МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Петров Сергей Владимирович

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ МАТРИЦ И ТЕНЗОРОВ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНЫХ И ЗАШУМЛЕННЫХ ДАННЫХ

Специальность 1.1.6 —
«Вычислительная математика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Диссертационная работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительной математики имени Г.И. Марчука Российской академии наук.

Научный руководитель:	**Тыртышников Евгений Евгеньевич**, Академик РАН, профессор
Официальные оппоненты:	**Наумов Алексей Александрович**, д.ф.м.н., Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования 'Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"' доцент кафедры прикладных технологий моделирования сложных систем Факультета компьютерных наук
	Крылов Андрей Серджевич, д.ф.м.н., МГУ имени М.В.Ломоносова заведующий лабораторией математических методов обработки изображений, профессор кафедры математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики
	Гасников Александр Владимирович, д.ф.м.н., Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» заведующий кафедрой Математических основ управления школы ПМИ

Защита диссертации состоится «13» декабря 2023 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета МГУ.012.1 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, строение 52, ауд. 685.

E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д.27) и на портале https://dissovet.msu.ru/dissertation/012.1/2660.

Автореферат разослан «   » октября 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор ф.м. наук, чл.-корр. РАН   Ильин А.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования.

Для большинства современных математических алгоритмов, в частности, численных методов линейной алгебры, их сложность имеет первоочередное значение для практических приложений. Она определяет либо применимость алгоритма в режиме реального времени, либо допустимые размеры задачи, при которых алгоритм сможет завершить работу на современном вычислительном устройстве за разумное время, используя при этом ограниченные объемы памяти. В связи с этим, современная вычислительная математика часто опирается на различные малопараметрические представления данных: вводится предположение, что фигурирующие в алгоритмах входные данные и/или неизвестные с контролируемой погрешностью подчиняются некоторой наперед заданной модели, характеризующейся сравнительно небольшим числом параметров. На основе этого предположения строится упрощенный алгоритм, вычислительная сложность и необходимая величина объема памяти которого либо, в идеальном случае, зависит только от числа параметров модели, либо просто снижена. При успешном построении такого алгоритма с сохранением его практической эффективности говорят о редукции размерности модели.

В случае данных, организованных в виде матрицы, наиболее типичной и известной малопараметрической моделью является модель матрицы малого ранга. Эта модель хорошо изучена: в частности, известно, что оптимальное приближение любой матрицы во фробениусовой, спектральной и любой другой унитарно инвариантной норме [1] можно получить с помощью сингулярного разложения матрицы за (примерно) кубическое относительно линейного размера матрицы число операций. Недавние результаты [2] объясняют, почему многие матрицы, встречающиеся в приложениях, хорошо приближаются матрицами малого ранга: в частности, показано, что *любые* матрицы большого размера обладают приближениями малого ранга в чебышевской норме, качество которых зависит от ранга как обратная величина квадратного корня.

Несмотря на существование широкой теоретической базы для модели матриц малого ранга, исследования практически значимых задач, связанных с этой моделью, продолжаются.

Распространенной темой исследований последних десятилетий являются быстрые алгоритмы построения приближений малого ранга, близких к оптимальным. Погрешность такого приближения не должна достигать точного минимума по всевозможным матрицам заданного ранга, но должна быть близка к этому минимуму, а вычислительная сложность соответствующего алгоритма должна быть ниже сложности построения сингулярного разложения. Для такой задачи в литературе исследованы, в частности, алгоритмы на основе крестовой аппроксимации [3—6], и алгоритмы, основанные на проектировании на случайные подпространства [7; 8].

Другим современным направлением исследований, связанным с моделью матриц малого ранга, является задача восполнения матриц. Задачей матричного восполнения называют задачу поиска приближений малого ранга для матриц в случае неполных данных, т.е. в случае, когда известна только небольшая часть элементов матрицы. Приложения задачи матричного восполнения включают в себя рекомендательные системы [9], обработка коррелирующих сигналов [10—12], машинное обучение [13; 14] и другие области.

Еще одной развивающейся темой исследований, связанной с моделью матриц малого ранга, является задача приближения матриц в формате суммы матрицы малого ранга и разреженной. Известными приложениями данной модели являются, например, задача усвоения данных измерений, или задача выделения движущихся объектов на видеозаписях [15; 16]; также в рамках данной работы будет рассмотрено применение этой модели к решению линейных систем, связанных с интегральными уравнениями. Задача представления матрицы в виде суммы матрицы малого ранга и разреженной матрицы некорректна без дополнительных предположений; в частности, без условия 'неразреженности' малорангового слагаемого. В работе [17] предложены формализация такого условия и алгоритм, обладающий гарантиями сходимости; однако, этот алгоритм обладает существенной вычислительной сложностью, так как используют выпуклую оптимизацию с m^2 неизвестными, где m - линейный размер матрицы.

В современных приложениях также возникают структуры малого ранга большей размерности, или тензоры малого ранга. Модель тензоров малого ранга имеет большую актуальность, в частности, в задачах, связанных с обработкой сигналов беспроводных сетей или обнаружением объектов на автомобильном радаре. Физическая модель сигнала в этих приложениях описывается многомерным комплекснозначным тензором, размерности которого соответствуют частоте, времени, индексу принимающей антенны и индексам двумерной решетки отправляющих антенн базовой станции. Согласно распространенной „многолучевой“ модели такой тензор допускает каноническое разложение с небольшим рангом, соответствующим числу различных путей от источника сигнала к приемнику, которые появляются засчет переотражений сигнала от объектов среды, например, зданий [18; 19]. В приложениях, связанных с беспроводными сетями, актуален широкий спектр математических задач, связанных с тензором канала [20]. Так, построение приближения малого ранга к тензору канала соответствует сжатию и очистке от шума канала беспроводной связи. Если при этом в качестве входных данных является не весь тензор канала, а лишь небольшой набор его измерений, то говорят о задаче оценки канала. На основе приближений тензора канала в реальном времени проводится построение матриц прекодирования, непосредственно описывающих настройку передаваемых с антенн базовой станции сигналов. Точные теоретические оценки погрешности приближений зашумленного канала при этом могут улучшить прекодирование и результирующую пропускную способность сети [21]. Исследование устойчивости тензорной структуры малого ранга к шуму актуально и в других приложениях: извлечение малорангового тензора из шума большой нормы соответствует задаче обнаружения объектов на автомобильных радарах [19]. При таком исследовании отдельную сложность представляет свойство незамкнутости множества тензоров ограниченного ранга. Так, *оптимального* приближения наперед заданного тензора с малым каноническим рангом может не существовать, а даже если оно существует, его нахождение затруднительно на практике. Практически используемые алгоритмы поиска разложений тензора в формате Таккера [22], формате тензорного поезда [23] и каноническом формате [24] оптимальное разложение на выходе не дают, а в случае канонического формата - и вовсе не имеют теоретических гарантий сходимости. Поэтому, построение теории устойчивости тензорных приближений не должно опираться на *оптимальность* таких приближений.

Наконец, методы редукции размерности, основанные на структурах малого ранга, применимы и к нелинейным задачам, в частности, к численным схемам, соответствующим нелинейным дифференциальным уравнениям с параметрами. Матрицы малого ранга можно использовать для ограничения пространства, в котором проводится поиск решений, а также для ускорения вычислений, связанных с нелинейной функцией, путем интерполяции [25; 26]. Такой подход применим для различных дифференциальных уравнений с параметрами, в частности, уравнений магнитостатики, связанных с моделированием электродвигателей [27—29].

Целью данной работы является разработка алгоритмов малой вычислительной сложности, связанных с поиском малоранговых приближений матриц и тензоров в условиях неполных данных и/или высокого уровня шума, а также построения теории их сходимости.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать и аналитически исследовать возможность понижения сложности известных алгоритмов [30] восполнения матриц, основанных на методах проекции градиента, с помощью приближенных методов вычисления частичного сингулярного разложения.
2. Исследовать возможность адаптации алгоритмов восполнения к случаю разреженных ошибок во входных данных. Связать эту задачу с аппроксимацией матрицы в виде суммы матрицы малого ранга и разреженной.
3. Теоретически исследовать близость малорангового приближения наперед заданного тензора, подверженного возмущению, к исходному тензору. Проверить гипотезу об улучшении свойств такой близости у тензорных приближений по сравнению с матричными при том же ранге и числе элементов.
4. Применить разработанные алгоритмы и теоретические результаты к практическим задачам обработки сигналов из областей беспроводной связи и автомобильных радаров.

Научная новизна:

1. Впервые предложен и теоретически обоснован метод проекции градиента для задачи восполнения матриц для случая приближенного проектирования, вычисляемого с помощью проектирования на случайные подпространства или крестовой аппроксимации.

2. Впервые предложен метод аппроксимации матриц в виде суммы матрицы малого ранга и разреженной матрицы, основанный на матричном восполнении, имеющий меньшую сложность по сравнению с известными в литературе и сходящийся геометрически на искусственных данных. Доказан ряд утверждений для теоретического обоснования алгоритма.
3. Впервые предложена теория точности тензорных приближений малого ранга в условиях зашумленных данных. Получены асимптотические оценки близости малорангового приближения наперед заданного тензора, подверженного возмущению большой нормы, к исходному тензору.
4. Впервые предложен метод приближения тензоров в фомате Таккера с малыми рангами, основанный на методах восполнения и быстром преобразовании Джонсона-Линденштраусса.

Теоретическая и практическая значимость. На основе проведенных исследований разработаны методы обработки сигналов в приложениях, связанных с автомобильными радарами и станциями беспроводной связи, основанные на тензорных разложениях малого ранга.

Методология и методы исследования. В работе используются математические методы линейной алгебры, методов оптимизации и теории вероятностей.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для задачи восполнения матриц предложен и теоретически обоснован метод приближенной проекции градиента.
2. Метод аппроксимации матриц в виде суммы матрицы малого ранга и разреженной матрицы, основанный на матричном восполнении, имеющий меньшую сложность по сравнению с известными в литературе и сходящийся геометрически на искусственных данных.
3. Теорема о точности тензорных приближений в условиях зашумленных данных.
4. Метод приближения тензоров в фомате Таккера с малыми рангами малой сложности.

Степень достоверности и апробация работы. Достоверность полученных результатов подкреплена согласованностью выводов аналитического исследования и численного моделирования. Основные результаты работы докладывались на следующих научно-исследовательских школах, конференциях и семинарах.

1. Конференция SIAM Conference on Applied Linear Algebra (LA21), 17-21 мая 2021, онлайн-формат,
2. Конференция Matrix Equations and Tensor Techniques IX (METTIX), Perugia, Италия, 9-10 сентября 2021 (гибридный формат),
3. Конференция The 5th International Conference on Matrix Methods in Mathematics and applications (MMMA-2019, Москва),
4. Конференция Large-Scale Scientific Computations, 10-14 июня 2019 (LSSC'19, Созополь, Болгария),
5. Конференция Random Matrix Theory and Beyond Workshop, Сочи, 8-9 августа 2022,
6. Конференция Electromagnetic Simulation Workshop 2021, Москва, 17 декабря 2022,
7. Конференция Huawei Russian Wireless Workshop 2020, Москва, 21-23 октября 2020,
8. Летняя школа «Римско-Московская школа по матричным методам и прикладной линейной алгебре» (Москва, Россия, 20 августа - 3 сентября 2016, Рим, Италия, 4-18 сентября 2016).

Личный вклад. Все результаты работы получены автором лично под научным руководством академика РАН, профессора Тыртышникова Е.Е, при консультациях к.ф.м.н. Замарашкина Н.Л.. В работах, написанных в соавторстве, вклад автора диссертации состоит в следующем: предложены методы построения приближения матриц в формате суммы матрицы малого ранга и разреженной матрицы, основанные на методах восполнения с одной или двумя масками; доказаны теоретические утверждения о сходимости обоих алгоритмов, а также проведены численные эксперименты; доказана теорема о сходимости приближенного метода проекции градиента общего вида и подробно рассмотрен частный случай построения приближенных проекций с помощью случайных подпространств.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах Scopus, WoS, RSCI, а

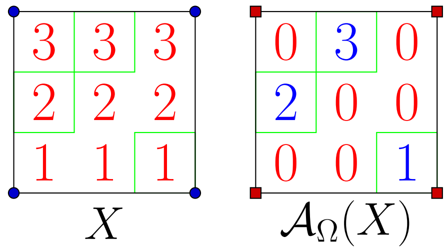

Рис. 1 — Иллюстрация входных данных задачи восполнения матрицы

также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, и заключения. Полный объём диссертации составляет 130 страниц с 25 рисунками и 4 таблицами. Список литературы содержит 54 наименования.

Содержание работы

В **первой главе** исследуется модель матриц малого ранга в специальных условиях: рассматривается задача построения приближений малого ранга в условиях неполных данных, известная также как задача восполнения матрицы. В работе рассмотрена формальная постановка задачи оптимизации вида

$$\Psi_{\mathcal{A}_\Omega}(X) = \frac{1}{2}\|\mathcal{A}_\Omega(X) - B\|_F^2 \to \inf, \quad \operatorname{rank}(X) \le r, \tag{1}$$

где $X \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ - искомая матрица, множество Ω обозначает множество позиций известных элементов матрицы, а действие оператора $\mathcal{A}_\Omega$, с точностью до скалирования, схематично описано на рис. 1. В главе подробно рассмотрено применение метода проекции градиента к задаче оптимизации (1), имеющего вид

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= \mathcal{P}_r\left(X_k - \tau\nabla\psi_{\mathcal{A}}(X_k)\right), \\ &= \mathcal{P}_r\left(X_k - \tau\mathcal{A}^*\left(\mathcal{A}(X_k) - B\right)\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Структура одной итерации такого метода приведена на рис. 2, и сводится к затратному вычислению частичного сингулярного разложения структурированной матрицы. В главе расширены теоретические результаты [30] о

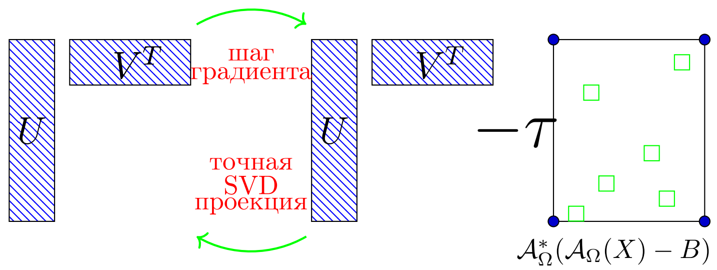

Рис. 2 — Схема метода проекции градиента для задачи восполнения матриц

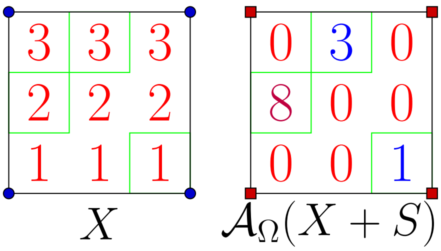

Рис. 3 — Иллюстрация входных данных задачи восполнения матрицы с разреженной ошибкой

сходимости метода: доказано, что точное вычисление проекции не является обязательным и может быть заменено приближенным, например, основанном на случайных подпространствах [7]. Также рассмотрен набор практических техник поддержания сходимости алгоритма.

Вторая глава посвящена возможности решения задачи восполнения матриц в случае входных данных с разреженной ошибкой (см. рис. 3); такая задача также может быть рассмотрена как задача приближения матрицы в формате суммы матрицы малого ранга и разреженной матрицы, который можно рассматривать как самостоятельную малопараметрическую модель.

В главе предлагается новый алгоритм, основанный на методах восполнения, и позволяющий эффективно решать задачу приближения матрицы в виде суммы матрицы малого ранга и разреженной матрицы, не обладая информацией о позициях элементов разреженной части.

В **третьей главе** рассматриваются многомерные тензоры малого ранга и вопросы устойчивости тензорных приближений к большому белому шуму, который по норме может в несколько раз превосходить норму самого приближения. Математически такую „устойчивость“ предлагается характе-

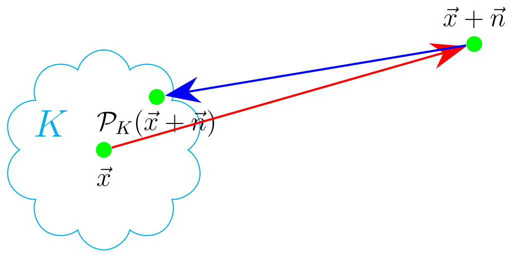

Рис. 4 — Схема исследования устойчивости тензорных приблжений

ризовать величиной

$$\|\mathcal{P}_K(\vec{x}+\vec{n})-\vec{x}\|_2, \tag{3}$$

где K - множество тензоров малого ранга в каноническом смысле, смысле Таккера или смысле тензорного поезда, $\vec{x} \in K$, $\vec{n}$ поэлементно гауссов, а оператор $\mathcal{P}_K$ обозначает результат операции приближения входного вектора вектором из множества K. С учетом сложной структуры множества K, оптимальность такого приближения не подразумевается. На рис. 4 представлена схема типично наблюдаемого на практике явления: как правило, величина (3) гораздо меньше $\|\vec{n}\|_2$. В главе предложено теоретического обоснование такого феномена, а также проведено сравнение различных форматов тензоров малого ранга с точки зрения величины (3).

В **четвертой главе** рассмотрено обобщение алгоритмов восполнения на задачу восполнения тензоров в формате Таккера. В случае практического использования тензоров большой размерности использование всех элементов тензора даже по одному разу может быть недопустимо в силу высокой вычислительной сложности, поэтому использование неполных данных иногда является обязательным. В главе предложен новый алгоритм приближения тензоров в формате Таккера малой вычислительной сложности, основанный на методе проекции градиента для решения задачи оптимизации вида

$$\Psi_{\mathcal{A}}(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}\|\mathcal{A}(\mathbf{T}-\mathbf{B})\|_F^2 \to \ \inf, \quad \operatorname{rank}_j(\mathbf{T}) \le r_j, j = 1\dots d, \tag{4}$$

где $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2 \times \dots \times m_d}$ - d-мерный тензор, для которого необходимо построить приближение, а оператор $\mathcal{A}$ имеет нетривиальный вид, но обладает свойством ограниченной изометрии, и таким образом схож с оператором восполнения $\mathcal{A}_\Omega$.

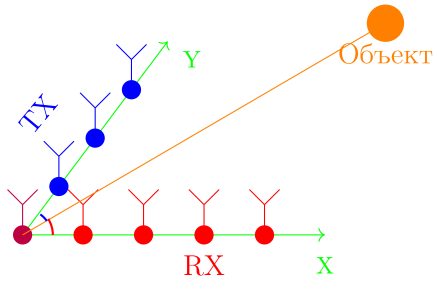

Рис. 5 — Иллюстрация многоантенного радара

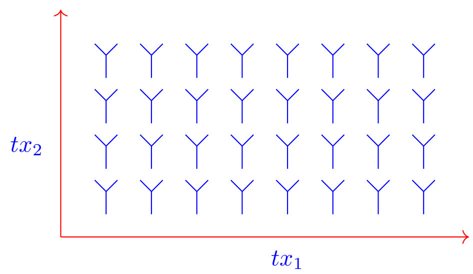

Рис. 6 — Двумерная решетка антенн базовой станции беспроводной связи

В **пятой главе** представлен набор практических применений предложенных в работе теории и алгоритмов. Теория устойчивости тензорных приближений имеет актуальность в области обработки сигналов автомобильных радаров и сетей беспроводной связи: в обоих приложениях обработка сигналов представляет собой работу с зашумленным тензором специального вида

$$\mathbf{T}(j_1, j_2 \dots j_d) = \sum_{r=1}^{R} \beta_r \kappa_1^{j_1} e^{i\gamma_{1,r} j_1} \kappa_2^{j_2} e^{i\gamma_{2,r} j_2} \dots \kappa_d^{j_d} e^{i\gamma_{d,r} j_d}, \tag{5}$$

соответствующего тензору малого канонического ранга с дополнительной структурой факторов. При этом, размерности такого тензора включают в себя размерность частот, размерность времени и несколько размерностей антенн (отдельно - принимающих (rx) и отправляющих (tx), причем отправляющие антенны могут быть организованы в виде двумерной регулярной решетки). Структура (5) вдоль размерностей антенн тогда определяется моделью параллельного падения лучей, а вдоль размерностей частоты и времени - специальным способом модуляции излучаемого сигнала [18].

Извлечение тензора структуры (5) из шума большой нормы при этом соответствует задачам обнаружения объектов на радаре или оценки канала беспроводной связи. При этом тензор канала беспроводной связи можно считать константным лишь небольшое число миллисекунд, что делает актуальной не только задачу оценки и сжатия, но и задачу предсказания канала. Для этого в главе предложен алгоритм на основе экстраполяции канонических факторов, схематично описанный на рис. 7.

Кроме того, в главе описано приложение приближений матриц в формате суммы матрицы малого ранга и разреженной к структурированному сжатию системы уравнений, возникающей в результате дискретизации урав-

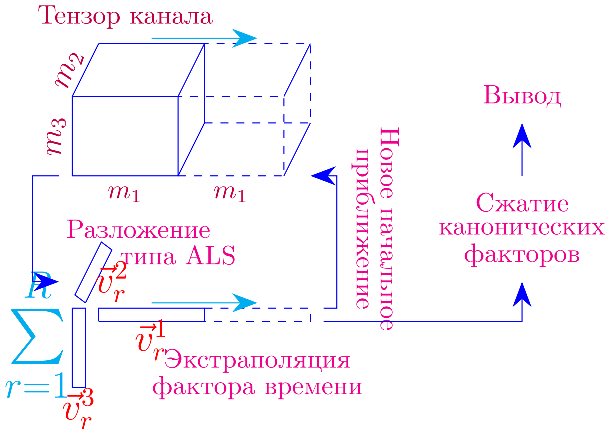

Рис. 7 — Структура алгоритма экстраполяции канала

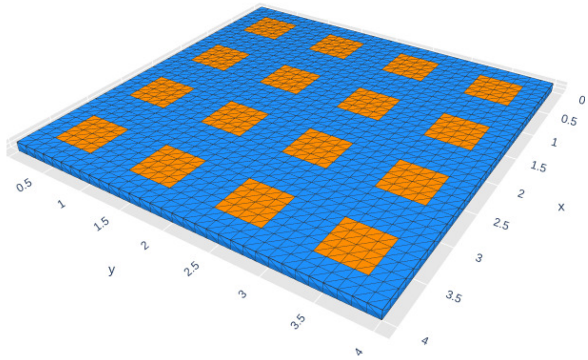

Рис. 8 — Сетка метода конечных элементов на метаповерхности.

