ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию

Коняева Андрея Юрьевича

"Геометрия Нийенхейса и её приложения"

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 – Геометрия и топология

В диссертационной работе А.Ю. Коняева "Геометрия Нийенхейса и её приложения" изучаются многообразия с заданными на них операторными полями с нулевым кручением Нийенхейса, их нормальные формы в регулярных и особых точках, симметрии, законы сохранения, функции от таких операторных полей и пучки нийенхейсовых структур. Изучается связь с естественными комплексными структурами. Приведённые объекты рассматриваются как в гладком, так и в вещественно-аналитическом и комплексно-аналитическом случаях. Данная диссертационная работа относится к области математики, которая находится на пересечении дифференциальной геометрии, теории интегрируемых систем и математической физики. Полученные в работе результаты закладывают основы нового направления дифференциальной геометрии — геометрии Нийенхейса и её приложений.

Самым известным приложением кручения Нийенхейса является почти комплексная структура. Говорят, что на многообразии задана почти комплексная структура, если на нём задано операторное поле J с условием $\mathsf{J}^2 = -\mathrm{Id}$. Любое комплексное многообразие, очевидно, является почти комплексным — в качестве оператора J на касательном пространстве к овеществлению достаточно взять оператор умножения на мнимую единицу. При этом в системе координат, полученной овеществлением комплексной функции, компоненты оператора постоянны. То есть $\mathcal{N}_L = 0$. Верно и обратное: почти комплексная структура J с условием $\mathcal{N}_L = 0$ задает комплексную структуру. Это теорема Ньюландера-Ниренберга.

В диссертационной работе А.Ю.Коняева заложены основы геометрии Нийенхейса — новой области математики, которая лежит на стыке дифференциальной геометрии, алгебры, теории интегрируемых систем и математической физики. В работе решены задачи описания локальной структуры операторов Нийенхейса, их особых точек и глобальных свойств. Получены приложения новой геометрии к задачам разделения переменных, теории проективно-эквивалентных метрик и теории пуассоново-согласованных метрик. Получена теорема единственности для пучков Дарбу-Гамильтона общего положения и приложения к интегрируемым системам на двойственных к алгебрам Ли пространствах.

Диссертация состоит из введения, одиннадцати глав, списка литературы и трех приложений. Далее представим краткий обзор структуры и основных результатов диссертации.

Первая и вторая главы являются вводнями. Вторая глава содержит базовые результаты по геометрии Нийенхейса. Там же собраны базовые факты об операторах Нийенхейса и приведены ключевые примеры. Все утверждения в этих разделах снабжены доказательствами, так как не являются общеизвестными. В этой главе доказывается, что по оператору Нийенхейса с комплексным спектром строится естественная комплексная структура. Относительно этой структуры оператор Нийенхейса голоморфен и является оператором Нийенхейса уже в смысле комплексного кручения Нийенхейса.

В третьей главе рассматривается вопрос нормальных форм оператора Нийенхейса в окрестности регулярной точки, а так же приводятся примеры компактных многообразий Нийенхейса, и решается вопрос о нормальной форме оператора Нийенхейса с интегрируемыми распределениями ядер в вещественном и комплексном случаях. Эта теорема обобщает теорему Томпсона и, как следствие, закрывает пробелы оригинальной работы. В эьлй же главе разбирается задача классификации оператора Нийенхейса с условием $L^2 = 0$. В частности, описаны нормальные формы операторов Нийенхейса, сопряжённых с жордановой клеткой, имеющей непостоянное собственное значение, и получены результаты по глобальной геометрии Нийенхейса: показано, что сферы — нийенхейсовы многообразия, и любой оператор Нийенхейса на сфере S^4 обязан иметь только вещественный спектр.

В четвертой главе устанавливается связь геометрии Нийенхейса и левосимметрических алгебр и доказывается, что любая конечномерная левосимметрическая алгебра является естественным многообразием Нийенхейса. В этой главе также классифицированы все такие многообразия в размерности два. Их оказывается десять классов, два из которых содержат непрерывный вещественный параметр.

В пятой главе рассматриваются нормальные формы gl -регулярного оператора Нийенхейса в вещественно-аналитическом случае. В ней доказаны теоремы о приведении к первой и второй сопровождающим формам. В этой же главе построены полиномиальные нормальные формы gl -регулярных операторов Нийенхейса в размерности два как в точках общего положения, так и в особых точках. В особых точках таких форм оказывается 8 бесконечных серий, параметризованных как дискретными, так и непрерывными параметрами, и два специальных класса.

