МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Науменко Антон Павлович

ДИОФАНТОВЫ НЕРАВЕНСТВА С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Грищенко Сергей Александрович

Москва – 2025

Содержание

Обозначения

$[x]$ – целая часть числа x;

$\{x\}$ – дробная часть числа x;

(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b;

$\varphi(n) = \sum_{k:(k,n)=1} 1$ – функция Эйлера - число натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n;

$\tau_k(n)$ – число представлений натурального числа n в виде произведения k сомножителей;

$\tau(n) = \tau_2(n)$ – число различных делителей натурального числа n;

запись $d \mid n$ означает, что n кратно d;

$\mu(n)$ – функция Мебиуса, которая равна единице при $n = 1$, равна нулю, если $p^2|n$ и равна $(-1)^k$, если n равно произведению k различных простых сомножителей;

$\Lambda(n)$ – функция Мангольдта, которая равна $\ln p$ при $n = p^k$ и равна нулю, если $n \neq p^k$;

$\pi(x)$ – число простых чисел, не превосходящих x;

$\psi(x)$ – функция Чебышева – сумма значений функции $\pi(x)$ по n, не превосходящим x;

$\zeta(s)$ – дзета-функция Римана;

(κ, λ) – экспоненциальная пара, для которой справедливо $0 < \kappa \leq \frac{1}{2} \leq \lambda < 1$;

запись $A \ll B$ означает, что существует постоянная c такая, что $A \leq cB$;

запись $A \asymp B$ означает, что существуют постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1 B \leq A \leq c_2 B$;

$\gamma = 0,57...$ – постоянная Эйлера;

ε, ε_1 – произвольные положительные числа;

$c_1, c_2, c_3, \ldots$ – положительные постоянные;

$|\mathbb{S}|$ – мощность множества $\mathbb{S}$;

$\exp()$ – экспоненциальная функция от аргумента, стоящего в скобках;

C_n^k – число сочетаний из n по k.

Введение

Актуальность темы

Диссертация относится к области аналитической теории чисел. Работа посвящена изучению диофантовых неравенств, более точно вопросам разрешимости в простых числах нелинейных (в первую очередь – квадратичных) диофантовых неравенств.

Автором получен ряд результатов о близости суммы двух, трех и четырех квадратов к любому достаточно большому положительному действительному числу.

Пусть $N(\sigma, T)$ – число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq Res < 1, \quad 0 < Ims \leq T$.

Оценки вида

$$N(\sigma, T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^{c_1} T, c_1 \geq 1 \tag{1}$$

называются плотностными теоремами.

Наилучшим современным значением λ на всем промежутке $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$ является $\lambda = \frac{6}{5}$ (см. [1]). Заметим, что вышел препринт J. Maynard и L. Guth, в котором $\lambda = \frac{15}{13}$ (см. [2]). Константа c_1 играет меньшую роль. В работе [3] доказано, что $c_1 < 18.2$.

Риман Б. в работе "О числе простых чисел, не превышающих данной величины" [4] обнаружил, что количество простых чисел, не превосходящих x, выражается через сумму по нетривиальным нулям $\zeta(s)$. Такого рода представления называются явными формулами. Одной из самых известных явных формул является утверждение:

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{|Im\rho| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $2 < T \leq x$, $\rho = \beta + i\gamma$ – нули $\zeta(s)$ в критической полосе.

В сороковых годах двадцатого века Ю.В. Линник [5], [6] разработал новую технику решения задач с простыми числами, основанную на явных формулах и плотностных теоремах. Эта техника получила название плотностной.

В монографии Воронина С.М. и Карацубы А.А.[7] содержится следующая теорема, доказанная на основе плотностной техники: неравенство

$$|p - N| \leq H \tag{2}$$

разрешимо в простых числах при $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$ для любого достаточно большого N, где λ – константа из плотностной теоремы (1).

В 2006 году в работе [8] Гирько В.В. и Гриценко С.А. при помощи плотностной техники доказали следующую теорему:

Теорема A. Пусть λ – константа из плотностной теоремы (1). Если $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Для числа решений данного неравенства справедлива оценка $I(N, H) \gg \frac{H}{\ln N}$.

В 2012 году в работе [9] Гриценко С.А. и Ча Н.Т. при помощи плотностной техники получили следующие теоремы.

Теорема B. Если $H > \sqrt{N} \exp(-\ln^{0.1} N)$, то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1 и p_2.

Теорема C. Пусть λ – константа из плотностной теоремы (1). Если $H > N^{(1-(2\lambda)^{-1})^2} \exp(\ln^{0.8} N) = N^{0.3402\ldots} \exp(\ln^{0.8} N)$, то неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 и p_3.

Замечание 1. *В Теореме B параметр H можно выбрать меньше $\sqrt{N}$, тогда как разрешимость (2) при $H = \sqrt{N}$ не следует даже из гипотезы Римана.*

Замечание 2. *Рассмотрена задача о разрешимости диофантова уравнения $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n$ для почти всех натуральных $n \leq N$ таких, что $n \equiv 3 \pmod{24}$ и $5 \nmid n$. В частности, Хуа Ло-Кенг [10] показал, что мощность исключительного множества $E_3(N)$ оценивается как $E_3(N) \leq N \ln^{-c_2} N$ для некоторой постоянной c_2. Оценкой мощности исключительного множества занимались В. Шварц, Р. Вули, Г. Харман, А. Кумчев, Д. Толев и другие* *авторы (обзор полученных результатов см., например, в [11]). В [12] для любого $N > N_0(\varepsilon)$ получена следующая оценка:*

$$E_3(N) \ll N^{27/32+\varepsilon}.$$

Аналогичная задача рассмотрена для диофантова неравенства $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = n$ при $n \le N$, $n \equiv 4 \pmod{24}$. Для мощности исключительного множества $E_4(N)$ при $N > N_0(\varepsilon)$ получена [13] следующая оценка:

$$E_4(N) \ll N^{11/32+\varepsilon}.$$

Цели и задачи диссертации

- уточнение нижних оценок параметра H, данных в Теоремах B, C;
- получение нижней оценки параметра H, при которой диофантово неравенство $|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \le H$, разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3, p_4.

Положения, выносимые на защиту

1. Если $H = N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon} = N^{0{,}481+\varepsilon}$ диофантово неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 для любого $N > N_0(\varepsilon)$, что уточняет результат Теоремы B.

2. Если $H = N^{\frac{7}{12}\cdot\left(\frac{31}{64} - \frac{1}{300}\right) + \varepsilon} = N^{0.2806\ldots+\varepsilon}$ диофантово неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 для любого $N > N_0(\varepsilon)$, что уточняет результат Теоремы C.

3. Если $H = N^{\frac{49}{144}\cdot\left(\frac{31}{64} - \frac{1}{300}\right) + \varepsilon} = N^{0.1636\ldots+\varepsilon}$ диофантово неравенство

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3, p_4 для любого $N > N_0(\varepsilon)$.

Объект и предмет исследования

Объект исследования — диофантовы неравенства.

Предмет исследования — нелинейные диофантовы неравенства с простыми числами.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми и получены автором самостоятельно.

Основным из них является доказательство разрешимости в простых числах p_1, p_2 диофантова неравенства

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

где $H = N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon}$ для любого $N > N_0(\varepsilon)$.

При этом для числа решений $J(N, H)$ данного диофантова неравенства справедлива оценка

$$J(N, H) \gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln N}.$$

Практическая и теоретическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в дальнейших исследованиях, посвященных разрешимости диофантовых неравенств в простых числах и вопросам распределения простых чисел на коротких промежутках.

Степень достоверности

Достоверность результатов автора диссертации подтверждена строгими математическими доказательствами. Научные результаты автора опубликованы в открытой печати в рецензируемых изданиях и прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Методы исследования

Работа основана на плотностной технике Ю.В. Линника и применении результатов о числе нулей дзета-функции Римана, реальная часть которых близка к единице, а также некоторых уточнениях указанных результатов за счет использования метода экпоненциальных пар.

Апробация результатов

Основные результаты работы докладывались:

- на XV Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения" посвященной столетию со дня рождения Н.М. Коробова, Тула, 28–31 мая 2018 г.;

- на XVI Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы, приложения и проблемы истории" посвященной 80-летию со дня рождения Мишеля Деза, Тула, 13–18 мая 2019 г.;

- на специальном семинаре "Аналитическая теория чисел" механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (неоднократно, с 2017 по 2025 гг.);

- на специальном семинаре "Современные проблемы теории чисел" МИАН им. В.А. Стеклова в 2025 г.

Материалы докладов кратко отражены в тезисах

- А.П. Науменко, О нелинейных диофантовых неравенствах с простыми числами// Труды XV Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения" , Тула, 2018 г. С. 239–241;

- А.П. Науменко, Об одном классе нелинейных диофантовых неравенств с простыми числами// Труды XVI Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы, приложения и проблемы истории" , Тула, 2019 г. С. 166–168.

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 3 печатных работах, из них 3 работы в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика и индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus, RSCI и РИНЦ.

Личный вклад автора

Основные положения диссертации, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Основные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации – 71 страница. Список литературы содержит 24 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы работы, дается краткий исторический обзор результатов, полученных ранее и связанных с тематикой диссертации, формулируются основные результаты диссертации и дается краткое описание методов их получения.

Первая глава диссертации содержит ряд вспомогательных лемм, известных в литературе, а также основные леммы 16 – 33.

Вторая глава состоит из 2 параграфов.

Основными результатами второй главы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $H > N^{\frac{31}{64}-\frac{1}{300}+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$.

Теорема 2. *Если* $H > N^{\frac{7}{12}\cdot\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon} = N^{0.2806\dots+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 *и* p_3 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$.

Теорема 3. *Если* $H > N^{\frac{49}{144}\cdot\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon} = N^{0.1636\dots+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 *и* p_4 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$.

Доказательство теоремы 1 составляет содержание второго параграфа второй главы.

Опишем основные этапы доказательства теоремы 1.

Без ограничения общности считаем, что $H \le \sqrt{N}/2$. Рассмотрим сумму:

$$S = \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \sum_{\sqrt{N-p^2-H}<k\le\sqrt{N-p^2+H}} \Lambda(k),$$

где $N_1 = N^{\frac{61}{80}+\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$.

При суммировании по k учитываются не только простые числа q, но и степени простых чисел q^r при натуральных $r > 1$. Вклад указанных слагаемых в S оценивается как

$$\ll \frac{HN_1^{1/4}\ln^2 N}{\sqrt{N}}. \tag{3}$$

Далее имеем $N - p^2 \asymp N_1$. Воспользуемся для внутренней суммы явной формулой (лемма 1):

$$S = \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \left(\sqrt{N-p^2+H} - \sqrt{N-p^2-H}\right) -$$

$$- \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \left(\sum_{|\gamma|\le T} \int_{\sqrt{N-p^2-H}}^{\sqrt{N-p^2+H}} x^{\rho-1}dx + O\left(\frac{\sqrt{N_1}\log^2 N}{T}\right)\right).$$

Параметр T выбираем с таким расчетом, чтобы остаток явной формулы был меньше по порядку, чем

$$\sqrt{N-p^2+H} - \sqrt{N-p^2-H}.$$

Имеем
$$T=\frac{N_1\ln^3 N}{H}. \tag{4}$$
Рассмотрим предполагаемый главный член:
$$\sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1}\left(\sqrt{N-p^2+H}-\sqrt{N-p^2-H}\right).$$

Согласно лемме 6 при $N_1\ge N^{\frac{61}{80}+\varepsilon_1}$ для соответствующим образом подобранного ε_1 отрезок $\left[\sqrt{N-2N_1};\sqrt{N-N_1}\right]$ содержит простые числа, причем их количество $\gg \frac{N_1}{\sqrt{N}\ln N}$.

Вклад каждого слагаемого по порядку равен $\frac{H}{\sqrt{N_1}}$. Таким образом, предполагаемый главный член имеет порядок
$$\gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln N}. \tag{5}$$

Отметим, что вклад (3) по порядку меньше (5).

Далее займемся оценкой остатка:
$$W=\sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1}\left|\sum_{|\gamma|\le T}\int_{\sqrt{N-p^2-H}}^{\sqrt{N-p^2+H}}x^{\rho-1}dx\right|.$$

Сделаем внешнее суммирование сплошным:
$$W\ll\sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1}\left|\sum_{|\gamma|\le T}\int_{\sqrt{N-n^2-H}}^{\sqrt{N-n^2+H}}x^{\rho-1}dx\right|.$$

Разобьем сумму по нулям дзета-функции Римана в определении W на две: в первую попадают нули $\rho=\beta+i\gamma$, $1>\beta\ge\frac{45869}{48270}=0.95025\ldots$, а во вторую – $\rho=\beta+i\gamma$, $\frac{45869}{48270}>\beta\ge\frac{1}{2}$.

Имеем (см. лемму 18)
$$W_1=\sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1}\left|\sum_{\substack{\beta\ge\frac{45869}{48270}\\|\gamma|\le T}}\int_{\sqrt{N-n^2-H}}^{\sqrt{N-n^2+H}}x^{\rho-1}dx\right|\ll$$
$$\ll\frac{H\sqrt{N_1}\ln N}{\sqrt{N}}\max_{\sigma\in\left[\frac{45869}{48270};1\right]}N_1^{\frac{\sigma-1}{2}}N(\sigma,T).$$

Оценим
$$\max_{\sigma\in\left[\frac{45869}{48270};1\right]} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} N(\sigma,T).$$

При
$$1-\delta(T)<\sigma\le 1,\quad \delta(T)=\frac{c_2}{\ln^{2/3}|T|(\ln\ln|T|)^{1/3}},$$
где c_2 – константа из леммы 3, получим $N(\sigma,T)=0$.

На промежутке $\left[1-10^{-8};1-\delta(T)\right]$ будем использовать оценку (63) из леммы 27.

Так как при $H>N^{\frac{31}{64}-\frac{1}{300}+\varepsilon}$ выполнены соотношения $N_1>N^{0.75}>T$ и $\ln^{-3}T\gg\ln^{-3}N\gg\ln^{-3}T$, достаточно показать
$$\frac{\sigma-1}{2}+1600(1-\sigma)^{3/2}+\frac{76\ln\ln N}{3\ln N}<0.$$

Последнее следует из того, что при достаточно большом N справедлива цепочка неравенств
$$\frac{1-\sigma}{2}\ge\frac{1}{\ln^{2/3}T(\ln\ln T)^{1/3}}\ge\frac{1}{\ln^{2/3}N(\ln\ln N)^{1/3}}>\frac{152\ln\ln N}{3\ln N}$$
и того, что при $\sigma\ge 1-10^{-8}$ выполняется неравенство
$$\frac{1-\sigma}{2}>3200(1-\sigma)^{3/2}.$$

На промежутке $\left[\frac{45869}{48270};1-10^{-8}\right)$ воспользуемся оценкой (65). При $H>N^{\frac{31}{64}-\frac{1}{300}+\varepsilon}$ имеем $T\ll N_1^{\frac{1351}{3660}-\varepsilon}$. Тогда окончательно получаем
$$\max_{\sigma\in\left[\frac{45869}{48270};1\right]} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} N(\sigma,T)\ll\ln^{-3}N.$$

Далее заметим, что при нашем выборе параметров N_1 и H справедливо
$$N-(n+1)^2+H<N-n^2-H.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, применяя неравенство Коши, имеем
$$W_2^2=\left(\sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1}\left|\sum_{\substack{\frac12\le\beta<\frac{45869}{48270}\\|\gamma|\le T}}\int_{\sqrt{N-n^2-H}}^{\sqrt{N-n^2+H}}x^{\rho-1}dx\right|\right)^2\ll$$

$$\ll \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta<\frac{45869}{48270} \\ |\gamma|\le T}} x^{\rho-1} \right|^2 dx.$$

Используя леммы 2 и 20, для W_2 получим:

$$W_2 \ll \frac{H\sqrt{N_1}\ln^2 N}{\sqrt{N}} \max_{\sigma\in\left[\frac{1}{2};\frac{45869}{48270}\right)} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} \sqrt{\frac{N(\sigma,T)\sqrt{N}}{H}}.$$

Далее оценим

$$\max_{\sigma\in\left[\frac{1}{2};\frac{45869}{48270}\right)} \frac{N_1^{\sigma-1}N(\sigma,T)\sqrt{N}}{H}.$$

При нашем выборе H справедлива оценка

$$\frac{\sqrt{N}}{H} \ll N_1^{\frac{91}{3660}-\varepsilon}.$$

На промежутке $\left[\frac{15958}{16825};\frac{45869}{48270}\right)$ воспользуемся оценкой (66) при $k=5$. Имеем

$$\frac{N_1^{\sigma-1}N(\sigma,T)\sqrt{N}}{H} \ll N_1^{(\sigma-1)+\frac{9457(\kappa+\lambda-5\sigma+4)}{43920}+\frac{91}{3660}-\varepsilon},$$

где (κ,λ) – произвольная экспоненциальная пара.

Разобьем $\left[\frac{15958}{16825};\frac{45869}{48270}\right)$ на промежутки J_i, $i=1,2,3$, выбирая на каждом из них экспоненциальную пару (κ_i,λ_i) так, чтобы были выполнены условия $\kappa_i+\lambda_i-\frac{1195}{1351}+\frac{3365}{9457}(1-\sigma)<0$ и $\frac{|\kappa_i-\lambda_i|+4}{5}\ge\sigma$ для всех $\sigma\in J_i$.

На промежутке $\left[\frac{39}{50};\frac{15958}{16825}\right)$ достаточно последовательно воспользоваться оценками (36), (37), (38).

Наконец, на промежутке $\left[\frac{1}{2};\frac{39}{50}\right)$ будем использовать плотностную теорему Хаксли (1).

Содержание второго параграфа второй главы составляют доказательства теорем 2 и 3.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим

$$S = \sum_{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1} \sum_{N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2} \sum_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}<n\le\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} \Lambda(n),$$

где $N_2 = N^{\frac{31}{64}-\frac{1}{300}+\varepsilon}$, $N_1 = N^{\frac{61}{80}+\varepsilon}$ и в качестве ε выбрано наибольшее из значений, которые получены из теоремы 1 и леммы 6.

При $T_1 = \frac{N_2 \ln^3 N}{H}$ воспользуемся для внутренней суммы леммой 1. С учетом теоремы 1 предполагаемый главный член оценивается как

$$\gg \frac{N_2\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^2 N} \cdot \frac{H}{\sqrt{N_2}} = \frac{H\sqrt{N_2}\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^2 N}.$$

При оценке остатка

$$\sum_{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1} \sum_{N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2} \left(\sum_{|\gamma|\le T_1} \int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} x^{\rho-1}dx \right) \ll$$

$$\ll \sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1} \sum_{N-n^2-2N_2<k^2\le N-n^2-N_2} \int_{\sqrt{N-n^2-k^2-H}}^{\sqrt{N-n^2-k^2+H}} \left| \sum_{|\gamma|\le T_1} x^{\rho-1} \right| dx$$

разобьем промежуток $[N_2/2; 2N_2)$ на непересекающиеся интервалы длины $2H$ (за исключением, быть может, последнего). Согласно лемме 32 в каждый такой интервал при различных парах (n,k) попадает по порядку величины не более $H\sqrt{\frac{N_1}{N}}$ значений $N-n^2-k^2$.

Тогда оценка суммы вида

$$\sum_{N-2N_2<p_1^2\le N-N_2} \sum_{N-p_1^2-2N_1<p_2^2\le N-p_1^2-N_1} \left(\sum_{|\gamma|\le T_1} \int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} x^{\rho-1}dx \right)$$

сводится к оценке интеграла

$$\int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \left| \sum_{|\gamma|\le T_1} x^{\rho-1} \right| dx.$$

Для оценки данного интеграла в этом случае нам достаточно воспользоваться леммой 16 при $\alpha = \frac{1}{2}$ совместно с плотностной теоремой Хаксли (1).

Доказательство теоремы 3 производится похожим образом. Мы используем явную формулу, результат теоремы 2 для оценки снизу предполагаемого главного члена, а затем леммы 33, 16 и плотностную теорему Хаксли (1) для оценки остатка.

Замечание 3. *Если использовать при доказательстве теоремы 2 плотностную теорему из [2] получим оценку* $H > N^{\frac{17}{30}\cdot\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon} = N^{0.2725\dots+\varepsilon}$, *аналогично, в теореме 3 получим* $H > N^{\frac{289}{900}\cdot\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon} = N^{0.1544\dots+\varepsilon}$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук С.А. Гриценко за постановку задач, постоянное внимание и полезные обсуждения. Также автор выражает благодарность заведующему кафедрой математических и компьютерных методов анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, профессору В.Н. Чубарикову и всем сотрудникам кафедры за внимание к работе.

Глава 1. Вспомогательные утверждения

В этой главе формулируются вспомогательные утверждения известные в литературе или являющиеся простыми следствиями последних. Во втором параграфе сформулированы и доказаны основные леммы 16 – 33, необходимые для доказательстве теорем 1 – 3.

1.1 Вспомогательные леммы

Лемма 1. *(Явная формула) Пусть* $2 \leq T \leq x$*. Тогда*

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{|Im\rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ *– нули* $\zeta(s)$ *в критической полосе.*

Доказательство см. в [13, глава 5].

Лемма 2. *При* $T \geq 2$ *справедливы оценки*

$$\sum_{|\gamma - T| \leq 1} 1 = O(\ln T),$$

$$\sum_{|\gamma - T| > 1} \frac{1}{|\gamma - T|} = O(\ln^2 T),$$

$$N(T) = \sum_{|\gamma| \leq T} 1 = O(T \ln T).$$

Доказательство см. в [13, глава 4].

Лемма 3. *Существует абсолютная постоянная* $c_2 > 0$ *такая, что* $\zeta(s) \neq 0$ *в области*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_2}{\ln^{2/3} |T| (\ln \ln |T|)^{1/3}}, \quad где \quad |T| \geq 10.$$

Доказательство см. в [13, глава 6].

Лемма 4. *(формула Стирлинга) Пусть* $s = \sigma + it$*, где* $c_2 \leq \sigma \leq c_3$*,* $t \to \infty$ *– действительное число. Тогда для модуля гамма-функции справедливо:*

$$|\Gamma(s)| = \sqrt{2\pi} |t|^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi |t|}{2}} \left(1 + O(|t|^{-1})\right), \quad |t| \geq t_0.$$

Доказательство см., например, [13, глава 2].

Лемма 5. *Пусть* $\frac{9}{10} < \sigma < 1$ *и* $t > 10$ *– действительные числа. Тогда справедлива оценка*

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll t^{100(1-\sigma)^{3/2}} \ln^{2/3} t. \tag{6}$$

Доказательство см. в [15]. Отметим, что на данный момент существуют более точные оценки. С ними можно ознакомиться, например, в работе [16].

Лемма 6. *Если* $H > N^{\frac{21}{40}+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах для любого $N > N_0(\varepsilon)$. *Для числа решений данного неравенства справедлива оценка* $J(N, H) \gg \frac{H}{\ln N}$.

Доказательство см. в [17].

Лемма 7. *Для* $t > t_0(\varepsilon)$ *справедлива оценка:*

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| \ll T^{\frac{32}{205}+\varepsilon}. \tag{7}$$

Доказательство см. в [18].

Лемма 8. *Пусть* $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ *– действительное число,* (κ, λ) *– экспоненциальная пара,* $t > t_0$ *– действительное число. Тогда справедлива оценка:*

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll t^{\frac{\kappa+\lambda-\sigma}{2}} \ln t. \tag{8}$$

Доказательство см., например, в [18, глава 7].

Лемма 9. *Пусть* $f(x)$ *– действительнозначная функция, заданная на отрезке* $[a, b]$, *пусть далее* $f'(x)$ *непрерывна и монотонна на* $[a, b]$ *и* $|f'(x)| \leq \delta < 1$. *Тогда*

$$\sum_{a<n\leq b} \exp(f(n)) = \int_a^b \exp(f(x))dx + O\left((1-\delta)^{-1}\right).$$

Доказательство см., например, в [13, глава 2].

Лемма 10. *Пусть $F(x)$ – действительнозначная функция, заданная на отрезке $[a,b]$, пусть далее $F'(x)$ монотонна и $F'(x) \le m > 0$ или $F'(x) \le -m < 0$ на $[a,b]$. Тогда*

$$\left| \int_a^b e^{iF(x)} dx \right| \le 4m^{-1}.$$

Доказательство см., например, в [13, глава 2].

Лемма 11. *Пусть $k \ge 1$ — фиксированное натуральное число и пусть $T/2 \le t \le 2T$. Тогда равномерно по t справедливо*

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^k \ll \ln T \left(1 + \int_{-\ln^2 T}^{\ln^2 T} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it + iv\right) \right|^k e^{-|v|} dv \right).$$

Доказательство см., например, в [18, глава 7].

Лемма 12. *Для $T^{\varepsilon} \le G \le T^{1/2-\varepsilon}$ равномерно по G справедливо*

$$\int_{T-G}^{T+G} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \ll G \ln T + G \sum_K (TK)^{-1/4} \left(|S(K)| + K^{-1} \int_0^K |S(x)| dx \right) e^{-G^2K}$$

где

$$S(x, K, T) = \sum_{K \le n \le K+x} (-1)^d \tau(n) \exp(if(T,n)),$$

$$f(T,n) = 2T \ \mathrm{arsinh} \sqrt{\pi n / 2T} + \sqrt{\pi^2 n^2 + 2\pi n T}$$

и суммирование производится по $K = 2^k$ таким, что $T^{1/3} \le K \le N$, при фиксированном $\delta > 0$

$$N = \frac{B^2}{T/2\pi - B}, \qquad B = T(2\pi G)^{-1} \ln^{(1+\delta)/2} T.$$

Доказательство см., например, в [18, глава 7].

Лемма 13. *Пусть $T > T_0(\varepsilon)$, $0 \le \sigma \le 1$, $h = \ln^2 T$, $h^2 \le t \le T$, $1 \ll Y \ll T^{c_3}$, $M \ge 3TY^{-1}$ — действительные числа.*

Тогда для $s = \sigma + it$ справедлива оценка:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-(n/2Y)^h} - e^{-(n/Y)^h} \right) n^{-s} \ll 1 + Y^{1/2-\sigma} \int_{-h^2}^{h^2} \left| \sum_{n \le M} n^{-1/2+it+iv} \right| dv.$$

Доказательство см., например, в [18, глава 4].

Лемма 14. *(неравенства Халаша-Монтгомери) Пусть* ξ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_R$ – *векторы в унитарном пространстве с нормой* $\| \cdot \|$. *Тогда справедливы неравенства:*

$$\sum_{r \le R} |(\xi, \varphi_r)| \le ||\xi|| \sqrt{\sum_{r,s \le R} |(\varphi_r, \varphi_s)|}, \tag{9}$$

$$\sum_{r \le R} |(\xi, \varphi_r)|^2 \le ||\xi||^2 \max_{r \le R} \sum_{s \le R} |(\varphi_r, \varphi_s)| \,. \tag{10}$$

Доказательство см., например, [19, глава 1].

1.2 Основные леммы

Для дальнейшего изложения нам потребуется ряд дополнительных определений.

Определение 1. *Для любого фиксированного действительного числа* $A \ge 4$ *обозначим*

$$M(A) = \inf_{M \ge 1} \left\{ M : \int_1^T \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^A \ll T^{M+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_0(\varepsilon) \quad \forall T > T_0(\varepsilon) \right\}.$$

Определение 2. *Пусть* $\frac{1}{2} \le \sigma < 1$, $T > T_0(\varepsilon)$, $X = X(T)$ — *действительные числа.*

Тогда

$$M_X(s) = \sum_{n \le X} \mu(n) n^{-s},$$

где

$$s = \sigma + it, \quad \ln^2 T \le |t| \le T.$$

Определение 3. *Пусть* $T > T_0(\varepsilon)$, $X = X(T)$ – *действительные числа. Тогда*

$$a(n) = \sum_{d|n, d \le X} \mu(d).$$

Определение 4. *Пусть* t *и* M — *действительные числа. Тогда*

$$H(it) = H_M(it) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{n}{2M}} - e^{-\frac{n}{M}} \right) n^{-it}.$$

Определение 5. *Определим показатель $c(\theta)$ как минимальное действительное число, при котором для любого достаточно большого t выполнено следующее условие*

$$|\zeta(\theta+it)| \ll t^{c(\theta)} \ln t.$$

Лемма 15. *Пусть $t_1, \cdots, t_R$ – действительные числа такие, что $|t_r| \leq T$, $|t_r - t_s| \geq 1$ для любых $r \neq s \leq R$. Пусть далее $a_{N+1}, \cdots, a_{N+M}$ – комплексные числа и*

$$G = \sum_{N<n\leq M+N} |a_n|^2.$$

Тогда для любого $M \leq N$ и любого фиксированного натурального k справедлива оценка

$$\left(\sum_{r\leq R} \left| \zeta\left(\frac{1}{2}+it_r\right) \right|^A \right)^2 \ll$$

$$\ll GT^{\varepsilon} \left(RN + R^{2-\frac{1}{k}} T^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}} R^{2-\frac{1}{Ak}} T^{\frac{M(A)}{Ak}} \right), \qquad (11)$$

где константа в знаке $\ll$ зависит от ε, k и A.

Доказательство см. в [18, глава 11] и в [20].

Далее будут сформулированы и доказаны леммы 16 – 33, которые играют важную роль в доказательстве теорем 1 – 3.

Лемма 16. *Пусть $\sigma_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$, $\alpha \in (0;1]$ — действительные числа, $N > N_0(\varepsilon)$, $N^{1-\varepsilon} \gg N_1 \gg N^{1-\frac{19}{40}\alpha+\varepsilon}$*

$$I(\alpha,\sigma_0) = \int_{N_1^\alpha/2}^{2N_1^\alpha} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2}\leq\beta<\sigma_0 \\ |\gamma|\leq T}} x^{\beta-1+i\gamma} \right| \ll \max_{\sigma\in\left[\frac{1}{2};\sigma_0\right)} N_1^{\alpha\sigma} \sqrt{N(\sigma,T)} \ln N_1.$$

Доказательство.

Применим к $I(\alpha,\sigma_0)$ неравенство Коши. Получим

$$I^2(\alpha,\sigma_0) \ll \left(\int_{N_1^\alpha/2}^{2N_1^\alpha} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2}\leq\beta<\sigma_0 \\ |\gamma|\leq T}} x^{\beta-1+i\gamma} \right| \right)^2 \ll$$

$$\ll N_1^{\alpha} \int_{N_1^{\alpha}/2}^{2N_1^{\alpha}} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta < \sigma_0 \\ |\gamma| \le T}} x^{\beta - 1 + i\gamma} \right|^2 dx.$$

Раскроем квадрат модуля и поменяем после этого порядок суммирования и интегрирования. Имеем

$$I^2(\alpha, \sigma_0) \ll N_1^{\alpha} \sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_1 < \sigma_0 \\ |\gamma_1| \le T}} \sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_2 < \sigma_0 \\ |\gamma_2| \le T}} \int_{N_1^{\alpha}/2}^{2N_1^{\alpha}} x^{\beta_1 + \beta_2 - 2 + i(\gamma_1 - \gamma_2)} dx.$$

Разобьем при суммировании нули на "близкие" и "далекие" и оценим полученные интегралы. Имеем

$$I^2(\alpha, \sigma_0) \ll N_1^{\alpha} \sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_1 < \sigma_0 \\ |\gamma_1| \le T}} \sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_2 < \sigma_0 \\ |\gamma_1 - \gamma_2| \le 1}} N_1^{\alpha(\beta_1 + \beta_2 - 1)} + \tag{12}$$

$$+ N_1^{\alpha} \sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_1 < \sigma_0 \\ |\gamma_1| \le T}} \sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_2 < \sigma_0 \\ |\gamma_2| \le T \\ |\gamma_1 - \gamma_2| > 1}} \frac{N_1^{\alpha(\beta_1 + \beta_2 - 1)}}{|\gamma_1 - \gamma_2|}.$$

Далее рассмотрим двойную сумму

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_1 < \sigma_0 \\ |\gamma_1| \le T}} \sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_2 < \sigma_0 \\ |\gamma_1 - \gamma_2| \le 1}} N_1^{\alpha(\beta_1 + \beta_2 - 1)}.$$

Разобьем внутреннюю сумму при каждом фиксированном $\beta_1 + i\gamma_1$ на две:

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_2 < \sigma_0 \\ |\gamma_1 - \gamma_2| \le 1}} N_1^{\alpha(\beta_1 + \beta_2 - 1)} = \sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_2 \le \beta_1 \\ |\gamma_1 - \gamma_2| \le 1}} N_1^{\alpha(\beta_1 + \beta_2 - 1)} + \sum_{\substack{\beta_1 < \beta_2 \le \sigma_0 \\ |\gamma_1 - \gamma_2| \le 1}} N_1^{\alpha(\beta_1 + \beta_2 - 1)}.$$

Теперь рассмотрим

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_1 < \sigma_0 \\ |\gamma_1| \le T}} \sum_{\substack{\beta_1 < \beta_2 < \sigma_0 \\ |\gamma_1 - \gamma_2| \le 1}} N_1^{\alpha(\beta_1 + \beta_2 - 1)}.$$

Поменяем порядок суммирования. Имеем

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_1 < \sigma_0 \\ |\gamma_1| \le T}} \sum_{\substack{\beta_1 < \beta_2 < \sigma_0 \\ |\gamma_1 - \gamma_2| \le 1}} N_1^{\alpha(\beta_1 + \beta_2 - 1)} = \sum_{\substack{\frac{1}{2} < \beta_2 < \sigma_0 \\ |\gamma_2| \le T}} \sum_{\substack{\frac{1}{2} \le \beta_1 < \beta_2 \\ |\gamma_2 - \gamma_1| \le 1}} N_1^{\alpha(\beta_1 + \beta_2 - 1)}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_1<\sigma_0\\|\gamma_1|\le T}}\ \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_2<\sigma_0\\|\gamma_1-\gamma_2|\le 1}} N_1^{\alpha(\beta_1+\beta_2-1)} \ll \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_1<\sigma_0\\|\gamma_1|\le T}}\ \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_2\le\beta_1\\|\gamma_1-\gamma_2|\le 1}} N_1^{\alpha(\beta_1+\beta_2-1)}$$

откуда, так как $N_1 > 1$, получаем

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_1<\sigma_0\\|\gamma_1|\le T}}\ \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_2<\sigma_0\\|\gamma_1-\gamma_2|\le 1}} N_1^{\alpha(\beta_1+\beta_2-1)} \ll \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_1<\sigma_0\\|\gamma_1|\le T}}\ \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_2\le\beta_1\\|\gamma_1-\gamma_2|\le 1}} N_1^{\alpha(2\beta_1-1)}.$$

Аналогичными рассуждениями приходим к оценке

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_1<\sigma_0\\|\gamma_1|\le T}}\ \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_2<\sigma_0\\|\gamma_2|\le T\\|\gamma_1-\gamma_2|>1}} \frac{N_1^{\alpha(\beta_1+\beta_2-1)}}{|\gamma_1-\gamma_2|} \ll \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_1<\sigma_0\\|\gamma_1|\le T}}\ \sum_{\substack{1/2\le\beta_2\le\beta_1\\|\gamma_2|\le T\\|\gamma_1-\gamma_2|>1}} \frac{N_1^{\alpha(2\beta_1-1)}}{|\gamma_1-\gamma_2|}.$$

Применяя лемму 2, получим

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_1<\sigma_0\\|\gamma_1|\le T}}\ \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_2<\sigma_0\\|\gamma_1-\gamma_2|\le 1}} N_1^{\alpha(2\beta_1-1)} \ll \max_{\sigma\in\left[\frac{1}{2};\sigma_0\right]} N_1^{\alpha(2\sigma-1)} N(\sigma,T)\ln N,$$

$$\sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_1<\sigma_0\\|\gamma_1|\le T}}\ \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta_2<\sigma_0\\|\gamma_2|\le T\\|\gamma_1-\gamma_2|>1}} \frac{N_1^{\alpha(2\beta_1-1)}}{|\gamma_1-\gamma_2|} \ll \max_{\sigma\in\left[\frac{1}{2};\sigma_0\right]} N_1^{\alpha(2\sigma-1)} N(\sigma,T)\ln^2 N.$$

Домножая последние оценки на N_1^{α} и извлекая квадратный корень, получим требуемую оценку.