нений Максвелла, описывающих рассеяние на метаповерхностях (см. рис. 8), а в конце главы также описано применение малоранговых приближений матриц к решению нелинейного дифференциального уравнения магнитостатики, использующегося при моделировании электродвигателей.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Для метода проекции градиента, применительно к задаче матричного восполнения, построена теория применимости приближенного проектирования. Показана эффективность полученного алгоритма с точки зрения снижения требуемого числа операций и доказана теорема о сохранении геометрического характера сходимости.
2. Исследована возможность получения алгоритмов восполнения матриц, устойчивых к разреженной ошибке в начальных данных. Предложен и программно реализован алгоритм, позволяющий эффективно приближать матрицы в виде суммы матрицы малого ранга и разреженной. Построена теория сходимости этого алгоритма на основе теории возмущений сингулярных подпространств матриц.
3. Построена теория устойчивости тензорных приближений малого ранга с доказательной базой, при выполнении определенных условий на качество приближения. Асимптотическая точность теории подтверждена на численных экспериментах.

4. На основе методов восполнения предложен алгоритм построения тензорных приближений по модели Таккера малой вычислительной сложности.
5. Предложенная теория и разработанные алгоритмы получили широкое применение в области обработки сигналов беспроводной связи.

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1. Petrov S., Zamarashkin N. Matrix completion with sparse measurement errors //Calcolo. – 2023. – Т. 60. – №. 1. – С. 9. (WoS IF 2.097, Q1; Scopus SJR 0.79, Q1 в 2022г.)
2. Petrov S. Model Order Reduction Algorithms in the Design of Electric Machines //International Conference on Large-Scale Scientific Computing. – Springer, Cham, 2019. – С. 140-147. (Scopus SJR 0.427, Q2 в 2019г.)
3. Lebedeva O. S., Osinsky A. I., Petrov S. V. Low-Rank Approximation Algorithms for Matrix Completion with Random Sampling //Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2021. – Т. 61. – №. 5. – С. 799-815 (WoS IF 0.769, Q2; Scopus SJR 0.503, Q3 в 2021 г.)

Список литературы

1. *Mirsky L.* Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms // The quarterly journal of mathematics. — 1960. — т. 11, № 1. — с. 50—59.
2. *Udell M.*, *Townsend A.* Why are big data matrices approximately low rank? // SIAM Journal on Mathematics of Data Science. — 2019. — т. 1, № 1. — с. 144—160.
3. *Osinsky A.* Rectangular maximum volume and projective volume search algorithms // arXiv preprint arXiv:1809.02334. — 2018.
4. How to find a good submatrix / S. Goreinov [и др.] // Matrix Methods: Theory, Algorithms, Applications, V. Olshevsky and E. Tyrtyshnikov, eds., World Scientific, Hackensack, NY. — 2010. — с. 247—256.
5. *Goreinov S. A.*, *Tyrtyshnikov E. E.*, *Zamarashkin N. L.* A theory of pseudoskeleton approximations // Linear algebra and its applications. — 1997. — т. 261, № 1—3. — с. 1—21.
6. *Osinsky A.*, *Zamarashkin N. L.* Pseudo-skeleton approximations with better accuracy estimates // Linear Algebra and its Applications. — 2018. — т. 537. — с. 221—249.
7. *Halko N.*, *Martinsson P.-G.*, *Tropp J. A.* Finding structure with randomness: Probabilistic algorithms for constructing approximate matrix decompositions // SIAM review. — 2011. — т. 53, № 2. — с. 217—288.
8. *Boutsidis C.*, *Drineas P.*, *Magdon-Ismail M.* Near-optimal column-based matrix reconstruction // SIAM Journal on Computing. — 2014. — т. 43, № 2. — с. 687—717.
9. *Kang Z.*, *Peng C.*, *Cheng Q.* Top-n recommender system via matrix completion // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. т. 30. — 2016.
10. *Ahmed A.*, *Romberg J.* Compressive multiplexing of correlated signals // IEEE Transactions on Information Theory. — 2014. — т. 61, № 1. — с. 479—498.
11. *Davies M. E.*, *Eldar Y. C.* Rank awareness in joint sparse recovery // IEEE Transactions on Information Theory. — 2012. — т. 58, № 2. — с. 1135—1146.

12. Low-Complexity and Basis-Free Channel Estimation for Switch-Based mmWave MIMO Systems via Matrix Completion / R. Hu [и др.] // arXiv preprint arXiv:1609.05693. — 2016.

13. *Argyriou A.*, *Evgeniou T.*, *Pontil M.* Convex multi-task feature learning // Machine learning. — 2008. — т. 73, № 3. — с. 243—272.

14. *Blei D.*, *Carin L.*, *Dunson D.* Probabilistic topic models // IEEE signal processing magazine. — 2010. — т. 27, № 6. — с. 55—65.

15. Surveillance video coding via low-rank and sparse decomposition / C. Chen [и др.] // Proceedings of the 20th ACM international conference on Multimedia. — 2012. — с. 713—716.

16. Video-SAR imaging of dynamic scenes using low-rank and sparse decomposition / M. Moradikia [и др.] // IEEE Transactions on Computational Imaging. — 2021. — т. 7. — с. 384—398.

17. Sparse and low-rank matrix decompositions / V. Chandrasekaran [и др.] // IFAC Proceedings Volumes. — 2009. — т. 42, № 10. — с. 1493—1498.

18. *Almeida A. L. de.* Tensor modeling and signal processing for wireless communication systems : дис. … канд. / de Almeida André LF. — Université de Nice Sophia Antipolis, 2007.

19. *Wang S.* Multidimensional Radar Signal Processing Based on Sparse Fourier Transforms : дис. … канд. / Wang Shaogang. — Rutgers The State University of New Jersey, School of Graduate Studies, 2019.

20. Optimal resource allocation in coordinated multi-cell systems / E. Björnson, E. Jorswieck [и др.] // Foundations and Trends® in Communications and Information Theory. — 2013. — т. 9, № 2/3. — с. 113—381.

21. *Sadek M.*, *Tarighat A.*, *Sayed A. H.* A leakage-based precoding scheme for downlink multi-user MIMO channels // IEEE transactions on Wireless Communications. — 2007. — т. 6, № 5. — с. 1711—1721.

22. *De Lathauwer L.*, *De Moor B.*, *Vandewalle J.* A multilinear singular value decomposition // SIAM journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — т. 21, № 4. — с. 1253—1278.

23. *Oseledets I. V.*, *Tyrtyshnikov E. E.* Breaking the curse of dimensionality, or how to use SVD in many dimensions // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2009. — т. 31, № 5. — с. 3744—3759.

24. *Comon P.*, *Luciani X.*, *De Almeida A. L.* Tensor decompositions, alternating least squares and other tales // Journal of Chemometrics: A Journal of the Chemometrics Society. — 2009. — т. 23, № 7/8. — с. 393—405.

25. *Chaturantabut S.*, *Sorensen D. C.* Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2010. — т. 32, № 5. — с. 2737—2764.

26. *Sorensen D. C.*, *Embree M.* A DEIM induced CUR factorization // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2016. — т. 38, № 3. — A1454—A1482.

27. Transient simulation of an electrical rotating machine achieved through model order reduction / L. Montier [и др.] // Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences. — 2016. — т. 3, № 1. — с. 10.

28. Structure Preserving Model Reduction of Low-Frequency Electromagnetic Problem Based on POD and DEIM / L. Montier [и др.] // IEEE Transactions on Magnetics. — 2017. — т. 53, № 6. — с. 1—4.

29. *Henneron T.*, *Clénet S.* Model order reduction applied to the numerical study of electrical motor based on POD method taking into account rotation movement // International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields. — 2014. — т. 27, № 3. — с. 485—494.

30. *Meka R.*, *Jain P.*, *Dhillon I. S.* Guaranteed rank minimization via singular value projection // arXiv preprint arXiv:0909.5457. — 2009.