

**ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Пряничникова Алексея Михайловича
на тему: «Полигоны с условиями на решётку конгруэнций»
по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика**

Актуальность темы диссертации. Теория полигонов над полугруппами имеет обширные связи с различными разделами общей и универсальной алгебры. Понятие полигона над полугруппой, то есть, множества, на котором задано действие полугруппы, эквивалентно, с одной стороны, понятию унарной алгебры, то есть, алгебры, имеющей только унарные операции, а с другой – понятию абстрактного автомата без выхода (автомата Мура). Тем самым, результаты, касающиеся полигонов над полугруппами, непосредственно переносятся как на унарные алгебры, так и на автоматы, что обуславливает их применимость в практических приложениях, таких, как распознавание автоматных языков.

Теория полигонов над полугруппами активно развивалась и развивается, благодаря работам, в первую очередь, Л.А. Скорнякова, М. Кильпа, У. Кнауэра, А.В. Михалёва, А.А. Степановой, а также И.Б. Кожухова и его учеников. Одним из её направлений является изучение решёток конгруэнций полигонов. Решётка конгруэнций алгебры является одним из наиболее важных производных объектов алгебры. Это обусловлено достаточно тесной связью между её свойствами и строением исходной алгебры. Тем самым, естественно возникает задача изучения свойств решёток конгруэнций алгебр. Наибольший интерес при этом вызывают условия, при которых решётка конгруэнций алгебры является модулярной, дистрибутивной или цепью. Также, значительное внимание уделяется условиям, при которых на решётке конгруэнций выполняется какое-либо нетривиальное решёточное тождество.

Конгруэнции полигонов пока изучены мало. Результаты в этой области в основном касаются полигонов над определенными классами полугрупп.

А.Р. Халиуллиной были описаны полигоны над полугруппами правых или левых нулей, имеющие дистрибутивную, модулярную или линейно упорядоченную решётку конгруэнций. Та часть диссертационной работы соискателя, которая касается полигонов над прямоугольной связкой, является естественным продолжением этих исследований. Кроме того, большое внимание в данной работе уделяется унарам, то есть алгебрам с одной унарной операцией. Унар является важным частным случаем полигона и рассматривается как полигон над свободной циклической полугруппой. Теория унаров на данный момент уже в большой степени развита, и в силу этого, любой новый существенный результат в этой области приобретает значительную ценность.

Таким образом, задачи, решенные в диссертации, являются актуальными, а полученные результаты — значимыми.

Общая характеристика работы. Объем диссертации А.М. Пряничникова составляет 109 страниц. Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 45 источников.

Во **введении** описываются цели работы, обосновываются её актуальность, новизна и значимость, приводятся основные результаты диссертации и информация об их апробации.

В **первой главе** даются основные определения и рассматриваются общие свойства полигонов с модулярной решёткой конгруэнций. Далее приводится описание строения полигона над прямоугольной связкой и доказываются ряд утверждений, используемых затем для получения основных результатов. Основополагающим результатом данной главы являются необходимые и достаточные условия модулярности решётки конгруэнций полигона над прямоугольной связкой (теорема 1.2). Отметим, что при доказательстве достаточности автор использовал разработанную им компьютерную программу, позволяющую не только проверять модулярность решёток конгруэнций полигонов, но и строить эти решётки. В заключительной части главы даётся характеристика полигонов над прямоугольной связкой,

имеющих дистрибутивную или линейно упорядоченную решётку конгруэнций (теоремы 1.3, 1.4).

Вторая глава посвящена изучению условий выполнения на решётке конгруэнций полигона какого-либо нетривиального решётчного тождества. Важным результатом здесь является то, что для полигона X над конечной полугруппой выполнение на его решётке конгруэнций некоторого нетривиального решётчного тождества равносильно конечности полигона X (теорема 2.1, следствие 2.1). Аналогичный результат получен для полигонов над вполне простыми полугруппами (теорема 2.2, следствие 2.2). В конце главы строятся два примера бесконечных полигонов, решётки конгруэнций которых конечны, и как следствие, удовлетворяют некоторому нетривиальному решётчному тождеству (предложения 2.1, 2.2).

В **третьей главе** сначала даются необходимые определения из теории унаров и доказывается ряд вспомогательных утверждений, используемых далее. К основным результатам главы относятся необходимое условие выполнения нетривиального решётчного тождества на решётке конгруэнций унара (теорема 3.1), а также описание строения унаров, удовлетворяющих данному условию (теорема 3.2).

Четвёртая глава посвящена изучению строения плоских унаров, а также унаров из различных классов, близких к плоским. В начале главы рассматривается тензорное произведение полигонов, и доказываются вспомогательные утверждения, относящиеся к тензорному произведению унаров. Далее доказывается основополагающий результат данной главы: описание строения плоских унаров (теорема 4.1). Затем показано совпадение классов плоских, слабо плоских, главно слабо плоских унаров, а также унаров, удовлетворяющих условию (P) и унаров без кручения (теорема 4.2, следствие 4.6). Далее доказан ряд результатов, наиболее важными из которых являются совпадение классов коуниверсально плоских унаров и уравнительно плоских унаров (теорема 4.6), описание их строения (теорема 4.4), а также совпадение классов унаров, удовлетворяющих условию (E), точных, строго точных и

регулярных унарков (теорема 4.8). В завершающей части главы приведена общая схема, отражающая взаимосвязи между классами унарков, близкими к плоским.

В **заключении** кратко перечисляются основные результаты диссертации, а также делается вывод о возможных областях их дальнейшего применения.

Степень обоснованности положений, выносимых на защиту, научных выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность и новизна: диссертация носит теоретический характер. Определения даются строго, формулировки утверждений и теорем корректны, доказательства верны и достаточно подробны, что свидетельствует о высокой степени обоснованности положений, выносимых на защиту. Все выносимые на защиту результаты диссертации опубликованы в рецензируемых математических журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 (всего автор опубликовал 6 статей). Достоверность представленных результатов также обусловлена строгостью математических доказательств и апробацией на ряде научных семинаров, всероссийских и международных конференций. Все результаты диссертации являются новыми.

Результаты других авторов, упомянутые в тексте диссертации, отмечены ссылками на соответствующие публикации.

Замечания по диссертационной работе.

1. В работе не даётся определение подполигона, хотя данное понятие является одним из ключевых и постоянно активно используется, начиная со страницы 10.
2. В доказательстве леммы 1.5 на странице 24 используется без пояснений сокращенное обозначение $(ab)(Y)$ для записи отношения эквивалентности, но обозначения такого типа вводятся значительно позже, на странице 29.

3. В доказательстве достаточности теоремы 1.3 на странице 54 утверждается, что решётка конгруэнций полигона в предпоследнем из рассматриваемых случаев шестиэлементна (является прямым произведением двухэлементной и трёхэлементной цепей). Однако на самом деле в этом случае она пятиэлементна. Тем не менее, эта решётка всё равно является дистрибутивной, как это и требовалось, то есть, данная ошибка не приводит к нарушению корректности доказательства.
4. На странице 54 в 10-й строке снизу имеется неверная ссылка «...теоремы 7 из [22]». Должно быть «...теоремы 3.2 из [22]».
5. В доказательстве утверждения 4 леммы 3.1 на странице 78 говорится, что фактор-полигон Y/Y' состоит из нулей. Это неверно, так как на самом деле он является полигоном с нулевым умножением. Однако, тем не менее, и для полигона с нулевым умножением все последующие рассуждения остаются верными, то есть, данная неточность не приводит к нарушению корректности доказательства леммы.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Пряничников Алексей Михайлович заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических

наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:

Кандидат физико-математических наук,
ДОЦЕНТ кафедры информатики и методики преподавания информатики
Института математики, информатики и физики
ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный социально-педагогический
университет»»

УСОЛЬЦЕВ Вадим Леонидович

Подпись: _____

Дата: _____

Контактные данные:

тел.: _____, e-mail: _____

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Адрес места работы:

400005, г. Волгоград, ул. Академическая, д. 12, Учебный
корпус №2 ВГСПУ, ауд. 2214

ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный социально-
педагогический университет», Институт математики, информатики и физики,
кафедра информатики и методики преподавания информатики

Тел.: _____; e-mail: _____

Подпись доцента кафедры информатики и методики преподавания информатики
Института математики, информатики и физики Волгоградского государственного
социально-педагогического университета В.Л. Усольцева удостоверяю: