ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук Козловской Татьяны Давидовны

на тему "О множествах относительной единственности для некоторых ортогональных систем"

по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

В теории ортогональных рядов применяются введенные Н.Н. Лузиным и Н.К. Бари понятия U-множества и M-множества, определяемые следующим образом. Пусть на множестве X задана ортогональная система функций $\{\Phi_n(x)\}$ и пусть $E \subset X$. Множество E называется *множеством единственности* или *U-множеством* для системы $\{\Phi_n(x)\}$, если из сходимости ряда $\sum_n c_n \Phi_n(x)$ к нулю на $X \setminus E$ следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю. В аналогичном определении *U_r-множеств* требуется, чтобы последовательность коэффициентов $\{c_n\}$ принадлежала классу ℓ^r. Если множество E не является U-множеством, то оно назыается *M-множеством.* Всякое множество $E \subset [0, 2\pi)$ положительной меры является M-множеством для системы $\{\exp(inx)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Различные примеры нульмерных M-множеств содержатся в монографиях Н.К. Бари (1961) и А. Зигмунда (1965) о тригонометрических рядах. Некоторые результаты, касающиеся U- и M-множеств для рядов Уолша, приведены в монографии Б.И. Голубова, А.В. Ефимова, В.А. Скворцова "Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения"(2-е изд., 2008; см. главу 3 и комментарии к этой главе). Известно, в частности, что для системы Уолша всякое счетное множество является U-множеством, а среди континуальных множеств меры нуль имеются как M-множества, так и U-множества. Некоторые последующие результаты о множествах единственности для рядов Уолша, Хаара и их обобщений отражены в недавних статьях М.Г. Плотникова (Изв. РАН. Серия матем., т. 86, 2022) и Г.Г. Геворкяна (Матем. сб., т. 215, 2024).

К настоящему времени выявлены глубокие взаимосвязи между теорией единственности и другими разделами математики: дескриптивной теорией множеств, функциональным анализом, абстрактным гармоническим анализом, теорией представлений групп и теорией чисел. Теория единственности ортогональных разложений продолжает активно развиваться и является важной частью современного гармонического анализа. В диссертационной работе Т.Д. Козловской изучаются вопросы о единственности разложения функций в ряды по тригонометрической системе, системе Уолша и системе Виленкина–Джафарли. Актуальность избранной темы не вызывает сомнений.

Диссертация объемом 65 страниц состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Во введении формулируются постановки задач и цели работы, даны ссылки на основные исследования по теме диссертации, обосновывается актуальность темы диссертации и излагаются основные полученные автором результаты. В главе 1 вводятся определения применяемых понятий и сформулировано несколько известных результатов, используемых в последующих главах диссертации.

В начале главы 2 дано определение обобщенного формального произведения (ОФП) рядов Уолша, применяемое при доказательстве основных результатов диссертации. Пусть коэффициенты рядов Уолша

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(x) \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k w_k(x) \tag{1}$$

удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty} a_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k| < \infty \tag{2}$$

соответственно. Тогда ОПФ рядов (1) называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n\oplus k}\gamma_k \right) w_n(x), \tag{3}$$

где через $\oplus$ обозначено двоичное сложение целых чисел. Корректность этого определения следует из леммы 2.1.2, согласно которой последовательность

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n\oplus k}\gamma_k, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

сходится к нулю. Пусть

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k w_k(x), \quad x \in [0, 1),$$

т.е. $\lambda(x)$ – сумма второго ряда из (1). В случае, когда $\lambda(x)$ является полиномом Уолша, определение ОФП совпадает с определением формального произведения из статьи А.А. Шнейдера (Матем. сб., 1949). Для тригонометрических рядов аналогичное произведение рассматривал А. Райхман (A. Rajchman, Math. Ann., 1926).

В § 2.2 для ОФП доказываются аналоги результатов А. Райхмана о формальном произведении тригонометрических рядов. Установлено, в частности, что если ряды (1) удовлетворяют условиям (2) и, кроме того, сходится ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m$, где $\Gamma_m = \sum_{k=m}^{\infty} |\gamma_k|$, то подпоследовательность $S_{2^m}(x)$ частичных сумм ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n - \lambda(x)a_n) w_n(x)$$

сходится к нулю в каждой точке $x \in [0, 1)$.

В § 2.3 для любой последовательности $p_n \downarrow 0$, $p_n \neq 0$ и любого интервала $(\alpha, \beta) \subset [0, 1)$ построена "локализующая" функция $\lambda \in L[0, 1)$, отличная от нуля во всех точках $x \in (\alpha, \beta)$, равная нулю во всех точках $x \in [0, 1) \setminus [\alpha, \beta)$ и такая, что ее коэффициенты Фурье-Уолша γ_n удовлетворяют условию $\gamma_n = \mathrm{o}(p_n)$ (теорема 2.3.1).

Нетривиальный ряд Уолша, сходящийся к нулю почти всюду, называют *нуль-рядом*. Множество точек, где нуль-ряд не сходится к нулю, называется *ядром* нуль-ряда. Предположим, что первый из рядов Уолша (1) является нуль-рядом, ядро которого B замкнуто. При доказательстве теоремы 2.3.3 (основного результата § 2.3) для любой непустой порции $\delta(B)$ с помощью теоремы 2.3.1 выбирается функция $\lambda(x)$ такая, что применение ОФП к рядам (1) приводит к нуль-ряду Уолша

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(x), \quad x \in [0,1),$$

ядро которого совпадает с $\delta(B)$, а приведенное ядро N_1 этого ряда, определяемое равенством

$$N_1 = \{x \in [0,1) : \varlimsup_{n\to\infty} |S_n(x)| = +\infty\}, \quad \text{где} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k w_k(x),$$

всюду плотно в $\delta(B)$. При этом каждая точка из $\delta(B)$ оказывается точкой конденсации для N_1.

В § 3.1 теорема Кахана–Салема (1963) распространена на множества с нулевой размерностью Хаусдорфа. А именно, в этом параграфе доказано, что для тригонометрической системы любое подмножество окружности с нулевой хаусдорфовой размерностью является U_r-множеством для всех $r \geqslant 1$ (утверждение 3.1.1). Комбинируя утверждение 3.1.1 с рядом известных результатов Ивашова–Мусатова, Катцнельсона, Кахане, Салема и Хиршманна, автор в § 3.2 приводит классификацию U_r-множеств для тригонометрической системы (утверждения 3.2.1 и 3.2.3), а в § 3.3 получены аналогичные результаты для системы Уолша (утверждения 3.3.3 и 3.3.5).

В главе 4 изучаются объединения U_r-множеств для системы Уолша, системы Виленкина-Джафарли и тригонометрической системы. Доказаны следующие две теоремы.

Теорема 4.1.1. *Объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств ($r \geqslant 2$) для системы Уолша является U_r-множеством для этой системы.*

Теорема 4.2.1. *Объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств ($r > 2$) для системы Виленкина–Джафарли является U_r-множеством для этой системы.*

В § 4.3 приведены условия, при которых для тригонометрической системы объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств является U_r-множеством.

Таким образом, в диссертации получена классификация U_r-множеств для тригонометрической системы и для системы Уолша. Для рядов Уолша доказаны аналоги результатов Райхмана о формальном произведении рядов. Изучены свойства ядер и приведенных ядер нуль-рядов Уолша и нуль-рядов по системе Виленкина–Джафарли. Доказаны теоремы о счетном объединении замкнутых U_r-множеств для системы Уолша и для системы Виленкина–Джафарли.

Полученные в диссертации результаты достоверны, являются новыми и существенно дополняют исследования Г. Геворкяна, А. Райхмана, А. Шнейдера и др. авторов.

Автореферат полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы. В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако имеется несколько пробелов и неточностей. Вот некоторые из них:

1. В дополнение к теоремам Г. Кантора (1870) и В. Юнга (1909) на стр. 3 можно было привести следующее предложение: "В 1872 г. Кантор доказал, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на $[0, 2\pi)$, кроме точек некоторого конечного множества, то все его коэффициенты равны нулю".

2. Во введении следовало подробнее изложить результаты из теории единственности рядов Уолша и их обобщений. В частности, можно было упомянуть об основных результатах, приведенных в главе 3 монографии Б.И. Голубова, А.В. Ефимова, В.А. Скворцова (2008), и процитировать связанные с темой диссерации работы из обзора М.Г. Плотникова, Т.А. Своровской, Н.Н. Холщевниковой "Развитие теории единственности рядов Уолша и Хаара в работах В.А. Скворцова и его учеников", опубликованного в 11 томе серии "Современные проблемы математики и механики" (МГУ, 2016).

3. Иногда для понимания формулировок во введении надо искать формулы в последующих главах. На стр. 3 в определении приведенного ядра следовало отметить, что через $S_n(x)$ обозначена n-я частичная сумма данного нуль-ряда. В формулировке теоремы 2.2.1 на стр. 9 вместо ссылок на формулы (2.3) и (2.4) главы 2 лучше было явно указать соответствующие ряды.

Отмеченные недостатки легко устранимы и не снижают общую высокую оценку работы.

Результаты диссертации имеют существенное значение для развития современной теории функций и функционального анализа и могут быть использованы специалистами по вещественному, комплексному и функциональному анализу, работающими в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, в Московском, Санкт-Петербургском, Воронежском, Новосибирском университетах и других институтах, университетах и научных учреждениях.

Основные результаты получены автором лично и обладают внутренним единством. Все утверждения и теоремы, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, полностью обоснованы и опубликованы в 8 работах автора, включая 3 публикации в рецензируемых научных изданиях, рекомендуемых для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук.

Содержащиеся в диссертации результаты неоднократно докладывались автором на научно-исследовательском семинаре по теории тригонометрических и ортогональных рядов на механико-математическом факультете МГУ (руководители — М.И. Дьяченко, Т.П. Лукашенко, В.А. Скворцов, А.П. Солодов) и на Международной Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложений».

Диссертация Козловской Татьяны Давидовны является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории функций и ее применений. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.1 "Вещественный, комплексный и функциональный анализ"(по физико-математическим наукам), а также критериям, определенных в пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых

ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, и оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Таким образом, соискатель Козловская Татьяна Давидовна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладных информационных технологий
Института общественных наук ФГБОУ ВО "Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ"

ФАРКОВ Юрий Анатольевич

Контактные данные: тел.: +7(903) 108-87-79, e-mail: farkov-yu@ranepa.ru
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Адрес места работы:
119571, г.Москва, пр-т Вернадского, 82, РАНХиГС, корпус 2
Институт общественных наук
Тел.: +7(499) 956-00-70, e-mail: golosov-ion@ranepa.ru

Подпись профессора Института общественных наук
Ю. А. Фаркова удостоверяю:

08.04.2026