Лемма доказана.

Лемма 17. *Пусть* $\sigma_0 \in \left[\frac{1}{2};1\right)$, $\alpha \in (0;1]$ *— действительные числа,* $N > N_0(\varepsilon)$, $N^{1-\varepsilon} \gg N_1 \gg N^{1-\frac{19}{40}\alpha+\varepsilon}$, $N^{1-\alpha} \gg H \gg N_1^{1-\alpha+\varepsilon}$, $T = \frac{N_1}{H\ln^3 N}$. *Тогда справедлива оценка*

$$W_1(\alpha) = \sum_{N-2N_1<n^{1/\alpha}\le N-N_1} \left| \sum_{\substack{1>\sigma\ge\sigma_0\\|\gamma|\le T}} \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha} x^{\rho-1}dx \right| \ll$$

$$\ll \frac{HN_1^{\alpha}\ln N}{N^{1-\alpha}} \max_{\sigma\in[\sigma_0;1]} N_1^{\alpha(\sigma-1)} N(\sigma,T).$$

Доказательство.

Заметим, что при любом $(N-2N_1)^\alpha < n \le (N-N_1)^\alpha$ для фиксированного нуля $\rho = \beta + i\gamma$ справедливо (см. также [14], глава 7, доказательство теоремы 2)

$$\left|\int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha} x^{\rho-1}dx\right| \ll \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha} \left|x^{\rho-1}\right| dx \ll$$

$$\ll \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha} x^{\beta-1}dx \ll \frac{H}{N_1^{1-\alpha}} N_1^{\alpha(\beta-1)}.$$

Тогда при любом $(N-2N_1)^\alpha < n \le (N-N_1)^\alpha$ имеем

$$\left|\sum_{\substack{1>\beta\ge\sigma_0\\|\gamma|\le T}} \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha} x^{\rho-1}dx\right| \ll \frac{H}{N_1^{1-\alpha}} \sum_{\substack{1>\beta\ge\sigma_0\\|\gamma|\le T}} N_1^{\alpha\beta}.$$

Далее получаем, с учетом леммы 2:

$$\sum_{\substack{1>\beta\ge\sigma_0\\|\gamma|\le T}} N_1^{\alpha\beta} = \sum_{\substack{1>\beta\ge\sigma_0\\|\gamma|\le T}} \left(\alpha \ln N_1 \int_{\sigma_0}^{\beta} N_1^{\alpha u} du + 1\right) \ll$$

$$\ll \ln N \int_{\sigma_0}^{1} N_1^{\alpha u} N(u,T) du + T\ln T.$$

Умножая данную оценку на $\frac{H}{N_1^{1-\alpha}}$ и суммируя полученное выражение по n, окончательно имеем:

$$W_1 \le \sum_{N-2N_1<n^{1/\alpha}\le N-N_1} \frac{H}{N_1^{1-\alpha}} \left(\ln N \int_{\sigma_0}^{1} N_1^{\alpha u} N(u,T) du + T\ln T\right) \ll$$

$$\ll \frac{HN_1^{\alpha}\ln N}{N^{1-\alpha}} \max_{\sigma\in[\sigma_0;1]} N_1^{\alpha(\sigma-1)} N(\sigma,T) + \frac{HT\ln T}{N^{1-\alpha}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 18. *Пусть* $\sigma_0 \in \left[\frac{1}{2};1\right)$ *— действительное число,* $N > N_0(\varepsilon)$, $N^{1-\varepsilon} \gg N_1 \gg N^{\frac{61}{80}+\varepsilon}$, $\sqrt{N} \gg H \gg N_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $T = \frac{N_1}{H\ln^3 N}$. *Тогда справедлива оценка*

$$W_1 = \sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1} \left|\sum_{\substack{1>\sigma\ge\sigma_0\\|\gamma|\le T}} \int_{\sqrt{N-n^2-H}}^{\sqrt{N-n^2+H}} x^{\rho-1}dx\right| \ll$$

$$\ll \frac{H\sqrt{N_1}\ln N}{\sqrt{N}} \max_{\sigma\in[\sigma_0;1]} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} N(\sigma,T).$$

Утверждение леммы 18 может быть получено из леммы 17, если зафиксировать в ней $\alpha = \frac{1}{2}$.

Лемма 19. *Пусть* $\sigma_0 \in \left[\frac{1}{2};1\right)$, $\alpha \in (0;1]$ *— действительные числа,* $N > N_0(\varepsilon)$, $N^{1-\varepsilon} \gg N_1 \gg N^{1-\frac{19}{40}\alpha+\varepsilon}$, $N^{1-\alpha} \gg H \gg N_1^{1-\alpha+\varepsilon}$, $T = \frac{N_1}{H\ln^3 N}$. *Тогда справедлива оценка*

$$W_2(\alpha) = \sum_{N-2N_1<n^{1/\alpha}\le N-N_1} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta<\sigma_0\\|\gamma|\le T}} \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha} x^{\rho-1}dx \right| \ll$$

$$\ll \frac{HN_1^\alpha \ln N}{N^{1-\alpha}} \max_{\sigma\in\left[\frac{1}{2};\sigma_0\right]} N_1^{\alpha(\sigma-1)} \sqrt{\frac{N(\sigma,T)N^{1-\alpha}}{H}}.$$

Доказательство.

Заметим, что при нашем выборе параметров N_1 и H справедливо

$$N-(n+1)^{1/\alpha}+H < N-n^{1/\alpha}-H,$$

то есть промежутки интегрирования в определении $W_2(\alpha)$ при различных n не пересекаются.

Так как подынтегральная функция неотрицательна, применив к $W_2(\alpha)$ неравенство Коши, получим:

$$W_2^2(\alpha) \ll \left(\sum_{N-2N_1<n^{1/\alpha}\le N-N_1} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta<\sigma_0\\|\gamma|\le T}} \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha} x^{\rho-1}dx \right| \right)^2 \ll$$

$$\ll \frac{HN_1^\alpha}{N^{1-\alpha}} \int_{N_1^\alpha/2}^{2N_1^\alpha} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta<\sigma_0\\|\gamma|\le T}} x^{\beta-1+i\gamma} \right|^2 dx.$$

Используя далее оценку из леммы 16 окончательно получаем

$$W_2(\alpha) \ll \frac{HN_1^\alpha \ln N}{N^{1-\alpha}} \max_{\sigma\in\left[\frac{1}{2};\sigma_0\right]} N_1^{\alpha(\sigma-1)} \sqrt{\frac{N(\sigma,T)N^{1-\alpha}}{H}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 20. *Пусть* $\sigma_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$ *— действительное число,* $N > N_0(\varepsilon)$, $N^{1-\varepsilon} \gg N_1 \gg N^{\frac{61}{80}+\varepsilon}$, $\sqrt{N} \gg H \gg N_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, $T = \frac{N_1}{H \ln^3 N}$. *Тогда справедлива оценка*

$$W_2 = \sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta<\sigma_0 \\ |\gamma|\le T}} \int_{\sqrt{N-n^2-H}}^{\sqrt{N-n^2+H}} x^{\rho-1}dx \right| \ll$$

$$\ll \frac{H\sqrt{N_1}\ln N}{\sqrt{N}} \max_{\sigma\in\left[\frac{1}{2};\sigma_0\right]} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} \sqrt{\frac{N(\sigma,T)\sqrt{N}}{H}}.$$

Утверждение леммы 20 может быть получено из леммы 19, если зафиксировать в ней $\alpha = \frac{1}{2}$.

Лемма 21. *Пусть* $\alpha \in (0; 1]$ *— действительное число,* $N > N_0(\varepsilon)$, $N^{1-\varepsilon} \gg N_1 \gg N^{1-\frac{19}{40}\alpha+\varepsilon}$, $H \gg N^{1-\alpha}$, $T = \frac{N_1}{H \ln^3 N}$. *Тогда справедлива оценка*

$$W_3(\alpha) = \sum_{N-2N_1<n^{1/\alpha}\le N-N_1} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta<1 \\ |\gamma|\le T}} \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha} x^{\rho-1}dx \right| \ll$$

$$\ll \frac{HN_1^\alpha \ln N}{N^{1-\alpha}} \max_{\sigma\in[\frac{1}{2};1)} N_1^{\alpha(\sigma-1)}\sqrt{N(\sigma,T)}.$$

Доказательство.

При нашем выборе параметров N_1 и H справедливо

$$N - (n+1)^{1/\alpha} + H \ge N - n^{1/\alpha} - H,$$

то есть промежутки интегрирования в определении $W_3(\alpha)$ при различных n пересекаются.

Объединим интегралы, используя суммирование по n. Получим

$$W_3(\alpha) = \sum_{N-2N_1<n^{1/\alpha}\le N-N_1} \int_{(N-n^{1/\alpha}-H)^\alpha}^{(N-n^{1/\alpha}+H)^\alpha} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2}\le\beta<1 \\ |\gamma|\le T}} x^{\rho-1} \right| dx \ll$$

$$\ll \frac{H}{N^{1-\alpha}} \int_{N_1^\alpha/2}^{2N_1^\alpha} \left| \sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1} \right| dx.$$

Используя лемму 16, окончательно для $W_3(\alpha)$ получаем

$$W_3(\alpha) \ll \frac{HN_1^{\alpha}\ln N}{N^{1-\alpha}} \max_{\sigma\in[\frac{1}{2};1)} N_1^{\alpha(\sigma-1)}\sqrt{N(\sigma,T)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 22. *Пусть* $T > T_0(\varepsilon)$, $J \geq G \geq 1$ *– действительные числа. Пусть далее* $\mathcal{A}$ *– множество действительных чисел* $t_1 < t_2 < \ldots < t_R$ *таких, что* $\forall r \quad T/2 \leq |t_r| \leq T$, $\forall r \neq s \quad \ln^2 T \leq G \leq |t_r - t_s| \leq J$.

Пусть

$$S(x,K,t) = \sum_{K\leq n\leq K+x} (-1)^d \tau(n)\exp(if(t,n)),$$

где

$$f(t,n) = 2t\ \mathrm{arsinh}\sqrt{\pi n/2t} + \sqrt{\pi^2 n^2 + 2\pi nt}.$$

Тогда для любого $K \leq T/\ln T$, $T \geq T_0$ *и любой экспоненциальной пары* (κ,λ) *справедливо:*

$$\sum_{t_r\in\mathcal{A}} |S(x,K,t_r)| \ll$$

$$\ll \left((K + K^{3/4}T^{1/4}G^{-1/2}\ln^{1/2}T)|\mathcal{A}|^{1/2} + J^{\kappa/2}T^{-\kappa/4}|\mathcal{A}|K^{(2\lambda-\kappa+2)/4}\right)\ln^{3/2}T.$$

Доказательство.

Используем неравенство (9).

Выберем

$$\xi_n = (-1)^n\tau(n) \quad \text{при} \quad K \leq n \leq K+x,$$

$$\varphi_{r,n} = \exp(if(t_r,n)) \quad \text{при} \quad K \leq n \leq 2K.$$

При остальных целых n положим $\xi_n = 0$ и $\varphi_{r,n} = 0$ при любом r.

Тогда равномерно по $x \leq K$ имеем

$$||\xi||^2 = (\xi,\xi) = \sum_{K<n\leq K+x} \ll K\ln^3 T,$$

$$\sum_{t_r\in\mathcal{A}} |S(x,K,t_r)| \ll K^{1/2}\ln^{3/2}T\left(\sum_{t_r,t_s\in\mathcal{A}}\left|\sum_{K<n\leq 2K}\exp\left(if(t_r,n) - if(t_s,n)\right)\right|\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Диагональные слагаемые внутренней суммы дают вклад $O(K)$.

Далее займемся оценкой недиагонали.

Положим
$$f(u) = f(t_r, u) - f(t_s, u), \quad r \neq s.$$

Для оценки суммы
$$S = \sum_{K<n\leq 2K} \exp(if(n))$$
будем использовать метод экспоненциальных пар.

Определим
$$g(z) = \mathrm{arsinh} z + z\sqrt{z^2+1}.$$

Справедливо
$$f(u) = 2t_r g\left(\sqrt{\pi u/2t_r}\right) - 2t_s g\left(\sqrt{\pi u/2t_s}\right), \quad r \neq s.$$

При $|z| < 1$ справедливо равенство
$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{2m-1} C_{m-1}^{1/2} z^{2m-1}.$$

Далее имеем
$$f^{(j)}(u) \asymp |t_r - t_s| K^{1/2-j} T^{-1/2}.$$

При условии $F = |t_r - t_s| K^{1/2-j} T^{-1/2} \gg 1$ используем метод экспоненциальных пар, в противном случае – леммы 9, 10.

Получаем
$$S = \sum_{K<n\leq 2K} \exp(if(n)) \ll F^{\kappa} K^{\lambda} + \max_{K\leq u\leq 2K} |f'(u)|^{-1} \ll \tag{14}$$
$$\ll J^{\kappa} T^{-\kappa/2} K^{\lambda-\kappa/2} + (KT)^{1/2} |t_r - t_s|^{-1}.$$

Тогда
$$\sum_{t_r, t_s \in \mathcal{A}, r\neq s} |t_r - t_s|^{-1} \ll G^{-1} |\mathcal{A}| \sum_{n\leq |\mathcal{A}|} n^{-1} \ll G^{-1} |\mathcal{A}| \ln T$$
откуда и получаем утверждение леммы.

Лемма 23. *Пусть* $T > T_0(\varepsilon)$, $J \geq G \geq 1$ *— действительные числа,* $t_1 < t_2 < \ldots < t_R$ *— набор действительных чисел таких, что* $\forall r \quad |t_r| \leq T$, $\forall r \neq s \quad J \geq |t_r - t_s| \geq G \geq 1$. *Пусть далее* $V > 0$ *— действительное число такое, что для всех* $r = 1, \ldots, R$ *выполнено условие:*

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it_r\right)\right| \geq V.$$

Тогда для любой экспоненциальной пары (κ, λ) *справедлива оценка*

$$R \ll TV^{-6}\ln^8 T + T^{\frac{\kappa+\lambda}{\kappa}} V^{-\frac{2(1+2\kappa+2\lambda)}{\kappa}} (\ln T)^{\frac{3+6\kappa+4\lambda}{\kappa}}. \tag{15}$$

Доказательство.

Обозначим $\mathcal{A}_3$ — множество действительных чисел $t_1 < t_2 < \ldots < t_R$ таких, что $\forall r \quad 2T/3 \leq |t_r| \leq 5T/6$, $\forall r \neq s \quad |t_r - t_s| \geq 1$.

Разобьем отрезок $[2T/3, 5T/6]$ на N отрезков длины не более $J = T/6N$ каждый.

Обозначим $\mathcal{A}_{1,k}$ подмножество $\mathcal{A}_3$, отвечающие k-му такому отрезку.

Выберем $B > 0$ таким образом, чтобы

$$BG\ln^2 T = V^2. \tag{16}$$

Обозначим

$$\mathcal{A}'_{1,k} = \mathcal{A}'_{1,k}(\tau) = \mathcal{A}_{1,k} \bigcap \left[\tau - G/2, \tau + G/2\right],$$

где $7T/12 \leq \tau \leq 11T/12$.