В шестой главе изучаются симметрии и законы сохранения оператора Нийенхейса. В частности, доказывается теорема о расщеплении для симметрий и законов сохранения. Во второй части данной главы приведены базовые свойства симметрий и законов сохранения для gl -регулярных операторов Нийенхейса. Там же устанавливается связь между регулярными симметриями и законами сохранения, а также координатами, в которых оператор L принимает первую или вторую сопровождающую форму. В следующих разделах описываются связи симметрий и законов сохранения голоморфного оператора Нийенхейса и его овеществления, описываются симметрии для операторов Нийенхейса, сопряженных с вещественными и комплексными жордановыми блоками. В заключении данной главы обобщаются слабонелинейные квазилинейные системы в случае нетривиальной жордановой структуры. В качестве приложения геометрии Нийенхейса для таких систем описаны симметрии и законы сохранения, а также представлена процедура интегрирования данной системы в квадратурах.

Седьмая глава посвящена применениям разработанных инструментов геометрии Нийенхейса к задачам разделения переменных и геодезически эквивалентным метрикам.

Описан алгоритм построения вполне интегрируемых систем на кокасательном расслоении, показано, что в размерности два алгоритм даёт все потоки с квадратичными интегралами и доказывается, что тензор Киллинга такой системы задает интегрируемую квазилинейную систему.

В восьмой глава описываются приложения геометрии Нийенхейса к теории пуассоново согласованных метрик и пучкам Нийенхейса. В частности, классифицируются все операторы Нийенхейса, геодезически согласованные с данной плоской метрикой. Там же представлена геометрическая характеристика двух специальных нийенхейсовых пучков, и дана геометрическая характеристика AFF-пучка метрик.

В девятой главе рассматриваются приложения геометрии Нийенхейса к бигамильтоновым структурам как в конечномерном, так и в бесконечномерном случаях. Показано, что кокасательное расслоение над многообразием Нийенхейса всегда является многообразием Пуассона–Нийенхейса, доказана теорема о нормальной форме структуры Пуассона-Нийенхейса для дифференциально-невырожденного случая. Также в данной главе устанавливается связь между фробениусовыми парами и алгебрами Фробениуса и доказывается, что между фробениусовыми парами и операторами Дарбу-Гамильтона типа $1 + 3$ существует взаимно однозначное соответствие. В заключении данной главы доказана теорема о нормальной форме пучков гамильтоновых операторов общего положения, состоящих исключительно из операторов Дарбу-Гамильтона и решена гипотеза Ферапонтова-Павлова.

Десятая глава посвящена изучению алгебраических операторов Нийенхейса. Здесь доказываются основные свойства алгебраических операторов и изучается вопрос существования алгебраических операторов Нийенхейса с простым спектром на конечномерных алгебрах Ли.

В одинадцатой главе рассматриваются теории когомологий Нийенхейса. Оказывается, что оператору Нийенхейса можно сопоставить сразу две когомологические теории — большую и малую. В этой главе доказывается теорема об изоморфизме для малых когомологий, которая связывает малые когомологии Нийенхейса и когомологии де Рама. Там же доказана лемма Пуанкаре для малых когомологий.

Таким образом, в диссертационной работе А.Ю.Коняева заложены основы геометрии Нийенхейса – новой дисциплины, лежащей на стыке дифференциальной геометрии, алгебры, интегрируемых систем и математической физики. Оценивая работу в целом, следует сказать, что она является целостным математическим исследованием. Диссертация написана основательно и выполнена на высоком научном уровне. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и значительно способствуют дальнейшему прогрессу в данной области математики. Результаты диссертации четко сформулированы и снабжены подробными доказательствами. Они неоднократно докладывались автором на научных семинарах как в российских, так и в зарубежных исследовательских центрах.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Основные результаты своевременно опубликованы в научных изданиях, входящих в список ВАК.

Диссертация А.Ю. Коняева "Геометрия Нийенхейса и её приложения" отвечает всем требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3 – геометрия и топология, а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова. Таким образом, соискатель Коняев Андрей Юрьевич заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.3 - геометрия и топология.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук, академик РАН,
главный научный сотрудник,
заведующий отделом алгебраической геометрии,
Математического института им. В.А. Стеклова РАН
119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Орлов Дмитрий Олегович 1 декабря 2025 г.

Контактные данные: тел.: +7 (495) 984-81-41, e-mail: orlov@mi-ras.ru,
Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Адрес места работы:
ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, тел.: +7 (495) 984-81-41, e-mail: steklov@mi-ras.ru

Подпись сотрудника Математического института им. В.А. Стеклова РАН Орлова Д.О. удостоверяю: