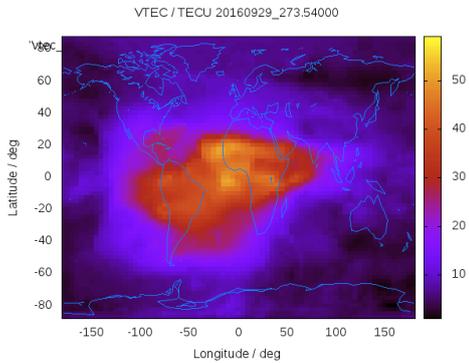


Рис. 2.6: сеанс 29.09.2016 15:00 UT

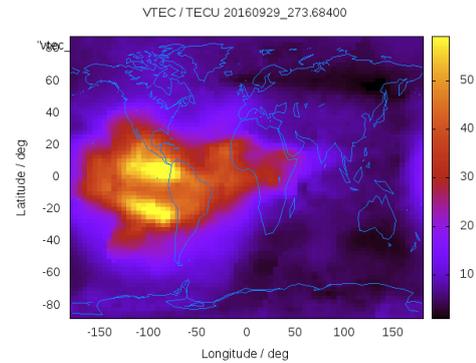


Рис. 2.7: 29.09.2016 19:00 UT

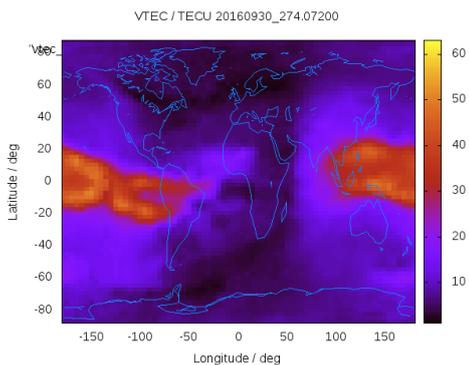


Рис. 2.8: 30.09.2016 02:00 UT

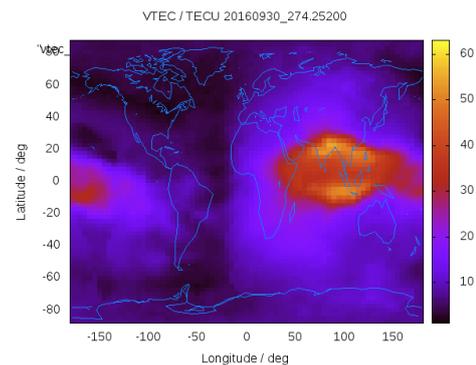


Рис. 2.9: 30.09.2016 7:00 UT

Рис. 2.10: На рисунках видны суточные вариации VTEC, вызванные ионизацией и рекомбинацией в ионосфере

На рис. 2.11 видно увеличение относительного сдвига за счет нарастания электронной плотности.

В методологии определения ионосферной поправки ключевым значением обладает параметр зенитного угла космического аппарата, который определяется на основе данных наземных станций слежения и реконструированной орбиты КА.

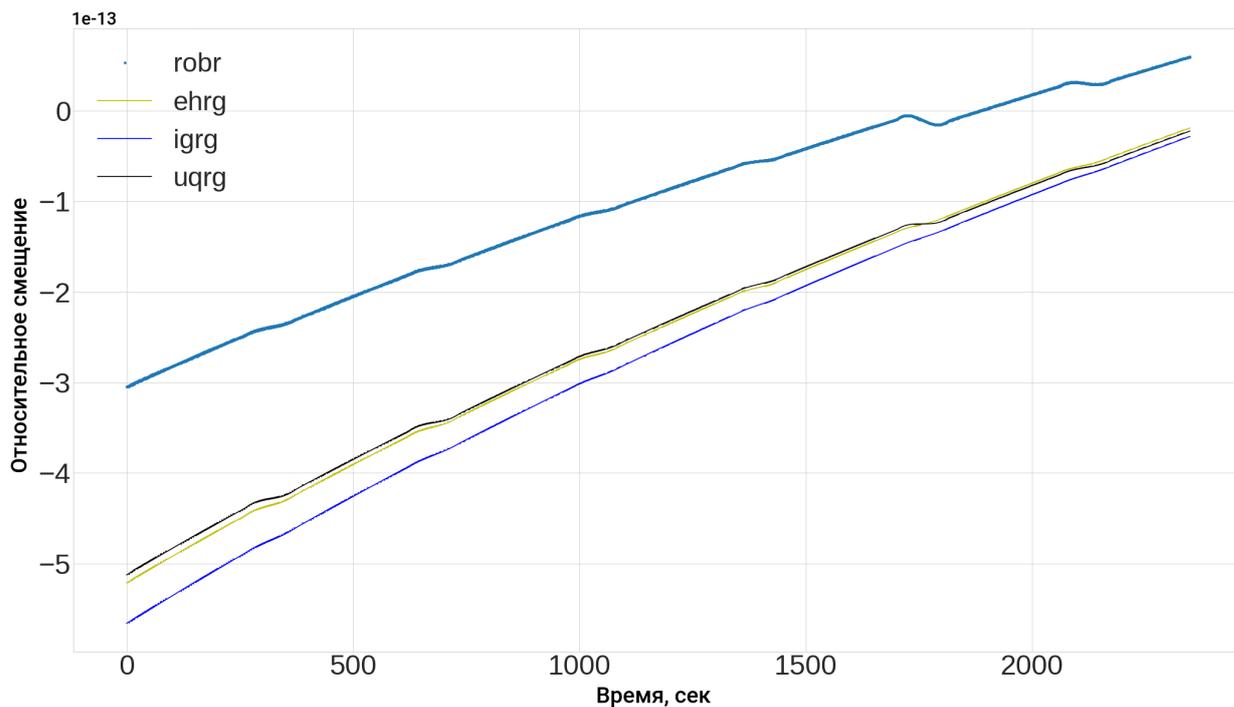


Рис. 2.11: Сравнение результата вычисления относительного ионосферного сдвига по картам UQRG, ROBR, IGRG, EHRG

Зная параметры ТЕС из карт UQRG, угла места и координаты НСС «Пушино», мы вычислили ионосферный сдвиг для сеансов 29-30 сентября 2016 года на рис. 2.13 и рис. 2.12.

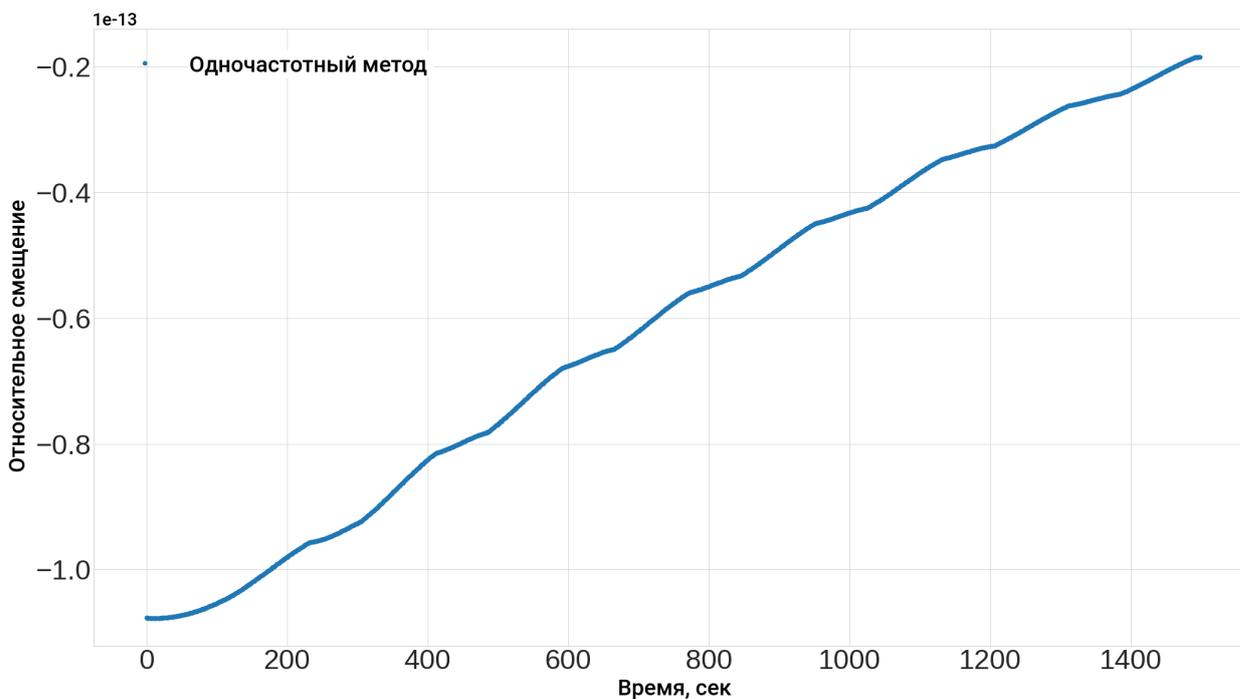


Рис. 2.12: Относительный ионосферный сдвиг, полученный одночастотным режимом для несущей частоты 8.4 ГГц, сеанс 29.09.2016 15:05-15:35

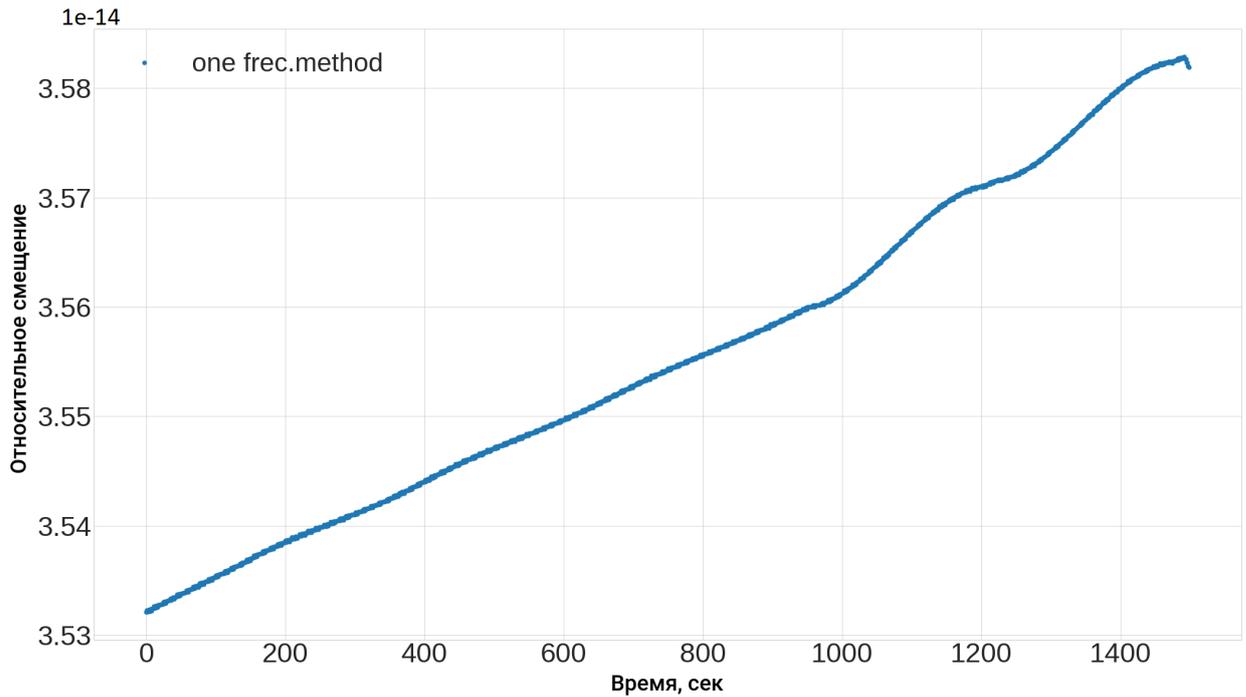


Рис. 2.13: Относительный ионосферный сдвиг, полученный одночастотным методом для несущей частоты 8.4 ГГц, сеанс 29.09.2016 19:05-19:42

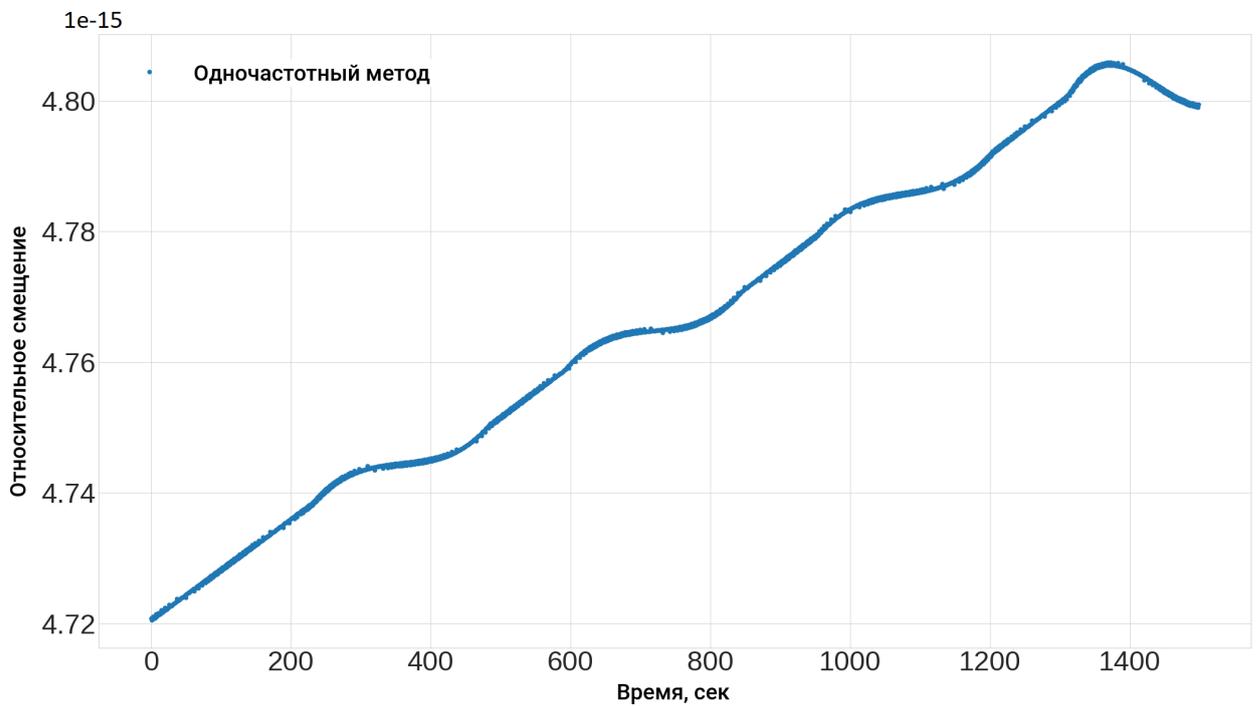


Рис. 2.14: Относительный ионосферный сдвиг, полученный одночастотным методом для несущей частоты 8.4 ГГц, сеанс 30.09.2016 02:45-03:22

Анализ результатов измерения ионосферного сдвига, полученных двумя методами (с использованием комбинации двух частот и с использованием ионосферных карт в одночастотном режиме), показал, что имеется существенное расхождение на 2 порядка (в отн.единицах):  $10^{-12}$  - с использованием эффекта дисперсии и измерения в комбинации частот, и  $10^{-14}$  - в одночастотном режиме с использованием ионосферных карт. Причина отсутствия согласования может быть в качестве получаемой с аппаратного комплекса НСС частоты, либо в том, что модель, основанная на двухчастотной компенсации, имеет недостатки. Для того, чтобы достоверно найти причину расхождения, необходимо было применить оба метода для других спутников. Наиболее подходящими оказались спутники GPS и GLONASS, так как имелась обширная наземная сеть слежения с открытым доступом к данным со спутника.

Прежде чем перейти к вычислению ионосферного сдвига частоты для GPS, кратко разъясним формат представления данных.

Данные от GPS представляются в формате RINEX (Receiver Independent Exchange Format) [57]. Основные наблюдательные величины:

- Измерение фазы несущей на одной или обеих несущих (фактически являющееся измерением частоты биений между принятой несущей частотой спутникового сигнала и сгенерированной эталонной частотой приемника).
- Измерение псевдодальности (кода), эквивалентное разности времени приема (выраженного во временном интервале приемника) и времени передачи (выраженного во временном интервале спутника) отдельного спутникового сигнала.
- Время наблюдения, являющееся показанием часов приемника в момент измерения фазы несущей и/или измерений кода.

Данные состоят из трех типов файлов ASCII (American standard code for information interchange). Каждый тип файлов состоит из раздела заголовка и раздела данных. Наблюдения GNSS включают в себя три фундаментальные величины, которые должны быть определены: время, фаза и диапазон расстояния.

- **Время измерения** - это время приема полученных сигналов. Это время идентично для измерений фазы и дальности и общее для всех спутников, наблюдавшихся в ту эпоху. Для файлов данных одной системы по умолчанию оно выражается в системе времени соответствующей спутниковой системы.
- **Псевдодальность** - это расстояние от антенны приемника до антенны спутника, включая смещения часов приемника и спутника (и другие отклонения, такие как атмосферные задержки).
- **Фаза** - несущая фаза, измеренная в целых циклах. Наблюдаемые значения не корректируются с учетом внешних воздействий, таких как: атмосферная рефракция, смещения спутниковых часов и т.д.

На основании зарегистрированной частоты принимаемого сигнала, номинальных частот GPS-сигналов ( $L1 = 1,57542$  ГГц и  $L2 = 1,2276$  ГГц),

значений зенитного угла, полученных из навигационных данных, и ТЕС, согласно данным карт UQRG, проведем оценку относительного ионосферного сдвига двумя методами.

На графиках 2.16, 2.17, 2.15, 2.18 изображены оба метода: метод на основе двухчастотного режима комбинации частот (красным цветом) и одночастотного режима (синим цветом).

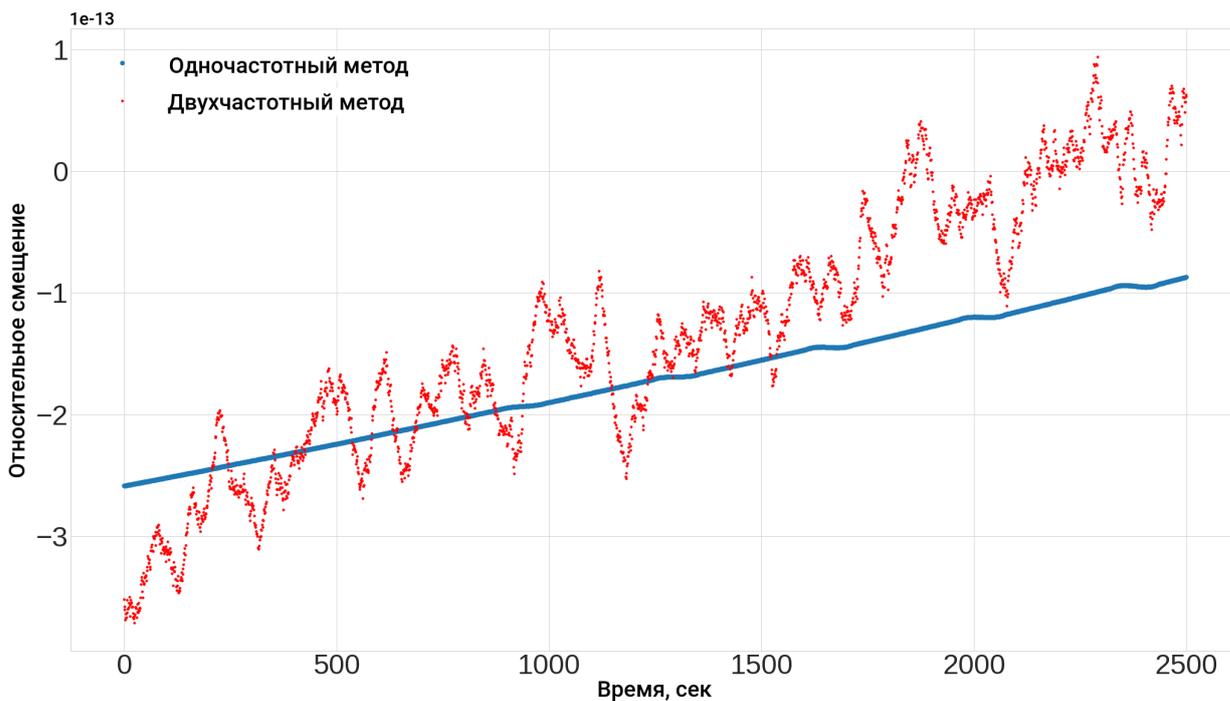


Рис. 2.15: Сеанс 2016/11/14 18:00-19:00

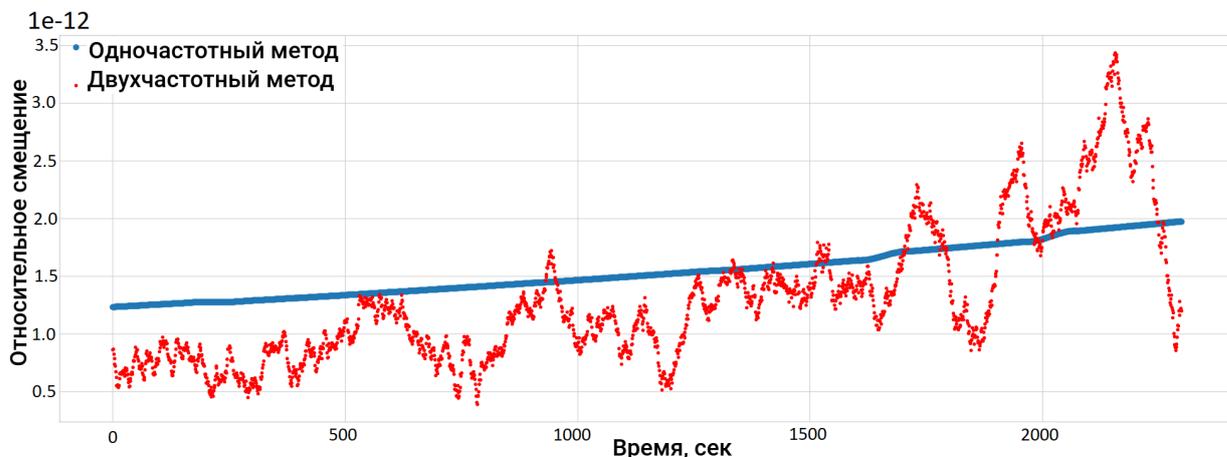


Рис. 2.16: Сеанс 2016/12/4 18:00-19:00

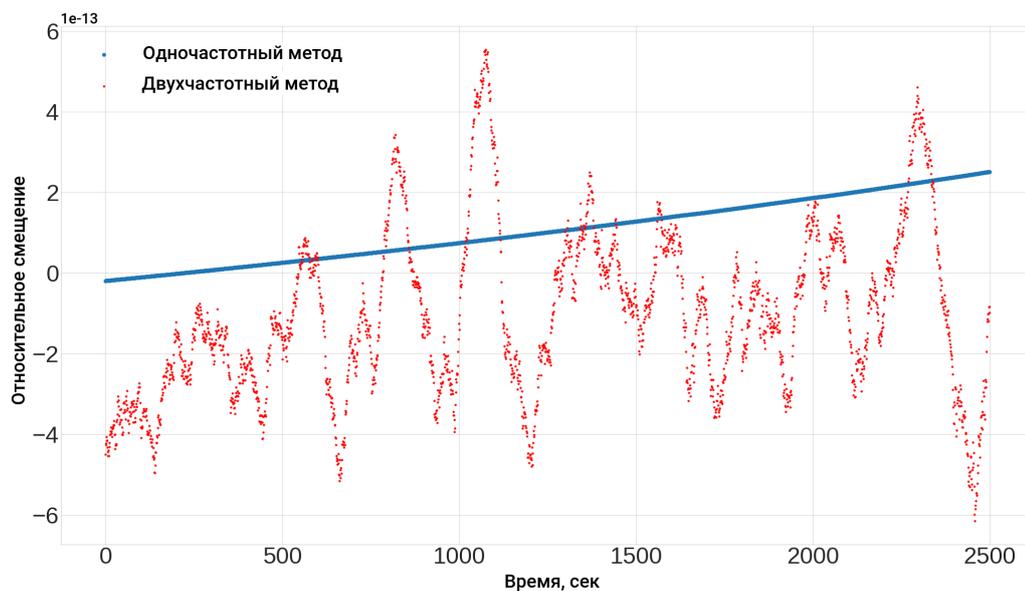


Рис. 2.17: Сеанс 2016/11/15 18:00-19:00

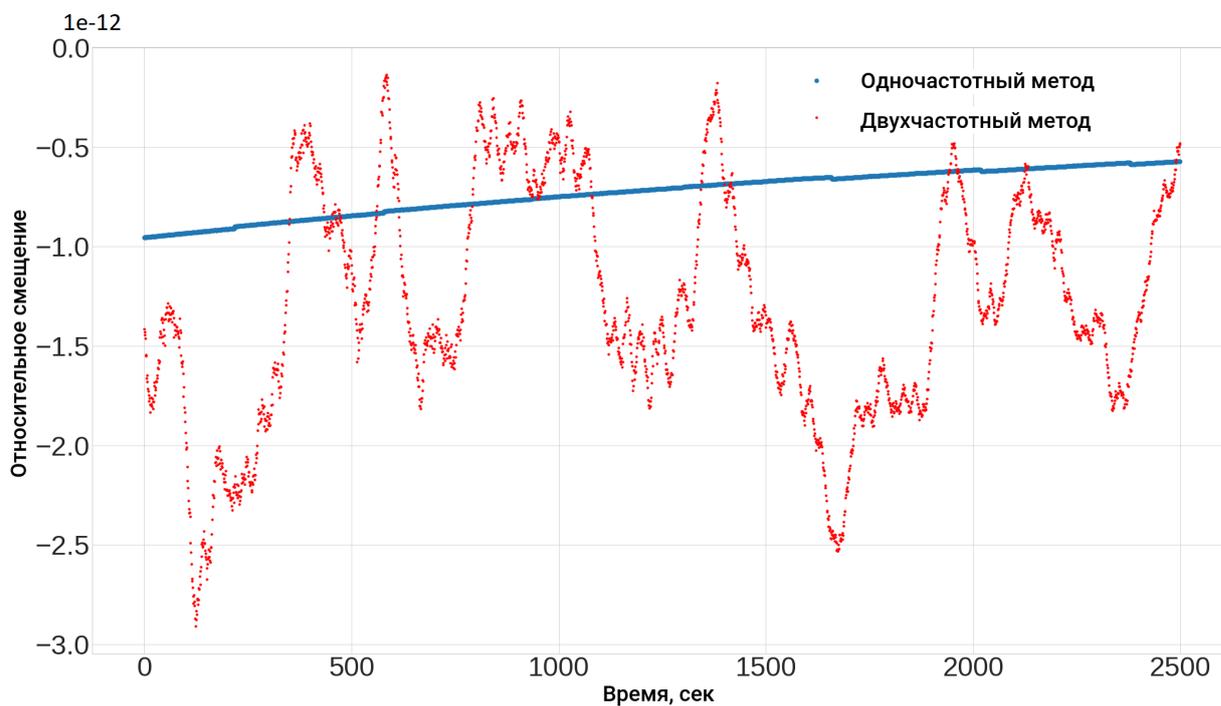


Рис. 2.18: Сеанс 2016/12/5 22:00-23:00

Анализ результатов оценки относительного ионосферного сдвига для GPS-сигналов показывает высокую степень сходимости данных, полученных двумя независимыми методами. Небольшие расхождения в результатах главным образом связаны с ограниченной точностью определения орбитальных параметров спутников.

Таким образом, различия в результатах, полученных двумя методами для эксперимента «RadioAstron», объясняются недостаточной точностью измерений на частоте 15 ГГц, проводимых стандартным измерительным оборудованием в Пушино, что отражено в данных, доступных через «webinet». Для учета ионосферной поправки в эксперименте по измерению эффекта «RedShift» применялся одночастотный метод, который позволял оценить величину сдвига в каждом сеансе с использованием данных о ТЕС и орбите КА.

## 2.2 Модель тропосферного сдвига частоты

Тропосфера состоит из смеси сухих газов и водяного пара. Сухие газы, в основном, вызывают гидростатическую задержку, а водяной пар — «влажную» задержку.

Распределение сухого компонента атмосферы более равномерно, что упрощает его моделирование. В отличие от него, «влажная» составляющая отличается значительным непостоянством и быстрыми изменениями. Для моделирования сухой атмосферы можно использовать законы идеального газа, принимая во внимание давление и температуру.

Задержка сигнала в тропосфере зависит от того, какой путь он проходит через нейтральную атмосферу. Эту задержку можно выразить как функцию зенитного угла спутника. Чтобы точно смоделировать такую задержку, нужно учитывать особенности разных слоёв атмосферы. Тропосфера простирается от уровня моря до высоты около 12 км и отличается относительно линейным снижением температуры. Далее начинается слой, называемый тропопаузой. Тропопауза — это тонкий пограничный слой, расположенный на высоте от 12 до 16 километров. В этом слое температура остаётся относительно постоянной и составляет примерно от -60 до -80 °С. При переходе в стратосферу температура начинает медленно повышаться.

Что касается распределения водяного пара, то его основная концентрация наблюдается на высотах чуть ниже 4 километров. Выше 12 километров количество водяного пара значительно уменьшается, и его практически нет.

В рамках анализа температурных характеристик атмосферы отмечает-

ся линейное снижение температуры до уровня тропопаузы. Однако данное снижение может быть нарушено наличием инверсионных слоёв. В тропопаузе температура остаётся практически постоянной, а в стратосфере наблюдается её медленное увеличение.

Стандартные модели атмосферы часто используют значение давления на уровне моря, составляющее приблизительно 1013 гектопаскалей. С увеличением высоты давление уменьшается экспоненциально.

Относительная влажность в тропосфере демонстрирует неоднородность как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Это обусловлено быстрым круговоротом воды в атмосфере и изменениями температуры в зависимости от высоты и географического положения. Отмечается тенденция к уменьшению относительной влажности с увеличением высоты.

Для дальнейшего анализа целесообразно записать уравнение гидростатического равновесия, учитывая усреднённую зависимость давления от высоты:

$$dP = -\rho g dh, \quad (2.20)$$

где  $P$  - давление воздуха,  $g$  - ускорение силы тяжести как функция высоты  $h$ ;  $\rho$  - плотность атмосферы.

Плотность атмосферы имеет связь с температурой и давлением

$$\rho = \frac{Pm}{kT}, \quad (2.21)$$

Где  $m$  - средняя масса частиц на высоте  $h$ ;  $T$  - температура на высоте  $h$ ;  $k$  - постоянная Больцмана. Отсюда имеем:

$$dP = -g \frac{Pm}{kT} dh \quad (2.22)$$

Интегрируя (2.22) по  $h$ , получаем барометрическую формулу

$$P = P_0 \exp \left( - \int_0^h \frac{mg}{kt} dh \right), \quad (2.23)$$

из неё видно, что давление падает с увеличением высоты по экспоненциальному закону. Параметры этого закона определяются функциональными зависимостями  $T$  и  $g$  от высоты. В случае изотермической атмосферы

уравнение (2.23) записывается так:

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = P_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right), \quad (2.24)$$

где

$$H = \frac{kT}{mg}$$

– некоторая приведенная высота.

Зависимость температуры атмосферы от высоты является более сложной по сравнению с зависимостью давления. Однако в пределах тропосферы эту зависимость можно приближенно описать с помощью линейного закона.

Самым динамичным и наиболее важным параметром является парциальное давление водяного пара. Его содержание меняется от 0 до 4% от общего объема воздуха и существенно зависит от географического района, времени суток и года. Данный параметр задается парциальным давлением водяного пара  $e$  (Па) или удельной влажностью  $S$  (г/кг), которая соответствует количеству водяного пара в граммах в 1 килограмме влажного воздуха. Связь парциального давления и удельной влажности:

$$S = \frac{0.622e}{P - 0.378e} \approx \frac{0.622e}{P} \quad (2.25)$$

Основная масса водяного пара сосредоточена в тропосфере.

Ключевое отличие тропосферы от ионосферы заключается в высоте, на которой происходит преломление сигналов. Тропосферное преломление наблюдается на сравнительно низких уровнях атмосферы — примерно 99% всех эффектов приходится на высоты до 10 километров. В то же время ионосфера расположена значительно выше, примерно на высоте 400 километров. Из-за этого тропосферная рефракция в большей степени зависит от особенностей конкретного участка местности по сравнению с ионосферой.

Геометрический путь отличается от фактического пути луча:

$$\delta S_{trop} = \int_{ATM} n(s) \cdot ds - \int_{path} ds, \quad (2.26)$$

где  $n(s)$  - показатель преломления атмосферы.

Формула 2.26 является полной наклонной задержкой пути. Она может быть разделена на гидростатическую и «влажную» компоненту:

$$\delta S_{trop} = \delta S_{\text{гидростат}} + \delta S_{\text{влажная}}. \quad (2.27)$$

Задержка нейтрального зенитного пути может быть получена из показателя преломления воздуха.

$$N = k_1 \cdot \frac{p_d}{T} \cdot Z_d^{-1} + k_2 \cdot \frac{e}{T} \cdot Z_w^{-1} + k_3 \cdot \frac{e}{T^2} \cdot Z_w^{-1} \quad (2.28)$$

$$N(s) = [n(s) - 1] \cdot 10^6, \quad (2.29)$$

где  $n(s)$  – показатель преломления как функция от расстояния,  $N$  – преломляемость тропосферы (индекс преломления),  $k_{1,2,3}$  – константы преломления,  $Z_{d,w}$  – коэффициент обратной сжимаемости для сухого и влажного воздуха,  $p_d = p - e$  – давление сухого воздуха,  $e$  – парциальное давление водяного пара.

$$k_1 \cdot \frac{p_d}{T} \cdot Z_d^{-1} = k_1 \cdot \frac{\rho_d \cdot R_0}{M_d} = \frac{\rho \cdot R_0}{M_d} - \frac{e}{T} \cdot Z_w^{-1} \cdot \frac{M_w}{M_d} \quad (2.30)$$

$$N = k_1 \cdot \frac{\rho \cdot R_0}{M_d} + k'_2 \cdot \frac{e}{T} \cdot Z_w^{-1} + k_3 \cdot \frac{e}{T^2} \cdot Z_w^{-1} \quad (2.31)$$

Таким образом, можно четко разделить гидростатический член и «влажный»:

$$N_{[\text{гид}]} = k_1 \cdot \frac{\rho \cdot R_0}{M_d} = k_1 \cdot R_d \cdot \rho \quad (2.32)$$

$$N_{[\text{влаж}]} = (k'_2 \cdot \frac{e}{T} + k_3 \cdot \frac{e}{T^2}) \cdot Z_w^{-1} \quad (2.33)$$

$$k'_2 = k_2 - k_1 \cdot \frac{M_w}{M_d} = 22.1 \left[ \frac{K}{hPa} \right] \quad (2.34)$$

где  $M_{d,w}$  – молярная масса.

### Эмпирическая оценка с учетом метеоусловий

Модель, основанная на усредненных данных.

$$Tr(E) = (Tr_{z,d} + Tr_{z,w}) \cdot M(E) \quad (\text{в м}) \quad (2.35)$$

$$M(E) = \frac{1.001}{\sqrt{0.002001 + \sin^2(E)}} \quad (2.36)$$

$$Tr_{z0,d} = \frac{10^{-6} k_1 R_d P}{g_m}, \quad Tr_{z0,w} = \frac{10^{-6} k_2 R_d}{(\lambda + 1) g_m} \frac{e}{T} \quad (2.37)$$

$$(2.38)$$

Вертикальная задержка на высоте  $H$ :

$$Tr_{z,d} = \left[ 1 - \frac{\beta H}{T} \right]^{\frac{g}{R_d \beta}} Tr_{z0,d} \quad (2.39)$$

$$Tr_{z,w} = \left[ 1 - \frac{\beta H}{T} \right]^{\frac{(\lambda+1)g}{R_d \beta} - 1} Tr_{z0,w} \quad (2.40)$$

Модель показателей преломления и тропосферной задержки Хопфилд [52]. Модель Хопфилд (Helen S. Hopfield) основана на соотношениях между показателями преломления на высоте  $h$  и у земной поверхности.

$$N_d(h) = N_{d0} \left( 1 - \frac{h}{h_d} \right)^4 \quad (2.41)$$

где  $h$  – высота над антенной,  $N_{d0}$  – сухой показатель преломления на поверхности, а  $h_d$  определяет высоту над антенной, на которой показатель преломления равен нулю  $N_d(h_d) = 0$ .

Для влажного показателя преломления:

$$N_w(h) = N_{w0} \left( 1 - \frac{h}{h_w} \right)^4 \quad (2.42)$$

Окончательно тропосферный сдвиг определяется:

$$T_{z,d} = 77.64 \cdot 10^{-6} \frac{P_0}{T_0} \frac{h_d}{5} \quad (2.43)$$

$$T_{z,w} = 0.373 \cdot 10^{-6} \frac{e_0}{T_0} \frac{h_w}{5} \quad (2.44)$$

Сухая и влажная функции отображения:

$$m_d(E) = \frac{1}{\sin \sqrt{E^2 + 6.25}}, \quad m_w(E) = \frac{1}{\sin \sqrt{E^2 + 2.25}} \quad (2.45)$$

Модель Саастамойнена [53] была разработана с использованием газовых законов и упрощающих предположений, касающихся изменений в давлении, температуре и влажности с высотой. Сухая и влажная зенитные задержки даются как:

$$T_{z,d} = 0.002277(1 + 0.0026 \cos 2\varphi + 0.00028H)P_0 \quad (2.46)$$

$$T_{z,w} = 0.002277 \left( \frac{1255}{T_0} + 0.05 \right) e_0 \quad (2.47)$$

где  $T_0$  – температура (в Кельвинах),  $P_0$  – полное давление и  $e_0$  – парциальное давление паров воды (оба в миллибарах), все определенные у местоположения антенны по измерениям или по модельным данным стандартной атмосферы,  $\varphi$  – широта, а  $H$  – высота антенны над уровнем моря (км).

**Расчет тропосферного сдвига частоты КА на орбитальном цикле 29.09-30.09 2016.** Проведем экспериментальное вычисление тропосферного сдвига по модели «Хопфилда». Для этого используем сеансы КА «РадиоАстрон» с НСС «Пушино» 29-30 сентября 2016 года. Значения параметров тропосферы берутся из метеоданных на сервере webinet.

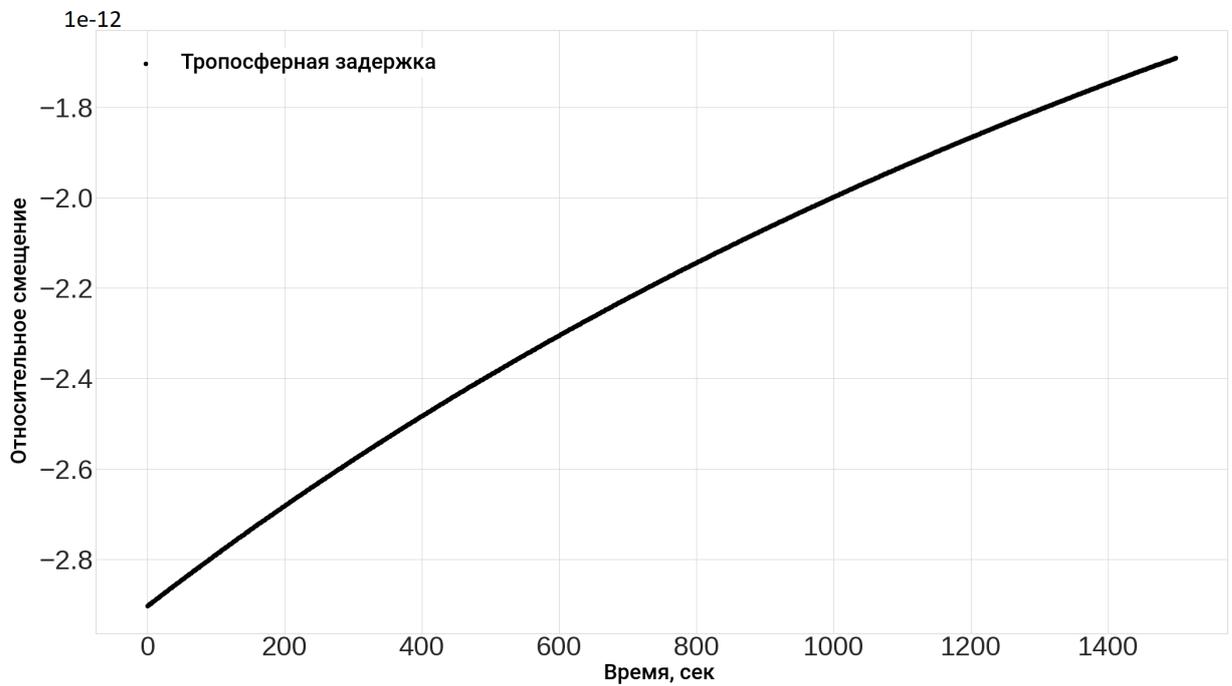


Рис. 2.19: Сеанс 2016/29/09 14:55-15:35

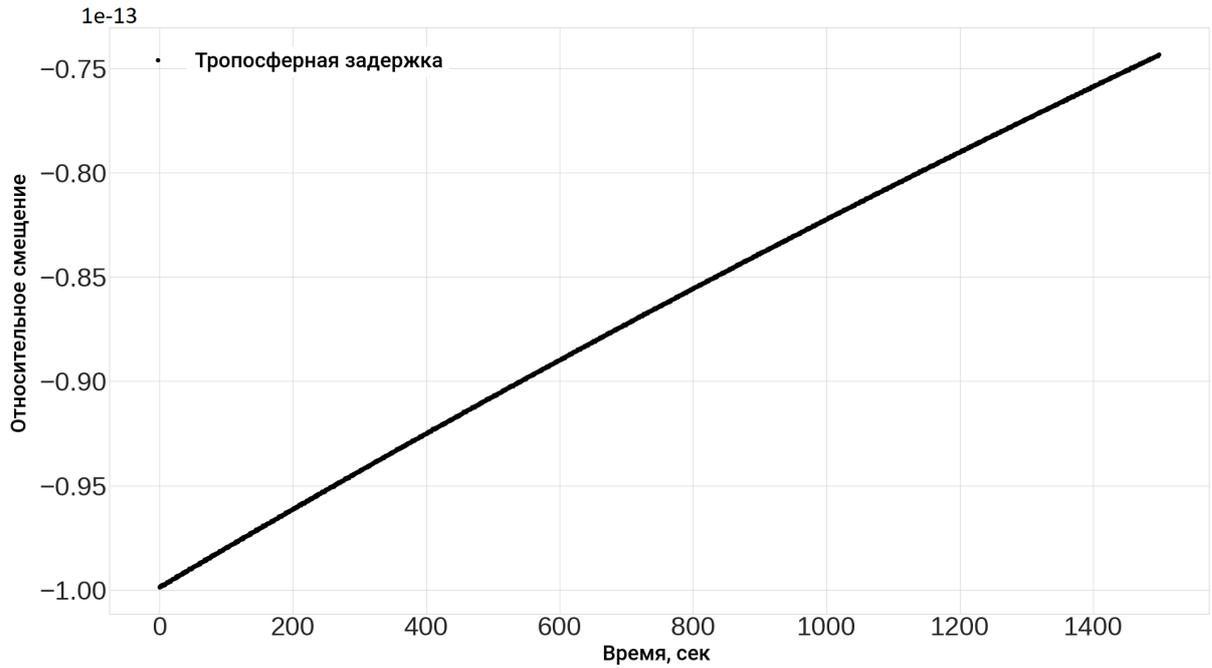


Рис. 2.20: Сеанс 2016/29/09 19:00-19:42

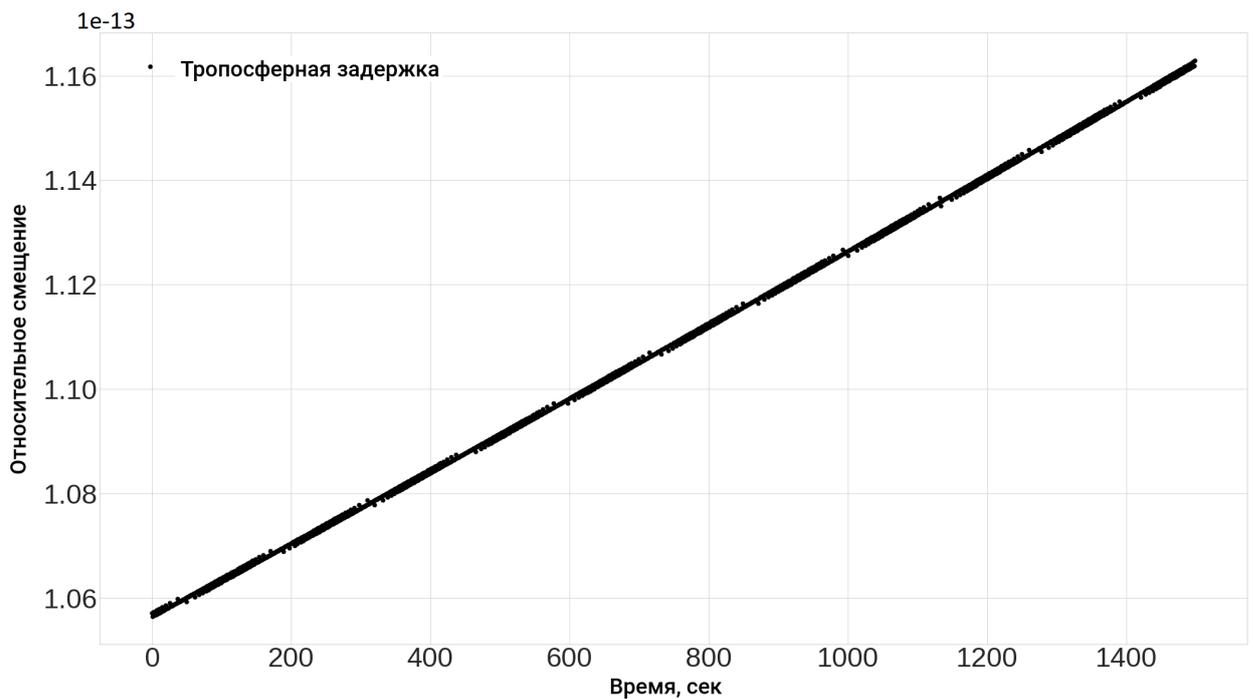


Рис. 2.21: Сеанс 2016/30/09 02:40-03:22

Значение относительного тропосферного сдвига, рассчитанное на основе экспериментальных метеоданных, полученных на НСС, хорошо совпадает с теоретическими прогнозами. Это позволяет использовать данный параметр для коррекции тропосферного сдвига при анализе гравитационного эффекта.

## Результаты компенсации атмосферных помех

В ходе исследования атмосферных эффектов для радиочастот «Радио-Астрона» была проведена оценка относительной величины ионосферного и тропосферного сдвига. Для оценки ионосферного сдвига применялся метод с использованием карт ТЕС.

Предложенный метод, основанный на учете дисперсионных свойств ионосферы и использовании двухчастотных измерений в линии связи между космическим аппаратом и наземной станцией, не обеспечил требуемой точности компенсации ионосферного сдвига. Это обусловлено значительным уровнем шумов приемного тракта, превышающим  $10^{-13}$ , наблюдаемым на частоте 15 ГГц.

В рамках решения нашей задачи был применен метод, адаптированный для одночастотного режима связи. В основе метода лежит модель однородного ионосферного слоя конечной толщины, позволяющая оценивать относительный частотный сдвиг сигнала на основе данных о полном электронном содержании (ТЕС), зенитном угле видимости космического аппарата и географическом положении наземного пункта приема.

Экспериментальные исследования показали, что в ходе гравитационных сеансов, проводимых на значительных расстояниях, вклад ионосферных возмущений не превышал  $10^{-14}$ , что позволяло пренебречь его влиянием на точность измерений. Однако в сеансах с малыми расстояниями до КА, характеризующихся высокой радиальной скоростью, ионосферный вклад достигал уровня  $10^{-13}$ , что требовало его обязательной компенсации.

Следует отметить, что в ближних сеансах наблюдалась степенная зависимость частоты принимаемого сигнала от времени, что приводило к возрастанию погрешности компенсации доплеровского сдвига первого порядка. Данный эффект явился причиной исключения части сеансов из дальнейшего анализа, поскольку их обработка не обеспечивала требуемой точности измерений.

Задача компенсации тропосферного сдвига решалась двумя способами: с использованием метеоданных на НСС и с помощью измерений в комбинированном режиме связи (1w и 2w), что было возможно из-за отсутствия дисперсии в тропосфере для рабочих частот «РадиоАстрона».

Для контроля были проведены расчёты с метеоданными, аналогичные

расчётам с ионосферой. Это было сделано для четырёх сеансов «Радио-Астрона» на одном орбитальном витке, и оценка дала среднее значение относительной величины частотного сдвига примерно  $\sim 10^{-13}$ .

### **2.3 Фликкер-шум в водородных стандартах частоты и методы его подавления**

Водородные стандарты частоты являются одними из наиболее точных и стабильных источников сигналов, используемых в различных областях науки и техники, включая телекоммуникации, навигацию и фундаментальные физические исследования. Однако даже такие высокоточные устройства подвержены влиянию различных видов шумов, среди которых особое место занимает фликкер-шум.

Фликкер-шум (или шум с изменяющейся частотой) — это тип случайного процесса, характеризующийся спектром мощности, который уменьшается пропорционально  $1/f^\nu$ , где  $1 \leq \nu \leq 3$ . Этот вид шума наблюдается в широком диапазоне физических систем и электронных устройств, включая водородные стандарты частоты. Фликкер-шум - типа  $\sim 1/f$ , проявляется на низких частотах и может существенно влиять на долговременную стабильность стандартов частоты. Этот шум особенно критичен на временных интервалах от десятков секунд до нескольких часов, где он может доминировать над другими источниками нестабильности.

#### **Причины возникновения фликкер-шума в водородных стандартах частоты**

Возникновение фликкер-шума в водородных стандартах частоты может быть обусловлено несколькими факторами:

- **Нестабильность источников питания:** колебания напряжения и тока могут влиять на работу стандарта частоты, вызывая фликкер-шум.
- **Температурные колебания:** изменения температуры могут влиять на параметры электронных компонентов и молекулярные процессы в водородном стандарте частоты.
- **Механические вибрации:** внешние механические воздействия могут

вызывать микроскопические деформации компонентов, что также может привести к фликкер-шуму.

- Неоднородности в материале и конструкции: дефекты и неоднородности в материалах, используемых для изготовления стандарта частоты, могут способствовать возникновению фликкер-шума.

Фликкер-шум в водородных стандартах частоты приводит к ухудшению долговременной стабильности частоты. Это выражается в увеличении отклонения частоты от номинального значения с течением времени. Для количественной оценки влияния фликкер-шума используется параметр девиации Аллана (Allan deviation), который является стандартным методом анализа стабильности частоты. На временных интервалах, где доминирует фликкер-шум, зависимость девиации Аллана от времени имеет характерный наклон  $1/2$  в логарифмическом масштабе.

**Методы учета и компенсации фликкер-шума** Для минимизации влияния фликкер-шума в водородных стандартах частоты применяются различные методы:

- Оптимизация конструкции лазера: улучшение стабильности магнитного поля, снижение температурных градиентов и минимизация механических вибраций позволяют уменьшить уровень фликкер-шума.
- Использование систем автоматической подстройки частоты (АПЧ): эти системы позволяют компенсировать медленные изменения частоты, вызванные фликкер-шумом, путем обратной связи.
- Применение алгоритмов цифровой обработки сигналов: современные методы цифровой фильтрации и анализа временных рядов позволяют выделить и подавить компоненты фликкер-шума.
- Калибровка и мониторинг: регулярная калибровка стандартов частоты и мониторинг их параметров позволяют своевременно выявлять и корректировать отклонения, вызванные фликкер-шумом.

Для анализа и количественной оценки влияния фликкер-шума на стабильность частоты широко используется ранее упомянутая дисперсия Аллана. Этот метод позволяет оценить уровень шума на различных временных интервалах и определить верхнюю границу фликкер-шума.

Дисперсия Аллана ( $\sigma^2(\tau)$ ) — это статистический параметр, который характеризует стабильность частоты на различных временных интервалах ( $\tau$ ). Она определяется как среднее значение квадрата разности соседних измерений частоты, нормированное на временной интервал. Математически дисперсия Аллана выражается следующим образом:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} (\bar{f}_{i+1} - \bar{f}_i)^2, \quad (2.48)$$

где  $\bar{f}_i$  — среднее значение частоты на  $i$ -м интервале,  $N$  — количество интервалов,  $\tau$  — длительность интервала.

Дисперсия Аллана позволяет классифицировать различные типы шумов, включая белый шум и фликкер-шум разных видов, в том числе случайных блужданий. Каждый тип шума имеет характерную зависимость дисперсии Аллана от временного интервала:

- **Белый шум:**  $\sigma(\tau) \propto \tau^{-1/2}$
- **Фликкер-шум:**  $\sigma(\tau) \propto \tau^0$  (не зависит от времени)
- **Случайный шум блуждания (Random Walk):**  $\sigma(\tau) \propto \tau^{1/2}$

Для фликкер-шума дисперсия Аллана на временных интервалах, где он доминирует, остается постоянной. Это свойство позволяет учесть вклад фликкер-шума в общую нестабильность системы.

Чтобы оценить верхнюю границу фликкер-шума с использованием дисперсии Аллана, мы проделали следующие действия: провели измерение модифицированной дисперсии Аллана на максимально возможном интервале накопления данных, построили график зависимости  $\sigma(\tau)$  от  $\tau$  в логарифмическом масштабе, на графике определили участок, где дисперсия Аллана остается примерно постоянной (наклон близок к нулю). Это соответствует временным интервалам, где доминирует фликкер-шум. Значение дисперсии Аллана на этом участке ( $\sigma_{\text{flicker}} < 10^{-14}$ ) является оценкой уровня фликкер-шума для нашего эксперимента. Экспериментальные результаты измерения дисперсии Аллана оказались сопоставимы с результатами полученными в лабораторных тестах водородного стандарта.

## 2.4 Анализ гравитационных воздействий Солнца и Луны на измерение RedShift

### Расчет влияния приливного потенциала Луны

$$\frac{\Delta f_{Moon}}{f} = \frac{GM_{Moon}}{r_{Moon}c^2} - \frac{GM_{Moon}}{|\vec{r}_{Moon} - \vec{r}_s|c^2} - \frac{GM_{Moon}}{r_{Moon}^3c^2}(\vec{r}_s \cdot \vec{r}_{Moon}) \quad (2.49)$$

$\frac{\Delta f_{Moon}}{f}$  - относительный сдвиг частоты сигнала компенсационной схемы, связанный с влиянием приливного потенциала Луны,  $M_{Moon}$  - масса Луны,  $r_{Moon}$  - геоцентрическое расстояние до центра масс Луны,  $\vec{r}_s$  - геоцентрический радиус-вектор космического аппарата,  $G$  - гравитационная постоянная,  $c$  - скорость света. Вклад Луны в относительный сдвиг частоты сигнала мог существенно варьироваться от сеанса к сеансу, поскольку он преимущественно определяется изменением расстояния между Луной и КА, а также удалением КА от Земли. Данный эффект учитывался в тех сеансах, где его величина превышала  $10^{-14}$ . На рис. 2.22 приведена зависимость модуля приливного потенциала Луны в зависимости от расстояния КА и НСС.

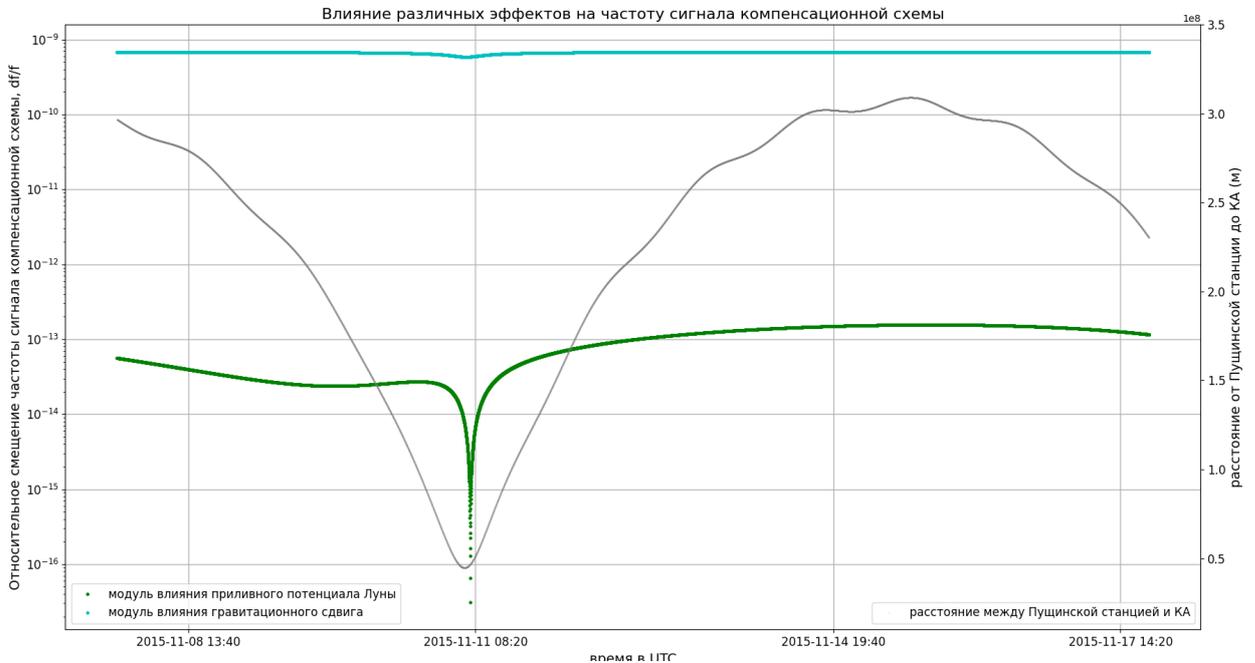


Рис. 2.22: Влияние гравитационного потенциала Луны (зелёный цвет) на фоне расстояния КА от НСС и самого RedShift эффекта

### Расчет влияния гравитационного поля Солнца

$$\frac{\Delta f_{Sun}}{f} = \frac{GM_{Sun}}{2r_{Sun}^3c^2} \left[ r_s^2 - \frac{3(\vec{r}_s \cdot \vec{r}_{Sun})^2}{r_{Sun}^2} \right] \quad (2.50)$$

$\frac{\Delta f_{Sun}}{f}$  - относительный сдвиг частоты сигнала компенсационной схемы, связанный с влиянием гравитационного поля Солнца,  $M_{Sun}$  - масса Солнца,  $r_{Sun}$  - геоцентрическое расстояние до центра масс Солнца,  $\vec{r}_s$  - геоцентрический радиус-вектор космического аппарата,  $G$  - гравитационная постоянная,  $c$  - скорость света.

На рис. 2.23 представлена зависимость влияния гравитационного потенциала Солнца в течение одного орбитального цикла. Полученные данные показывают, что в области расстояний, на которых проводились гравитационные эксперименты, вклад Солнца не превышает  $10^{-14}$ , что позволяет им пренебречь.

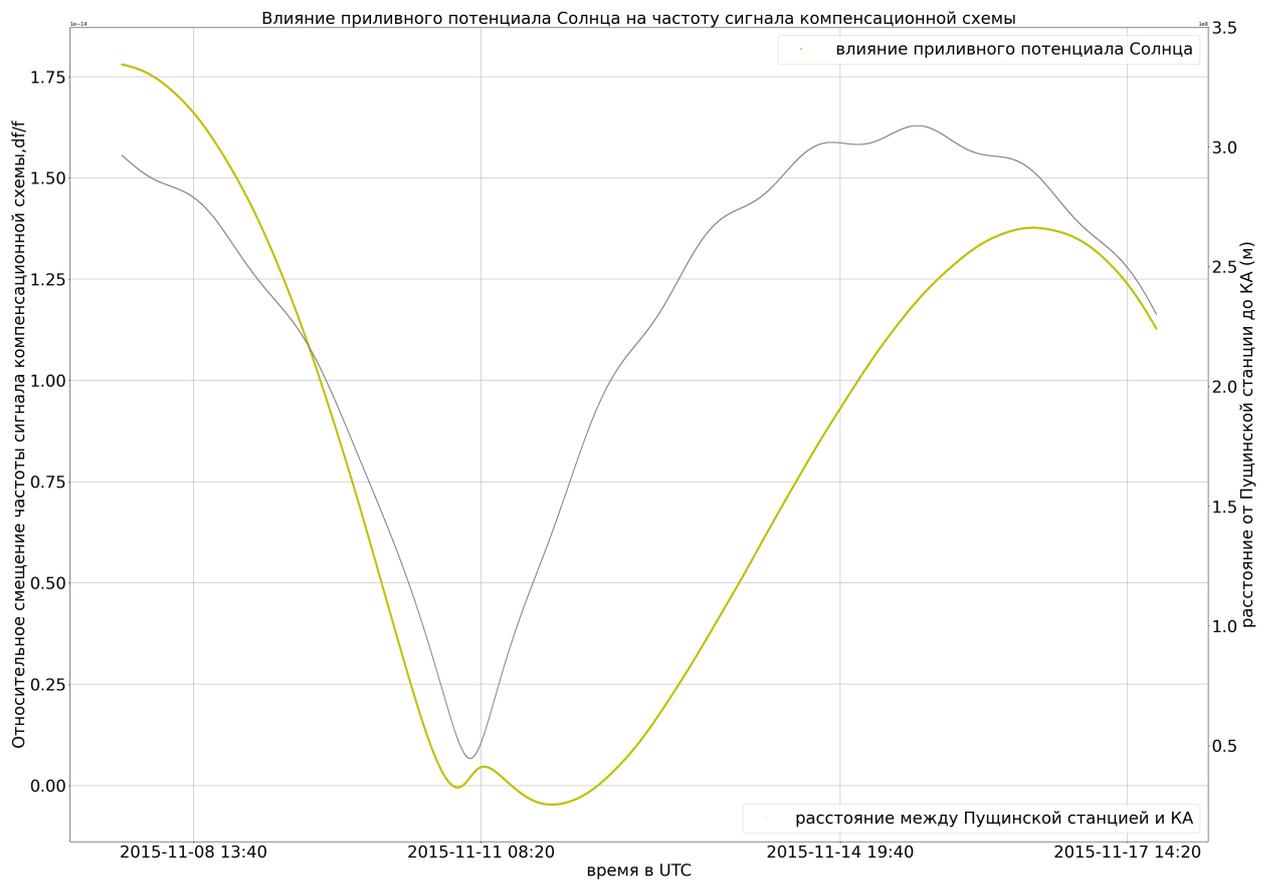


Рис. 2.23: Влияние гравитационного потенциала Солнца (жёлтый цвет) на фоне расстояния КА от НСС и самого RedShift эффекта.

## Глава 3

# Синтез накопленных «RedShift» измерений с оценкой параметра нарушения ОТО $\varepsilon$

### 3.1 Первичная обработка записей: спектральный алгоритм оценки частоты

Ограниченный по времени квазигармонический сигнал со спутника принимался на НСС, последовательно подвергался преобразованию на промежуточную частоту (ПЧ) с последующей оцифровкой для дальнейшего анализа. Схема высокоинформативного радиоконфлекса (ВИРК) и передачи научной информации представлена на рис. 3.1.

В рамках обработки принимаемого сигнала процедура измерения частоты осуществляется в реальном времени с использованием стандартных спектральных измерительных приборов, обеспечивающих временное разрешение 0.04 секунды, при этом более точная оценка частотных характеристик может быть получена при последующей обработке полной записи сигнала за весь интервал наблюдения. Типичный алгоритм обработки основан на итеративном преобразовании сигнала между временным и частотным представлениями, при котором сначала вычисляется спектральная плотность мощности, затем выделяется доминирующая спектральная составляющая с применением узкополосного частотного фильтра, после чего выделенный компонент подвергается частотному сдвигу в низкочастот-

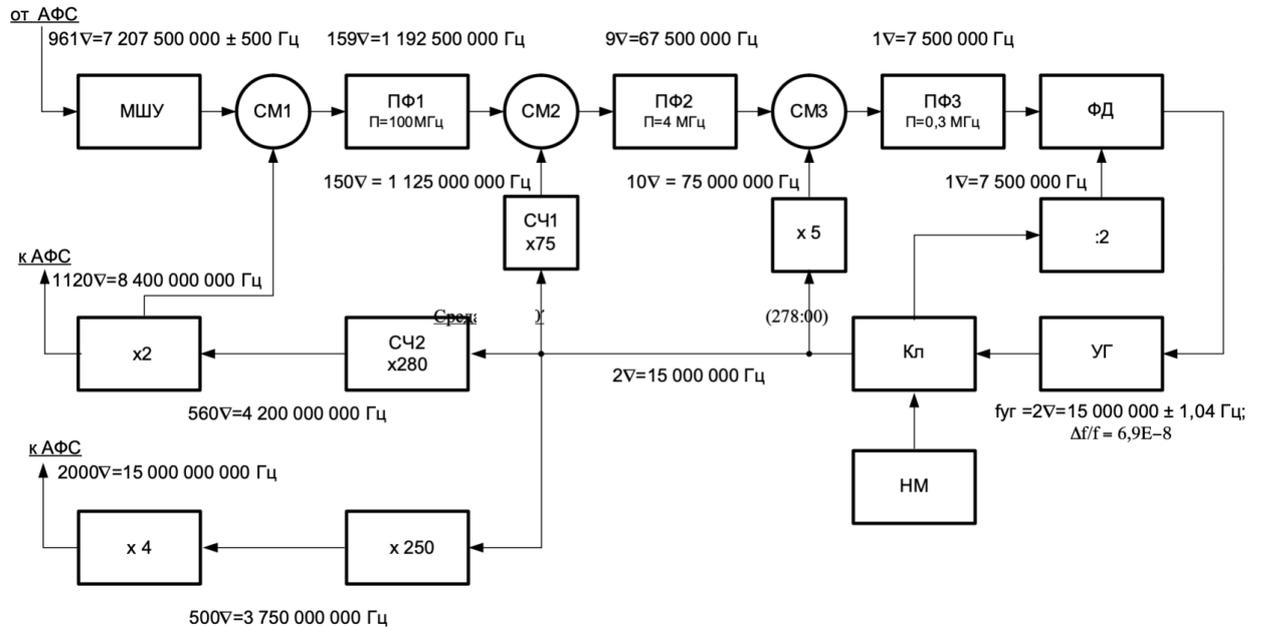


Рис. 3.1: Схема ВИРК. Интересующие нас преобразования 7.2075 ГГц, 7.5 МГц, 15 МГц, 8.4 ГГц, 15 ГГц.

ную область для уточнения параметров. Возвращение во временную область позволяет восстановить медленную эволюцию фазы, фазовый дрейф которой оценивается методом наименьших квадратов, а вычитание полученной регрессионной зависимости из полной фазы даёт «остановленную фазу», анализ производной и спектра которой позволяет определить мгновенное значение частоты и оценить погрешность измерения. Наиболее полная реализация данного алгоритма, включая соответствующие программные коды, была разработана в институте JIVE для обработки данных сети VLBI радиотелескопов, и в дальнейшем мы будем ссылаться на эту процедуру как на «оценку несущей» по алгоритмам PRIDE (Planetary Radio Interferometry and Doppler Experiment) swspectrometer и sctracker.

Напомним, что для линии связи КРТ с НСС были предусмотрены два основных режима работы. Первый, «Н-мазер» или «однопутевой» режим, который используется для приема сигналов спутника на несущей частоте с фазовой синхронизацией по бортовому водородному стандарту частоты. Второй, «когерент» или «двухпутевой» режим такой, в котором несущая синхронизирована по наземному стандарту частоты, расположенному на НСС. Сигнал отправляется на спутник с наземной станции, а затем ретранслируется спутником назад без изменения синхронизации (хотя изменение номинала несущей возможно). Наличие обоих режимов связи предо-

ставляет уникальную возможность фильтрации гравитационного сдвига частоты от эффектов другой природы. В частности, от преобладающего доплеровского сдвига, который на четыре порядка больше искомого гравитационного смещения. В двухпутевом коммуникационном сигнале доплеровский сдвиг вдвое больше, чем в однопутевом, и гравитационный сдвиг частоты там отсутствует полностью. Правильная комбинация этих сигналов может полностью устранить доплеровский эффект первого порядка и сохранить гравитационный вклад. Отчасти это также верно для тропосферного сдвига и некоторых других помех. Перейдем к аналитическому описанию предлагаемой фильтрации. Для этого определим наблюдаемые переменные: фазу и её производную по времени (частоту), которые формируются из входного сигнала, записанного на НСС.

Рассмотрим сигнал:

$$y(t) = S(t, \mathbf{a}) + n(t), \quad 0 < t < T, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} S(t, \mathbf{a}) &= A \cos[\omega_0 t + \varphi(t, \mathbf{a})] = \operatorname{Re}[Ae^{j(\omega_0 t + \varphi(t, \mathbf{a}))}], \\ \varphi(t, \mathbf{a}) &= \sum_k a_k t^k, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $S(t, \mathbf{a})$  - полезный узкополосный сигнал с векторным параметром  $\mathbf{a} = \|a_0 \dots a_m\|^T$ , где  $m$  - определяется маневренностью КА и

$$\langle n(t)n(t + \tau) \rangle = N\delta(\tau) - \text{Гауссов белый шум.} \quad (3.3)$$

Пусть  $\hat{a}_i = \gamma_i(y)$  - асимптотически несмещенная оценка неизвестного параметра  $a_i$ ,  $i = \overline{0, m}$ .

Тогда дисперсия определяется выражением:

$$\langle (a_i - \hat{a}_i)^2 \rangle \geq \sigma_{ii}^2, \quad (3.4)$$

где  $\sigma_{ii}^2$  - диагональные элементы матрицы  $\vec{I}^{-1}$ ,  $\vec{I} = [I_{ij}]$  - информационная матрица Фишера [26, 27, 28] для  $m = 3$ :

$$I = \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{vmatrix} \rightarrow I^{-1} = \begin{vmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_{22}^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_{33}^2 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} I_{ij} &= - \left\langle \frac{\partial^2 \ln \Lambda(y|\mathbf{a})}{\partial a_i \partial a_j} \right\rangle = \frac{1}{N} \int_0^T \frac{\partial S(t, \mathbf{a})}{\partial a_i} \frac{\partial S(t, \mathbf{a})}{\partial a_j} dt \simeq \\ &\simeq \frac{A^2}{2N} \int_0^T \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{a})}{\partial a_i} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{a})}{\partial a_j} dt = \\ &= q \frac{T^{i+j}}{(i+j+1)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $\Lambda(y|\mathbf{a})$  - отношение правдоподобия, отношение сигнал-шум обозначаем как  $q$ :

$$\ln \Lambda(y|\mathbf{a}) = \frac{1}{N} \int_0^T y(t) S(t, \mathbf{a}) dt - \frac{1}{2} q, \quad (3.7)$$

где  $\text{SNR} = q = \frac{A^2 T}{2N}$ .

При приеме фазомодулированного сигнала уравнения максимального правдоподобия оказываются нелинейными, что значительно усложняет техническую реализацию такого алгоритма. На практике, при измерении мгновенной частоты:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t), \quad \Delta\omega(t) = \dot{\varphi}(t, \hat{\mathbf{a}}), \quad (3.8)$$

получили широкое применение спектральные алгоритмы оценивания частоты сигнала. При спектральной оценке, интервал наблюдения  $(0, T)$  делится на короткие стационарные подынтервалы  $(t_k, t_k + \Delta t)$ ,  $k = \overline{0, Q}$ , где девиация частоты минимальна:

$$y(t) \rightarrow \sum_k y_k(t), \quad y_k(t) = y(t_k \leq t \leq t_k + \Delta t). \quad (3.9)$$

Оценка спектра производится для каждого подынтервала с помощью Fast Fourier Transform (FFT) с последующим усреднением. Шкала дискретизации по спектру может быть сделана достаточно подробной при искусственном увеличении интервала задания сигнала, с покрытием области расширения нулями. Отсюда, принимая во внимание уравнение 3.7, получаем:

$$\ln \Lambda(y|\mathbf{a}) = \sum_k \ln \Lambda(y_k|\mathbf{a}), \quad (3.10)$$

$$\ln \Lambda(y_k | \mathbf{a}) = \frac{A}{N} \operatorname{Re} \int_0^{\Delta t} y_k(t) e^{-j\Phi(t_k+t)} dt - \frac{q}{2}, \quad (3.11)$$

где

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t, \mathbf{a}), \quad q = \frac{A^2 \Delta t}{2N} \quad (3.12)$$

Из (3.11) видно, что логарифм отношения правдоподобия на каждом  $k$ -временном интервале пропорционален компоненте спектра  $y_k(\omega)$  на этом отрезке.

На коротких промежутках времени  $(t_k, t_k + \Delta t)$  в линейном приближении:

$$\Phi(t_k + \Delta t) \simeq \Phi(t_k) + \dot{\Phi}(t_k) \Delta t. \quad (3.13)$$

В соответствии с [59], максимально правдоподобная оценка мгновенной частоты  $\omega(t)$  в момент  $t = t_k$  определяется как частота, на которой спектральная составляющая достигает своего максимума на этом интервале:

$$|y_{k,\omega}(\omega_0 + \Delta\omega_k)| = \max |Y_{k,\omega(\omega)}|, \quad (3.14)$$

где  $Y_{k,\omega}(\omega) \leftrightarrow Y_k(t)$  - спектр случайного процесса  $y_k(t)$ .

Для  $\text{SNR} \gg 1$  дисперсия оценки  $\Delta\hat{\omega}_k$  (3.8) соответствует нижней границе Крамера-Рао, заданной диагональными элементами обратной матрицы Фишера. В частности, дисперсия коэффициентов частотного полинома выглядит следующим образом (см. (3.6)):

$$\sigma_\omega^2 \approx \frac{6}{q_k \Delta t^2}. \quad (3.15)$$

Когда влиянием собственных шумов приемника можно пренебречь, ошибка определяется шагом дискретизации по частоте  $\delta\omega$ :

$$\delta\omega \gg \sigma_\omega, \quad (3.16)$$

и тогда следует брать:

$$\langle (\omega_k - \hat{\omega}_k)^2 \rangle \approx \delta\omega^2 + \sigma_\omega^2 \approx \delta\omega^2. \quad (3.17)$$

Другим источником систематической ошибки в алгоритме спектральной оценки являются колебания частоты, вызванные неравномерным движением космического аппарата. Тогда линейной аппроксимации фазовой эволюции (3.8) недостаточно, необходимо использовать следующее приближение:

$$\Phi(t_k + t) \approx \Phi(t_k) + \dot{\Phi}(t_k)t + \frac{1}{2}\ddot{\Phi}(t_k)t^2. \quad (3.18)$$

В этом случае полезный сигнал  $S_k(t, \vec{a})$  считается линейно частотно - модулированным, и информационная матрица Фишера становится сложнее. Для устранения ошибки, вызванной частотной модуляцией, может быть применен метод определения фазы с использованием алгоритма оптимального частотного дискриминатора. Этот метод связан с алгоритмом оптимального дискриминатора принимаемого сигнала, в котором спектральное оценивание выступает как первое приближение для сужения полосы девиации частоты сигнала.

### 3.2 Алгоритм детектирования частоты сигнала. Моделирование данных

Наиболее общий алгоритм оценки информативного параметра  $\varphi(t, \mathbf{a})$  основан на параллельной во времени обработке реализации случайного процесса  $y(t)$  с помощью многоканального измерителя. Альтернативный подход, преимущество которого состоит в технической реализации, состоит в последовательном поиске, основным элементом которого оказывается дискриминатор отслеживаемого сигнала.

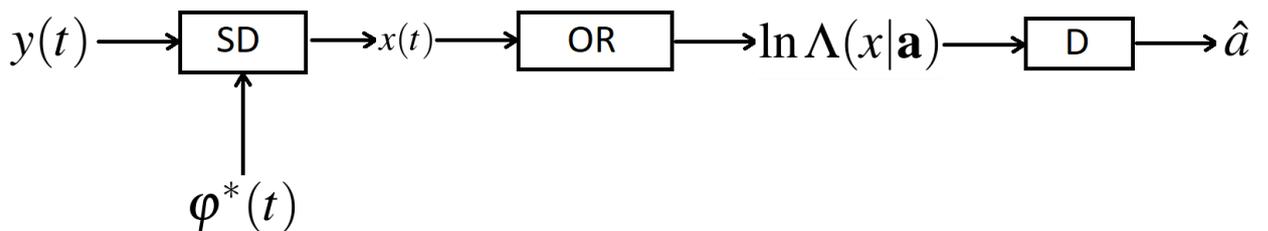


Рис. 3.2: SD - это синхронный детектор, OR - оптимальный приемник с выходным сигналом, пропорциональным  $\sim \ln \Lambda(x|\mathbf{a})$ , D - блок принятия решений со структурой, определяемой системой уравнений максимального правдоподобия.

Последовательный поиск можно рассматривать как метод последовательных приближений при решении системы нелинейных уравнений максимального правдоподобия.

Пусть

$$\varphi^*(t, \mathbf{a}) = \sum_k a_k^* t^k \quad (3.19)$$

- опорный сигнал, достаточно близкий к оцениваемому  $\varphi(t, \mathbf{a})$ .

Тогда

$$y(t) = A \cos [\omega_0 t + \varphi^*(t) + \Delta\varphi(t, \mathbf{a})] + n(t), \quad 0 < t < T, \quad (3.20)$$

где

$$\Delta\varphi(t, \mathbf{a}) = \varphi(t, \mathbf{a}) - \varphi^*(t) \quad (3.21)$$

Предполагая, что  $\varphi^*(t)$  является близкой оценкой к  $\varphi(t, \mathbf{a})$ , в первом приближении имеем:

$$y_0(t) = -A \sin \Phi^*(t) \Delta\varphi(t, \mathbf{a}) + n(t), \quad 0 < t < T \quad (3.22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y(t) - A \cos \Phi^*(t), \quad \Phi^*(t) = \omega_0 t + \varphi^*(t), \\ \Delta\varphi(t, \mathbf{a}) &= \varphi(t, \mathbf{a}) - \varphi^*(t) = \sum_k \Delta a_k t^k, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$\Delta a_k = (a_k - a_k^*), \quad (3.24)$$

$a_k^*$  - коэффициенты, полученные, например, алгоритмом swspectrometer (PRIDE).

Логарифм отношения правдоподобия случайного процесса определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(y_0 | \mathbf{a}) &\approx \frac{(-1)A}{N} \int_0^T y_0(t) \sin \Phi^*(t) \Delta\varphi(t, \mathbf{a}) dt - \\ &\quad - \frac{A^2}{2N} \int_0^T \sin^2 \Phi^*(t) \Delta\varphi^2(t, \mathbf{a}) dt \end{aligned} \quad (3.25)$$

При дальнейшем анализе воспользуемся комплексной формой записи узкополосных процессов:

$$y(t) = \operatorname{Re} [\tilde{y} \exp \{j\omega_0 t\}], \quad (3.26)$$

где

$$\tilde{y}(t) = R(t) \exp \{j\theta(t)\}, \quad (3.27)$$

- комплексная огибающая. Удаляя члены с удвоенной частотой  $2\omega_0$ , получим:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(x | \mathbf{a}) &= \frac{A}{N} \int_0^T x(t) \Delta\varphi(t, \mathbf{a}) dt - \\ &\quad - \frac{A^2}{4N} \int_0^T \Delta\varphi^2(t, \mathbf{a}) dt, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где

$$x(t) = R(t) \sin [\theta(t) - \varphi^*(t)] \quad (3.29)$$

Принимая во внимание, что

$$\Delta\varphi(t, \mathbf{a}) = \sum_k \Delta a_k t^k, \quad (3.30)$$

систему уравнений максимального правдоподобия

$$\left. \frac{\partial \ln \Lambda(x|\mathbf{a})}{\partial \Delta a_i} \right|_{\Delta a_i = \Delta \hat{a}_i} = 0, \quad i = \overline{0, M} \quad (3.31)$$

можно представить в матричном виде:

$$\sum_k I_{ik} \Delta \hat{a}_k = F_i, \quad (3.32)$$

где  $I_{ik}$  - элементы информационной матрицы Фишера 3.6.

$$F_i = \frac{1}{2N} \int_0^T x(t) t^i dt \quad (3.33)$$

Отсюда

$$\Delta \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \|F_0 \dots F_M\|^T, \quad (3.34)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{a}_k \rangle &= \Delta a_k = a_k - a_k^*, \\ \langle (\Delta \hat{a}_k - \Delta a_k)^2 \rangle &= \sigma_{ii}^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

В первом приближении применение дискриминатора приводит к смещенной ( $\Delta a \neq 0$ ) оценке  $\Delta\varphi(t, \mathbf{a}) \ll 1$  векторного параметра  $\mathbf{a}$ , а их дисперсии определяются диагональными элементами обратной матрицы Фишера. Дискриминатор можно рассматривать как метод последовательных приближений при решении нелинейных уравнений максимального правдоподобия по схеме:

$$\varphi_{m+1}^*(t) = \sum_K \hat{a}_{k,m} t^k, \quad (3.36)$$

где  $\hat{a}_{k,m}$  - оценки неизвестных параметров  $a_k$  на  $m$ -шаге ( $a_{k,m+1}^* = \hat{a}_{k,m}$ ). При больших отношениях сигнал-шум эти оценки стремятся к эффективным, т.е. несмещенным, с дисперсией, определяемой нижней границей неравенства

Крамера-Рао. Как видно из выражения 3.28,  $\ln \Lambda(x|a)$  пропорционален корреляционному интегралу наблюдаемой переменной  $x(t)$ , которая является комплексной огибающей входной смеси  $y(t)$  (в данном случае фаза  $\theta(t)$  компенсируется до начальной фазы  $\varphi^*(t)$ , см. (3.29)). Разница между многочленами текущей и начальной фаз используется в качестве опорного сигнала.

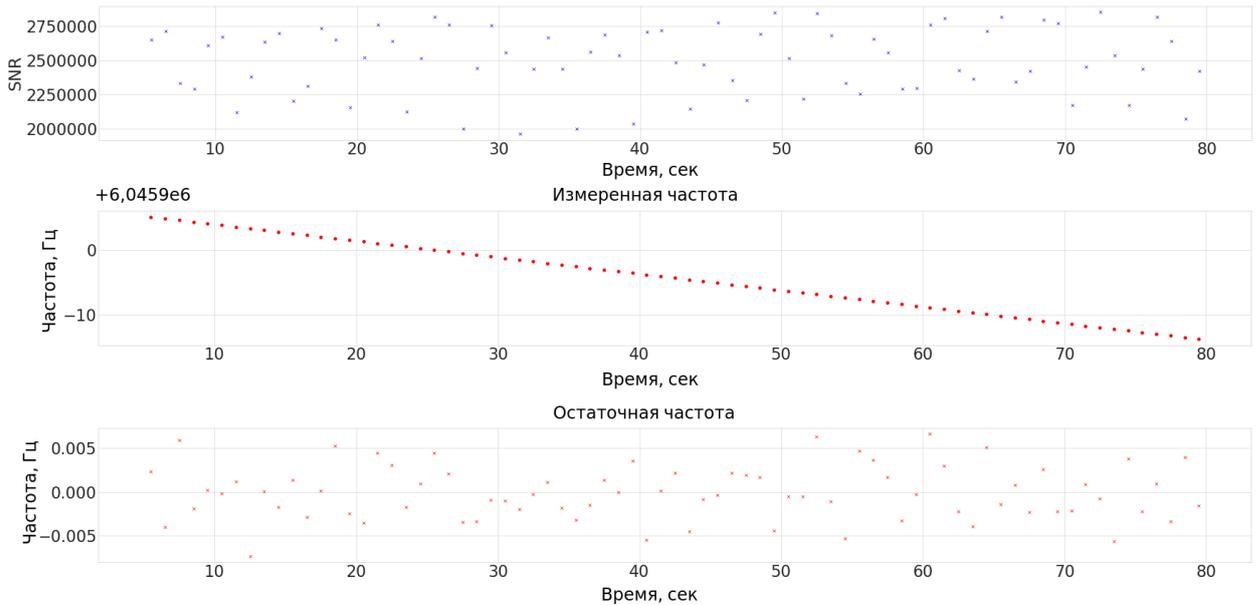


Рис. 3.3: Определение SNR каждого подынтервала с детектированием частоты спектральным методом

Наиболее правдоподобные оценки коэффициентов фазового полинома получены в виде решений уравнений (3.31) для поправок к параметрам  $\mathbf{a}_i$ . Эта процедура, часто называемая «последовательным дискриминатором», доказывает возможность получения максимально точных оценок параметров сигнала, соответствующих границе Крамера-Рао. Однако, если имеется дополнительная априорная информация, она может быть заменена более простой процедурой определения фазы. Такой информацией, в частности, является информация об узкой полосе пропускания принимаемого сигнала и большого значения SNR.

Априорная информация была получена нами из данных webinet (стандартного измерителя на станции) и после предварительной обработки записей спутникового сигнала с использованием алгоритма SWspectrometer. Используя эти источники, мы знаем, что спектр опорного сигнала  $S^*(t) = A \cos \Phi^*(t)$  сосредоточен (для  $\omega > 0$ ) в узкой полосе  $(\omega_0^* \pm \Delta\omega/2)$ , где

$\Delta\omega$  - отклонение частоты из-за неравномерного движения КА по орбите,  $\omega_0^* \simeq \omega_0$ . Тогда, принимая во внимание, что  $\varphi^*(t)$  - это довольно близкая оценка информативного параметра  $\varphi(t, \mathbf{a})$ , мы имеем

$$S(t, \mathbf{a}) \leftrightarrow S_\omega(\omega, \mathbf{a}) \neq 0, \quad \text{когда} \quad |\omega| \in (\omega_0^* \pm \xi\Delta\omega/2), \quad (3.37)$$

где  $\xi$  - масштабный коэффициент порядка единицы,  $S_\omega(\omega, \mathbf{a})$  - спектр сигнала и, следовательно,  $S(t, \mathbf{a}) = A \cos[\omega_0 t + \varphi(t, \mathbf{a})] = A \cos[\omega_0^* t + \varphi_D(t, \mathbf{a})]$ , где

$$\varphi_D(t, \mathbf{a}) = \varphi(t, \mathbf{a}) + (\omega_0 - \omega_0^*)t \quad (3.38)$$

При таком подходе

$$y(t) \rightarrow y_1(t) = \text{Re} [\tilde{y}_1(t) \exp \{j\omega_0^* t\}], \quad (3.39)$$

где

$$\tilde{y}_1(t) \leftrightarrow \tilde{y}_{1\omega}(\omega) = 2\tilde{y}_\omega(\omega_0^* + \omega), \quad |\omega| \leq \xi\Delta\omega/2 \quad (3.40)$$

В дальнейшем анализе будем предполагать, что SNR в полосе сигнала оказывается большим:

$$q_1 = \frac{A^2}{2N\Delta f} \gg 1 \quad (\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}), \quad (3.41)$$

и, следовательно, фаза сигнала:

$$\theta_1(t) = \arg \{\tilde{y}_1(t)\} \approx \varphi_D(t, \mathbf{a}) + \varphi_n(t), \quad (3.42)$$

где  $\varphi_n(t)$  - широкополосный гауссов шум со спектральной плотностью:

$$N_n(\omega) = \frac{2N}{A^2}, \quad |\omega| \leq \xi\Delta\omega/2 \quad (3.43)$$

Используя априорную информацию о сигнале после применения «swspectrometer», сужая полосу пропускания, мы убираем дрейф в зоне девиации частоты.

Схема обработки при фазовом дискриминаторе может быть представлена в виде:

$$\vec{y}(t) \rightarrow \left\| \begin{array}{c} y_{1C}(t) \\ y_{1S}(t) \end{array} \right\| \rightarrow \theta_1(t) = \arctan \left[ \frac{y_{1C}(t)}{y_{1S}(t)} \right] + \pi k \xrightarrow{(\omega_0 - \omega_0^*)} \downarrow \text{LSM} \rightarrow \hat{\mathbf{a}}. \quad (3.44)$$

Извлечение квадратурных составляющих сигнала:

$$y_{1C}(t) = \text{Re } \tilde{y}_1(t), \quad y_{1S}(t) = \text{Im } \tilde{y}_1(t), \quad (3.45)$$

с последующим выделением фазы сигнала. Затем проводится разворот фазы (с учетом ее скачков  $\pi k$ ) и регрессионный анализ с использованием LSM (метод наименьших квадратов). Используя информацию о сигнале от «swspectrometer», можно устранить дрейф частоты, практически сузив полосу пропускания до  $\Delta\omega < 5$  Гц. Учитывая, что при линейной модели сигнала:

$$\varphi_D(t, \mathbf{a}) = \sum_k a_k t^k + (\omega_0 - \omega_0^*)t, \quad (3.46)$$

оценки максимального правдоподобия оказываются эффективными [59], при  $\text{SNR} \gg 1$  имеем:

$$\langle (\hat{a}_k - a_k)^2 \rangle \simeq \sigma_{kk}^2, \quad (3.47)$$

где  $\sigma_{ii}^2$  - диагональные элементы обратной информационной матрицы Фишера.

В условиях миссии «Радиоастрон»  $\text{SNR} > 10^5$  достаточно для того, чтобы оценки дисперсии достигли уровня предела Крамера-Рао.

Таким образом, при большом  $\text{SNR}$ , оптимальный дискриминатор может быть заменен фазовым детектором. Преимущество этого метода заключается во времени обработки, а также в том факте, что оценки информативных параметров мы получали напрямую из данных.

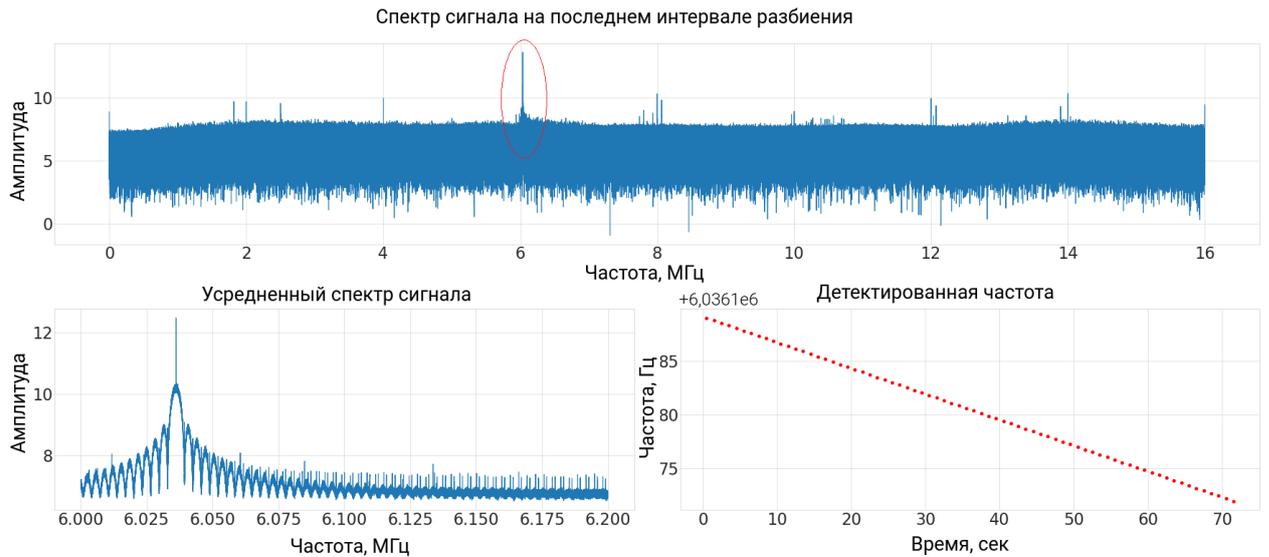


Рис. 3.4: На верхнем графике показан один из спектров, построенных с интервалом разбиения в одну секунду, на частоте около 6 МГц выделен основной тон, по которому определяется частота сигнала. На графике в левом нижнем углу показан усредненный спектр сигнала по всем интервалам. На нижнем правом графике показана зависимость частоты от времени, каждая точка соответствует частоте, определяемой максимумом в спектре.

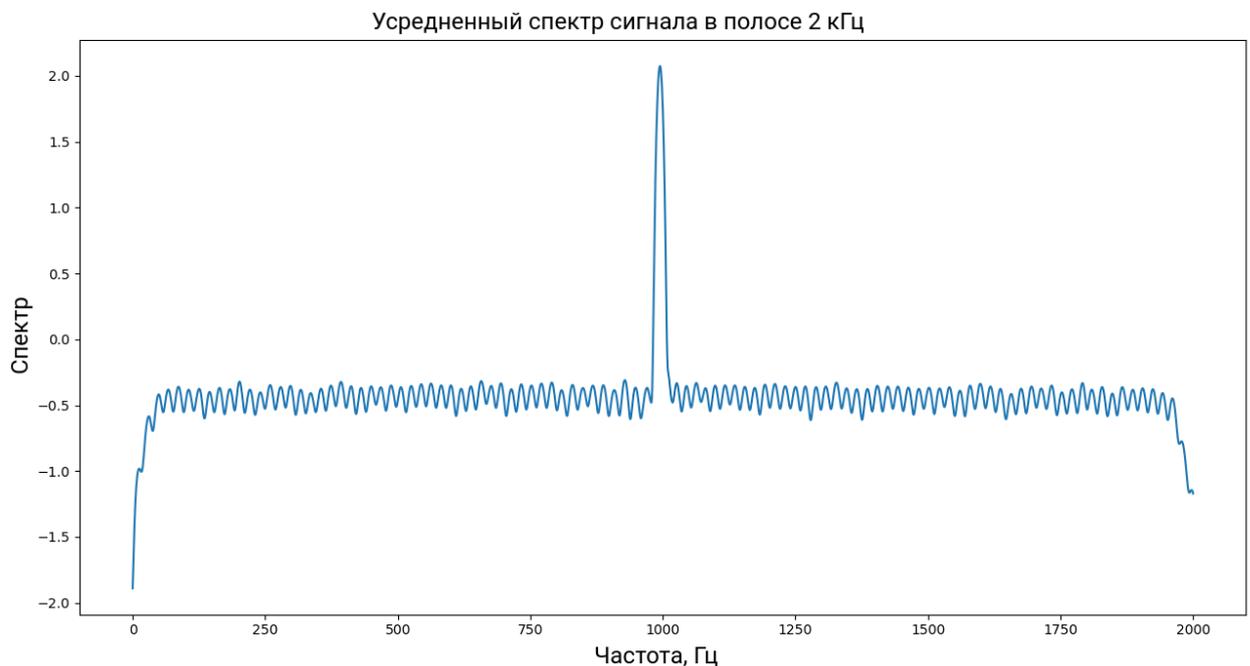


Рис. 3.5: Спектр сигнала после обработки STracker. Спектр сосредоточен в узкой полосе, сигнал можно считать стационарным

### 3.3 Оценка погрешности детектирования частоты

Для анализа вклада алгоритмической погрешности и ошибок интерполяции было выполнено моделирование радиосигнала с учётом кинематиче-

ских параметров космического аппарата. Модель сигнала строилась на основе полинома третьей степени:

$$f(t) = f_0 + at + bt^2 + ct^3, \quad (3.48)$$

где коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  учитывают доплеровский сдвиг первого и второго порядков. В смоделированный сигнал вводились аддитивные белый и фликкер-шумы ( $1/f$ ,  $1/f^2$ ), соответствующие характеристикам бортового стандарта частоты.

Для учёта эффектов квантования использовалось преобразование сигнала в формат Mark5B с помощью библиотеки `Baseband` при сохранении параметров реальной системы: частоты дискретизации 32 МГц и двухбитного квантования амплитуды.

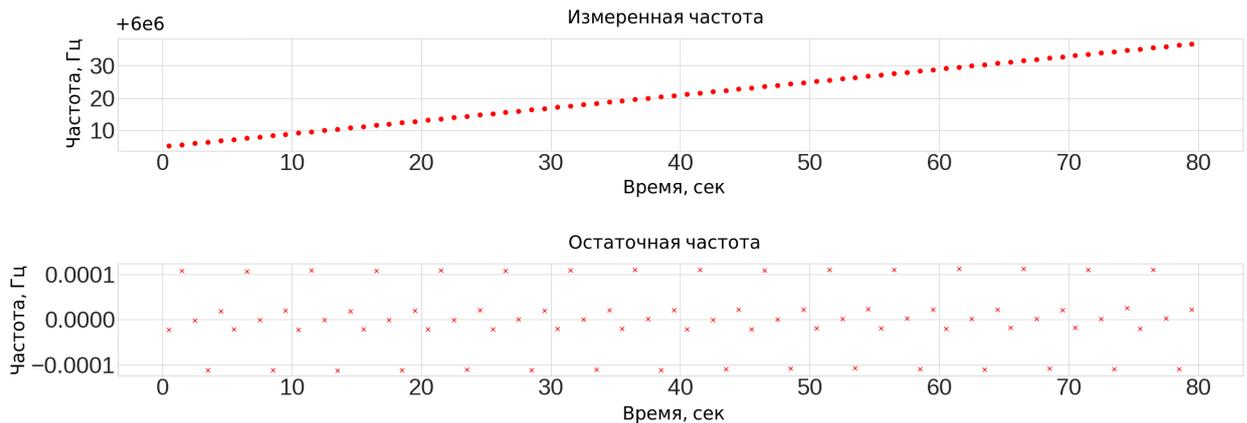


Рис. 3.6: Детектирование частоты модельного сигнала с помощью `swspectrometr`, а также невязки после аппроксимации детектированной частоты. Нижний график характеризует точность восстановления частоты сигнала. Учитывая невязки порядка  $10^{-4}$  Гц можно утверждать, что точность детектирования частоты на первом этапе превосходит точность `webinet` на 1 порядок. Дальнейшая обработка приводит к еще большему уточнению параметров сигнала.

Восстановление частотной зависимости на рис. 3.6 показало, что погрешность определения полиномиальных коэффициентов не превышает  $10^{-5}$  Гц на интервале наблюдения 80 с. Погрешность определялась путем сравнения априорно известного полинома с полиномом полученным на выходе алгоритма. Полученные результаты демонстрируют, что вклад методической погрешности алгоритма в общую ошибку измерения на 2 порядка меньше по сравнению с нестабильностью бортового генератора.

### 3.4 Оценка теоретического гравитационного сдвига

Оценка теоретического гравитационного сдвига проводилась также с использованием пакета SOFA [35], для этого мы рассчитывали гравитационный потенциал НСС и КА в момент посылки сигнала. Гравитационное поле Земли было рассчитано в модели EGM2008 с учетом приливных взаимодействий в соответствии с IERS. Гравитационный потенциал Земли рассчитывался следующим образом:

$$U = U_e + \sum_i U_{Tidal} \quad (3.49)$$

$$U_e = U_{EGM2008}(\vec{r}_{ITRS})$$

Гравитационный потенциал КА рассчитывается по стандартной формуле и имеет ошибку  $2 \times 10^{-15}$  для расстояний 50000 км. С увеличением расстояния относительная ошибка измерения гравитационного сдвига будет уменьшаться. Порядковый вклад каждого из эффектов представлен в таблице 3.1 и на рисунке 3.7.

| Эффекты тонкой компенсации                             |                       |              |
|--------------------------------------------------------|-----------------------|--------------|
| Эффект                                                 | макс. величина        | ошибка       |
| Грав. сдвиг, $\Delta U/c^2$                            | $6.8 \times 10^{-10}$ | $< 10^{-15}$ |
| Рел. Доплер эффект, $v^2/c^2$                          | $1.8 \times 10^{-10}$ | $< 10^{-16}$ |
| Грав. вклад Луны                                       | $6 \times 10^{-13}$   | $< 10^{-16}$ |
| Грав. вклад Солнца                                     | $< 1 \times 10^{-14}$ | $< 10^{-16}$ |
| $\Delta U/c^2$ , квадрупольный момент                  | $< 2 \times 10^{-15}$ | $< 10^{-16}$ |
| $\frac{\Delta f_{Ion}}{f}$ - ионосферный сдвиг частоты | $< 2 \times 10^{-14}$ | $< 10^{-16}$ |
| $\frac{\Delta f_{Trop}}{f}$ - тропосферный сдвиг       | $< 1 \times 10^{-15}$ | $< 10^{-16}$ |
| Фликкер-шумы                                           | $< 1 \times 10^{-14}$ | $< 10^{-14}$ |

Таблица 3.1: Остаточные эффекты после применения основной компенсационной схемы

Заканчивая описание стратегии измерений, подчеркнем ещё раз, что в гравитационных сеансах информационный сигнал записывался постоянно, но с перескоками между операционными модами 1w и 2w. Во время первичной обработки мы разделяли сигнал на отдельные интервалы с постоянным режимом работы. С учетом циклограмм сеанса, удалялось нестационарное начало каждого интервала 1w или 2w, где происходил захват

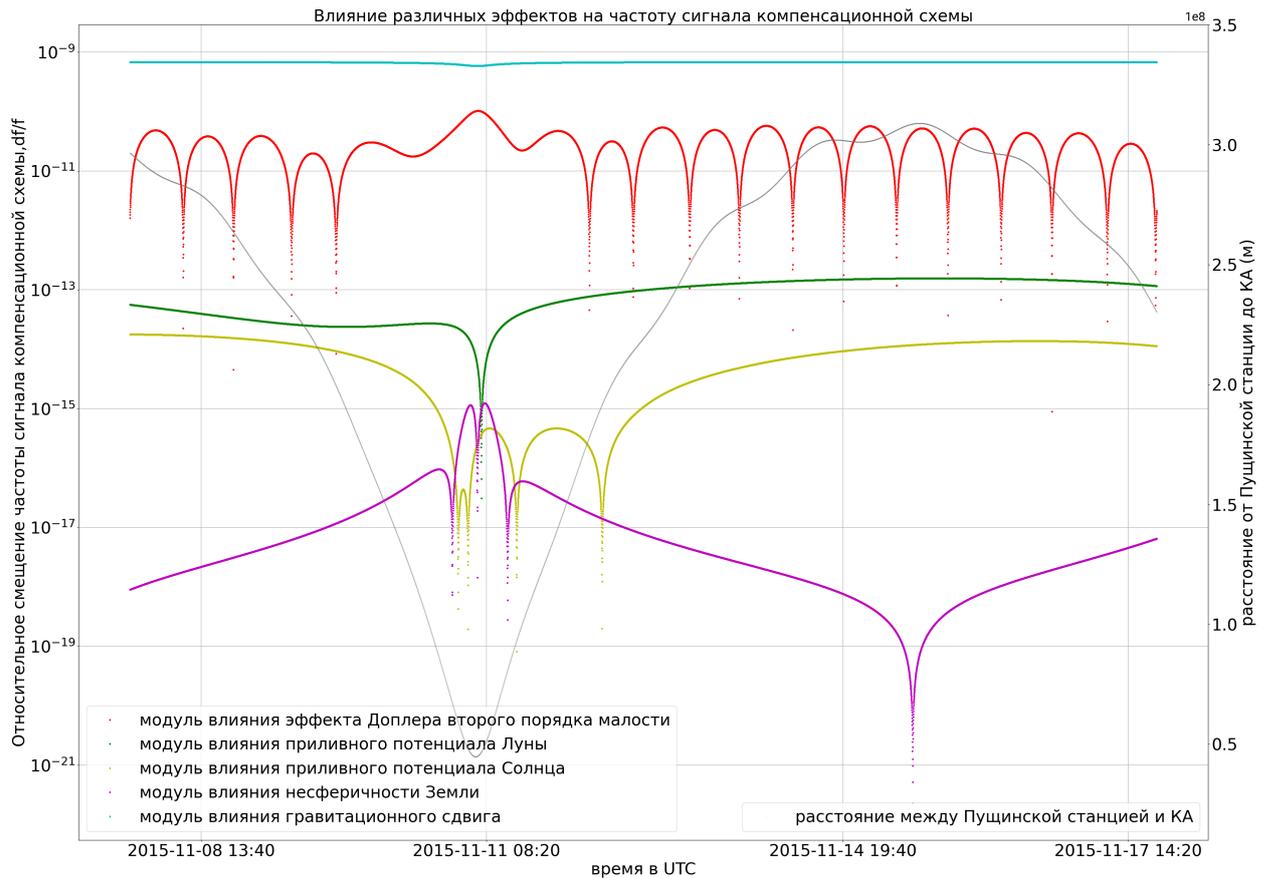


Рис. 3.7: Логарифмический график зависимости модуля всех рассчитанных эффектов (левая шкала) и расстояния между пуцинской станцией слежения и космическим аппаратом (правая шкала) от времени

частоты. Далее с помощью цифрового спектрометра оценивалась частота принятого сигнала (см. детали в работе [34]). Таблица 3.1 и Рис. 3.7 демонстрируют результаты анализа случайных и систематических ошибок со ссылками в тексте на работы, в которых этот анализ представлен детально. Напомним, что влияние фликкер эффектов рассмотрено в статьях [60, 61]. Погрешность интерполяции в измерительной моде со сменой режимов синхронизации рассчитывалась в полиномиальной аппроксимации (`scipy.interpolate`) с предварительным моделированием сигнала и основных помех [60]. В результате ошибка используемой интерполяции не превысила  $10^{-4}$  Гц.

### 3.5 Оценка совокупного параметра нарушения $\varepsilon$ на основе данных сеансов за 2017-2019 гг.

Нашей целью на финальном этапе являлась оценка параметра нарушения  $\varepsilon$  по совокупности проведенных гравитационных сеансов (в условиях априорной неопределенности), соответствующая критерию максимального правдоподобия (maximum likelihood criterion). На первом этапе происходит оценка  $\varepsilon$  путем совместного измерения среднего и дисперсии, предполагая, что оценки на отдельных подынтервалах есть независимые Гауссовы величины с неизвестным средним и дисперсией. Совокупность данных измерений можно описывать как случайный процесс, представленный дискретным вектором  $\boldsymbol{\varepsilon} = \|\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k\|^T$ , элементы которого  $\varepsilon_k$  есть оценки параметра  $\varepsilon$  в каждом отдельном сеансе.

При достаточно большом числе сеансов  $k \gg 1$  и весьма большом отношении сигнал-шум:  $\text{SNR} \approx (10^5 \div 10^6)$ , в полосе 1 кГц) распределение параметра ( $\varepsilon$ ) можно считать гауссовым и его оценку в сеансе  $k$  записывать как  $\varepsilon_k = \varepsilon \pm \Delta\varepsilon_k$ , где  $\Delta\varepsilon_k$  - гауссовы случайные величины с параметрами  $\langle \Delta\varepsilon_k \rangle = 0$  и  $\langle \varepsilon_k \varepsilon_i \rangle = \sigma_k^2$  при  $k = i$ , и 0 при  $k \neq i$  (знаки  $\langle \rangle$  - стат. усреднение). При условии независимых измерений в отдельных сеансах и некоррелированности их шумов, логарифм интегрального отношения правдоподобия векторного процесса  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (для совокупности всех сеансов) разбивается на сумму отдельных логарифмов  $\varepsilon_k$  для каждого сеанса, т.е. имеют место следующие соотношения:

$$\ln \Lambda(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} | \varepsilon) = \sum_{k=1}^m \ln \Lambda(\varepsilon_k | \varepsilon), \quad \ln \Lambda(\varepsilon_k | \varepsilon) = (\varepsilon_k \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}) / \sigma_k^2 \quad (3.50)$$

Максимально правдоподобная интегральная оценка неизвестного параметра  $\varepsilon$  при объединении всех сеансов является решением уравнения на экстремум:

$$\frac{\partial \ln \Lambda(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} | \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad (3.51)$$

отсюда, используя равенства 3.50, можно найти формулу оптимальной

оценки  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_{opt} = \frac{\sum_{k=1}^M \frac{1}{\sigma_k^2} \varepsilon_k}{\sum_{k=1}^M \frac{1}{\sigma_k^2}}, \quad (3.52)$$

где  $\varepsilon_k$  - оценка параметра нарушения в отдельном сеансе,  $\sigma_k^2$  - дисперсия в отдельном сеансе,  $\varepsilon_{opt}$  - оптимальная оценка  $\varepsilon$ ,  $M$  - число сеансов.

Это ключевой «алгоритм объединения», дающий оптимальную несмещенную и эффективную (минимальную) оценку параметра нарушения  $\varepsilon$  по совокупности измерительных сеансов. Дисперсия величины  $\hat{\varepsilon}_{opt}$  находится с помощью информационной матрицы Фишера (из формул оценки её параметров), а именно

$$\sigma_{\varepsilon_{opt}}^2 = - \left[ \left\langle \frac{\partial^2 \ln \Lambda(\hat{\varepsilon} | \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right\rangle \right]^{-1} = \left[ \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sigma_k^2} \right]^{-1} \quad (3.53)$$

Учитывая 3.52 и 3.53, можно записать интегральную оценку  $\hat{\varepsilon}$  в виде суммы вкладов каждого сеанса с их весовыми множителями  $\gamma_k$ :

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{k=1}^m \gamma_k \varepsilon_k, \quad \gamma_k = \left( \frac{\sigma_{min}}{\sigma_k} \right)^2, \quad (3.54)$$

где  $m$  - число сеансов,  $\sigma_{min}$  - минимальное значение  $\sigma$ . Видно, что влияние сеансов с большой дисперсией подавляется. Обработка данных состояла из нескольких последовательных этапов. На первом этапе (предварительная фильтрация), из записи сеанса удалялись первые 7 секунд каждого куска синхронизации 1w или 2w, где происходил «захват» сигнала, и SNR был небольшим ( $< 10^3$ ). Далее селектировались сеансы, на которых захват частоты после переключения режима выполнялся более 15 секунд, что сокращало длительность синхронизированного режима 1w и ухудшало потенциальную точность детектирования частоты сигнала ( $> 10^{-4}$  Гц), таких сеансов оказалось 17, и они были удалены из дальнейшей обработки. После этапа предварительной фильтрации обработка шла по схеме, описанной в разделе 2 настоящей статьи. В первую очередь, мы компенсировали тренд, вызванный эффектом Доплера 1-го порядка, с помощью компенсационной схемы 1.11, остаточные эффекты после применения компенсационной

схемы представлены на графике 3.7. Укажем, что поправки несферичности Земли и приливного потенциала Солнца минимум на порядок меньше точности используемых стандартов частоты, поэтому эти эффекты можно было не учитывать. Другие эффекты - приливной потенциал Луны, релятивистский эффект Доплера - существенны и вносят значительный вклад в итоговую ошибку всего эксперимента. Их компенсация была проведена с использованием реконструированной орбиты КА (баллистическая группа ИПМ РАН).

Важным шагом понижения систематической ошибки в оценке  $\varepsilon$  является компенсация эффекта расстройки (несовпадения частот) бортового и наземного стандартов частоты. Для этой цели использовались данные калибровочных сеансов, проводившихся параллельно с гравитационными. Подробное описание концепции калибровочных сеансов и результаты вычисления отстройки представлены в статье [62]. Компенсация отстройки проводилась с помощью интерполяции измеренных значений в калибровочных сеансах на дату проведения гравитационного сеанса, после чего ошибка отстройки вычиталась по аналогии с другими эффектами. Для небольшой части гравитационных сеансов (менее 10 %) отстройка осталась неизвестной, и эти сеансы были исключены из обработки. К ним добавились такие, которые имели помехи, вызванные приемной аппаратурой, отсутствием корректных баллистических данных, нелинейным изменением частоты сигнала. В общей сложности на втором этапе были исключены из обработки 9 сеансов. В итоге число сеансов, прошедших все критерии отбора, составило 14. Результаты измерений в этих сеансах отражены в таблице 3.2.

### 3.6 Результаты

Используя данные, полученные после обработки всех (таблица 3.2) гравитационных сеансов, в соответствии со стратегией измерений мы можем найти нормировочный коэффициент  $\alpha$ :

$$\alpha = \left( \sum_{k=1}^M \frac{1}{\sigma_k} \right)^{-1} = 0,0001547. \quad (3.55)$$

Далее, согласно формуле 3.52 можем найти  $\varepsilon_{opt}$  по совокупности измере-

| Сеанс    | Дата     | $\varepsilon_k \cdot 10^{-5}$ | $\sigma_k$ | $\varepsilon_{weight}$ |
|----------|----------|-------------------------------|------------|------------------------|
| raks17az | 16-09-30 | 4.5                           | 0,000494   | 1,41e-5                |
| raks17bl | 16-12-06 | 6                             | 0,003112   | 2,98e-6                |
| raks17bm | 16-12-06 | 4.8                           | 0,002928   | 2,54e-6                |
| raks17bo | 16-12-15 | 4                             | 0,002664   | 2,32e-6                |
| raks17br | 17-03-12 | 2.1                           | 0,000977   | 3,32e-6                |
| raks17bs | 17-03-13 | 1.2                           | 0,001410   | 1,34e-6                |
| raks17bt | 17-03-26 | 3.2                           | 0,000752   | 6,58e-6                |
| raks17bv | 17-03-29 | 1.7                           | 0,0029319  | 8,97e-7                |
| raks17aw | 16-09-29 | 40                            | 0,631962   | 2,45e-7                |
| raks17ay | 16-09-29 | 30                            | 0,002486   | 1,29e-7                |
| raks17bi | 16-11-26 | 63                            | 0,000251   | 1,03e-4                |
| raks17bk | 16-12-05 | 34                            | 4111       | -3,05e-8               |
| raks17bn | 16-12-14 | 174                           | 0,001939   | -2,78e-5               |
| raks17bu | 17-03-29 | 1032                          | 0,004340   | 1,10e-4                |

Таблица 3.2: Измерения параметра нарушения  $\varepsilon$  и  $\sigma_k$  в гравитационных сеансах

ний с учетом весового множителя.

Таким образом, совокупная оценка равна:

$$\bar{\varepsilon}_{opt} = \left( \sum_{k=1}^M \frac{1}{\sigma_k} \cdot \varepsilon_k \cdot \alpha \right) / N = 1.57 \times 10^{-5} \quad (3.56)$$

В итоге по совокупности всех сеансов мы получаем финальный результат [65]:

$$\varepsilon_{opt} = (1.57 \pm 3.96) \times 10^{-5} \quad (3.57)$$

### 3.7 Обсуждение

Выражение (3.57) демонстрирует основной результат гравитационных сеансов, проведенных с КРТ «РадиоАстрон». Соответствие экспериментальных данных измерения эффекта «RedShift» формуле ОТО подтверждено с повышенной точностью порядка  $\sim 4 \times 10^{-5}$  по сравнению с классическим уровнем первого космического эксперимента GP-A:  $1.4 \times 10^{-4}$ [43].

Подчеркнем, что гравитационные измерения с «РадиоАстрон» впервые содержали сеансы на весьма далеких расстояниях от Земли. Другие известные орбитальные измерения «RedShift» выполнялись в близкой околоземной зоне с радиусом  $\sim 20000$  км, включая спутники Gallileo. Измерения

с последними проводились независимо французской и немецкой группами; отчеты в работах [44, 45] дали разброс по параметру нарушения в пределах от  $(2.48 \div 4.5) \times 10^{-5}$  с ошибкой в  $1\sigma$ . Таким образом новый результат «РадиоАстрон» вполне согласуется с данными Galileo (проект GREAT). Интерес к дальнейшему повышению точности измерений «RedShift» эффекта продиктован его связью с ПЭЭ, поскольку любое нарушение ПЭЭ открывает возможность поиска «новой физики». Оценка роли гравитационных измерений с «RadioAstron» для селекции альтернативных теорий релятивистской гравитации на текущий момент затруднительна. В литературе в основном рассматривались «RedShift» на космологических масштабах [63]. На основе измерений в солнечной системе, в принципе, вероятно тоже можно сформулировать рецепты для подобного отбора, но это потребует серьезных дополнительных исследований. Что касается мотивации улучшения точности измерений «RedShift» и его практических приложений, то, кроме эвристического значения углубленной проверки ПЭЭ, очевидна навигационная потребность все более точного вычисления (прогноза) траекторий КА, особенно в дальнем космосе [64], куда закладывается величина «RedShift» при радиолокационном контроле траектории (соответствующая поправка вводилась баллистической группой ИПМ РАН при обслуживании миссии RA).

## Заключение

В представленной диссертационной работе решена актуальная научная задача повышения точности проверки ЭПЭ («RedShift» эффект) с КА «РадиоАстрон». Проведённые исследования расширяют возможности высокоточных радиоинтерферометрических измерений в релятивистской астрометрии и могут быть использованы в будущих космических миссиях, направленных на фундаментальные проверки ОТО и альтернативных теорий гравитации. В ходе проведённых исследований получены следующие основные результаты:

1. Разработан новый алгоритм обработки данных радиоинтерферометрических измерений, позволивший повысить точность определения гравитационного смещения частоты на порядок по сравнению со стандартным измерителем на НСС.
2. Создано специализированное программное обеспечение для учёта релятивистских поправок на основе библиотек **SOFA** и **Astropy**. Вместе с тем данный программный материал обладает достаточной универсальностью и может быть адаптирован для обработки данных других космических миссий, требующих высокой точности координатно-временных измерений.
3. Проведён детальный анализ влияния атмосферных эффектов на частоту сигнала КА «РадиоАстрон». Для учёта ионосферных возмущений разработан программный пакет, использующий тонкую модель ионосферы и данные об электронной плотности, что позволило минимизировать систематические погрешности измерений. Представлены результаты оценки влияния атмосферных эффектов на сдвиг частоты сигнала «РадиоАстрон», полученные с помощью указанного программного пакета с учетом пространственно-временных вариаций

электронной плотности. Результат компенсации ионосферного сдвига частоты представленный в главе 2 может служить критерием для построения циклограммы и выбора несущих частот для сеансов связи в будущих прецизионных миссиях.

4. Экспериментальные измерения эффекта «RedShift» подтвердили предсказания ОТО с точностью  $1.57 \pm 3.96 \times 10^{-5}$  по параметру отклонения, что в пять раз улучшает предыдущие результаты.
5. Впервые проведены измерения гравитационного красного смещения на масштабах, сравнимых с расстоянием до Луны, позволили экспериментально подтвердить Эйнштейновский Принцип Эквивалентности в части однородности релятивистского пространства-времени.
6. Методики исследования расширяют возможности радиоинтерферометрических измерений в релятивистской астрометрии и могут быть использованы в будущих космических миссиях, направленных на проверку ОТО и альтернативных теорий гравитации.
7. Полученные результаты и развитие оптических стандартов частоты указывают на перспективы дальнейшего повышения точности экспериментальных тестов общей теории относительности в условиях глубокого (дальнего) космоса, в задачах геодезии, космических гравитационно-волновых обсерваториях, а также в космических экспериментах с целью обнаружения темной материи.

## Благодарности

Выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю, д.ф.-м.н. Руденко Валентину Николаевичу, с.н.с. к.ф.м.н. Гусеву Андрею Викторовичу за ценные рекомендации, поддержку и внимание к моей работе на всех этапах исследования. Благодарю сотрудников отдела гравитационных измерений: Попова Сергея Михайловича, Миронова Алексея Павловича, Кулагина Виктора Владимировича – за помощь в проведении обработки экспериментальных данных и обсуждение результатов, а также Гурина Федора Сергеевича за плодотворное сотрудничество.

## Литература

- [1] *Misner, C. W.* Gravitation / Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. San Francisco: W. H. Freeman – 1973 – 1305 с.
- [2] *Einstein A.* Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes // Annalen der Physik. – 1911. – Т. 340. С. 898-908.
- [3] *Einstein A.* Die Feldgleichungen der Gravitation // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. – 1915 – С. 844–847
- [4] *Roll, P.G., Krotkov, R.V., Dicke, R.H.* The equivalence of inertial and passive gravitational mass. // Annals of Physics. – 1964. – ФЕВРАЛЬ. – Т. 26, № 3. – С. 442-517.
- [5] *Williams J. G., Turyshev S. G., Boggs D. H.* Lunar laser ranging tests of the equivalence principle // Classical and Quantum Gravity – 2012. – АВГ. – Т. 29, № 18. – С. 184004.
- [6] *Roland v. Eötvös, Desiderius Pekár, Eugen Fekete* Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität // Annalen der Physik. – 1922. – Т. 68, № 11. – С. 11–66.
- [7] *Einstein A.* Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie // Annalen der Physik – 1916. – Т. 354, № 7. – С. 769-822 – 10.1002/andp.191635407
- [8] *Dicke R. H.* The Theoretical Significance of Experimental Relativity. – 1964. – под ред. Gordon and Breach, New York
- [9] *Will C.M.* Theory and Experiment in Gravitational Physics. – под ред. Cambridge Univ. Press, 2018.
- [10] *Touboul, P., Métris, G., Rodrigues, M., André, Y., Baghi, Q., Bergé, J., Yvon, D.* Space test of the equivalence principle: first results of the

- MICROSCOPE mission. // Classical and Quantum Gravity – 2019 – Окт. – Т. 36, № 22. – С. 225006. DOI: 10.1088/1361-6382/ab4707
- [11] *Einstein, A.* Zur Elektrodynamik bewegter Körper. // Annalen Der Physik – 1905. – Июнь. – Т. 322, № 10. – С. 891-921
- [12] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — 7-е изд., испр. — М.: Наука, 1988. — 512 с. — Теоретическая физика: Учеб. пособие для вузов; Т. 2.
- [13] *L. I. Schiff.*, On Experimental Tests of the General Theory of Relativity // Am. J. Phys. – 1960. – Апр. – Т. 28, № 4. – 340-343.
- [14] *N.S. Kardashev, V.V.Khartov, V.V.Abramov,* // Astron. Rep. – 2013. – Март. – Т. 57 – С. 153-194
- [15] *A. V. Biriukov, D.A. Litvinov, V.N. Rudenko,* Gravitational redshift test with the space radio telescope «RadioAstron» // Astron. Rep. – 2014 – Ноябрь. – Т. 58, № 11. – С. 783-795
- [16] *Сажина, О. С.* Основы математической обработки наблюдательных и экспериментальных данных для астрономов: учебное пособие // О. С. Сажина. — Москва : Издательство Московского университета, 2024. — Классический университетский учебник.
- [17] *A.V. Belonenko, F.S.Gurin, V.N.Rudenko,* Измерение «RedShift» эффекта с космическим аппаратом «РадиоАстрон» // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2023. – Дек. – С. 30-37.
- [18] *M. V. Sazhin, I. Yu. Vlasov, O. S. Sazhina, V. G. Turyshev,* RadioAstron: relativistic frequency change and time-scale shift // Astron. Rep., – 2010 – Ноябрь. – Т. 54 – С. 959-973.
- [19] *M.V. Zakhvatkin, A.S. Andrianov, V.Y. Avdeev* RadioAstron orbit determination and evaluation of its results using correlation of space-VLBI observations // Advances in Space Research – 2018 – Дек. – Т. 2, № 2 – С. 798-812

- [20] *Zheng, X., Dolde, J., Cambria, M.C.* A lab-based test of the gravitational redshift with a miniature clock network // *Nature Commun* – 2023. – Авт. – Т. 14 – С. 4886
- [21] *A.V.Belonenko, S. M. Popov, V. N. Rudenko,* Compensation of Atmospheric Hindrances in Measuring the Gravitational Redshift Using Satellites On-board Clocks // *Gravitational and cosmology* – 2020. – Авт. – Т. 26, № 2. – С. 128-125
- [22] *Molera Calves G.* – Ph.D. dissertation, // *Aalto University* – № 42 (2012)
- [23] *Cramér, H.* *Mathematical Methods of Statistics* // *Princeton: Princeton University Press.* – 1946
- [24] *Rao, C.R.* Information and the Accuracy Attainable in the Estimation of Statistical Parameters. // *Bulletin of Calcutta Mathematical Society* – 1945. – С. 81-91
- [25] *И.К. Волков, СМ. Зуев, Г.М. Цветкова,* Случайные процессы // *Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана* – 1999. – С. 338-344
- [26] *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. // *под ред. М, Сов.радио,* – 1987
- [27] *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. // *под ред. М. Сов. радио* – 1972.
- [28] *Левин Б.Р.,* Теоретические основы статистической радиотехники, // *под ред. М. – Радио и связь* – 1989
- [29] *И. В. Гоголев, Г. Ю. Яшин,* Статистические характеристики оценки параметров сигнала по максимуму нормированного коррелятора // *Известия вузов России. –Радиоэлектроника.* – 2018 – Г 3, – стр. 15-22
- [30] *И. В. Гоголев,* Граница Крамера-Рао оценки доплеровской деформации и задержки сигнала с произвольной шириной спектра, // *Известия вузов России. Радиоэлектроника.* – 2016. – Г 6, – С. 1-6
- [31] *И. В. Гоголев,* Сравнение статистических характеристик оценок доплеровской деформации и задержки сигнала с результатами узкополосной

модели // Известия вузов России. Радиоэлектроника. – 2018. – Г. 1. – С. 13-18

- [32] *Sobolev V. S., Feshenko A. A.* – Accurate Cramer-Rao Bounds for a Laser Doppler anemometer // IEEE transactions on instrumentation and measurement. – 2006. – Март. – Т. 55, №2. – С. 659-665.
- [33] *Соболев В. С., Журавель Ф. А.* Максимально правдоподобные оценки частоты сигналов лазерных доплеровских анемометров // Радиотехника и электроника. – 2014. – Т. 59, №4. – С. 322-330
- [34] *A. V. Belonenko, A. V. Gusev and V. N. Rudenko* Precision Measurement of Gravitational Frequency Shift of Radio Signals Using Rao-Cramer Estimates // Gravitation and Cosmology – 2021. – Дек. – Т. 2, №. 4 – С. 383-391.
- [35] IAU SOFA Board, IAU SOFA Software Collection Issue 2021-01-25 <http://www.iausofa.org>
- [36] *Shapiro S.S. et al.* Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves // Physical Review Letters – 2004 – Март. – Т. 92, № 12 – С. 121101.
- [37] *Walsh D. et al.* 0957+561 A,B: Twin Quasistellar Objects or Gravitational Lens? // Nature – 1979. – Май. – Т. 279 – С. 381-384
- [38] *Narayan R., Bartelmann M.* Lectures on Gravitational Lensing – 1996 // arXiv:astro-ph/9606001
- [39] *F. W. Dyson, A. S. Eddington and C. Davidson* A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919 // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character – 1920. – Янв. – Т. 220, № 571. – С. 291-333. 10.1098/rsta.1920.0009
- [40] *R. V. Pound and G. A. Rebka, Jr.,* Apparent Weight of Photons // Phys. Rev. Lett. – 1960. – Апр. – Т. 4, № 7. – С. 337-341

- [41] *Алексеев С. О.* – Введение в общую теорию относительности, ее современное развитие и приложения // С. О. Алексеев, Е. А. Памятных, А. В. Урсулов, Д. А. Третьякова, К. А. Ранну, М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 380 с. ISBN 978-5-7996-1584-0
- [42] *Takamoto, M., Ushijima, I., Ohmae, N.* Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks. // Nat. Photonics – 2020. – Апр. – Т. 14 – С. 411–415
- [43] *R. F. C. Vessot, M. W. Levine, E. M. Mattison* Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser // Phys. Rev. Lett. – 1980. – Дек. – Т. 45, № 26. – С. 2081–2084
- [44] *P. Delva, , N.Puchades, E.Schonemann* Gravitational Redshift Test Using Eccentric Galileo Satellites // Phys. Rev. Lett – 2018. – Дек. – Т. 121 – С. 231101
- [45] *S. Herrmann, F. Finke, M. Lulf* Test of the Gravitational Redshift with Galileo Satellites in an Eccentric Orbit // Phys. Rev. Lett – 2018 – Дек. – Т. 121 – С. 231102
- [46] *Н. С. Кардашев, В. В. Хартов, В. В. Абрамов* «РадиоАстрон» — телескоп размером 300 000 км: основные параметры и первые наблюдения // Астрономический журнал – 2013 – Янв. – Т. 90, № 3. – С. 179–222
- [47] *Vessot, R. F. C., Levine, M. W.* Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser // General Relativity and Gravitation – 1979. – Фев. – Т. 10 – С. 181-204
- [48] *Zolesi, Bruno, Cander, Ljiljana R.* Ionospheric Prediction and Forecasting // под ред. Springer Berlin, Heidelberg – 2014
- [49] *Saha, Kshudiram* The Earth’s Atmosphere Its Physics and Dynamics // под ред. Springer Berlin, Heidelberg – 2008

- [50] *James R. Holton, Gregory J. Hakim, An Introduction to Dynamic Meteorology* // под ред. Academic Press, 5th Edition (2012), eBook ISBN: 9780123848673
- [51] *Hopfield, H. S.* Two-quartic tropospheric refractivity profile for correcting satellite data // *J. Geophys. Res.* – 1969. – Август. – Т. 74, № 18. – С. 4487–4499
- [52] *B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and I. Collins* Global Positioning System; Theory and Practice // – под ред. Springer-Verlag Wien – 1992 10.1007/978-3-7091-5126-6
- [53] *Saastamoinen, J.* Contributions to the theory of atmospheric refraction // *Bulletin Géodésique* – 1972 – Сентябрь. – Т. 107. – С. 13-34.
- [54] *Guier, W. H., and G. C. Weiffenbach* A satellite Doppler navigation system // *Proc. IRE* – 1960. – Апрель. – Т. 48 – С. 507-516
- [55] *Колосов М.А., Шабельников А.В.* Рефракция электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры и Марса., – М.: Сов. радио – 1976. - 220 с.
- [56] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц,* Теоретическая физика. – Том VIII. Электродинамика сплошных сред, ФИЗМАТЛИТ, (2003)
- [57] International GNSS Service (IGS), RINEX Working Group and Radio Technical Commission for Maritime Services Special Committee 104 (RTCM-SC104), July14th, 2015
- [58] *Alizadeh H. Schuh S., Todorova M., Schmidt* Global Ionosphere Maps of VTEC from GNSS, satellite altimetry, and formosat-3/COSMIC data // *Journal of Geodesy* – 2011 – Декабрь. – Т. 85, № 12 – С. 975–987
- [59] *Ю.Г. Сосуллин,* Теоретические основы радиолокации и радионавигации, – М. «Радио и связь» – 1992
- [60] *N. V. Nunes, N Bartel, A Belonenko, et al.* Gravitational redshift test of EEP with RadioAstron from near Earth to the distance of the Moon // *Class. Quantum Grav.* – 2023. – Июль. – Т. 40, № 17. – С. 175005

- [61] *Gusev, A.V., Litvinov, D.A., Rudenko, V.N.* The inverse problem of estimating the gravitational time dilation // J. Exp. Theor. Phys. – 2016 – Дек. – Т. 123 – С. 814–821
- [62] *D.A. Litvinov, V.N. Rudenko, Alakoz A. V., et al.* Probing the gravitational redshift with an Earth-orbiting satellite // Physics Letters A – 2018 – АВГ. – Т. 382, № 33 – С. 2192-2198
- [63] *D. Rosselli, F. Marulli, A. Veropalumbo* Testing general relativity: New measurements of gravitational redshift in galaxy clusters // Astronomy and Astrophysics – 2023 – ЯНВ. – Т. 669, № A29 – С. 1-16
- [64] *P.C. Brandt, E.A. Provornikova, A. Cocoros* Interstellar Probe: Humanity’s Exploration of the Galaxy Begins – Acta Astronautica – 2022. – ОКТ. – Т. 199 – С. 364–373
- [65] *Rudenko V.N., A. V. Belonenko, Gusev A.V., Gurin F.S., Kulagin V.V., Popov S.M., Manucharyan G.D., Zakhvatkin M.V., Kovalenko A.V.* Precision measurement of the gravitational frequency shift of electromagnetic signals // Journal of Experimental and Theoretical Physics. - 2024. – ОКТ. - Vol. 166. - №5. - С. 632-640.

## Приложение

Прежде чем рассматривать релятивистский эффект Доплера, необходимо вывести выражения для времени распространения сигнала между тремя ключевыми событиями в четырёхмерном пространстве-времени:

- $P_1 = (ct_1, \vec{r}_e(t_1))$  — момент передачи сигнала с наземной станции,
- $P_2 = (ct_2, \vec{r}_s(t_2))$  — момент приёма сигнала космическим аппаратом и его мгновенной передачи обратно,
- $P_3 = (ct_3, \vec{r}_e(t_3))$  — момент приёма отражённого сигнала наземной станцией.

В ОТО электромагнитные сигналы распространяются вдоль нулевых геодезических, соединяющих события, так что интервал пространства-времени между ними равен нулю:

$$-ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0, \quad (3.58)$$

Для локально инерциальной, невращающейся и свободно падающей системы координат с началом в центре масс Земли, такой как система GCRF (Geocentric Celestial Reference Frame), уравнение выше задается:

$$-ds^2 = - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (c dt)^2 + \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) d\sigma^2 + o(c^{-3}) \quad (3.59)$$

В изотропных координатах, выровненных с осью вращения Земли:

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.60)$$

где:

- $r$  — радиальная координата,
- $\theta$  — полярный угол,

- $\phi$  — азимутальный угол, отсчитываемый от заданной нулевой точки.

Полный гравитационный потенциал в заданной точке земной системы координат, связанной с Землёй ECEF (Earth-Centered), обозначаемой вектором  $\vec{r}$ , измеренным от центра масс Земли, представляет собой сумму гравитационного потенциала Земли и приливных потенциалов третьих тел:

$$U(\vec{r}) = U_{\oplus}(\vec{r}) + \sum_i U_{T,i}(\vec{r}, \vec{r}_i) \quad (3.61)$$

Учитывая несферичность Земли, можем записать:

$$U_{\oplus}(r, \theta, \phi) = -\frac{\mu_{\oplus}}{r} \sum_{n=0}^N \left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\phi + S_{nm} \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (3.62)$$

где  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  — коэффициенты из модели EGM 2008,  $P_n^m$  — полиномы Лежандра, а  $N$  — степень, до которой проводится разложение. В модели EGM:

$$\mu_{\oplus} = 3.986004415 \times 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$$

$$a_{\oplus} = 6\,378\,136.3 \text{ м}$$

Для орбиты «РадиоАстрона» достаточно учитывать только монопольную (радиальную) и квадрупольную компоненты гравитационного поля Земли, а также учтем при вычислениях в декартовой системе координат ( $\cos \theta = r_s/r$ ):

$$U_{\oplus}(\vec{r}) \approx -\frac{\mu_{\oplus}}{r} \left[ 1 - J_2 \left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^2 \frac{1}{2} \left(3\frac{r_z^2}{r^2} - 1\right) \right] \quad (3.63)$$

Константы были взяты из модели IERS 2010:

$$\mu_{\oplus} = 3.986004418 \times 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$$

$$a_{\oplus} = 6\,378\,136.6 \text{ м}$$

$$J_2 = 1.0826300 \times 10^{-3}$$

В ОТО собственное время будет записываться как:

$$d\tau \equiv \frac{ds}{c} \quad (3.64)$$

Скорость хода собственного времени может отличаться в зависимости от положения в пространстве. Для простоты, мы определяем координатное время ( $t$ ) как время в центре масс Земли или геоцентрическое координатное время (TCG, Geocentric Coordinate Time). Вводя производную хода часов, с которой собственное время течёт относительно TCG:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{c} \frac{ds}{dt}, \quad (3.65)$$

а также используя уравнение (2.6) для интервала выше, запишем:

$$\begin{aligned} -ds^2 &= - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) (c dt)^2 + \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) d\sigma^2 + o(c^{-3}) \\ &= - \left[1 + \frac{2U}{c^2} - \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) \frac{d\sigma^2}{(c dt)^2}\right] (c dt)^2 + o(c^{-3}) \\ &= - \left[1 + \frac{2U}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right] (c dt)^2 + o(c^{-3}) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Используя разложение  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots$ , получим:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{ds^2}{dt^2}} = 1 + \frac{U}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} + o(c^{-4}) \quad (3.67)$$

где  $v = \frac{d\sigma}{dt}$  — скорость объекта в пространстве, измеренная в инерциальной системе координат.

## Гравитационный сдвиг

В упрощённом рассмотрении, когда спутник покоится относительно НСС (GRT) (т.е. его скорость относительно НСС равна нулю), измеряемая на борту частота  $\nu_s$  связана с частотой на НСС  $\nu_{GRT}$  через разность хода собственного времени следующим образом:

$$\frac{\nu_e}{\nu_s} = \frac{d\tau_s}{d\tau_e}, \quad (3.68)$$

где очевидно, что частота имеет обратную зависимость от собственного времени. Для решения нашей задачи удобно ввести смещение частоты:

$$\Delta\nu \equiv \nu_e - \nu_s \quad (3.69)$$

Тогда относительное смещение частоты запишется как:

$$\frac{\Delta f}{f} \equiv \frac{\Delta\nu}{\nu_e} = \frac{\nu_e - \nu_s}{\nu_e} = \frac{\nu_s}{\nu_e} - 1 \quad (3.70)$$

Связь между относительным частотным сдвигом и темпом хода собственного времени КА может быть выражена следующим образом:

$$\frac{d\tau_s}{dt} = \frac{d\tau_s}{d\tau_e} \cdot \frac{d\tau_e}{dt} = \left(1 + \frac{\Delta f}{f}\right) \cdot \frac{d\tau_e}{dt} \quad (3.71)$$

Вводя дополнительно смещение вызванное отстройкой стандартов частоты на НСС ( $h_e$  и  $h_s$ ), получим:

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{\frac{U(\vec{r}_s)}{c^2} - \frac{U(\vec{r}_e)}{c^2} - \frac{v_s^2}{2c^2} + \frac{v_e^2}{2c^2} + h_s - h_e}{1 + \frac{U(\vec{r}_e)}{c^2} - \frac{v_e^2}{2c^2} + h_e} \quad (3.72)$$

Учитывая что наибольшее значение (кроме единицы) имеет член  $\frac{U(\vec{r}_e)}{c^2} \approx 10^{-9}$  и используя разложение в ряд Тейлора ( $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ )

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{\Delta U}{c^2} - \frac{v_s^2 - v_e^2}{c^2} + \Delta h, \quad (3.73)$$

где

$$\Delta h \equiv h_s - h_e \quad (3.74)$$

Первое слагаемое это измеряемый гравитационный сдвиг, второе - релятивистский Доплер эффект, третье - отстройка БВСЧ-НВСЧ. В реальном эксперименте требовалось учитывать линейный доплеровский эффект (1-го порядка), величина которого превышает гравитационные эффекты на несколько порядков.

## Время распространения сигнала в режиме 1w

Используя ранее введенные события  $P_1, P_2, P_3$  запишем время распространения сигнала в режиме 1w:

$$\Delta t_{1w} = \frac{|\vec{r}_e(t_2) - \vec{r}_s(t_3)|}{c} \quad (3.75)$$

Для параметризации уравнения выше через дальность  $\mathbf{D}$ , выполним замену координат, учитывая точность определения орбиты:  $\vec{r}_e(t_2) = \vec{r}_s(t_3)$ , а также принимаем следующие допущения:

- $\vec{a}_s(t_2) \approx \vec{a}_s(t_3)$  - постоянство ускорения
- Изменение гравитационного потенциала для КА в эти моменты времени незначительны по сравнению с предельной точностью

Можем записать для момента  $P_3$ :

$$\vec{r}_s(t_3) \approx \vec{r}_s(t_2) + \vec{v}_s(t_2)\Delta t_{1w} + \frac{1}{2}\vec{a}_s(t_2)\Delta t_{1w}^2 \quad (3.76)$$

А также для интересующего нас  $P_2$ , где вектора состояния взяты в момент  $t_3$ :

$$\vec{r}_s(t_2) \approx \vec{r}_s - \vec{v}_s\Delta t_{1w} + \frac{1}{2}\vec{a}_s\Delta t_{1w}^2 \quad (3.77)$$

Производя замену  $\Delta t_{1w} \approx \frac{D}{c}$ :

$$\vec{r}_s(t_2) \approx \vec{r}_s - \frac{D}{c}\vec{v}_s + \frac{D^2}{2c^2}\vec{a}_s \quad (3.78)$$

Подставляя в ур-е. (3.92) с учетом членов второго порядка малости имеем:

$$\begin{aligned} \Delta t_{1w} &\approx \left| \frac{\vec{D}}{c} - \frac{D}{c^2}\vec{v}_s + \frac{D^2}{2c^3}\vec{a}_s \right| \\ &\approx \sqrt{\left( \frac{\vec{D}}{c} - \frac{D}{c^2}\vec{v}_s + \frac{D^2}{2c^3}\vec{a}_s \right) \cdot \left( \frac{\vec{D}}{c} - \frac{D}{c^2}\vec{v}_s + \frac{D^2}{2c^3}\vec{a}_s \right)} \\ &\approx \sqrt{\frac{D^2}{c^2} - 2\frac{D\vec{D}\cdot\vec{v}_s}{c^3} + o(c^{-4})} \\ &\approx \frac{D}{c}\sqrt{1 - [2\frac{\hat{n}\cdot\vec{v}_s}{c} + o(c^{-2})]} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Раскладывая в ряд Тейлора  $\sqrt{1-x}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \Delta t_{1w} &\approx \frac{D}{c} \left[ 1 - \frac{\hat{n}\cdot\vec{v}_s}{c} + o(c^{-2}) \right] \\ &\approx \frac{D}{c} - \frac{\vec{D}\cdot\vec{v}_s}{c^2} + o(c^{-3}) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Здесь присутствует член второго порядка малости, который мы не вводили выше ( $\Delta t_{1w} \approx \frac{D}{c}$ ). Теперь уравнение для  $\vec{r}_s(t_2)$  выглядит следующим образом:

$$\vec{r}_s(t_2) = \vec{r}_s - \frac{D}{c}\vec{v}_s + \frac{\vec{D}\cdot\vec{v}_s}{c^2}\vec{v}_s + \frac{D^2}{2c^2}\vec{a}_s + o(c^{-3}) \quad (3.81)$$

Подставляя это выражение в ур-е. 3.92 получаем выражение для  $\Delta t_{1w}$ :

$$\begin{aligned}
\Delta t_{1w} &= \left| \frac{\vec{D}}{c} - \frac{D}{c^2} \vec{v}_s + \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^3} \vec{v}_s + \frac{D^2}{2c^3} \vec{a}_s + o(c^{-4}) \right| & (3.82) \\
&= \sqrt{\frac{D^2}{c^2} - 2 \frac{D \vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^3} + 2 \frac{(\vec{D} \cdot \vec{v}_s)^2}{c^4} + \frac{D^2 \vec{D} \cdot \vec{a}_s}{c^4} + \frac{D^2 v_s^2}{c^4} + o(c^{-5})} \\
&= \frac{D}{c} \sqrt{1 - \left[ 2 \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}_s}{c} - \frac{v_s^2}{c^2} - 2 \frac{(\hat{n} \cdot \vec{v}_s)^2}{c^2} - \frac{\vec{D} \cdot \vec{a}_s}{c^2} + o(c^{-3}) \right]} \\
&= \frac{D}{c} - \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^2} + \frac{D v_s^2}{2c^3} + \frac{D (\hat{n} \cdot \vec{v}_s)^2}{2c^3} + \frac{D \vec{D} \cdot \vec{a}_s}{2c^3} + o(c^{-4})
\end{aligned}$$

Рассмотрим эффект Шапиро — относительно слабый гравитационный эффект, для описания которого достаточно учесть лишь монополярную компоненту гравитационного поля Земли. При этом в рамках приближения третьего порядка по  $1/c$  можно пренебречь приливными воздействиями со стороны других тел.

$$\Delta t_{1w} = - \int_{\vec{r}_s(t_2)}^{\vec{r}_e(t_3)} \frac{2}{c^3} \left( -\frac{\mu_\oplus}{r} \right) d\sigma = \frac{2\mu_\oplus}{c^3} \int_{\vec{r}_s(t_2)}^{\vec{r}_e(t_3)} \frac{d\sigma}{r} \quad (3.83)$$

Учитывая малость рассматриваемого эффекта, в первом приближении можно пренебречь изменением положения источника за время распространения сигнала:

$$\vec{r}_s(t_2) \approx \vec{r}_s(t_3), \quad (3.84)$$

где  $t_2$  и  $t_3$  — моменты испускания и приема сигнала соответственно.

После алгебраических преобразований, которые мы опускаем ввиду их громоздкости, окончательное выражение для временной задержки принимает вид:

$$\Delta t_{1w} = \frac{2\mu_\oplus}{c^3} \ln \frac{r_e + r_s + D}{r_e + r_s - D} \quad (3.85)$$

Объединяя две задержки, получаем формулы ранее полученные в работе Сажина (2010):

$$\begin{aligned} \Delta t_{1w} = & \frac{D}{c} - \frac{(\vec{D} \cdot \vec{v}_s)}{c^2} + \frac{2GM_E}{c^3} \times \ln \left( \frac{r_e + r_s + D}{r_e + r_s - D} \right) \\ & + \frac{Dv_s^2}{2c^3} + \frac{(\vec{D} \cdot \vec{v}_s)^2}{2Dc^3} + \frac{GM_ED(\vec{D} \cdot \vec{r}_s)}{2r_s^3c^3} + \mathcal{O}(c^{-4}) \end{aligned} \quad (3.86)$$

## Время распространения сигнала в режиме 2w

Время распространения двухпутевого сигнала от НСС к КА и обратно к НСС  $\Delta t_{2w}$  между событиями  $P_1$  (время посылки сигнала от НСС к КА) и  $P_3$  (время посылки сигнала от КА к НСС) можно разделить на две составляющие:

$$\Delta t_{2w} = \Delta t^\uparrow + \Delta t_{1w}, \quad (3.87)$$

где  $\Delta t^\uparrow$  – время между  $P_1$  и  $P_2$ , которое выражается как:

$$\Delta t^\uparrow = \frac{|\vec{r}_s(t_2) - \vec{r}_e(t_1)|}{c} - \int_{\vec{r}_e(t_1)}^{\vec{r}_s(t_2)} \frac{2U}{c^3} d\sigma. \quad (3.88)$$

Поскольку вектор  $\vec{r}_s(t_1)$  задан в момент времени  $t_1$ , необходимо определить выражение для вектора состояния  $\vec{r}_e(t_1)$ :

$$\vec{r}_e(t_1) \approx \vec{r}_e(t_3) - \vec{v}_e \Delta t_{2w} + \frac{1}{2} \vec{a}_e \Delta t_{2w}^2, \quad (3.89)$$

Используя приближения для временных интервалов:

$$\Delta t_\uparrow \approx \frac{D}{c}, \quad (3.90)$$

$$\Delta t_{2w} \approx 2\frac{D}{c} - \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^2}, \quad (3.91)$$

$$\vec{r}_e(t_1) \approx \vec{r}_e(t_3) - 2\frac{D}{c}\vec{v}_e + \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^2}\vec{v}_e + 2\frac{D^2}{c^2}\vec{a}_e \quad (3.92)$$

$$\Delta t_\uparrow^{SR} \approx \left| \frac{\vec{D}}{c} - \frac{D}{c^2}\vec{v}_s + 2\frac{D}{c^2}\vec{v}_e + \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^3}\vec{v}_s - 2\frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^3}\vec{v}_e + \frac{D^2}{2c^3}\vec{a}_s - 2\frac{D^2}{c^3}\vec{a}_e \right| \quad (3.93)$$

$$\approx \frac{D}{c} - \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^2} + 2\frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_e}{c^2} + \mathcal{O}(c^{-3}) \quad (3.94)$$

Обратившись к формуле 3.87, можем записать:

$$\Delta t_{2w} \approx \left( \frac{D}{c} - \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^2} + 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_e}{c^2} \right) + \left( \frac{D}{c} - \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^2} \right) + \mathcal{O}(c^{-3}) \quad (3.95)$$

$$\approx 2 \frac{D}{c} - 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^2} + 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_e}{c^2} + \mathcal{O}(c^{-3}) \quad (3.96)$$

Подставляя в уравнение 3.92:

$$\vec{r}_e(t_1) = \vec{r}_e - 2 \frac{D}{c} \vec{v}_e + 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^2} \vec{v}_e - 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_e}{c^2} \vec{v}_e + 2 \frac{D^2}{c^2} \vec{a}_e + \mathcal{O}(c^{-3}) \quad (3.97)$$

Окончательное выражение для времени распространения сигнала от НСС к КА:

$$\begin{aligned} \Delta t^\uparrow &= \left| \begin{aligned} &\frac{\vec{D}}{c} - \frac{D}{c^2} \vec{v}_s + 2 \frac{D}{c^2} \vec{v}_e + \\ &+ \frac{(\vec{D} \cdot \vec{v}_s)}{c^3} \vec{v}_s - 2 \frac{(\vec{D} \cdot \vec{v}_s)}{c^3} \vec{v}_e + 2 \frac{(\vec{D} \cdot \vec{v}_e)}{c^3} \vec{v}_e + \\ &+ \frac{D^2}{2c^3} \vec{a}_s - 2 \frac{D^2}{c^3} \vec{a}_e + \mathcal{O}(c^{-4}) \end{aligned} \right| \quad (3.98) \\ &= \frac{D}{c} - \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^2} + 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_e}{c^2} \\ &+ 2 \frac{Dv_e^2}{c^3} + \frac{Dv_s^2}{2c^3} - 2 \frac{D\vec{v}_s \cdot \vec{v}_e}{c^3} \\ &+ \frac{D(\hat{n} \cdot \vec{v}_s)^2}{2c^3} + \frac{D\vec{D} \cdot \vec{a}_s}{2c^3} - 2 \frac{D\vec{D} \cdot \vec{a}_e}{c^3} + \mathcal{O}(c^{-4}) \end{aligned}$$

И, наконец, для всего времени распространения в режиме 2w:

$$\begin{aligned} \Delta t_{2w} &= 2 \frac{D}{c} - 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_s}{c^2} + 2 \frac{\vec{D} \cdot \vec{v}_e}{c^2} \\ &+ 2 \frac{Dv_e^2}{c^3} + \frac{Dv_s^2}{c^3} - 2 \frac{D\vec{v}_s \cdot \vec{v}_e}{c^3} \\ &+ \frac{D(\hat{n} \cdot \vec{v}_s)^2}{c^3} + \frac{D\vec{D} \cdot \vec{a}_s}{c^3} \\ &- 2 \frac{D\vec{D} \cdot \vec{a}_e}{c^3} + \mathcal{O}(c^{-4}) \quad (3.99) \end{aligned}$$