

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Клементьев Петр Дмитриевич

**Двухуровневый анализ некоторых типов композитов и
метаматериалов**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2026

Диссертация подготовлена на кафедре теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители: **Шешенин Сергей Владимирович**,
доктор физико-математических наук, профессор
Артамонова Нина Брониславовна,
кандидат физико-математических наук,
кандидат геолого-минералогических наук

Официальные оппоненты: **Лисовенко Дмитрий Сергеевич**,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН,
Институт проблем механики имени
А.Ю. Ишлинского РАН, лаборатория механики
новых материалов и технологий,
заведующий лабораторией
Трусов Петр Валентинович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, факультет
прикладной математики и механики, кафедра
математического моделирования систем и
процессов, заведующий кафедрой
Волков-Богородский Дмитрий Борисович,
кандидат физико-математических наук,
Институт прикладной механики РАН, отдел
механики структурированной и гетерогенной
среды, ведущий научный сотрудник

Защита состоится 23 июня 2026 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.6 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

Email: fleonid1975@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3913>

Автореферат разослан «30» апреля 2026 года. Повторно разослан «___» мая 2026 г. в связи с заменой официального оппонента.

Ученый секретарь

Диссертационного совета МГУ.011.6,
кандидат физико-математических наук

Л.В. Фомин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Современное машиностроение, аэрокосмическая отрасль, биомедицина и другие передовые технологические отрасли предъявляют всё более высокие требования к конструкционным и функциональным материалам. В этой связи дисперсно-упрочненные композиты и пористые материалы, а также материалы с искусственно созданной периодической структурой (метаматериалы) активно исследуются и применяются, поскольку использование данных материалов позволяет создать изделия с наиболее эффективными и уникальными свойствами. Поэтому исследование типов подобных материалов является актуальным.

Применение композитных, пористых и метаматериалов невозможно без исследования и прогнозирования механических свойств на макроуровне (уровне всего образца или детали). Представляется актуальным использование численных методов, применяемых на мезоуровне, для исследования свойств рассматриваемых материалов в дополнение к экспериментам в связи с экономической и ресурсной эффективностью, поскольку осредненные свойства композитных, пористых материалов и метаматериалов могут быть вычислены при помощи численного моделирования на мезоуровне.

Следовательно, актуальной задачей является вычисление эффективных свойств композитных, пористых материалов и метаматериалов, используя численные методы и производительность современных компьютеров. Для этого в работе используются трехмерные модели композитного материала, построенные по рентгеновским изображениям. Этот подход позволяет добиться лучшего совпадения вычисленных и экспериментально полученных эффективных свойств на макроуровне.

Актуальность численного исследования упругопластических свойств дисперсных композитов и пористых материалов обусловлена ограниченной применимостью аналитических возможностей осреднения в пластической области. Идентификация параметров макромоделей на основе вычислений на

мезоуровне позволяет осуществлять прогнозирование свойств дисперсных композитов и пористых материалов на макроуровне и сократить объем экспериментов, что является актуальной задачей.

При современном развитии компьютеров и вычислительных методов создание виртуальных прототипов (цифровых двойников) является актуальным и развивающимся направлением. В частности, это касается вычисления диаграмм напряжений-деформаций композитных и пористых материалов. Представляется, что создание вычислительных прототипов является актуальным для априорного анализа создаваемых перспективных материалов. Вычислительный подход на мезоуровне актуален для имеющихся композиционных и пористых материалов, поскольку не все свойства легко измерить в эксперименте. Например, затруднительно экспериментальное определение коэффициента передачи порового давления (коэффициента Био).

При деформировании дисперсных композитов происходят локальные разрушения (разрушения на мезоуровне). Поэтому развитие методов учета такого разрушения вполне актуально. Это также относится к численному методу, реализуемому в рамках метода конечных элементов (МКЭ) и получившему название прогрессирующего разрушения. В работе дано развитие этого подхода, что позволило приблизить расчетную диаграмму напряжение-деформация к экспериментальной.

Теоретическое и численное исследования периодических структур типа метаматериалов вызывают интерес у многих авторов. Исследование с помощью асимптотического подхода позволяет дать ответ, являются ли метаматериалы истинными материалами или конструкциями. Эти объекты обнаруживают новые свойства, например в виде связанности растяжения и сжатия с кручением.

Асимптотическое и численное исследования зависимости эффективных свойств метаматериалов от структуры и числа ячеек периодичности представляются актуальными, поскольку позволяют заменить экспериментальные исследования на макроуровне свойств связности растяжения

и изгиба или растяжения и закручивания, наблюдаемые в метаматериалах, численным моделированием на мезоуровне.

Степень разработанности темы исследований

В настоящее время для вычисления эффективных свойств композитов разработаны и обоснованы различные методы, восходящие как к классическому определению эффективных модулей упругости, рассмотренного, например, в работах Хилла Р., Хашина З., Победри Б.Е., так и к классическому асимптотическому методу осреднения для периодических структур (Бахвалов Н.С., Sanchez-Palencia E., Победря Б.Е. и др.). Существуют различные модификации метода осреднения, например для случая непериодических сред. Вопросам численного применения метода асимптотического осреднения посвящены работы Бахвалова Н.С., Панасенко Г.П., Власова А.Н., Волкова-Богородского Д.Б., Шешенина С.В., Горбачева В.И., Димитриенко Ю.И., Kohn R.V., Vogelius M., Lewiński T., Telega J. и многих других.

Применение многоуровневых методов для исследования свойств дисперсных композитов и пористых материалов рассматривалось в работах Трусова П.В. и его учеников, Власова А.Н., Волкова-Богородского Д.Б., Ташкинова М.А., Левина В.А., Вершинина А.В., Яковлева М.Я., Зингермана К.М., Лохина В.В., Савенковой М.И., Шешенина С.В. и Артамоновой Н.Б. и других.

С пористыми материалами частично связано направление исследований, посвященное изучению упруго-пластического поведения материалов со свойствами, зависящими от первого инварианта напряжений и пути деформирования. В данной области следует отметить работы, посвященные построению определяющих соотношений и идентификации параметров, Быкова Д.Л., Агахи К.А., Кузнецова В.Н., Ломакина Е.В., Зарецкого Ю.К., Becker R., González C. и других авторов.

Теории возникновения и развития поврежденности в твердых деформируемых телах были предложены в работах Работнова Ю.Н., Ильюшина А.А., Качанова Л.М. Алгоритмы прогрессирующего разрушения в различных материалах, в том числе в дисперсных композитах, рассматривались в исследованиях Балохонова Р.Р., Ташкинова М.А., Шалимова А.С., Vařant Zdeněk

P., Needleman A., Tvergaard V. и других. Метод прогрессирующего разрушения является альтернативой к подходу моделирования разрушения, основанному на описании распространения трещин, который развивался, например, в работах Звягина А.В., Смирнова Н.Н., Киселева А.Б., Ли Кайжуй, Удалова А.С., Шаминой А.А.

Моментные теории получили новое развитие и были использованы для описания неклассических свойств материалов в работах Васильева В.В. и Лурье С.А., Никабадзе М.У., Соляева Ю.О. и многих других исследователей. Свойства метаматериалов, например ауксетиков или материалов с хиральной структурой, исследованы во многих работах, например Лисовенко Д.С., Chen Xuan, Fu Ming-Nui и других авторов.

Цель данной работы – применить вычислительные эксперименты на мезоуровне для определения свойств дисперсных композитов, пористых материалов и метаматериалов на макроуровне.

Для достижения поставленной цели работы решены следующие **задачи**:

1. Разработка и практическая апробация методов двухуровневого анализа для вычисления эффективных упругих и упруго-пластических свойств дисперсных композитов и пористых материалов с учетом деградации свойств. Верификация путем сравнения с экспериментом эффективных упругих свойств дисперсного композитного материала и эффективных диаграмм напряжение-деформация. Сравнение диаграмм, полученных на модельных структурах дисперсного композита и полученных с помощью рентгеновской томографии.
2. Модификация определения осредненных свойств пористых материалов. Вычисление на его основе эффективных диаграмм напряжение-деформация и исследование их зависимости от пути деформирования. Идентификация параметров макромодели по результатам расчетов на мезоуровне (уровне структуры пористой среды). Определение зависимости определяющего соотношения макромодели от первого инварианта напряжений.
3. Сравнительный анализ алгоритмов прогрессирующего разрушения и их верификация на реальных и модельных микроструктурах.

4. Разработка на основе асимптотического метода осреднения во втором приближении методики исследования связанностей типов деформаций растяжение/изгиб, растяжение/кручение для метаматериалов. Ее реализация для различных пространственных ячеек периодичности. Анализ зависимости коэффициентов связанности от количества ячеек периодичности в случае декартовой и цилиндрической топологии ячеек.
5. Применение мезоуровневого анализа для резинокордного композита. Численное определение размеров зон краевого эффекта и обоснование возможности использования коротких образцов для испытаний.

Научная новизна

1. Показано, что для определенных средних по представительной области напряжений и деформаций пористой среды не выполняется равенство энергий Хилла. Для определения эффективных модулей пористой среды используется определение через граничные значения при задании перемещений в виде линейных функций. Для этого определения выполняется равенство энергий деформаций Хилла осредненной и исходной пористой сред.
2. Новизна состоит в том, что, как показано расчетами на мезоуровне, пористые материалы с угловатыми пораами и матрицей, подчиняющейся классической теории течения с условием Мизеса (в отличие от пористых материалов с гладкими пораами), проявляют существенную зависимость осредненной диаграммы напряжение-деформация от пути деформирования, сочетающего объемное сжатие и сдвиг. Новизна также заключается в различной зависимости осредненной диаграммы от первого инварианта для различных путей нагружения.
3. Новым является вывод о существенном значении учета возникновения поврежденности и использования реальной структуры дисперсного композитного материала с алюминиевой матрицей и керамическими включениями для приближения осредненной диаграммы напряжение-деформация к экспериментальной.
4. Прямым следствием метода осреднения во втором приближении является то, что введенные в работе моментные напряжения зависят от малого параметра,

который обратно пропорционален количеству ячеек периодичности, составляющих периодическую структуру метаматериала в декартовой системе координат. Для метаматериалов с периодичностью структуры в цилиндрической системе координат величина связанности силы и момента постоянна. Этот результат подтвержден численными расчетами.

5. Научная новизна заключается в численном уточнении размеров зон краевого эффекта в двухслойных резинокордных образцах для различных кордных углов и в практическом оформлении процедуры для короткого лабораторного образца.

Теоретическая и практическая значимость работы

Разработанные вычислительные методики позволяют вычислять механические характеристики проектируемых композитов, сокращая затраты на экспериментальные исследования. Полученные данные о концентрациях напряжений и повреждениях композита В₄С/2024А1 могут быть использованы при проектировании конструкций, в состав которых входят дисперсные композиты. Установленная возможность использования коротких образцов резинокорда позволяет их применять для лабораторных испытаний. Теоретически полученная обратно пропорциональная зависимость связанностей растяжение/изгиб, растяжение/кручение от числа ячеек периодичности в метаматериалах с периодической в декартовой системе координат структурой заменяет численные и натурные эксперименты. Практически полезной альтернативой могут быть предложенные в работе метаматериалы со структурой с цилиндрической периодичностью.

Методология и методы исследования

Для вычисления эффективных упругих модулей и диаграмм напряжение-деформация использовался метод асимптотического осреднения (метод двух масштабов). Для пористой среды определение эффективных модулей строго выведено из метода осреднения.

Вычисление эффективных модулей и диаграмм выполнялось при помощи строго обоснованного метода конечных элементов. Задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) в материале решались в статической трехмерной и двумерной постановках в предположении

геометрической линейности. В ходе исследований в данной работе также решались нелинейные упруго-пластические задачи. Для решения нелинейных задач методом конечных элементов использовался метод Ньютона и его модификации.

Метод послойного томографического сканирования был использован для получения двумерных изображений структуры композитного материала. При помощи специализированного ПО (VGSTUDIO MAX) двумерные изображения были преобразованы в трехмерные представительные области, по этим областям проведена пространственная дискретизация на трехмерные линейные тетраэдральные конечные элементы.

Для исследования вариантов методов прогрессирующего разрушения использовался сравнительный анализ. Сравнивались области повреждений и диаграммы напряжение-деформация, полученные исследуемыми методами, и определялось наличие сеточной сходимости.

Для теоретического исследования свойств метаматериалов использовался метод асимптотического приближения во втором приближении. Численные примеры, подтверждающие теоретические выводы, были получены методом конечных элементов.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Метод определения осредненных напряжений и деформаций в представительном объеме пористого материала позволяет обеспечить выполнение равенства энергий осредненной и исходной пористых сред.
2. Установлено, что осредненные диаграммы напряжение-деформация пористой среды существенно зависят от формы пор. Показано, что для пористых материалов с угловатыми порами, матрица которых описывается теорией течения с независимой от первого инварианта тензора напряжений функцией течения, осредненная диаграмма напряжение-деформация зависит как от пути деформирования, сочетающего объемное сжатие и сдвиг, так и от первого инварианта тензора деформаций. Установленное свойство описывается макромоделью Друкера – Прагера.
3. Учет поврежденности реальной структуры дисперсных композитов с металлической матрицей и керамическими включениями позволяет

приблизить вычисленные осредненные диаграммы напряжение-деформации к экспериментальным данным.

4. Связанность растяжение/изгиб, растяжение/кручение в метаматериалах с декартовой периодичностью ячеек является свойством, зависящим от количества ячеек, и убывает при масштабировании размера метаматериала. Для метаматериалов с цилиндрической периодической структурой величина связанности растяжение/кручение постоянна и не зависит от количества ячеек.
5. Моделирование МКЭ позволяет определить размеры зон краевого эффекта в двухслойном образце резинокорда в зависимости от кордного угла и определить необходимую минимальную длину образца.

Достоверность и обоснованность результатов

Достоверность диссертационной работы обоснована использованием строгих математических методов, классических методов механики деформируемого твердого тела, апробированной экспериментальной техники и проверенных численных методов и компьютерных программ. Достоверность подтверждается также совпадением результатов ряда расчетов с результатами экспериментов.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Всероссийских и Международных конференциях, на научно-исследовательских семинарах, подвергались рецензированию при публикации в журналах.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., члена-корр. РАН Е.В. Ломакина (2026 г.);
- научно-исследовательский семинар имени А.А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., члена-корр. РАН Д.В. Георгиевского (2026 г.);

- научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. М.У. Никабадзе (2026 г.);
- объединенное заседание семинара лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций и лаборатории механики новых материалов и технологий под руководством д.ф.-м.н., члена-корр. РАН Д.С. Лисовенко, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва (2026 г.);
- секция Ученого совета НИИ механики МГУ под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Тарлаковского (2026 г.);
- межкафедральный научно-исследовательский семинар по механике деформируемых сред под руководством д.ф.-м.н., проф. С.В. Шешенина, к.ф.-м.н., к.г.-м.н. Н.Б. Артамоновой и к.ф.-м.н. Ф.Б. Киселева (2021–2026 г.);
- Международный научный симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвящённый 115-летию со дня рождения А.А. Ильюшина, Москва, Россия, 20–21 января 2026 г;
- Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, ИПРИМ РАН, Москва, Россия (2019, 2021, 2023, 2025 г.);
- Всероссийская школа-конференция «Математическое моделирование в естественных науках», ПНИПУ, Пермь, Россия (2023, 2024 г.);
- Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, МАИ, Алушта, Крым, Россия (2021, 2025 г.);
- Международная научная конференция «Ломоносов» (2020–2024 г.);
- Международная конференция по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли, МАИ, Алушта, Крым, Россия, 4–13 сентября 2022 г.;
- Международная научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, механико-математический факультет МГУ, Москва (2020, 2021, 2022 г.);

- Международная молодёжная научная конференция «XLVII Гагаринские чтения», Москва, Россия, 12–23 апреля 2021 г.;
- Международная конференция «Математическое моделирование», МАИ, Москва, Россия, 17 ноября 2020 г.

Исследования, проведенные автором диссертации, были поддержаны грантами РФФИ №19-51-53006 и №19-51-53008 (2019-2020) и РФФИ №25-21-00111 (2025), в которых соискатель выступал в качестве исполнителя.

Личный вклад автора

Автором диссертации самостоятельно при консультационной поддержке руководителей разработаны теоретические положения и вычислительные процедуры, используемые в проведенных исследованиях. Все новые результаты диссертации получены автором самостоятельно. Автором самостоятельно получены все указанные выше положения, выносимые на защиту.

Для проведения вычислительных экспериментов автором самостоятельно разработаны:

- подпрограммы, реализующие автоматизированный выбор представительной области и постановку граничных условий для задач, решаемых методом конечных элементов в ходе исследования: одноосное растяжение, сдвиг, объемная деформация образца [7; 9; 10];
- подпрограммы на языке FORTRAN для вычисления в представительных областях композитных и пористых материалов эффективных упругих модулей, диаграмм эквивалентные напряжения-деформации [7];
- подпрограммы реализации прогрессирующего разрушения, добавленные в конечно-элементный комплекс в виде собственных подпрограмм.

Самостоятельно выполнены:

- расчеты представительных областей на основе томографических изображений структуры композитного материала, полученных научными руководителями в сотрудничестве с учеными Харбинского технологического института (НТ, Harbin, PR of China) [1]. Анализ результатов проведен самостоятельно;

- вычисления НДС пористых и композитных материалов при различных видах путей деформирования, идентификация параметров макромодели по результатам расчетов [7];
- вычисления эффективных свойств искусственных материалов, подтверждающие теоретические результаты, полученные совместно с научными руководителями [4; 5].

Автором самостоятельно проведен сравнительный анализ самостоятельно вычисленных эффективных модулей в трехмерной постановке с вычисленными эффективными модулями в двумерных представительных областях и с экспериментальными данными [1].

Сравнительный анализ вариантов учета прогрессирующего разрушения проведен самостоятельно автором. Применение рассмотренных методов к реальным и модельным структурам выполнено самостоятельно [9].

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в 14 печатных работах, из них 3 статьи опубликованы в рецензируемых научных журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 147 страниц, включая 11 таблиц и 65 рисунков. Список литературы содержит 187 наименований.