Из леммы 11 для каждого t_r имеем

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it_r\right)\right|^2 \ll \ln T \int_{-\ln^2 t_r}^{\ln^2 t_r} e^{-|u|} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + iu + it_r\right)\right|^2 du. \tag{17}$$

Мы можем предположить, что $V \geq T^{\varepsilon}$, так как в противном случае результат леммы становится тривиальным.

Просуммируем (17) по $t_r \in \mathcal{A}'_{1,k}$. Имеем для некоторой подходящей постоянной $C_1 > 0$

$$|\mathcal{A}'_{1,k}|V^2 \leq C_1 \ln T \int_{\tau-G}^{\tau+G} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 \sum_{t_r \in \mathcal{A}'_{1,k}} e^{-|t-t_r|} dt,$$

так как

$$[t_r - \ln^2 t_r, t_r + \ln^2 t_r] \subseteq [\tau - G, \tau + G]$$

при

$$t_r \in [\tau - G/2, \tau + G/2].$$

С учетом $|t_r - t_s| \geq 1$ при $r \neq s$ из леммы 12 получим оценку

$$|\mathcal{A}'_{1,k}| BG \ln^2 T \leq C_2 G \ln^2 T + \tag{18}$$

$$+ C_2 G \ln T \sum_K (TK)^{-1/4} e^{-G^2K/(2T)} \left(|S(K, K, \tau)| + K^{-1} \int_0^K |S(x, K, \tau)| dx \right).$$

Выберем $B = 2C_2$. Тогда получим

$$|\mathcal{A}'_{1,k}| \ll$$

$$\ll \ln^{-1} T \sum_K (TK)^{-1/4} e^{-G^2K/(2T)} \left(|S(K, K, \tau)| + K^{-1} \int_0^K |S(x, K, \tau)| dx \right).$$

Обозначим через $\mathcal{A}_{2,k}$ множество таких $\tau = T_0 + G/2 + nG$, что $\mathcal{A}'_{1,k} \neq \emptyset$, а натуральное n выбрано так, чтобы выполнялось условие $T_0 \leq \tau_0 \leq T_0 + J + G/2$.

Для $\tau_r, \tau_s \in \mathcal{A}_{2,k}$ при $r \neq s$ справедливо $G \leq |\tau_r - \tau_s| \leq J$. Тогда применим лемму 22

$$\sum_{\tau \in \mathcal{A}_{2,k}} |\mathcal{A}'_{1,k}| \ll . \tag{19}$$

$$\ll \ln^{1/2} T \sum_{T^{1/3} \leq K = 2^k \leq TG^{-2} \ln^2 T} (TK)^{-1/4} e^{-G^2K/(2T)} *$$

$$* \left((K + K^{3/4} T^{1/4} G^{-1/2} \ln^{1/2} T) |\mathcal{A}_{2,k}|^{1/2} + |\mathcal{A}_{2,k}| J^{\kappa/2} T^{-\kappa/4} K^{(2\lambda - \kappa + 2)/4} \right).$$

Справедливы оценки

$$|\mathcal{A}_{1,k}| \leq \sum_{\tau \in \mathcal{A}_{2,k}} |\mathcal{A}'_{1,k}(\tau)|,$$

$$|\mathcal{A}_{2,k}| \leq \sum_{\tau \in \mathcal{A}_{2,k}} |\mathcal{A}'_{1,k}(\tau)|$$

и суммируя их по $K = 2^k$ получаем

$$\sum_{\tau \in \mathcal{A}_{2,k}} |\mathcal{A}'_{1,k}(\tau)| \ll T^{-1/2} \ln T \sum_{T^{1/3} \leq K = 2^k \leq TG^{-2} \ln^2 T} K^{3/2} e^{-G^2K/(2T)} +$$

$$+G^{-1}\ln^2 T \sum_{T^{1/3}\le K=2^k\le TG^{-2}\ln^2 T} Ke^{-G^2K/(2T)}+$$

$$+J^{\kappa/2}T^{-(\kappa+1)/4}\ln^{1/2}T|\mathcal{A}_{2,k}| \sum_{T^{1/3}\le K=2^k\le TG^{-2}\ln^2 T} K^{(2\lambda-\kappa+1)/4}e^{-G^2K/(2T)} \ll$$

$$\ll TG^{-3}\ln^2 T+|\mathcal{A}_{2,k}|J^{\kappa/2}G^{(\kappa-1-2\lambda)/2}T^{(\kappa-\lambda)/2}\ln^{1/2}T.$$

Далее имеем

$$|\mathcal{A}_{1,k}|\le \sum_{\tau\in\mathcal{A}_{2,k}}|\mathcal{A}'_{1,k}(\tau)|\ll TG^{-3}\ln^2 T,$$

откуда

$$J\le C_3G^{(2\lambda-\kappa+1)/\kappa}T^{(\kappa-\lambda)/\kappa}\ln^{-1/\kappa}T.$$

Выберем N так, чтобы

$$J=T/(6N)\le C_3G^{(2\lambda-\kappa+1)/\kappa}T^{(\kappa-\lambda)/\kappa}\ln^{-1/\kappa}T<T/(6N-6).$$

Тогда

$$N\ll 1+T^{\lambda/\kappa}G^{-(2\lambda-\kappa+1)/\kappa}\ln^{1/\kappa}T$$

и

$$|\mathcal{A}_3|=\sum_{k\le N}|\mathcal{A}_{1,k}|\ll$$

$$\ll NTG^{-3}\ln^2 T\ll TV^{-6}\ln^8 T+T^{(\kappa+\lambda)/\kappa}V^{-2(1+2\kappa+2\lambda)/\kappa}(\ln T)^{(3+6\kappa+4\lambda)/\kappa},$$

если $G\le J$.

Последнее условие выполняется для

$$G\le C_4G^{(2\lambda-\kappa+1)/\kappa}T^{(\kappa-\lambda)/\kappa}\ln^{-1/\kappa}T.$$

Далее получим

$$V>T_1=C_5T^{(\lambda-\kappa)/(2+4\lambda-4\kappa)}(\ln T)^{(3+4\lambda-4\kappa))/(2+4\lambda-4\kappa)},$$

где $C_4, C_5>0$.

Лемма 24. *Пусть $T>T_0(\varepsilon)$ – действительное число, $X=X(T)=T^{\varepsilon}$, $X=X(T)\ll Y=Y(T)\ll T^{c_2}$.*

Пусть далее в множестве нетривиальных нулей дзета-функции Римана $\rho = \beta + i\gamma$ выделены два подмножества

$\mathbb{R}_1 = \{\rho :$ *выполнено (20) и* $\forall \rho_1 = \beta_1 + i\gamma_1, \rho_2 = \beta_2 + i\gamma_2, \rho_1 \neq \rho_2 \Rightarrow |\gamma_1 - \gamma_2| > 2\ln^4 T\}$,

$\mathbb{R}_2 = \{\rho :$ *выполнено (21) и* $\forall \rho_1 = \beta_1 + i\gamma_1, \rho_2 = \beta_2 + i\gamma_2, \rho_1 \neq \rho_2 \Rightarrow |\gamma_1 - \gamma_2| > 2\ln^4 T\}$,

где

$$\sum_{X < n \leq Y \ln^2 Y} a(n) n^{-\rho} e^{-\frac{n}{Y}} \gg 1, \quad |a(n)| \leq \tau(n); \tag{20}$$

$$\int_{-\ln^2 T}^{\ln^2 T} \zeta\left(\frac{1}{2} + i(\gamma + v)\right) M_X\left(\frac{1}{2} + i(\gamma + v)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + iv\right) Y^{\frac{1}{2} - \beta + iv} dv \gg 1, \tag{21}$$

и

$$R_1 = |\mathbb{R}_1|, \quad R_2 = |\mathbb{R}_2|.$$

Тогда справедливы оценки

$$N(\sigma, T) \ll (R_1 + R_2 + 1)\ln^5 T; \tag{22}$$

$$R_1 \ll \sum_{\rho} \left(\left| \sum_{M < n \leq 2M} b(n) n^{-\sigma - i\gamma} \right|^{\alpha} \right) \ln^D T, \quad \alpha = 1 \text{ или } \alpha = 2, \tag{23}$$

где

$$b_n \ll \tau_{2k}(n), \quad D \asymp 1, \quad Y^{\frac{4}{3}} \ln^{\frac{8}{3}} Y \ll M \ll Y^2 \ln^4 Y;$$

$$R_2 \ll T^{\varepsilon} \sum_{r \leq R_2} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_r\right) \right|^A Y^{\frac{1}{2} - \sigma} \ll T^{M(A) + \varepsilon} Y^{A\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)}. \tag{24}$$

Доказательство.

Справедливо

$$e^{-\frac{n}{Y}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2 - i\infty}^{2 + i\infty} \Gamma(w) Y^w n^{-w} dw. \tag{25}$$

Далее используем тождество

$$\zeta(\rho + w) M_X(\rho + w) = 1 + \sum_{n > X} a(n) n^{-\rho},$$

где

$$a(n) = \sum_{d|n; d \leq X} \mu(d).$$

Тогда для каждого нетривиального нуля дзета-функции $\rho = \sigma + i\gamma$ справедливо:

$$e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{n>X} a(n) n^{-\rho} e^{-\frac{n}{Y}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta(\rho + w) M_X(\rho + w) \Gamma(w) Y^w dw \tag{26}$$

и при этом

$$|a(n)| \leq \tau(n) < n^{\varepsilon}. \tag{27}$$

Теперь зафиксируем прямую, по которой происходит интегрирование в (26), как

$$Re\ w = \frac{1}{2} - \beta.$$

Тогда мы должны учесть полюс дзета-функции $w = 1 - \rho$. Положим для мнимой части рассматриваемого нуля дзета-функции $|\gamma| \geq \ln^2 T$.

В этом случае получим, оценив гамма-функцию используя лемму 4 (формулу Стирлинга), для вычета оценку $o(1)$.

Полюс гамма-функции в точке $w = 0$ компенсируется нулем ρ дзета-функции.

Окончательно при $|\gamma| \geq \ln^2 T$ имеем

$$\int_{Re w = \frac{1}{2} - \beta} = o(1) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\ln^2 T}^{\ln^2 T} \zeta\left(\frac{1}{2} + i(\gamma + v)\right) M_X\left(\frac{1}{2} + i(\gamma + v)\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \beta + iv\right) Y^{\frac{1}{2} - \beta + iv} dv. \tag{28}$$

Также справедливо

$$\sum_{n > Y \ln^2 Y} a(n) n^{-\rho} e^{-\frac{n}{Y}} = o(1) \quad \textit{при} \quad Y \to \infty. \tag{29}$$

Так как в (26) имеем

$$e^{-\frac{1}{Y}} \to 1 \quad \textit{при} \quad Y \to \infty,$$

то для каждого нетривиального нуля дзета-функции $\rho = \beta + i\gamma$ выполнено по крайней мере одно из следующих условий (20), (21) и

$$|\gamma| \leq \ln^2 T. \tag{30}$$

С использованием леммы 2 число нулей удовлетворяющих условию (30) может быть оценено величиной $\ln^3 T$.

Тогда, с учетом леммы 2, получаем:

$$N(\sigma, T) \ll (R_1 + R_2 + 1)\ln^5 T.$$

Так как по условиям леммы

$$X = X(T) = T^{\varepsilon},$$

получаем оценку

$$M_X\left(\frac{1}{2} + i\gamma + iv\right) \ll T^{\varepsilon}, \quad |v| \le \ln^2 T.$$

Заметим, что для каждого $\rho \in \mathbb{R}_1$ хотя бы при одном $N = N_j$ такм, что

$$T^{\varepsilon} \le N = 2^{-j} Y \ln^2 Y, \quad j = 1, 2, \ldots$$

выполнено условие

$$\sum_{N < n \le 2N} a(n) n^{-\rho} e^{-\frac{n}{Y}} \gg \frac{1}{\ln Y}. \tag{31}$$

Далее будем рассматривать нули, принадлежащие $\mathbb{R}_1$ и удовлетворяющие условию (26).

Возведем (31) в натуральную фиксированную степень k такую, что

$$N^k = M, \quad (2N)^k = P \le T^{c_2}.$$

Так как $k \ll 1$ получим

$$\sum_{M < n \le P} b(n) n^{-\rho} \gg \frac{1}{\ln^k Y},$$

где $b(n) \ll \tau_{2k}(n) \ll n^{\varepsilon}$ и $P \ll M$.

Далее разобьем полученную сумму на части, длина каждой из которых не превосходит M и выберем k так, что при фиксированном натуральном r выполнены условия:

$$N^k \le Y^r \ln^{2r} Y < N^{k+1}, \quad k \ge r \ge 2.$$

Имеем
$$Y^{\frac{r^2}{r+1}} \ln^{\frac{2r^2}{r+1}} Y \ll M \ll Y^r \ln^{2r} Y. \tag{32}$$

При $r = 2$ получаем

$$Y^{\frac{4}{3}} \ln^{\frac{8}{3}} Y \ll M \ll Y^2 \ln^4 Y.$$

Далее, применяя формулу частного суммирования и (32), приходим к оценке

$$R_1 \ll \ln^D T \sum_{\rho} \left(\left| \sum_{M<n\le 2M} b(n) n^{-\sigma-i\gamma} \right| M^{\sigma-\beta} + \int_M^{2M} \left| \sum_{M<n\le u} b(n) n^{-\sigma-i\gamma} \right| M^{\sigma-\beta-1} du \right)$$

для некоторого $D \asymp 1$.

Положим $b(n) = 0$ при $u < n \le M$.

Тогда получим оценку (23), где

$$\alpha = 1 \textit{ или } \alpha = 2, \quad D \asymp 1, \quad Y^{\frac{4}{3}} \ln^{\frac{8}{3}} Y \ll M \ll Y^2 \ln^4 Y.$$

Далее займемся оценкой R_2.

Для $r = 1, 2, \ldots, R_2$ рассмотрим

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma_r + iv'\right) \right| = \max_{-\ln^2 T \le v \le \ln^2 T} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma_r + iv\right) \right|$$

и обозначим

$$t_r = \gamma_r + v',$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{R_2}$ — мнимые части нулей из множества $\mathbb{R}_2$.

Тогда из определения множества $\mathbb{R}_2$ получаем

$$1 \ll T^{\varepsilon} Y^{\frac{1}{2}-\sigma} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_r\right) \right|, \quad r = 1, 2, ..., R_2. \tag{33}$$

Возведем оценку (33) в степень $A \ge 4$, предварительно заметив, что по определению $\mathbb{R}_2$ справедливо $|t_r - t_s| \ge \ln^4 T$ при $r \ne s$. Получим

$$R_2 \ll T^{\varepsilon} \sum_{r\le R_2} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_r\right) \right|^A Y^{A(\frac{1}{2}-\sigma)} \ll T^{M(A)+\varepsilon} Y^{A(\frac{1}{2}-\sigma)}. \tag{34}$$

Кроме того, выбирая в лемме 23 параметр $V = T^{-\varepsilon} Y^{\sigma-1/2}$, получим

$$R_2 \ll T^{1+\varepsilon} Y^{3-6\sigma} + T^{\frac{\kappa+\lambda+\varepsilon}{\kappa}} Y^{\frac{(1-2\sigma)(1+2\kappa+2\lambda)}{\kappa}} \tag{35}$$

для произвольной экспоненциальной пары (κ, λ).

Лемма доказана.

Лемма 25. *Для* $T > T_0(\varepsilon)$ *справедливы плотностные теоремы:*

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{4(1-\sigma)}{2\sigma+1}+\varepsilon}, \quad \frac{17}{18} \le \sigma \le 1. \tag{36}$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{24(1-\sigma)}{30\sigma-11}+\varepsilon}, \quad \frac{155}{174} \le \sigma \le \frac{17}{18}. \tag{37}$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{9(1-\sigma)}{7\sigma-1}+\varepsilon}, \quad \frac{39}{50} \le \sigma \le \frac{9}{10}. \tag{38}$$

Доказательство.

Будем использовать неравенство (9). Положим

$$\xi_n = b(n) \left(e^{-\frac{n}{2M}} - e^{-\frac{n}{M}}\right)^{-\frac{1}{2}} n^{-\sigma} \quad \text{\textit{для} } M < n \le 2M,$$

где

$$b(n) = \sum_{n_1 n_2 \cdots n_k = n} a(n_1) a(n_2) \cdots a(n_k) \ll \tau_{2k}(n) \ll n^{\varepsilon}, \quad k \asymp 1.$$

Для всех остальных натуральных n положим $\xi_n = 0$.

Пусть множество R_1 содержит ровно R различных нулей дзета-функции. Обозначим их мнимые части через $t_1, t_2, ..., t_R$.

Положим далее

$$\varphi_{r,n} = n^{-it_r} \sqrt{e^{-\frac{n}{2M}} - e^{-\frac{n}{M}}}, \quad n = 1, 2, ...$$

Тогда из (9) и (23) получим для R_1 следующую оценку

$$R_1^2 \ll T^{\varepsilon} \left(M^{2-2\sigma} R_1 + M^{1-2\sigma} \sum_{r \ne s \le R} |H(it_r - it_s)| \right), \tag{39}$$

где

$$H(it) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{n}{2M}} - e^{-\frac{n}{M}}\right) n^{-it} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \zeta(w+it) \left((2M)^w - M^w\right) \Gamma(w) dw, \tag{40}$$

так как

$$e^{-\frac{n}{2M}} - e^{-\frac{n}{M}} \asymp 1 \text{ \textit{при} } M < n \le 2M,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 \ll T^{\varepsilon} M^{1-2\sigma},$$

$$H(0) \ll M.$$

Положим теперь прямой, по которой будет происходить интегрирование в (40), прямую

$$Re\ w = \frac{1}{2}.$$

Тогда мы получим простой полюс в точке $w = 1 - it$ с вычетом $\ll Me^{-|t|}$.

Далее имеем

$$H(it) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \zeta(w+it)\left((2M)^w - M^w\right)\Gamma(w)dw + O\left(Me^{-|t|}\right).$$

Используя лемму 4 (формулу Стирлинга), получим

$$\sum_{r\neq s\leq R} |H(it_r - it_s)| \ll M \sum_{r\neq s\leq R} e^{-|t_r-t_s|} + o(R^2) +$$

$$+\sqrt{M} \int_{-\ln^2 T}^{\ln^2 T} \sum_{r\neq s\leq R} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it_r - it_s + iv\right)\right| dv. \tag{41}$$

Так как по определению множества $\mathbb{R}_1$ справедливо неравенство

$$|t_r - t_s| \geq \ln^4 T,$$

то для первой суммы в правой части (41) имеем

$$\sum_{r\neq s\leq R} e^{-|t_r-t_s|} \ll R.$$

Для оценки второй суммы в правой части (41) зафиксируем s и определим набор

$$\tau_r = t_r - t_s + v.$$

Тогда имеем

$$|\tau_r| \leq 3T, \quad r = 1, 2, \ldots, R,$$

$$|\tau_{r_1} - \tau_{r_2}| \geq \ln^4 T, \quad r_1 \neq r_2.$$

Из неравенства Гельдера и леммы 15 получим

$$\sum_{r\neq s\leq R}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\tau_r\right)\right| \leq R^{5/6}\left(\sum_{\substack{r\leq R\\ \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\tau_r\right)\right|\geq T^{2/13}}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\tau_r\right)\right|^6\right)^{1/6} +$$

$$+R^{18/19}\left(\sum_{\substack{r\leq R\\ \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\tau_r\right)\right|\leq T^{2/13}}}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\tau_r\right)\right|^{19}\right)^{1/19} \ll \tag{42}$$

$$\ll T^{\varepsilon}\left(R^{5/6}T^{1/6}+R^{18/19}T^{3/19}\right).$$

Подставляя оценку (42) в (41) и используя затем (39), приходим к следующему неравенству:

$$R_1 \ll T^{\varepsilon}\left(M^{2-2\sigma}+TM^{9-12\sigma}+T^3M^{\frac{19(3-4\sigma)}{2}}\right). \tag{43}$$

Для оценки R_2 мы будем использовать лемму 23, зафиксировав в ней экспоненциальную пару $(\kappa,\lambda)=\left(\frac{2}{7},\frac{4}{7}\right)$ и полагая $V=Y^{1/2-\sigma}$. Получим

$$R_2 \ll T^{\varepsilon}\left(TY^{3-6\sigma}+T^3Y^{19\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}\right). \tag{44}$$

Положим

$$T_0 = M^{\frac{72\sigma-53}{6}}$$

и оценим R_0 – максимальное число нулей дзета-функции, мнимые части которых t_r лежат в интервале длины не более T_0.

Воспользуемся (43). Тогда для $\sigma\leq\frac{11}{12}$ справедлива оценка

$$R_0 \ll T^{\varepsilon}M^{2-2\sigma}.$$

Далее для $\sigma\geq\frac{65}{84}$ имеем

$$R_1 \ll R_0\left(1+\frac{T}{T_0}\right) \ll T^{\varepsilon}\left(M^{2-2\sigma}+TM^{\frac{65-84\sigma}{6}}\right) \ll \tag{45}$$

$$\ll T^{\varepsilon}\left(Y^{4-4\sigma}+TY^{\frac{2(65-84\sigma)}{9}}\right).$$

Положим теперь
$$Y = T^{\frac{6}{30\sigma-11}}.$$

Тогда из (44) и (45) для $\frac{155}{174} \le \sigma \le \frac{11}{12}$ получаем
$$N(\sigma,T) \ll T^{\varepsilon}\left(Y^{4-4\sigma} + TY^{\frac{2(65-84\sigma)}{9}} + TY^{3-6\sigma} + T^3Y^{19\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}\right) \ll T^{\frac{24(1-\sigma)}{30\sigma-11}+\varepsilon}.$$

При $\sigma \ge \frac{11}{12}$ мы в точности повторим приведенные выше рассуждения, выбрав
$$T_0 = M^{10\sigma-7}.$$

Получим
$$R_1 \ll R_0\left(1+\frac{T}{T_0}\right) \ll T^{\varepsilon}\left(M^{2-2\sigma} + TM^{9-12\sigma}\right) \ll$$
$$\ll T^{\varepsilon}\left(Y^{4-4\sigma} + TY^{12-16\sigma}\right) \ll T^{\varepsilon}\left(Y^{4-4\sigma} + TY^{3-6\sigma}\right).$$

Выбор параметра
$$Y = T^{\frac{1}{2\sigma+1}} \text{ для } \sigma \ge \frac{17}{18}$$
и
$$Y = T^{\frac{6}{30\sigma-11}} \text{ для } \frac{11}{12} \le \sigma \le \frac{17}{18},$$
завершает доказательство плотностных теорем (36) и (37).

Лемма доказана.

Лемма 26. *Пусть* $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$, $k > 2,001$ *— действительные числа,* $M(\alpha,T) = \max_{1\le t\le T}|\zeta(\alpha+it)|$. *Тогда для*
$$1-\frac{1}{2k} \le \sigma \le 1-\frac{c_3}{\ln T}$$
справедлива оценка
$$N(\sigma,T) \ll M\left(k\sigma-(k-1),3T\right)^{\frac{2(2k-3)}{(k-1)(k-2)}}\ln^B T, \tag{46}$$
где $B = 11+\frac{9k-8}{(k-1)(k-2)}$, c_3 *— положительная абсолютная постоянная.*

Доказательство.

Пусть $X = X(T)$, $Y = Y(T)$ — параметры, которые мы выберем позднее.

Справедливо тождество

$$e^{-\frac{n}{Y}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\Gamma(w)Y^w n^{-w}dw. \tag{47}$$

Тогда для каждого нетривиального нуля дзета-функции $\rho = \sigma + i\gamma$ справедливо:

$$e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{n>X} a(n)n^{-\rho}e^{-\frac{n}{Y}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\zeta(\rho+w)M_X(\rho+w)\Gamma(w)Y^w dw, \tag{48}$$

где

$$a(n) = a_X(n) = \sum_{\substack{d|n\\ d\le X}}\mu(d); \quad |a(n)| \le \tau(n) < n^{\varepsilon}. \tag{49}$$

Выберем теперь прямую интегрирования в (48) как

$$Re\ w = \alpha - \beta < 0$$

для нуля $\rho = \beta + i\gamma$, $\beta \ge \sigma$ и некоторого подходящего $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$.

При этом в точке $w = 0$ полюс гамма-функции сократится за счет нуля дзета-функции $\zeta(\rho + w) = \zeta(\rho)$. Вклад полюса $w = 1 - \rho$ при $|\gamma| \ge \ln^2 T$ оценивается как $o(1)$ за счет малого значения гамма-функции (см. лемму 4). Далее имеем

$$\int_{Rew=\alpha-\beta} = o(1) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\ln^2 T}^{\ln^2 T}\zeta\left(\alpha+i\gamma+iv\right)M_X\left(\alpha+i\gamma+iv\right)\Gamma\left(\alpha-\beta+iv\right)Y^{\alpha-\beta+iv}dv. \tag{50}$$

Также справедлива оценка

$$\sum_{n>Y\ln^2 Y} a(n)n^{-\rho}e^{-\frac{n}{Y}} = o(1) \quad \textit{при} \quad Y \to \infty. \tag{51}$$

Одновременно с этим в левой части (48) для достаточно большого Y имеем

$$e^{-\frac{1}{Y}} \gg 1.$$

Тогда для каждого нетривиального нуля дзета-функции $\rho = \beta + i\gamma$ выполнено по крайней мере одно из следующих условий

$$\sum_{X<n\le Y\ln^2 Y} a(n)n^{-\rho}e^{-\frac{n}{Y}} \gg 1, \quad |a(n)| \le \tau(n); \tag{52}$$

$$\int_{-\ln^2 T}^{\ln^2 T} \zeta\left(\alpha+i\gamma+iv\right) M_X\left(\alpha+i\gamma+iv\right) \Gamma\left(\alpha-\beta+iv\right) Y^{\alpha-\beta+iv} dv \gg 1, \tag{53}$$

и

$$|\gamma| \leq \ln^2 T. \tag{54}$$

С использованием леммы 2 число нулей удовлетворяющих условию (54) оценивается величиной $\ll \ln^3 T$.

Далее будем рассматривать нетривиальные нули дзета-функции $\rho_1 = \beta_1 + i\gamma_1$, $\rho_2 = \beta_2 + i\gamma_2$ такие, что $|\gamma_1 - \gamma_2| > 2\ln^4 T$ при $\rho_1 \neq \rho_2$.

При этом считаем, что число таких нулей, удовлетворяющих условию (52), равно R_1, а число нулей, удовлетворяющих условию (53) равно R_2.

С учетом леммы 2, справедлива оценка

$$N(\sigma, T) \ll (R_1 + R_2 + 1)\ln^5 T.$$

Займемся оценкой R_1.

Из справедливости условия (52) очевидно следует, что существует число $X \leq M \leq Y\ln^2 Y$ такое, что условие

$$\sum_{M<n\leq 2M} a(n) n^{-\sigma-i\gamma_r} \gg \frac{1}{\ln Y}, \tag{55}$$

выполнено для $R \gg \frac{R_1}{\ln Y}$ нулей из множества $\mathbb{R}_1$.

Обозначим мнимые части данных нулей как $t_1, \ldots, t_R$.

Положим далее

$$\xi_n = a(n)\left(e^{-\frac{n}{2M}} - e^{-\frac{n}{M}}\right)^{-\frac{1}{2}} n^{-\sigma} \quad \textit{для } M < n \leq 2M.$$

Для всех остальных натуральных n положим $\xi_n = 0$.

Положим далее

$$\varphi_{r,n} = n^{-it_r}\sqrt{e^{-\frac{n}{2M}} - e^{-\frac{n}{M}}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теперь применим неравенство (9) с выбранными таким образом ξ и φ к оценке R. С учетом оценки $|a(n)| \ll \tau(n)$, имеем

$$R^2 \ll \ln^2 Y \left(\sum_{M<n\leq 2M} \tau^2(n) e^{-\frac{2n}{Y}} n^{-2\sigma}\right)\left(RM + \sum_{r\neq s\leq R} |H(it_r - it_s)|\right),$$

где

$$H(it)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{n}{2M}}-e^{-\frac{n}{M}}\right)n^{-it}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\zeta(w+it)\left((2M)^{w}-M^{w}\right)\Gamma(w)dw, \qquad (56)$$

так как

$$e^{-\frac{n}{2M}}-e^{-\frac{n}{M}}\asymp 1 \text{ \textit{при} } M<n\leq 2M,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2\ll T^{\varepsilon}M^{1-2\sigma},$$

$$H(0)\ll M.$$

Положим теперь прямой, по которой будет происходить интегрирование в (40), прямую

$$Re\ w=\alpha.$$

Тогда нам необходимо будет учесть простой полюс дзета-функции в точке $w=1-it$ с вычетом $\ll Me^{-|t|}$.

Далее имеем

$$H(it)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\zeta(w+it)\left((2M)^{w}-M^{w}\right)\Gamma(w)dw+O\left(Me^{-|t|}\right).$$

Используя лемму 4 (формулу Стирлинга), получим

$$\sum_{r\neq s\leq R}|H(it_r-it_s)|\ll M\sum_{r\neq s\leq R}e^{-|t_r-t_s|}+o(R^2)+$$

$$+\sqrt{M}\int_{-\ln^2 T}^{\ln^2 T}\sum_{r\neq s\leq R}\left|\zeta\left(\alpha+it_r-it_s+iv\right)\right|dv. \qquad (57)$$

Так как справедливо неравенство

$$|t_r-t_s|\geq\ln^4 T,$$

то для первой суммы в правой части (57) имеем

$$\sum_{r\neq s\leq R}e^{-|t_r-t_s|}\ll R.$$

Для оценки второй суммы в правой части (57) зафиксируем s и определим набор

$$\tau_r = t_r - t_s + v.$$

Тогда имеем

$$|\tau_r| \le 3T, \quad r = 1, 2, \ldots, R,$$

$$|\tau_{r_1} - \tau_{r_2}| \ge \ln^4 T, \quad r_1 \ne r_2.$$

Тогда получим

$$R^2 \ll \ln^5 T \left(RM^{2-2\sigma} + R^2 M^{1+\alpha-2\sigma} M(\alpha, 3T) \right) e^{-\frac{M}{Y}}.$$

Для $\sigma \ge \frac{\alpha+1}{2}$ имеем

$$R_1 \ll R \ln T \ll \max_{X \le M = 2^k \le Y \ln^2 Y} M^{2-2\sigma} e^{-\frac{M}{Y}} \ln^6 T \ll Y^{2-2\sigma} \ln^6 T, \tag{58}$$

если

$$X^{2\sigma-1-\alpha} \gg M(\alpha, 3T) \ln^5 T. \tag{59}$$

Далее займемся оценкой R_2.

Согласно лемме 3 мы можем считать, что $\sigma < 1 - \frac{C}{\ln T}$. Тогда из (53) приходим к оценке

$$M_X(\alpha + it_r) \gg \frac{Y^{\sigma-\alpha}}{M(\alpha, 2T) \ln T}$$

для R_2 значений t_r таких, что

$$|t_r| \le 2T, \quad |t_r - t_s| > \ln^4 T \ \textit{для}\ r \ne s \le R_2.$$

Следовательно существует число $1 \ll N \le X$ такое, что условие

$$\sum_{N < n \le 2N} \mu(n) n^{-\alpha - it_r} \gg \frac{Y^{\sigma-\alpha}}{M(\alpha, 2T) \ln^2 T} \tag{60}$$

или, по-другому,

$$Y^{\alpha-\sigma} M(\alpha, 2T) \ln^2 T \sum_{N < n \le 2N} \mu(n) n^{-\alpha - it_r} \gg 1$$

выполнено для $R_0 \gg \frac{R_2}{\ln T}$ чисел t_r

Просуммируем последнее неравенство по всем R_0 нулям, удовлетворяющим условию (60) и воспользуемся (9) при

$$\xi_n = \mu(n) n^{-\alpha} \quad \textit{для } N < n \le 2N.$$

Для всех остальных натуральных n положим $\xi_n = 0$.

Положим далее

$$\varphi_{r,n} = n^{-it_r}, \quad n = 1, 2, ...$$

Имеем

$$R_0^2 \ll M^2(\alpha, 2T) Y^{2\alpha-2\sigma} \ln^4 T \left(R_0 N^{2-2\alpha} + N^{1-\alpha} M(\alpha, 3T) R_0^2 \right),$$

а, следовательно,

$$R_2 \ll X^{2-2\alpha} Y^{2\alpha-2\sigma} M^2(\alpha, 2T) \ln^5 T, \tag{61}$$

при условии

$$Y^{2\alpha-2\sigma} \gg X^{1-\alpha} M^3(\alpha, 2T) \ln^4 T. \tag{62}$$

Выберем теперь параметры $X = X(T)$ и $Y = Y(T)$ следующим образом:

$$X = \left(c_3 M(\alpha, 3T) \ln^5 T \right)^{\frac{1}{2\sigma-1-\alpha}},$$

$$Y = \left(c_4 M(\alpha, 3T) \right)^{\frac{(3\sigma-2\alpha-1)}{(\sigma-\alpha)(2\sigma-1-\alpha)}} (\ln T)^{\frac{(8\sigma-9\alpha+1)}{2(\sigma-\alpha)(2\sigma-1-\alpha)}},$$

для достаточно больших положительных абсолютных постоянных c_3, c_4.

При таком выборе параметров оценка (61), полученная для R_2, будет по порядку меньше оценки (58) для R_1.

Действительно, с учетом условия (62), получаем

$$R_2 \ll X^{1-\alpha} M^{-1}(\alpha, 2T) \ln T \ll Y^{2-2\sigma}.$$

Следовательно

$$N(\sigma, T) \ll Y^{2-2\sigma} \ln^{11} T \ll \left(C_2 M(\alpha, 3T) \right)^{\frac{2(1-\sigma)(3\sigma-2\alpha-1)}{(\sigma-\alpha)(2\sigma-1-\alpha)}} \ln^B T,$$

где

$$B = 11 + \frac{(8\sigma - 9\alpha + 1)(1-\sigma)}{(\sigma-\alpha)(2\sigma-1-\alpha)}$$

и

$$\frac{1}{2} \le \alpha \le 1, \quad \frac{\alpha+1}{2} \le \sigma \le 1 - \frac{c_2}{\ln T}.$$

Выбирая

$$\alpha = k\sigma - (k-1), \quad k > 2$$

и учитывая условие

$$\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$$

получим утверждение леммы.

Лемма доказана.

Лемма 27. *Для $T > T_0(\varepsilon)$ справедливы плотностные теоремы*

$$N(\sigma, T) \ll T^{1600(1-\sigma)^{3/2}} \ln^{16} T, \quad 1 - 10^{-8} \le \sigma \le 1. \tag{63}$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{53}{40}(1-\sigma)+\varepsilon}, \quad 0.9524... = \frac{15891382}{16684097} \le \sigma \le 1 - 10^{-8}. \tag{64}$$

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{1830}{1351}(1-\sigma)+\varepsilon}, \quad 0.95025... = \frac{45869}{48270} \le \sigma \le 1. \tag{65}$$

Доказательство.

Для доказательства (63) воспользуемся леммой 26 при $k = 5$ и леммой 5. Имеем

$$M(5\sigma - 4, 3T) \ll T^{100(5-5\sigma)^{3/2}} \ln^{2/3} T,$$

и далее

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{7}{6}\cdot 100 \cdot 5^{3/2}(1-\sigma)^{3/2}} \ln^{169/12+7/9} T.$$

Так как справедливы неравенства

$$\frac{7}{6} \cdot 100 \cdot 5^{3/2} < 1600,$$

$$\frac{169}{12} + \frac{7}{9} < 16,$$

утверждение (63) доказано.

Для доказательства (64) воспользуемся леммами 7 и 26.

Тогда для любого $k > 2$ имеем:

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)}(\kappa+\lambda-k\sigma+k-1)+\varepsilon}, \tag{66}$$

при

$$1 - \frac{1}{2k} \le \sigma \le 1 - \frac{1 - |\kappa - \lambda|}{k}.$$

Будем использовать экспоненциальную пару $(\kappa, \lambda) = \left(\frac{11}{194}, \frac{236}{291}\right)$.

Достаточно показать, что

$$\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)}\left(k - k\sigma - \frac{77}{582}\right) \le \frac{1831}{1350}(1-\sigma), \tag{67}$$

на промежутке $\frac{15891382}{16684097} \le \sigma \le 1 - 10^{-8}$.

Действительно, из (67) получаем

$$\sigma \ge 1 - \frac{\frac{77(2k-3)}{582(k-1)(k-2)}}{\frac{(2k-3)k}{(k-1)(k-2)} - \frac{53}{40}}.$$

С другой стороны, из условий леммы 7 имеем

$$\sigma \le 1 - \frac{143}{582k}.$$

Но тогда для k удовлетворяющих условию

$$\frac{\frac{77(2k-3)}{582(k-1)(k-2)}}{\frac{(2k-3)k}{(k-1)(k-2)} - \frac{53}{40}} \ge \frac{143}{582k}$$

или

$$\frac{(2k-3)k}{(k-1)(k-2)} \le \frac{7579}{2640} \tag{68}$$

выполняется (67).

Левая часть в (68) монотонно убывает как функция переменной k и при $k = \frac{150}{29}$ неравенство (68) выполнено.

Обозначим

$$u_1(k) = 1 - \frac{\frac{77(2k-3)}{582(k-1)(k-2)}}{\frac{(2k-3)k}{(k-1)(k-2)} - \frac{53}{40}}.$$

Имеем

$$u_1\left(\frac{150}{29}\right) = \frac{15891382}{16684097}.$$

Выбирая $\frac{150}{29} \le k < 5 \cdot 10^7$, получим (64).

Теперь займемся доказательством (65).

Заметим, что на промежутке

$$0.976502... = \frac{1787}{1830} \le \sigma < 1$$

достаточно использовать плотностную теорему (36).

На промежутке
$$\frac{15891382}{16684097} \le \sigma < \frac{1787}{1830}$$
справедливость (65) вытекает из установленной выше справедливости (64).

Наконец, при $\frac{45869}{48270} \le \sigma < \frac{15891382}{16684097}$ вновь воспользуемся (66) зафиксировав экспоненциальную пару $(\kappa, \lambda) = \left(\frac{11}{194}, \frac{236}{291}\right)$.

Рассмотрим решения неравенства
$$\frac{(2k-3)k}{(k-1)(k-2)} \le \frac{915 \cdot \frac{143}{582}}{1351 \cdot \frac{33}{582}} = \frac{130845}{44583}. \tag{69}$$

Условие (69) выполнено при $k = \frac{79}{16}$.

Обозначим
$$u_2(k) = 1 - \frac{143}{582k}.$$

Имеем
$$0.95023... = u_2\left(\frac{79}{16}\right) = \frac{21845}{22989} < \frac{45869}{48270} = 0.95025...$$

В силу монотонного убывания левой части (69), данное условие выполнено также при всех
$$\frac{79}{16} \le k \le 20,$$
а следовательно, из условия
$$\sigma \ge 1 - \frac{1}{2k}$$
получим справедливость плотностной теоремы (65) при $\sigma \le 0.975$.

Лемма доказана.

Лемма 28. *Для любых действительных* $\frac{1}{2} \le \theta \le 1$ *и* $T > T_0(\varepsilon)$ *справедлива оценка*
$$N(\sigma, T) \le T^{\frac{3c(\theta)(1-\sigma)+\varepsilon}{(2-c(\theta))\sigma + c(\theta) - 1 - \theta}},$$
при
$$\frac{1 + \theta + 2c(\theta)}{2(1 + c(\theta))} \le \sigma \le \frac{4 + 4\theta - 7c(\theta)}{8 - 16c(\theta)}.$$

Доказательство.

Для
$$b(n) = e^{-\frac{n}{2N}} - e^{-\frac{n}{N}}$$
и любого $\sigma \geq 0$ справедливо (см. [20], глава 8 и Дополнение 2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} b(n) n^{-\sigma - it} \ll N e^{-t} + N^{\theta} t^{c(\theta)} \ln t,$$
откуда, с учетом леммы 12, получаем
$$R^2 V^2 \ll R(GN + GRN^{\theta} T^{c(\theta)} \ln T). \tag{70}$$

Если для некоторой подходящей константы $c_3 > 0$ выполнено
$$V^2 \geq c_3 G N^{\theta} T^{c(\theta)} \ln T,$$
то из (70) получаем
$$R \ll GNV^{-2}$$
при условии
$$T \leq T_0 = c_4 V^{2/c(\theta)} G^{-1/c(\theta)} N^{-\theta/c(\theta)} \ln^{-1/c(\theta)} T_0,$$
для некоторой константы c_4.

При $T > T_0$ имеем
$$R \ll \frac{GN}{V^2}\left(1 + \frac{T}{T_0}\right) \ll \frac{GN}{V^2} + G^{\frac{1+c(\theta)}{c(\theta)}} T N^{\frac{\theta + c(\theta)}{c(\theta)}} V^{\frac{-2(1+c(\theta))}{c(\theta)}} \ln^{\frac{1}{c(\theta)}} T.$$

Далее получаем
$$R_1 \ll M^{2(1-\sigma)} + M^B T,$$
где $Y^{4/3} \ln^{8/3} Y \ll M \ll Y^2 \ln^4 Y$ как и в лемме 24 и
$$B = \frac{1 + \theta + 2c(\theta) - 2(1 + c(\theta))\sigma}{c(\theta)}.$$

Положим
$$\sigma \geq \frac{1 + \theta + 2c(\theta)}{2(1 + c(\theta))}.$$

Тогда с учетом выбора параметра M при $A = 12$ справедлива оценка
$$N(\sigma, T) \leq T^{\varepsilon}\left(Y^{4(1-\sigma)} + Y^{\frac{4B}{3}} T + T^2 Y^{6-12\sigma}\right).$$

Выберем

$$Y = T^D,$$

где $D = \frac{3c(\theta)}{4(2-c(\theta)\sigma+c(\theta)-1-\theta)}$.

Тогда окончательно получим

$$N(\sigma,T) \le T^{\frac{3c(\theta)(1-\sigma)+\varepsilon}{(2-c(\theta))\sigma+c(\theta)-1-\theta}},$$

при

$$\frac{1+\theta+2c(\theta)}{2(1+c(\theta))} \le \sigma \le \frac{4+4\theta-7c(\theta)}{8-16c(\theta)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 29. *Для $T > T_0(\varepsilon)$ справедлива плотностная теорема*

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{21(1-\sigma)}{151\sigma-128}+\varepsilon}, \quad 0.947... = \frac{2573}{2716} \le \sigma \le \frac{3155}{3298} = 0.956.... \tag{71}$$

Доказательство.

Воспользуемся оценкой (66). Для любого $k > 2$ и любой экспоненциальной пары (κ,λ) имеем:

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)}(\kappa+\lambda-k\sigma+k-1)+\varepsilon},$$

при

$$\frac{2k-1}{2k} \le \sigma \le \frac{|\kappa-\lambda|+k-1}{k}.$$

Будем использовать экспоненциальную пару $(\kappa,\lambda) = \left(\frac{11}{194}, \frac{236}{291}\right)$.

Тогда нам достаточно найти такие значения k, при которых

$$\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)}\left(k(1-\sigma)-\frac{77}{582}\right) \le \frac{21(1-\sigma)}{151\sigma-128} \tag{72}$$

выполнено хотя бы для одного значения

$$1-\frac{1}{2k} \le \sigma \le 1-\frac{143}{582k}.$$

Заметим, что для рассматриваемых в лемме σ справедливо:

$$151\sigma - 128 > 0.$$

Обозначим $x = 1-\sigma$. Тогда из (72) приходим к следующему квадратному неравенству относительно переменной x:

$$\frac{151k(2k-3)}{(k-1)(k-2)}x^2 - \left(\left(23k + \frac{11627}{582}\right)\cdot\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)} - 21\right)x + \frac{1771}{582}\cdot\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)} \geq 0. \tag{73}$$

Заметим, что при любом $k > 2$ справедливо

$$\frac{151k(2k-3)}{(k-1)(k-2)} > 0.$$

Следовательно, если неравенство (73) разрешимо в действительных числах, то все решения данного неравенства принадлежат множеству $\mathbb{R}\setminus(a,b)$, где $a \leq b$.

С другой стороны, из (72) имеем

$$\frac{1}{2k} \leq x \leq \frac{143}{582k}.$$

Подставим в (73) значение

$$x = \frac{143}{582k}.$$

Тогда получим неравенство относительно переменной k

$$\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)}\left(\frac{138}{13}k - \frac{1661}{97}\right) \leq 21$$

и, домножая обе части неравенства на $13\cdot 97 = 1261$, имеем

$$\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)}\left(13886k - 21593\right) \leq 26481. \tag{74}$$

Рассмотрим функцию

$$f(k) = \frac{2k-3}{(k-1)(k-2)}\left(13886k - 21593\right).$$

Так как

$$\frac{2k-3}{(k-1)(k-2)} = \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2},$$

справедливо

$$f(k) = 26772 - 8207\cdot\frac{1}{k-1} + 5179\cdot\frac{1}{k-2}.$$

Тогда
$$f'(k) = 8207 \cdot \frac{1}{(k-1)^2} - 5179 \cdot \frac{1}{(k-2)^2}.$$
Следовательно, при
$$k \le 1 + \frac{1}{1 - \sqrt{5179/8207}} = 5.86...$$
функция $f(k)$ убывает.

С другой стороны, имеем
$$f\left(\frac{14}{3}\right) = 26772 - \frac{8207 \cdot 3}{11} + \frac{5179 \cdot 9}{64} < 26476$$
и при $k = \frac{14}{3}$ неравенство (74) справедливо.

Следовательно (74) справедливо при $\frac{14}{3} \le k \le \frac{17}{3}$.

Но тогда при
$$\frac{2573}{2716} = 1 - \frac{143 \cdot 3}{582 \cdot 14} \le \sigma \le 1 - \frac{143 \cdot 3}{582 \cdot 17} = \frac{3155}{3298}.$$
условия (72) выполнены.

Лемма доказана.

Лемма 30. *Для $T > T_0(\varepsilon)$ справедлива плотностная теорема*
$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{192(1-\sigma)}{756\sigma - 551} + \varepsilon}, \quad 0.7837... = \frac{743}{948} \le \sigma \le \frac{503}{564} = 0.8918... \tag{75}$$

Доказательство.

Воспользуемся леммой 28 при $\theta = \frac{1}{2}$ и леммой 7.

Получаем
$$\frac{3c(\theta)}{(2 - c(\theta))\sigma + c(\theta) - 1 - \theta} = \frac{96/205}{(378/205)\sigma - 551/410} = \frac{192}{756\sigma - 551}.$$
Условия леммы 31 в данном случае имеют вид
$$\frac{1 + \theta + 2c(\theta)}{2(1 + c(\theta))} = \frac{743}{948},$$
$$\frac{4 + 4\theta - 7c(\theta)}{8 - 16c(\theta)} = \frac{503}{564}.$$
Лемма доказана.

Лемма 31. *Пусть* $\alpha \in (0;1]$ *– действительное число,* $N > N_0(\varepsilon)$, $N^{1-\varepsilon} \gg N_1 \gg N^{1-\frac{19}{40}\alpha+\varepsilon}$, $H \gg N_1^{1-\frac{\alpha}{A(\sigma)}+\varepsilon}$, $T = \frac{N_1}{H\ln^3 N}$, $N(\sigma,T) \ll T^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}$, *где* $A(\sigma)$ *— монотонная функция при* $\frac{3}{4} \le \sigma \le 1-10^{-8}$. *Тогда при*

$$\alpha\left(\frac{1}{A(\sigma)}-(1-\sigma)-\frac{21}{40-19\alpha}\right)+\varepsilon<0 \tag{76}$$

справедливо

$$T^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon} \gg \frac{N^{1-\alpha}}{H}\ln^2 N. \tag{77}$$

Доказательство.

Подставим в (77) выражения для T и N_1.

Получим

$$\frac{N_1^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}}{H^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}} \gg \frac{N_1^{1-\alpha+\frac{19\alpha}{40-19\alpha}-\frac{19\alpha^2}{40-19\alpha}}}{H}.$$

Далее имеем, подставляя нижнюю оценку для H из условий леммы и перенося все переменные в правую часть:

$$N_1^{1-\alpha+\frac{19\alpha}{40-19\alpha}-\frac{19\alpha^2}{40-19\alpha}-A(\sigma)(1-\sigma)-1+A(\sigma)(1-\sigma)+\frac{\alpha}{A(\sigma)}+\alpha(1-\sigma)+\varepsilon} \ll 1.$$

Упрощая последнее неравенство, получим условие

$$N_1^{\alpha\left(\frac{1}{A(\sigma)}-(1-\sigma)-\frac{21}{40-19\alpha}\right)+\varepsilon} \ll 1,$$

для выполнения которого при $N_1 \gg 1$ достаточно справедливости (76).

Лемма доказана.

Лемма 32. *Пусть* $N > N_0(\varepsilon)$, $N_1 = N^{61/80+\varepsilon}$, $N_2 = N^{31/64-1/300+\varepsilon}$, $H \gg N^{1/4}$. *Тогда при любом* $N_2/2 \le X \le 2N_2$ *справедлива оценка:*

$$\sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1}\ \sum_{N-n^2-2N_2<k^2\le N-n^2-N_2}\ \sum_{X-H<N-n^2-k^2\le X+H} 1 \ll H\sqrt{\frac{N_1}{N}}.$$

Доказательство.

Запишем

$$n=\sqrt{N}-t_1,\quad t_1 \asymp \frac{N_1}{\sqrt{N}}; \tag{78}$$

$$k=\sqrt{N-n^2}-t_2,\quad t_2 \asymp \frac{N_2}{\sqrt{N_1}}.$$

Рассмотрим сумму n^2+k^2. Имеем

$$n^2+k^2 = N - 2t_1\sqrt{N} + t_1^2 + 2t_1\sqrt{N} - t_1^2 + 2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2} + t_2^2 =$$

$$= N + 2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2} + t_2^2.$$

Заметим, что $t_2^2 \asymp \frac{N_2^2}{N_1} \ll N^{1/4} \ll H$. Следовательно, справедлива оценка

$$\sum_{X-H<N-n^2-k^2\le X+H} 1 = \sum_{X-H<2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}+t_2^2\le X+H} 1 \ll$$

$$\ll \sum_{X-2H<2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}\le X+2H} 1.$$

Зафиксируем некоторое значение $N_2/2 \le X \le 2N_2$ и некоторую пару t_2 и t_1, удовлетворяющую (78) и такую, что

$$X - 2H < 2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2} \le X + 2H. \tag{79}$$

Если при данном X ни одной такой пары не существует, то утверждение леммы при этом X очевидно справедливо.

Пусть теперь дана любая другая пара t_2' и t_1', удовлетворяющая (78). Для оценки числа решений (79) достаточно оценить количество различных пар t_2' и t_1', при которых

$$-2H \le 2t_2'\sqrt{2t_1'\sqrt{N}-(t_1')^2} - 2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-(t_1)^2} \le 2H,$$

то есть

$$-H \le t_2'\sqrt{2t_1'\sqrt{N}-(t_1')^2} - t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-(t_1)^2} \le H.$$

Домножим все части неравенства на положительную величину

$$t_2'\sqrt{2t_1'\sqrt{N}-(t_1')^2} + t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-(t_1)^2}.$$

Заметим, что указанная величина при всех допустимых значениях t_2, t_1, t_2' и t_1' имеет порядок N_2 и не превосходит $4N_2$.

Тогда достаточно оценить сверху число решений

$$\left|(t_2')^2\left(2t_1'\sqrt{N}-(t_1')^2\right) - t_2^2\left(2t_1\sqrt{N}-t_1^2\right)\right| \le 4HN_2. \tag{80}$$

Справедливы оценки

$$(t_2't_1')^2 \ll \frac{N_1N_2^2}{N} < 2HN_2;$$

$$(t_2t_1)^2 \ll \frac{N_1N_2^2}{N} < 2HN_2.$$

Следовательно, число решений (80) не превосходит числа решений

$$\left|(t_2')^2t_1' - t_2^2t_1\right| \le \frac{3HN_2}{\sqrt{N}}. \qquad (81)$$

Зафиксируем t_2'. Тогда (81) может быть разрешено относительно t_1':

$$\left|t_1' - \left(\frac{t_2}{t_2'}\right)^2 t_1\right| \le \frac{3HN_2}{\sqrt{N}(t_2')^2}.$$

Вариантов выбора t_2' по порядку не более $\frac{N_2}{\sqrt{N_1}}$. При каждом из них число решений t_1' по порядку не превосходит $\frac{HN_1}{N_2\sqrt{N}}$.

Тогда, при любом выборе t_2 и t_1, существует по порядку не более $H\sqrt{\frac{N_1}{N_2}}$ различных пар t_2' и t_1', таких что выполнено (80).

Лемма доказана.

Лемма 33. *Пусть* $N > N_0(\varepsilon)$, $N_1 = N^{61/80+\varepsilon}$, $N_2 = N^{31/64-1/300+\varepsilon}$, $N_3 = N^{\frac{7}{12}\cdot\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon}$, $H \gg N^{1/8}$. *Тогда при любом* $N_3/2 \le X \le 2N_3$ *справедлива оценка:*

$$\sum_{n^2=N-2N_1+1}^{N-N_1}\ \sum_{k^2=N-n^2-2N_2}^{N-n^2-N_2}\ \sum_{l^2=N-n^2-k^2-2N_3}^{N-n^2-k^2-N_3}\ \sum_{X-H<N-n^2-k^2-l^2\le X+H} 1 \ll \frac{H\sqrt{N_1}\sqrt{N_2}}{\sqrt{N}}.$$

Доказательство.

Запишем

$$n = \sqrt{N} - t_1, \quad t_1 \asymp \frac{N_1}{\sqrt{N}};$$

$$k = \sqrt{N-n^2} - t_2, \quad t_2 \asymp \frac{N_2}{\sqrt{N_1}};$$

$$l = \sqrt{N-n^2-k^2} - t_3, \quad t_3 \asymp \frac{N_3}{\sqrt{N_2}}. \qquad (82)$$

Рассмотрим сумму $n^2+k^2+l^2$. Имеем

$$n^2+k^2+l^2 = N - 2t_3\sqrt{2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}+t_2^2}+t_3^2.$$

Заметим, что $t_3^2 \asymp \frac{N_3^2}{N_2} \ll N^{1/8} \ll H$. Следовательно, справедлива оценка

$$\sum_{X-H<N-n^2-k^2-l^2\le X+H} 1 \ll \sum_{X-2H<2t_3\sqrt{\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}+t_2^2}\le X+2H} 1.$$

При нашем выборе параметров

$$\left|\sqrt{\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}+t_2^2}-\sqrt{\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}}\right| \ll 1$$

и с учетом $t_3 < H$ имеем

$$\sum_{X-H<N-n^2-k^2-l^2\le X+H} 1 \ll \sum_{X-3H<2t_3\sqrt{2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}}\le X+3H} 1.$$

Зафиксируем некоторое значение $N_3/2 \le X \le 2N_3$ и некоторую тройку t_3, t_2 и t_1, удовлетворяющую условиям (78) и (82) такую, что

$$X-3H < 2t_3\sqrt{2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}} \le X+3H. \tag{83}$$

Если при данном X ни одной такой тройки не существует, то утверждение леммы при этом X очевидно справедливо.

Пусть теперь дана некоторая другая тройка t_3', t_2' и t_1', удовлетворяющая (78) и (82). Для оценки числа решений (83) достаточно оценить количество различных троек t_3', t_2' и t_1', при которых

$$-3H \le 2t_3'\sqrt{2t_2'\sqrt{2t_1'\sqrt{N}-(t_1')^2}}-2t_3\sqrt{2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}} \le 3H$$

или

$$-2H \le t_3'\sqrt{t_2'\sqrt{2t_1'\sqrt{N}-(t_1')^2}}-t_3\sqrt{t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}} \le 2H.$$

Домножим все части неравенства на положительную величину

$$t_3'\sqrt{t_2'\sqrt{2t_1'\sqrt{N}-(t_1')^2}}+t_3\sqrt{t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}}.$$

Заметим, что указанная величина при всех рассматриваемых значениях t_3, t_2, t_1, t_3', t_2' и t_1' имеет порядок N_3 и не превосходит $8N_3$.

Тогда достаточно оценить сверху число решений

$$\left|(t_3')^2t_2'\sqrt{2t_1'\sqrt{N}-(t_1')^2}-(t_3)^2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}\right|\le 8HN_3.$$

Теперь домножим все части полученного неравенства на положительную величину

$$(t_3')^2t_2'\sqrt{2t_1'\sqrt{N}-(t_1')^2}+(t_3)^2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N}-t_1^2}.$$

Указанная величина при всех допустимых значениях t_3, t_2, t_1, t_3', t_2' и t_1' имеет порядок N_3^2 и не превосходит $8N_3^2$.

Приходим к неравенству

$$\left|(t_3')^4(t_2')^2\left(2t_1'\sqrt{N}-(t_1')^2\right)-(t_3)^4(t_2)^2\left(2t_1\sqrt{N}-(t_1)^2\right)\right|\le 64HN_3^3. \tag{84}$$

Справедливы оценки

$$(t_3')^4(t_2't_1')^2\le\frac{256N_3^4}{N}<HN_3^3;$$

$$(t_3)^4(t_2t_1)^2\le\frac{256N_3^4}{N}<HN_3^3.$$

Следовательно, число решений (84) не превосходит числа решений

$$\left|(t_3')^4(t_2')^2t_1'-t_3^4t_2^2t_1\right|\le\frac{32HN_3^3}{\sqrt{N}}. \tag{85}$$

Зафиксируем t_3', t_2'. Тогда (85) может быть разрешено относительно t_1':

$$\left|t_1'-\frac{t_3^4t_2^2}{(t_3')^4(t_2')^2}t_1\right|\le\frac{32HN_3^3}{(t_3')^4(t_2')^2\sqrt{N}}.$$

Вариантов выбора t_3' по порядку не более $\frac{N_3}{\sqrt{N_2}}$, вариантов выбора t_2' по порядку не более $\frac{N_2}{\sqrt{N_1}}$. При каждом из них число решений t_1' по порядку не превосходит $\frac{HN_1}{N_3\sqrt{N}}$.

Тогда, при любом выборе t_3, t_2 и t_1, существует по порядку не более $\frac{H\sqrt{N_1}\sqrt{N_2}}{\sqrt{N}}$ различных троек t_3', t_2' и t_1' таких, что выполнено (84).

Лемма доказана.

Глава 2. О приближении действительных чисел суммами квадратов простых чисел

2.1 Доказательство теоремы 1

Теорема 1. *Если* $H > N^{\frac{31}{64}-\frac{1}{300}+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$.

Доказательство.

Без ограничения общности считаем, что $H \le \sqrt{N}/2$.

Рассмотрим сумму:

$$S = \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \sum_{\sqrt{N-p^2-H}<k\le\sqrt{N-p^2+H}} \Lambda(k),$$

где $N_1 = N^{61/80+\varepsilon_1}$.

При суммировании по k учитываются не только простые числа q, но и степени простых чисел q^r при натуральных $r > 1$. Оценим вклад указанных слагаемых в S.

Число слагаемых во внешней сумме не превосходит по порядку величины $\frac{N_1}{\sqrt{N}}$. Количество значений k во внутренней сумме, которые представимы в виде q^r, не превосходит:

$$\sum_{r=2}^{2\ln N} \sum_{\sqrt{N-p^2-H}<q^r\le\sqrt{N-p^2+H}} 1 \ll \frac{H\ln N}{N_1^{3/4}}.$$

Окончательно, вклад в S степеней простых чисел q^r, при $r > 1$ может быть оценен как

$$\ll \frac{HN_1^{1/4}\ln^2 N}{\sqrt{N}}. \tag{86}$$

Далее имеем $N - p^2 \asymp N_1$.

Воспользуемся для внутренней суммы явной формулой (леммой 1):

$$S = \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \left(\sqrt{N-p^2+H} - \sqrt{N-p^2-H}\right) -$$

$$- \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \left(\sum_{|\gamma|\le T} \int_{\sqrt{N-p^2-H}}^{\sqrt{N-p^2+H}} x^{\rho-1}dx + O\left(\frac{\sqrt{N_1}\ln^2 N}{T} \right) \right).$$

Параметр T выбираем с таким расчетом, чтобы остаток явной формулы был меньше по порядку, чем

$$\sqrt{N-p^2+H} - \sqrt{N-p^2-H}.$$

Имеем

$$T = \frac{N_1 \ln^3 N}{H}. \tag{87}$$

Рассмотрим предполагаемый главный член:

$$\sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \left(\sqrt{N-p^2+H} - \sqrt{N-p^2-H} \right).$$

Согласно лемме 6 при

$$N_1 \gg N^{61/80+\varepsilon_1}$$

для соответствующим образом подобранного ε_1 отрезок

$$\left[\sqrt{N-2N_1}; \sqrt{N-N_1} \right]$$

содержит простые числа, причем их количество может быть оценено снизу

$$\gg \frac{N_1}{\sqrt{N}\ln N}.$$

Вклад каждого слагаемого по порядку равен $\frac{H}{\sqrt{N_1}}$. Таким образом, предполагаемый главный член имеет порядок

$$\gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln N}. \tag{88}$$

Отметим, что вклад (86) по порядку меньше (88).

Далее займемся оценкой остатка:

$$W = \sum_{N-2N_1<p^2\le N-N_1} \left| \sum_{|\gamma|\le T} \int_{\sqrt{N-p^2-H}}^{\sqrt{N-p^2+H}} x^{\rho-1}dx \right|.$$

Сделаем внешнее суммирование сплошным:

$$W \ll \sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1} \left| \sum_{|\gamma|\le T} \int_{\sqrt{N-n^2-H}}^{\sqrt{N-n^2+H}} x^{\rho-1}dx \right|.$$

Разобьем сумму по нулям дзета-функции Римана в определении W на две: в первую попадают нули $\rho=\beta+i\gamma$, $1>\beta\ge\frac{45869}{48270}=0.95025...$, а во вторую — $\rho=\beta+i\gamma$, $\frac{45869}{48270}>\beta\ge\frac{1}{2}$.

Используя лемму 18 при $\sigma_0=\frac{45869}{48270}$, получим оценку

$$W_1 = \sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1} \left| \sum_{\substack{\beta\ge\frac{45869}{48270}\\ |\gamma|\le T}} \int_{\sqrt{N-n^2-H}}^{\sqrt{N-n^2+H}} x^{\rho-1}dx \right| \ll$$

$$\ll \frac{H\sqrt{N_1}\ln N}{\sqrt{N}} \max_{\sigma\in\left[\frac{45869}{48270};1\right]} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} N(\sigma,T).$$

Оценим

$$\max_{\sigma\in\left[\frac{45869}{48270};1\right]} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} N(\sigma,T).$$

При

$$1-\delta(T)<\sigma\le 1, \quad \delta(T)=\frac{c_2}{\ln^{2/3}|T|(\ln\ln|T|)^{1/3}},$$

где c_2 — константа из леммы 3, получим $N(\sigma,T)=0$.

На промежутке $\left[1-10^{-8};1-\delta(T)\right)$ будем использовать плотностную теорему (63).

Так как при $H>N^{\frac{31}{64}-\frac{1}{300}+\varepsilon}$ имеем

$$N_1>N^{0.75}>T$$

и

$$\ln^{-3}N\asymp\ln^{-3}T,$$

достаточно показать

$$\frac{\sigma-1}{2}+1600(1-\sigma)^{3/2}+\frac{76\ln\ln N}{3\ln N}<0.$$

Последнее следует из того, что при достаточно большом N справедливо

$$\frac{1-\sigma}{2}\ge\frac{1}{\ln^{2/3}T(\ln\ln T)^{1/3}}\ge\frac{1}{\ln^{2/3}N(\ln\ln N)^{1/3}}>\frac{152\ln\ln N}{3\ln N}$$

и того, что при $\sigma \geq 1 - 10^{-8}$ выполнено неравенство

$$\frac{1-\sigma}{2} > 3200(1-\sigma)^{3/2}.$$

На промежутке $\left[\frac{45869}{48270}; 1 - 10^{-8}\right)$ воспользуемся оценкой (65), лемма 20.

Заметим, что при $H > N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon}$ с учетом выбора параметра T справедлива оценка

$$T \ll N_1^{1351/3660 - \varepsilon}.$$

Далее при $\sigma \geq \frac{45869}{48270}$ имеем

$$N_1^{\frac{\sigma-1}{2} + \frac{1830}{1351}(1-\sigma)\left(\frac{1351}{3660} - \varepsilon\right)} \ll N_1^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

откуда для достаточно большого N (соответственно, N_1 и T) окончательно получаем

$$\max_{\sigma \in \left[\frac{45869}{48270}; 1\right]} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} N(\sigma, T) \ll \ln^{-3} N.$$

При нашем выборе параметров N_1 и H справедливо

$$N - (n+1)^2 + H < N - n^2 - H.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, применяя неравенство Коши, имеем

$$W_2^2 = \left(\sum_{N - 2N_1 < n^2 \leq N - N_1} \left| \sum_{\substack{\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{45869}{48270} \\ |\gamma| \leq T}} \int_{\sqrt{N - n^2 - H}}^{\sqrt{N - n^2 + H}} x^{\rho - 1} dx \right| \right)^2 \ll$$

$$\ll \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}} \int_{\sqrt{N_1}/2}^{2\sqrt{N_1}} \left| \sum_{|\gamma| \leq T} x^{\rho - 1} \right|^2 dx.$$

Используя леммы 2 и 20 для W_2 получим:

$$W_2 \ll \frac{H\sqrt{N_1} \ln^2 N}{\sqrt{N}} \max_{\sigma \in \left[\frac{1}{2}; \frac{45869}{48270}\right)} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}} \sqrt{\frac{N(\sigma, T)\sqrt{N}}{H}}. \tag{89}$$

Далее оценим

$$\max_{\sigma \in \left[\frac{1}{2}; \frac{45869}{48270}\right)} \frac{N_1^{\sigma - 1} N(\sigma, T)\sqrt{N}}{H}.$$

При нашем выборе H справедливо

$$\frac{\sqrt{N}}{H} \ll N_1^{\frac{91}{3660}-\varepsilon}.$$

На промежутке $\left[\frac{15958}{16825}; \frac{45869}{48270}\right)$ воспользуемся оценкой (66) при $k = 5$. Имеем

$$\frac{N_1^{\sigma-1}N(\sigma,T)\sqrt{N}}{H} \ll N_1^{(\sigma-1)+\frac{9457(\kappa+\lambda-5\sigma+4)}{43920}+\frac{91}{3660}-\varepsilon}.$$

Разобьем $\left[\frac{15958}{16825}; \frac{45869}{48270}\right)$ на промежутки J_i, $i = 1,2,3$, выбирая на каждом из них экспоненциальную пару (κ_i, λ_i) так, чтобы были выполнены условия

$$g_i(\sigma) = \kappa_i + \lambda_i - \frac{1195}{1351} + \frac{3365}{9457}(1-\sigma) < 0$$

и

$$r_i = \frac{|\kappa_i - \lambda_i| + 4}{5} \geq \sigma$$

для всех $\sigma \in J_i$.

На промежутке $J_1 = \left[\frac{31971}{33650}; \frac{45869}{48270}\right)$ для экспоненциальной пары $(\kappa_1, \lambda_1) = \left(\frac{1039}{18002}, \frac{21847}{27003}\right)$ имеем

$$\frac{45869}{48270} < r_1 = \frac{256601}{270030} = 0.95026...,$$

$$g_1\left(\frac{31971}{33650}\right) = -0.000001...$$

На промежутке $J_2 = \left[\frac{31949}{33650}; \frac{31971}{33650}\right)$ для экспоненциальной пары $(\kappa_2, \lambda_2) = \left(\frac{3113}{53686}, \frac{21704}{26843}\right)$ имеем

$$\frac{31971}{33650} < r_2 = \frac{255039}{268430} = 0.9501...,$$

$$g_2\left(\frac{31949}{33650}\right) = -0.00001...$$

Наконец, на промежутке $J_3 = \left[\frac{15958}{16825}; \frac{31971}{33650}\right)$ для экспоненциальной пары $(\kappa_3, \lambda_3) = \left(\frac{11}{186}, \frac{25}{31}\right)$ имеем

$$\frac{31949}{33650} < r_3 = \frac{883}{930} = 0.9494...,$$

$$g_3\left(\frac{15958}{16825}\right) = -0.002...$$

На промежутке $\left[\frac{17}{18}; \frac{15958}{16825}\right)$ достаточно воспользоваться плотностной теоремой (36).

На промежутке $\left[\frac{9}{10}; \frac{17}{18}\right)$ воспользуемся (37). Тогда имеем

$$N_1^{(\sigma-1)+\frac{2702(1-\sigma)}{305(30\sigma-11)}+\frac{91}{3660}-\varepsilon} \ll N^{-\varepsilon/2},$$

так как функция $(\sigma-1)\left(1-\frac{2702}{305(30\sigma-11)}\right)$ монотонно возрастает и при $\sigma=\frac{17}{18}$ имеем

$$-\frac{1}{18}\left(1-\frac{4053}{7930}\right)+\frac{91}{3660}=-0.002...$$

На промежутке $\left[\frac{39}{50}; \frac{9}{10}\right)$ воспользуемся (38). Получаем

$$N_1^{(\sigma-1)+\frac{4053(1-\sigma)}{1220(7\sigma-1)}+\frac{91}{3660}-\varepsilon} \ll N^{-\varepsilon/2},$$

так как функция $(\sigma-1)\left(1-\frac{4053}{1220(7\sigma-1)}\right)$ монотонно возрастает и при $\sigma=\frac{9}{10}$ имеем

$$-\frac{1}{10}\left(1-\frac{4053}{6466}\right)+\frac{91}{3660}=-0.037...$$

Наконец, на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \frac{39}{50}\right)$ воспользуемся плотностной теоремой Хаксли (1). Получим

$$N_1^{-\frac{174}{1525}(1-\sigma)+\frac{91}{3660}-\varepsilon} \ll N^{\varepsilon/2}$$

при $\sigma \le \frac{1633}{2088}=0.782.$

Теорема 1 доказана.

2.2 Доказательство теорем 2 и 3

Теорема 2. *Если* $H > N^{\frac{7}{12}\cdot\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon} = N^{0.2806+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2+p_2^2+p_3^2-N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 *и* p_3 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$.

Доказательство.

Рассмотрим

$$S = \sum_{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1} \sum_{N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2} \sum_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}<n\le\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} \Lambda(n),$$

где $N_2 = N^{\frac{31}{64}-\frac{1}{300}+\varepsilon}$, $N_1 = N^{\frac{61}{80}+\varepsilon}$ и в качестве ε выбрано наибольшее из значений, которые получены из теоремы 1 и леммы 6.

Как и при доказательстве теоремы 1, рассмотрим вклад в S слагаемых, соответствующих степеням $r > 1$ простых чисел. Для него справедлива оценка

$$\ll \frac{HN_2^{1/4}\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}}. \tag{90}$$

Воспользуемся для внутренней суммы леммой 1. Имеем

$$S = \sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2}} \sum_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}<n\le\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} \Lambda(n) =$$

$$= \sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2}} \left(\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H} - \sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}\right) -$$

$$- \sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2}} \left(\sum_{|\gamma|\le T_1} \int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} x^{\rho-1}dx + O\left(\frac{\sqrt{N_1}\ln^2 N}{T_1}\right)\right).$$

T_1 выбираем так, чтобы остаток был меньше предполагаемого главного члена.

Получаем условие:

$$T_1 = \frac{N_2\ln^3 N}{H}. \tag{91}$$

Согласно теореме 1, при $N_2 \gg N^{31/64-1/300+\varepsilon}$ (в данном случае N_2 выполняет роль переменной H в теореме) справедлива оценка:

$$\sum_{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1} \sum_{N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2} 1 \gg \frac{N_2\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^2 N}.$$

Таким образом, предполагаемый главный член в S будет иметь вид:

$$\gg \frac{N_2\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^2 N}\frac{H}{\sqrt{N_2}} = \frac{H\sqrt{N_2}\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^2 N}. \tag{92}$$

Отметим, что оценка (90) по порядку меньше (92).

Далее займемся оценкой остатка:

$$R = \sum_{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1}\ \sum_{N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2}\left(\sum_{|\gamma|\le T_1}\int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} x^{\rho-1}dx\right)\ll$$

$$\ll \sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1}\ \sum_{N-n^2-2N_2<k^2\le N-n^2-N_2}\int_{\sqrt{N-n^2-k^2-H}}^{\sqrt{N-n^2-k^2+H}}\left|\sum_{|\gamma|\le T_1} x^{\rho-1}\right|dx.$$

Разобьем промежуток $[N_2/2; 2N_2)$ на непересекающиеся интервалы длины $2H$ (за исключением, быть может, последнего). Согласно лемме 32 в каждый такой интервал при различных парах (n,k) попадает по порядку величины не более $H\sqrt{\frac{N_1}{N}}$ значений $N-n^2-k^2$.

Просуммируем по n и k внутренние интегралы, используя данную оценку. Получим

$$R\ll \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}}\int_{\sqrt{N_2}/2}^{2\sqrt{N_2}}\left|\sum_{|\gamma|\le T_1} x^{\rho-1}\right|dx.$$

Теперь достаточно показать, что

$$\int_{\sqrt{N_2}/2}^{2\sqrt{N_2}}\left|\sum_{|\gamma|\le T_1} x^{\rho-1}dx\right|\ll \sqrt{N_2}\ln^{-4}N.$$

Используя лемму 16 при $\alpha=\frac{1}{2}$, получим:

$$\int_{\sqrt{N_2}/2}^{2\sqrt{N_2}}\left|\sum_{|\gamma|\le T_1} x^{\rho-1}dx\right|\ll N_2^{\frac{\sigma}{2}}\sqrt{N(\sigma,T)}\ln N.$$

Покажем, что:

$$\max_{\sigma\in\left[\frac{1}{2};1\right]} N_1^{\frac{\sigma-1}{2}}\sqrt{N(\sigma,T)}\ll \ln^{-5}N. \tag{93}$$

При

$$1-\delta(T)<\sigma\le 1,\quad \delta(T)=\frac{c_2}{\ln^{2/3}|T|(\ln\ln|T|)^{1/3}},$$

где c_2 – константа из леммы 3, получим $N(\sigma,T)=0$.

На промежутке $\left[1-10^{-8}; 1-\delta(T)\right)$ достаточно использовать оценку (63).

При $\sigma \in \left[\frac{1}{2}; 1 - 10^{-8}\right)$ воспользуемся плотностной теоремой (1).

Тогда получаем, предварительно возводя обе части неравенства (93) в квадрат,

$$N_1^{\sigma-1} T^{2\lambda(1-\sigma)} \ll \ln^{-c_1-10} N,$$

откуда имеем

$$N_1^{\sigma-1} \left(\frac{N_1}{H}\right)^{2\lambda(1-\sigma)} \ll \ln^{-c_1-10} N,$$

$$N_1^{(2\lambda-1)(1-\sigma)} \ln^{c_1+10} N \ll H^{2\lambda(1-\sigma)}.$$

Включая множитель $\ln^{c_1+10} N$ в N^{ε}, получим

$$H > N_1^{\frac{7}{12}} > N^{\frac{7}{12}\cdot\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon} = N^{\frac{16163}{57600}+\varepsilon} = N^{0.2806\ldots+\varepsilon}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если* $H > N^{\frac{49}{144}\cdot\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon} = N^{0.1636\ldots+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \leq H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 *и* p_4 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$.

Доказательство.

Схема доказательства теоремы 3 аналогична схеме доказательства Теоремы 2.

Рассмотрим

$$S = \sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\leq N-N_1 \\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\leq N-p_1^2-N_2 \\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\leq N-p_1^2-p_2^2-N_3}} \quad \sum_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2-H}<n\leq\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2+H}} \Lambda(n),$$

где $N_1 = N^{\frac{61}{80}+\varepsilon}$, $N_2 = N^{\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon}$, $N_3 = N^{\frac{7}{12}\cdot\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon}$, λ – константа из плотностной теоремы Хаксли, а в качестве ε выбрано наибольшее из значений, которые получены из теорем 1, 2 и леммы 6.

Вклад в S слагаемых, соответствующих степеням $r > 1$ простых чисел, может быть оценен как

$$\ll \frac{HN_3^{1/4}\sqrt{N_1}\sqrt{N_2}\ln N}{\sqrt{N}}. \tag{94}$$

Воспользуемся для внутренней суммы леммой 1:

$$S = \sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2\\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\le N-p_1^2-p_2^2-N_3}} \sum_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}<n\le\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} \Lambda(n) =$$

$$= \sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2\\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\le N-p_1^2-p_2^2-N_3}} \left(\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2+H}-\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2-H}\right)-$$

$$- \sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2\\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\le N-p_1^2-p_2^2-N_3}} \left(\sum_{|\gamma|\le T_1}\int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2+H}} x^{\rho-1}dx + O\left(\frac{\sqrt{N_3}\ln^2 N}{T_2}\right)\right).$$

T_2 выбираем так, чтобы остаток был меньше предполагаемого главного члена.

Получаем условие:

$$T_2 = \frac{N_3\ln^3 N}{H}. \tag{95}$$

Согласно доказательству теоремы 2, при $N_3 \gg N^{\frac{7}{12}\cdot\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon}$ (в данном случае N_3 выполняет роль переменной H в теореме) справедлива оценка:

$$\sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2\\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\le N-p_1^2-p_2^2-N_3}} 1 \gg \frac{N_3\sqrt{N_2}\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^3 N}.$$

Таким образом, предполагаемый главный член в S будет иметь вид:

$$\gg \frac{N_3\sqrt{N_2}\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^3 N}\frac{H}{\sqrt{N_3}} = \frac{H\sqrt{N_1}\sqrt{N_2}\sqrt{N_3}}{\sqrt{N}\ln^3 N}. \tag{96}$$

Отметим, что оценка (94) по порядку меньше (96).

Далее займемся оценкой остатка:

$$R = \sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2\\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\le N-p_1^2-p_2^2-N_3}} \sum_{|\gamma|\le T_2}\int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2+H}} x^{\rho-1}dx \ll$$

$$\ll \sum_{\substack{N-2N_1<n^2\le N-N_1\\ N-n^2-2N_2<k^2\le N-n^2-N_2\\ N-n^2-k^2-2N_3<l^2\le N-n^2-k^2-N_3}} \int_{\sqrt{N-n^2-k^2-l^2-H}}^{\sqrt{N-n^2-k^2-l^2+H}} \left|\sum_{|\gamma|\le T_2} x^{\rho-1}\right| dx.$$

Разобьем промежуток $[N_3/2; 2N_3)$ на непересекающиеся интервалы длины $2H$ (за исключением, быть может, последнего). Согласно лемме 33 при нашем выборе параметров в каждый такой интервал при различных тройках (n,k,l) попадает по порядку величины не более $\frac{H\sqrt{N_1}\sqrt{N_2}}{\sqrt{N}}$ значений $N-n^2-k^2-l^2$.

Просуммируем по n, k и l внутренние интегралы, используя данную оценку. Получим

$$R \ll \frac{H\sqrt{N_1}\sqrt{N_2}}{\sqrt{N}} \int_{\sqrt{N_3}/2}^{2\sqrt{N_3}} \left|\sum_{|\gamma|\le T_2} x^{\rho-1}\right| dx.$$

Достаточно показать

$$\max_{\sigma\in\left[\frac{1}{2};1\right]} N_3^{\frac{\sigma-1}{2}} \sqrt{N(\sigma,T)} \ll \ln^{-4} N.$$

При

$$1-\delta(T)<\sigma\le 1, \quad \delta(T)=\frac{c_2}{\ln^{2/3}|T|(\ln\ln|T|)^{1/3}},$$

где c_2 — константа из леммы 3, получим $N(\sigma,T)=0$.

На промежутке $\left[1-10^{-8}; 1-\delta(T)\right)$ достаточно использовать оценку (63). Воспользовавшись плотностной теоремой Хаксли (1) при $\sigma\in\left[\frac{1}{2}; 1-10^{-8}\right)$, окончательно получаем:

$$H > N_3^{\frac{7}{12}} > N^{\frac{49}{144}\cdot\left(\frac{31}{64}-\frac{1}{300}\right)+\varepsilon} = N^{\frac{113141}{691200}+\varepsilon} = N^{0.1636\ldots+\varepsilon}.$$

Теорема 3 доказана.

Заключение

В диссертации исследована разрешимость некоторых диофантовых неравенств в простых числах. Доказано, что

- нелинейное диофантово неравенство $|p_1^2 + p_2^2 - N| \leq H$ разрешимо в простых числах p_1, p_2 при $H = N^{\frac{31}{64} - \frac{1}{300} + \varepsilon} = N^{0.481\ldots + \varepsilon}$ для любого $N > N_0(\varepsilon)$;

- нелинейное диофантово неравенство $|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \leq H$ разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 при $H = N^{\frac{7}{12} \cdot \left(\frac{31}{64} - \frac{1}{300}\right) + \varepsilon} = N^{0.2806\ldots + \varepsilon}$ для любого $N > N_0(\varepsilon)$;

- нелинейное диофантово неравенство $|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \leq H$ разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3, p_4 при $H = N^{\frac{49}{144} \cdot \left(\frac{31}{64} - \frac{1}{300}\right) + \varepsilon} = N^{0.1636\ldots + \varepsilon}$ для любого $N > N_0(\varepsilon)$.

Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в области аналитической теории чисел.

Список литературы

[1] M.N. Huxley. On the difference between consequtive primes. Invent. Math. 1972. 15:1. 164–170.

[2] L. Guth, J. Maynard. New large value estimates for Dirichlet polynomials. https://arxiv.org/abs/2405.20552.

[3] Гриценко С.А. Уточнение одной константы в плотностной теореме. Матемематические заметки. 1994. Том 55, вып. 2. С. 59–61.

[4] Риман Б. О числе простых чисел, не превышающих данной величины. Сочинения. М.: ОГИЗ, 1946. С. 216–224.

[5] Линник Ю.В. О возможности единого метода в некоторых вопросах аддитивной и дистрибутивной теории чисел. ДАН. 1945. Том 49, вып. 1. С. 3–7.

[6] Линник Ю.В. Об одной теореме теории простых чисел. ДАН. 1945. Том 47, вып. 1. С. 7–9.

[7] Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана.. М.: Физматлит, 1994.

[8] Гирько В.В., Гриценко С.А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами. Чебышевский сборник. – 7:4. – С.26-30.

[9] Гриценко С.А., Нгуен Тхи Ча, О диофантовых неравенствах с простыми числами. Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика, 2012. 23(142). Вып. 29.

[10] L.K. Hua. Some results in the additive prime-number theory. Quart. J. Math. Oxford. Vol. 9. 1938. pp. 68–80.

[11] G. Harman, A.V. Kumchev. On sums of squares of primes. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. Vol. 140. 2006. pp. 1 – 13.

[12] G. Harman, A.V. Kumchev. On sums of squares of primes II. J. Number Theory. Vol. 130. 2010. pp. 1969 – 2002.

[13] A. Kumchev, L. Zhao. On sums of four squares of primes. Mathematika. Vol. 62:2. 2016. pp. 348 – 361.

[14] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.

[15] H.E. Richert. Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neighbourhood of the line σ =1. Math. Ann., vol. 169, 1967. P. 97–101.

[16] G.I. Arkhipov, K. Buriev. Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neighbourhood of the line Re s =1. Integral Transform. Spec. Funct. 1:1, 1993. P. 1–7

[17] R.C. Baker, G.Harman, J.Pintz. The difference between consecutive primes, II. Proceeding of the London Mathematical Society. 2001. 83:3. 532-562

[18] Huxley M.N. Exponential sums and the Riemann zeta function V//Proc. London Math. Soc. 2005. Vol. 90. P. 1–41.

[19] A. Ivic. The Riemann zeta-function, New York, John Wiley and Sons, 1985.

[20] H.L. Montgomery. Topics in multiplicative number theory, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[21] A. Ivic. A note on the zero-density estimates for the zeta function. Arch. der Math. 1979. Vol. 33. P. 155–164.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[22] А.П. Науменко, О приближении действительных чисел суммами квадратов простых чисел// Чебышевский сборник. – 2018. – Т. 19, вып. 2. – С. 172–182.

[23] А.П. Науменко, О некоторых нелинейных диофантовых неравенствах с простыми числами// Математические заметки. – 2019. – Т. 105, вып. 6. – С. 943–948.

A.P. Naumenko, On Some Nonlinear Diophantine Inequalities with Primes// Mathematical Notes. – 2019. – vol 105, no 5-6. – pp. 935–940.

[24] А.П. Науменко, О приближении действительных чисел суммами двух квадратов простых чисел// Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2019. – Вып. 5. – С. 51–55.

A.P. Naumenko, Approaching real numbers by sums of squares of two primes// Moscow University Mathematics Bulletin. – 2019. – vol 74, no 5. – pp. 205—208.