Основное содержание работы

Во введении формулируются цели и задачи работы, обосновывается актуальность и новизна исследований, излагается теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

В главе 1 на примере композита В₄С/2024А1 выполнено сравнение эффективных и экспериментальных модулей упругости. Для пористых и композитных материалов изучено влияние сложного пути деформирования на вид осредненной диаграммы напряжение-деформация.

В разделе 1.1 приводится краткий обзор научной литературы по темам исследования и развития метода асимптотического осреднения, определения и

вычисления эффективных упругих свойств композитных материалов на основе реальных и модельных структур на примере композита $V_4C/2024Al$, исследования упруго-пластических свойств пористых материалов.

В разделе 1.2 определены эффективные упругие модули дисперсного композита $V_4C/2024Al$. Для дисперсного композита или пористой среды определение дается при помощи асимптотического метода осреднения в первом приближении

$$u_i(\mathbf{x}, \xi) = v_i(\mathbf{x}) + \varepsilon N_{ipq}(\xi) v_{p,q}(\mathbf{x})$$

Если асимптотическое разложение применить к задаче определения эффективных модулей упругости, то получаются 6 локальных задач в представительном объеме, которые могут быть записаны двумя эквивалентными способами:

$$1) \begin{cases} C_{ijpq}(\mathbf{x}) u_{p,qj} = 0, & \mathbf{x} \in V_{RVE} \\ u_p = \varepsilon_{pq}^0 x_q, & \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (C_{ijkl}(\mathbf{x}) N_{kpq,l} + C_{ijpq})_{,j} = 0, & \mathbf{x} \in V_{RVE} \\ N_{kpq} = 0, & \mathbf{x} \in \Sigma_{RVE} \end{cases}$$

Из них следует определение эффективных модулей дисперсного композита:

$$C_{ij\alpha\beta}^{eff} = \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle}{\varepsilon_{\alpha\beta}^0}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Для сплошного композиционного материала $\langle \varepsilon_{pq} \rangle = \varepsilon_{pq}^0$. Для пористой среды $\langle \varepsilon_{pq} \rangle \neq \varepsilon_{pq}^0$.

Для вычисления эффективных упругих модулей дисперсного композита $V_4C/2024Al$ используются три модели структуры: двумерная реальная (получена оцифровкой снимков поверхности, сделанных при помощи электронного микроскопа), трехмерная реальная (получена при помощи оцифровки послойных рентгеновских изображений), трехмерная модельная (сгенерирована схожая по параметрам с реальной структурой с эллипсоидальными включениями).

Проведено трехмасштабное исследование эффективных упругих модулей композита $V_4C/2024Al$. На первом этапе определялись эффективные модули упругости трехкомпонентной матрицы, состоящей из алюминия и мелких включений Al_2Cu и V_4C (размер < 1 мкм), на основе двумерных структур. На

втором этапе вычислены эффективные упругие свойства композита с осредненной матрицей и крупными включениями карбида бора (средний размер – 10–20 мкм). Результаты сравнения вычислений и экспериментальных данных сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Сравнение расчетных значений модуля Юнга (ГПа) с экспериментом

Концентрация В ₄ С	15%	20%
Эксперимент	99.1	107.3
3D реальная структура	98.0 (1,1%)	107.6 (0,3%)
3D модельная структура	97.5 (1,6%)	105.6 (1,6%)
2D реальная структура	90.9 (8,3%)	97.8 (8,9%)

В разделе 1.3 приведены результаты вычислений концентрации интенсивностей напряжений по Мизесу (отношение максимальных напряжений к средним по образцу напряжениям) при одноосном статическом нагружении композита В₄С/2024А1. Показано, что на одинаковых по размеру КЭ сетках концентрации интенсивностей напряжений в реальной структуре дисперсных композитов существенно отличаются от концентраций в модели с включениями карбида бора в виде эллипсоидов. Было также замечено, что величины концентраций интенсивностей напряжений практически не зависят от концентрации включений карбида бора, если концентрация включений не превышает 30%.

В разделе 1.4 показано, что для определенных классическим образом средних напряжений и деформаций пористой среды не выполняется равенство осредненных по объему деформаций $\langle \varepsilon_{pq} \rangle$ и заданных на границе деформаций ε_{pq}^0 в задаче 1. Показано, что равенство энергий выполняется в виде:

$$\langle \sigma_{pq} \varepsilon_{pq} \rangle = \langle \sigma_{pq} \rangle \varepsilon_{pq}^0$$

Заданные на границе деформации ε_{pq}^0 (а не средние по объему деформации) используются при вычислении эффективных модулей упругости и эффективных упруго-пластических диаграмм пористой среды. Приведены

численные примеры несовпадения осредненных и заданных на границе деформаций для представительной области пористой среды.

Также выбраны граничные условия для исследования зависимости диаграмм напряжение-деформация пористых и композитных материалов от истории деформирования (в частности, от величины объемной деформации). В работе рассматриваются пути деформирования в виде комбинаций сдвига и объемного сжатия образцов. Задачи решаются методом конечных элементов.

В разделе 1.5 приведены свойства материала матрицы модельных пористых и композитных сред, использованные для решения задач, описанных в предыдущем разделе. Предполагается, что материал матрицы описывается классической теорией течения при малых деформациях. Учитывается изотропное упрочнение. Для материала матрицы использована единая кривая зависимости эквивалентного напряжения от эквивалентной деформации.

В разделе 1.6 приведены результаты численного исследования зависимости осредненных диаграмм пористого и дисперсного композитного материала от истории деформирования (в частности, от величины объемной деформации). Рассмотрены структуры с угловатыми и эллипсоидальными включениями и порами. Для каждой структуры проведены серии расчетов при различных путях деформирования или при одном пути деформирования (последовательная объемная деформация, сдвиг) с различной величиной заданной объемной деформации. Для структуры с угловатыми порами получена зависимость диаграмм от пути деформирования и от величины объемной деформации. Для остальных рассматриваемых структур исследуемых зависимостей не обнаружено (рисунок 1).

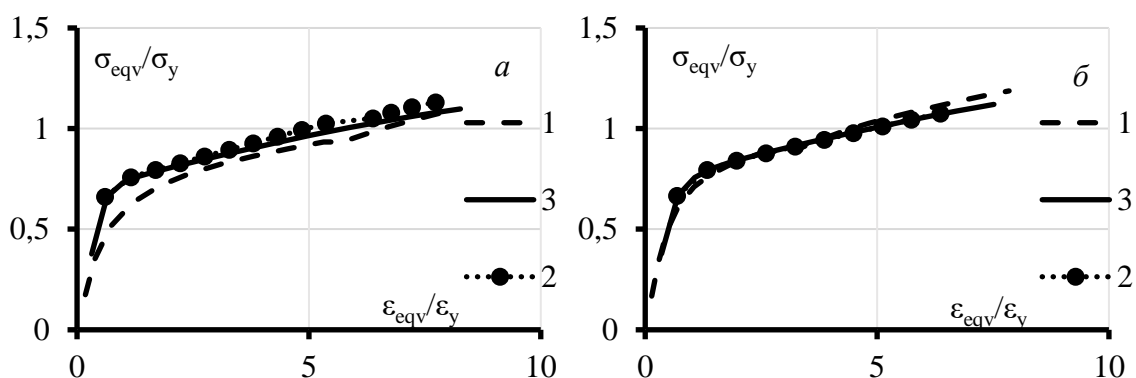


Рисунок 1 – Осредненные диаграммы $\sigma_{eqv} \sim \varepsilon_{eqv}^0$ пористого материала с угловатыми (а) и эллипсоидальными (б) порами для разных путей деформирования: 1 – последовательные объемное сжатие, сдвиг, 2 – последовательные сдвиг, объемное сжатие, 3 – пропорциональное деформирование

В разделе 1.7 приведены результаты идентификации параметров макромодели Друкера – Прагера со степенным нелинейным изотропным упрочнением. С помощью подбора параметров макромодели удалось добиться совпадения результатов вычислений на уровне структуры материала с угловатыми порами с результатами вычислений однородного сплошного материала с применением модели Друкера – Прагера с точностью до 5%.

В главе 2 исследуется вопрос достижения соответствия расчетных диаграмм напряжение-деформация экспериментальным данным композитного материала В₄С/2024А1.

В разделе 2.1 представлен обзор литературы на тему применения алгоритмов учета возникновения и развития поврежденности в дисперсных композитных материалах. Приведены статьи, в которых проводятся вычисления эффективных диаграмм напряжение-деформация для композитных материалов.

В разделе 2.2 описаны рассматриваемые алгоритмы прогрессирующего разрушения. Алгоритм состоит в задании деградации свойств, если выполнен тот или иной критерий разрушения в данный момент нагружения. Деградация означает, что в разрушенных точках: 1) уменьшаются касательные модули; 2) происходит обнуление напряжений. Рассматриваются следующие алгоритмы: критерий разрушения проверяется отдельно в каждой точке интегрирования (Алгоритм I), критерий разрушения проверяется в среднем для всех гауссовых

точек КЭ (Алгоритм II), разрушение происходит в области фиксированного размера с центром в гауссовой точке (Алгоритм III).

Критерий разрушения упругих включений композитного материала выбран в виде:

$$\sigma_{eqv} = \sigma_{eqv}^{crit}, \quad \sigma_{eqv}^{crit} = \begin{cases} \sigma_{eqv}^+, & \theta > \delta \\ \sigma_{eqv}^0, & |\theta| \leq \delta \\ \sigma_{eqv}^-, & \theta < -\delta \end{cases}$$

Здесь θ – относительное изменение объема, как оно определено в теории малых деформаций. Параметры σ_{eqv}^+ , σ_{eqv}^0 , σ_{eqv}^- соответствуют прочности материала на сдвиг при объемном растяжении, нулевой объемной деформации, объемном сжатии соответственно.

Разрушение матрицы происходит при достижении заданной величины полных деформаций: $\varepsilon_{eqv} = \varepsilon_{eqv}^{crit}$.

В разделе 2.3 проведен сравнительный анализ алгоритмов прогрессирующего разрушения. Исследование проводится на основе результатов сравнения решений задач растяжения различных модельных образцов.

На рисунке 2 схематически показана одна из модельных задач. Рисунок 2, слева показывает двумерную область, рисунок 2, справа – развитие областей поврежденности при растяжении области путем задания перемещений на левой и правой сторонах. Рассматривалось плосконапряженное состояние. Материал – изотропный линейно упругий.

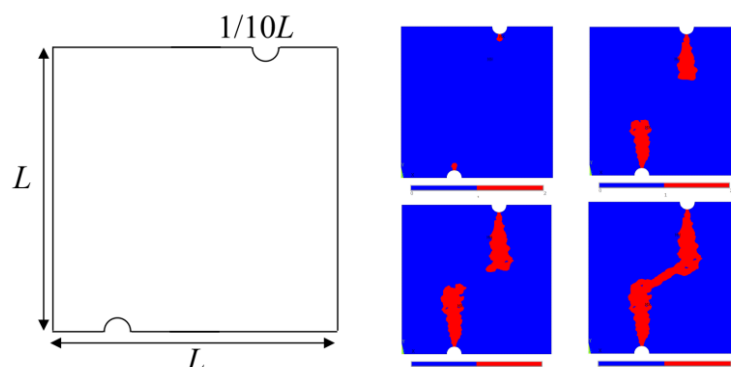


Рисунок 2 – Область с выточками (слева) и развитие области повреждений (справа)

Получены следующие результаты на основании исследований этой и ряда других модельных задач. Результаты расчетов с применением Алгоритма I зависят от параметров численного метода. Также выявлена зависимость итоговой области разрушения от параметра шага нагружения. Алгоритм II показал, что при достаточном уменьшении среднего размера КЭ решения перестают существенно отличаться. При выборе достаточно малого размера КЭ данный метод может быть использован как метод, применимый для анализа прогрессирующего разрушения. Алгоритм III также позволяет получать результаты, слабо зависящие от размеров сетки. Следовательно, данный метод также может быть применен для моделирования разрушения в материале.

Из проведенного анализа сделан вывод, что второй метод может считаться оптимальным. Он обладает сеточной сходимостью так же, как третий метод, но требует меньше ресурсов компьютера.

В разделе 2.4 представлены вычисленные осредненные диаграммы напряжение-деформация композита В₄С/2024А1. В расчетах использована реальная структура и модельная структура с эллипсоидальными включениями.

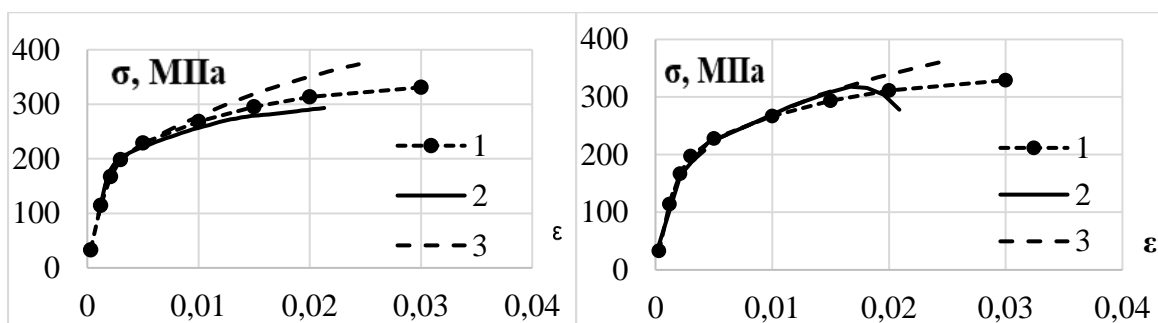


Рисунок 3 – Результаты сравнения численного решения задачи одноосного растяжения с экспериментальными данными образца В₄С/2024А1. Сверху – реальная структура, снизу – эллипсоидальная. 1 – экспериментальные данные, 2 – расчет с учетом поврежденности, 3 – расчет без учета поврежденности

Материал матрицы описывался классической теорией пластического течения с изотропным упрочнением. В расчетах использована экспериментальная диаграмма напряжение-деформация матрицы. Результаты сравнения экспериментальных данных с вычислениями приведены на рисунке 3.

Учет реальной структуры материала (полученной оцифровкой томографических изображений) и применение алгоритма прогрессирующего разрушения позволили приблизить расчетную диаграмму к экспериментальной.

При применении модельной структуры не удастся подобрать параметры расчета таким образом, чтобы результаты качественно соответствовали экспериментальным данным.

В главе 3 представлены результаты теоретического и численного исследований материалов с неклассическими свойствами: метаматериалов и двухслойных резинкордных образцов (хорошо известный пример проявления связанности растяжения и кручения).

В разделе 3.1 приведен краткий обзор литературы на тему актуальных исследований свойств метаматериалов и резинкордных образцов.

В разделе 3.2 в соответствии с известным вариантом асимптотического метода для теории пластин перемещения представлены в виде:

$$\begin{aligned}
 u_i^T &= v_i(x_1, x_2) + \varepsilon N_{iPQ}^T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{P,Q}(x_1, x_2) + \\
 &+ \sum_{m=0}^M \varepsilon^{m+2} N_{iPQ_0 \dots Q_{m+1}}^T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) v_{P,Q_0 \dots Q_{m+1}}(x_1, x_2), \\
 u_I^B &= -\varepsilon \xi_3 w_{,I}(x_1, x_2) + \sum_{m=0}^M \varepsilon^{m+2} N_{iPQ_0 \dots Q_m}^B(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0 \dots Q_m}(x_1, x_2), \\
 u_3^B &= w(x_1, x_2) + \sum_{m=0}^M \varepsilon^{m+2} N_{3PQ_0 \dots Q_m}^B(\xi_1, \xi_2, \xi_3) w_{,PQ_0 \dots Q_m}(x_1, x_2),
 \end{aligned}$$

где $v_i(x_1, x_2)$ – перемещения на макроуровне, а $N_{iPQ_0 \dots Q_m}^T$, $N_{iPQ_0 \dots Q_m}^B$ – поправки перемещений на мезоуровне, u_i^T – перемещения от растяжения, u_i^B – перемещения от изгиба/кручения, ε – малый параметр, равный отношению толщины пластины к размеру пластины в плане, w – прогиб, $\xi_i = x_i/\varepsilon$ – быстрые координаты (для слоистой пластины существует только ξ_3). Уравнения равновесия усилий и моментов получаются из асимптотического метода такие же, как при интегрировании по толщине трехмерных уравнений равновесия с учетом граничных условий на лицевых поверхностях:

$$T_{IJ} = 0, \quad M_{IJ} + Q_I = 0, \quad Q_{I,I} + \varepsilon^3 p(x) = 0$$

Определяющие соотношения на макроуровне в первом приближении имеют вид, как в классической ламинатной теории:

$$T_{IJ} = A_{IJPQ} \varepsilon_{PQ} + B_{IJPQ}^{(1)} \kappa_{PQ}, \quad M_{IJ} = B_{IJPQ}^{(2)} \varepsilon_{PQ} + D_{IJPQ} \kappa_{PQ}.$$

Асимптотическое осреднение справедливо для слоистых пластин и гофрированных пластин, периодических в плане пластины. Жесткости выражаются следующим образом:

$$A_{IIPQ} = \frac{\varepsilon}{\sum_{\xi}^{cell} \int_{V^{cell}}} P_{IIPQ} dV_{\xi}, \quad B_{IIPQ}^{(1)} = \frac{\varepsilon^2}{\sum_{\xi}^{cell} \int_{V^{cell}}} Q_{IIPQ} dV_{\xi},$$

$$B_{IIPQ}^{(2)} = \frac{\varepsilon^2}{\sum_{\xi}^{cell} \int_{V^{cell}}} -\xi_3 P_{IIPQ} dV_{\xi}, \quad D_{IIPQ} = \frac{\varepsilon^3}{\sum_{\xi}^{cell} \int_{V^{cell}}} -\xi_3 Q_{IIPQ} dV_{\xi}.$$

Здесь V^{cell} – область периодической ячейки, \sum_{ξ}^{cell} – ее сечение горизонтальной плоскостью. В случае ламината область представляет собой отрезок поперек толщины пластины.

В разделе 3.3 приведены постановки и результаты численного решения задач для некоторых примеров, демонстрирующих свойства связанности растяжения и изгиба для пластин, рассмотренных теоретически в предыдущем разделе. Расчеты выполнены на примере гофрированных пластин в мягкой матрице. Модели были построены студентом М.А. Волковым.

В результате расчетов получена зависимость меры связанности растяжения/изгиба (β) от числа слоев по толщине пластины (рисунок 4). Параметр β уменьшается с увеличением числа ячеек, что подтверждает свойство уменьшения связанности при превращении пластины в трехмерное тело. В последнем случае уже следует применять трехмерный вариант метода осреднения. Это свойство исследовано как пояснение аналогичного свойства в случае связанности сжатия и кручения хиральных структур, рассмотренных далее.

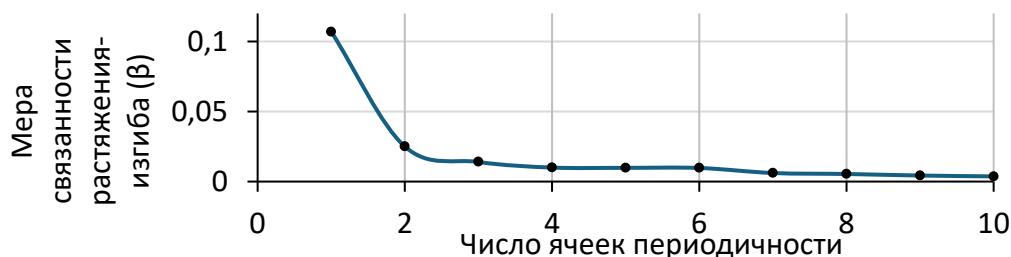


Рисунок 4 – Зависимость меры связанности растяжения/изгиба (β) от числа ячеек периодичности по толщине пластины

В разделе 3.4 приведены результаты численного исследования размеров зон краевых эффектов в двухслойных резинокордных образцах, используемых в экспериментах на одноосное растяжение. Расчетами показано, что для коротких образцов резинокорда краевой эффект имеет существенные размеры, однако в центральной зоне образца возникает однородное НДС, в котором можно измерять эффективные упругие свойства. На этом примере кордного угла 45 градусов показано, что для получения модуля Юнга двухслойного резинокордного образца (без краевых эффектов) требуется вычислить поправочные коэффициенты для измеренных напряжений и деформаций, поскольку эти величины в середине образца могут существенно отличаться от средних (см. рисунок 5).

Проведено сравнение результатов расчетов с теоретической формулой и результатами экспериментов.

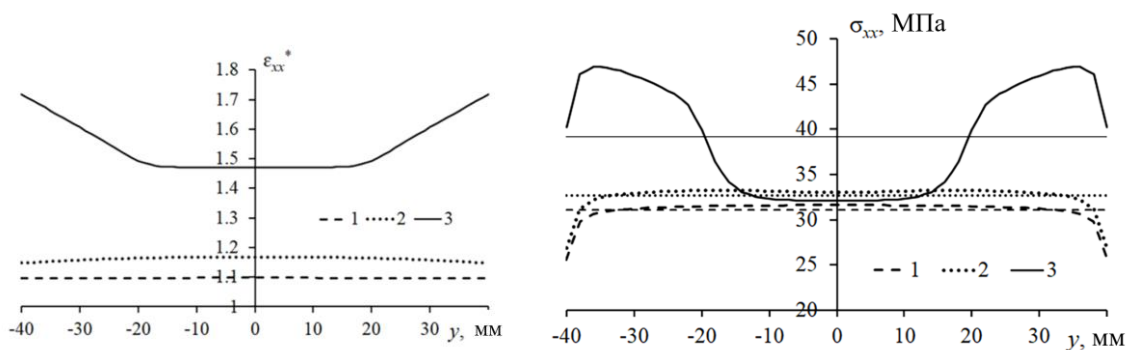


Рисунок 5 – Распределение относительной продольной деформации ε_{xx}^* и продольного напряжения σ_{xx} вдоль координаты y : 1) $L = 600$ мм; 2) $L = 400$ мм; 3) $L = 200$ мм. Горизонтальные линии изображают средние напряжения по ширине образца, соответствующие графикам 1, 2, 3 для образцов разной длины

В разделе 3.5 представлено применение метода асимптотического осреднения во втором приближении для трехмерных упругих тел для исследования свойств связанности сжатия и кручения. Осредненный момент вектора внутренних напряжений получен в следующем виде:

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{x} \times \langle \mathbf{S} \rangle + \langle \mathbf{m} \rangle \cdot \mathbf{n}.$$

Первый член – классический момент осредненного вектора внутренних напряжений, второе слагаемое – внутренне среднее по ячейке моментное

напряжение, которое выходит за рамки классической теории упругости. Для хиральной структуры оно может быть отлично от нуля.

Компоненты тензора моментных напряжений связаны с деформациями обобщенными кривизнами (вторыми производными от гладкой составляющей перемещений):

$$\langle m_{ir} \rangle = \varepsilon B_{irpq}^{(2)} \varepsilon_{pq} + \varepsilon^2 D_{irpq_1q_2} \bar{\kappa}_{pq_1q_2}$$

Компоненты моментных напряжений стремятся к нулю при стремлении к нулю малого параметра. Отсюда следует вывод, что при увеличении числа ячеек периодичности свойства связанности сжатие/кручение в метаматериале будут пропадать.

В разделе 3.6 вопрос связанности сжатие/кручение теоретически исследован для квазипериодической среды в цилиндрической системе координат. Важный вывод состоит в том, что связанность будет сохраняться при масштабировании структуры.

В разделе 3.7 приведены численные примеры связанности сжатие/кручение на основе вычисления параметра меры связанности декартовых и цилиндрических структур.

Для ряда примеров вычислен коэффициент, показывающий величину связанности. Часть структур подготовлена аспирантом Семеновым Д.М. Получено, что для декартовой структуры связанность убывает при увеличении количества ячеек периодичности, для цилиндрической структуры остается постоянной, что соответствует теоретическим выводам.

В заключении приведены основные результаты работы, заключающиеся в следующем.

Отличие вычисленных значений модуля Юнга для 3D модельной и реальной структур от экспериментальных значений составляет около 1%. Значения модуля Юнга для 2D реальной структуры отличаются от экспериментальных не более, чем на 10%.

Для материала с угловатыми порами на макроуровне возникает зависимость осредненной диаграммы напряжение-деформация от истории деформирования и от величины объемной деформации с разницей до 30%.

Макромодель Друкера – Прагера позволяет описать эти свойства с точностью до 5%.

Расчетная диаграмма напряжение-деформация композита $B_4C/2024Al$ приближена к экспериментальной благодаря учету развития поврежденности в реальной структуре материала.

Теоретически показано и численно подтверждено, что при стремлении малого параметра, обратно пропорционального числу ячеек периодичности, к нулю свойства связанности растяжение/изгиб, сжатие/кручение пропадают в метаматериалах.

Определены размеры зон краевого эффекта и допустимые размеры резинокордного образца. Показано, что короткие образцы могут быть использованы при условии пересчета продольных напряжений и деформаций.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи в рецензируемых научных журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук:

1. Клементьев П.Д., Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. Мезоуровневый подход для вычисления диаграммы напряжение – деформация пористых материалов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 5. – С. 30-41. EDN: KBYIUW. Импакт-фактор 0,825 (РИНЦ). Объем публикации: 1,62 п.л., вклад соискателя: 1,20 п.л.
2. Sheshenin S.V., Du Y., Chistyakov P.V., Artamonova N.B., Klement'ev P.D. Experimental Study of the Rheonomic Properties of Breaker Rubber and Rubber-Cord Composite Under Quasi-Static Loading // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal. – 2023. – Vol. 14. – № 1. – P. 57-77. EDN: UGQVZA. Импакт-фактор 0,154 (SJR). Объем публикации: 2,43 п.л., вклад соискателя: 2,00 п.л.
3. Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Klement'ev P.D., Kiselev F.B., Muradkhanov R.R., Orlov E.A., Qiang Z. Study of the elastic and elastoplastic properties of a dispersed composite based on computational experiments // Mechanics of Composite Materials. – 2021. – Vol. 57. – № 1. – P. 19-30. EDN: OFRHCI.

Импакт-фактор 0,382 (SJR). Объем публикации: 3,47 п.л., вклад соискателя: 2,50 п.л.

Другие публикации автора

4. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Киселев Ф.Б., Клементьев П.Д., Мурадханов Р.Р., Орлов Е.А. Два приложения асимптотического метода осреднения // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 10-ой Всероссийской научной конференции с международным участием. Москва 17-19 ноября 2020. – М.: Силиця-Полиграф, 2020. – С. 215-221. EDN: CQSSBO. Объем публикации: 0,81 п.л., вклад соискателя: 0,5 п.л.
5. Клементьев П.Д., Шешенин С.В. Мезомеханический подход к исследованию зависимости НДС композитных и пористых материалов от пути деформирования // Математическое моделирование в естественных науках. – 2024. – Т. 1. – С. 172-175. EDN: KDLMLY. Объем публикации: 0,46 п.л., вклад соискателя: 0,3 п.л.
6. Клементьев П.Д., Шешенин С.В. Сравнение методов моделирования прогрессирующего разрушения композита В4С/АL // Сборник трудов 13-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, 14-16 ноября 2023 г. – М.: Сам Полиграфист, 2023. – С. 90-98. EDN: NSMIAB. Объем публикации: 1,04 п.л., вклад соискателя: 0,5 п.л.
7. Клементьев П.Д., Шешенин С.В. Сравнительный анализ методов прогрессирующего разрушения // Сборник трудов 15-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Москва: ООО «Сам Полиграфист», 2025. – С. 219-228. EDN: VDVEYY. Объем публикации: 1,61 п.л., вклад соискателя: 1,0 п.л.
8. Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Киселев Ф.Б., Семенов Д.М., Клементьев П.Д. Неклассические свойства метаматериалов // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 9-ой Всероссийской научной конференции с международным участием.

- Москва 19-21 ноября 2019. – М.: ИПРИМ РАН, 2019. – С. 259-263. EDN: VENPBW. Объем публикации: 0,12 п.л., вклад соискателя: 0,06 п.л.
9. Шешенин С.В., Клементьев П.Д., Артамонова Н.Б. Анализ диаграммы напряжение – деформация для пористых материалов // Материалы XXIV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2025), 7–13 сентября 2025 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ, 2025. – С. 147-149. Объем публикации: 0,22 п.л., вклад соискателя: 0,1 п.л.
 10. Шешенин С.В., Клементьев П.Д. Моделирование прогрессирующего разрушения композита В4С/А1 на мезоуровне // Математическое моделирование в естественных науках. – 2023. – Т. 1. – С. 355-357. Объем публикации: 1,16 п.л., вклад соискателя: 0,7 п.л.
 11. Шешенин С.В., Клементьев П.Д., Артамонова Н.Б. Численное моделирование упругопластических свойств композита В4С/2024А1 // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 11-й Всероссийской научной конференции с международным участием. Москва, 23 – 25 ноября 2021 г. – М.: Сам Полиграфист, 2021. – С. 169-176. EDN: FQSDZL. Объем публикации: 0,92 п.л., вклад соискателя: 0,5 п.л.
 12. Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Klement'ev P.D., Orlov E.A., Frolova J.V. Image-based simulation of dispersed composites and porous rocks // MATEC Web of Conferences. – 2022. – Vol. 362. – P. 01029. EDN: EPFWAT. Объем публикации: 1,16 п.л., вклад соискателя: 0,5 п.л.
 13. Sheshenin S., Artamonova N., Klementyev P. Applications of the asymptotic homogenization to materials with periodic and non-periodic micro structures // Proceedings in applied mathematics and mechanics. – 2021. – Vol. 21. – № 1. – P. e202100170. EDN: QVVQXX. Объем публикации: 0,12 п.л., вклад соискателя: 0,07 п.л.
 14. Sheshenin S.V., Artamonova N.B., Klementyev P.D. Two applications of the asymptotic homogenization method // Proceedings in applied mathematics and mechanics. – 2021. – Vol. 20. – № 1. – P. e202000268. EDN: CPXEMS. Объем публикации: 0,23 п.л., вклад соискателя: 0,07 п.л.