МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Козловская Татьяна Давидовна

О множествах относительной единственности для некоторых ортогональных систем

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Скворцов Валентин Анатольевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Лукомский Сергей Федорович**
доктор физико-математических наук, профессор, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского,
профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета

Плотников Михаил Геннадьевич
доктор физико-математических наук, доцент, МГУ имени М. В. Ломоносова, профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета

Фарков Юрий Анатольевич
доктор физико-математических наук, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, профессор кафедры прикладных информационных технологий института общественных наук

Защита диссертации состоится «24» апреля 2026 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.011.3 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 1624. E-mail: mexmat_disser85@mail.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский проспект, д. 27) и на портале: https://dissovet.msu.ru/dissertation/3828

Автореферат разослан « » марта 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.3,
кандидат физико-математических наук Е. Д. Алферова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации рассмотрена серия вопросов теории единственности разложения функций в ряды по ортогональным системам.

Истоком этих проблем является классическая теория единственности тригонометрических рядов. В 1870 г. Г. Кантор доказал, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на $[0, 2\pi)$, то все его коэффициенты равны нулю. В 1909 г. В. Юнг доказал, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на $[0, 2\pi)$, кроме некоторого счетного множества, то все его коэффициенты равны нулю. В 1916 г. Д. Е. Меньшов построил совершенное множество нулевой меры и тригонометрический ряд, сходящийся к нулю всюду вне этого множества и имеющий отличные от нуля коэффициенты. Этот результат Д. Е. Меньшова положил начало новому направлению исследований в теории единственности как тригонометрических рядов, так и рядов по другим системам функций.

Согласно введенной Н. Н. Лузиным и Н. К. Бари терминологии множество $E \subset [a, b)$ называется U-множеством или множеством единственности для рядов по системе $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [a, b)$, если из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(x)$ к нулю на $[a, b) \setminus E$ следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Множество $E \subset [a, b)$ называется M-множеством для рядов по системе $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, если оно не является U-множеством, то есть существует нетривиальный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\Phi_n(x)$, сходящийся к нулю на $[a, b) \setminus E$.

Нетривиальный ряд, сходящийся к нулю почти всюду на $[a, b)$, называют нуль-рядом. Множество точек, где нуль-ряд не сходится к нулю, назовем ядром нуль-ряда. Множество точек, где $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |S_n(x)| = +\infty$, назовем приведенным ядром нуль-ряда.

Вскоре после построения Д. Е. Меньшовым совершенного M-множества нулевой меры Н. К. Бари и А. Райхман (1922 г.) независимо и разными способами получили целые классы непустых совершенных U-множеств.

Упомянутые исследования по тригонометрическим рядам изложены, например, в главе XIV фундаментальной монографии[1] Н. К. Бари. Система функций Уолша, сохраняя многие свойства тригонометрической системы (в силу групповых свойств области определения), тесно связана также

[1]Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М: Физматгиз, 1961.

с системами Хаара и Радемахера. Этим объясняется важная роль системы Уолша в общей теории ортогональных рядов. Система Уолша широко используется и в прикладных вопросах —в цифровой обработке сигналов, в теории кодирования, в распознавании образов. Основы теории рядов Уолша и прикладные вопросы изложены, например, в монографии[2].

Первые результаты по теории единственности для системы Уолша были получены Н. Я. Виленкиным в 1947 г. (аналог теоремы Кантора), А. А. Шнейдером, Н. Файном в 1949 г.[3,4] (каждое счетное множество является U-множеством). В работе[3] А. Шнейдер установил также, что среди непустых совершенных множеств нулевой меры имеются U-множества; построил и M-множество меры нуль для системы Уолша; получил теорему локализации для этой системы функций. Эти результаты получены с помощью формального произведения, введенного А. Шнейдером для системы Уолша по аналогии с введенным Райхманом формальным произведением для тригонометрической системы.

Если в определении множества единственности наложить на коэффициенты ряда условие

$$\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^p,$$

то получим определение U_p-множества (множества относительной единственности).

Понятие U_p-множеств (или множеств единственности относительно l^p) ввел в заметке [5] И. Кацнельсон, рассмотревший случай тригонометрической системы.

Вопросы теории единственности для рядов по различным системам функций активно разрабатываются современными математиками (В. А. Скворцов, Г. Г. Геворкян, Н. Н. Холщевникова, Н. А. Бокаев, А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, В. Шапиро, Ж.–П. Кахан, И. Кацнельсон, В. Вейд и др.).

В последние годы изучаются множества единственности для рядов по системе характеров нуль-мерных абелевых групп (В. А. Скворцов,

[2]Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

[3]Шнейдер А. А. О единственности разложений по системе функций Уолша // Матем. сб. 1949. Т. 24. С. 279–300.

[4]Fine N. J. On the Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 65, N 3. P. 372–414.

[5]Katznelson Y. Sets of uniqueness for some classes of trigonometrical series // Bull Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. P. 722–723.

Н. Н. Холщевникова, Ф. Тулоне и др.[6,7,8]). В. А. Скворцов[6] построил совершенное M_0-множество (упомянутый в определении M-множества нетривиальный ряд является рядом Фурье–Стильтьеса) для системы характеров нуль-мерной абелевой группы, мера Хаусдорфа которого равна нулю.

Н. К. Бари получен следующий результат: всякая порция ядра тригонометрического нуль-ряда содержит порцию приведенного ядра того же ряда; существует другой тригонометрический нуль-ряд, для которого ядром и приведенным ядром будут служить именно эти порции ядра и приведенного ядра данного нуль-ряда.

В диссертационной работе вводится и изучается обобщенное формальное произведение рядов Уолша, аналогичное тому, которое ввел Райхман для тригонометрических рядов. Это позволило доказать ряд новых теорем теории единственности рядов Уолша.

Свойства нуль-рядов используют для доказательства теорем об объединении множеств единственности. Н. К. Бари доказала, что объединение счетного множества замкнутых U-множеств для тригонометрической системы функций есть U-множество для этой системы. Аналог этой теоремы для системы Уолша получил американский математик В. Вейд[9].

Н. Н. Холщевниковой[10] доказана обобщенная теорема Бари для системы Уолша: если E_n — U-множества для рядов по системе Уолша, замкнутые относительно своего объединения

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

то E опять U-множество для рядов по системе Уолша.

Степень разработанности темы. Таким образом, теория множеств единственности (в обычном смысле) была и остается активно исследуемой областью гармонического анализа. При этом теория Райхмана формального произведения тригонометрических рядов сыграла важную роль в получении большинства результатов в тригонометрическом случае. В случае

[6]Skvortsov V. A. On M_0-sets for series with respect to characters of compact zero-dimensional group // Tatra Mt. Math. Publ. 2014. 62. P. 165–174.

[7]Skvortsov V. A., Tulone F. Kurzweil-Henstock type integral on zero-dimensional group and some of its applications // Czechoslovak Math. J. 2008. 58. P. 1167–1183.

[8]Skvortsov V. A., Kholshchevnikova N. N. On U- and M-sets for series with respect to characters of compact zero-dimensional groups // Journal of Math. Analysis and Applications. 2017. V. 446. P. 383–394.

[9]Wade W. R. Summing closed U-sets for Walsh series // Proc. Amer. Math, Soc. 1971. V. 29, N 1. P. 123–125.

[10]Холщевникова Н. Н. Обобщенная теорема Бари для системы Уолша // Матем. сб. 1992. Т. 183, N 9. С. 3–12.

рядов Уолша аналог теории Райхмана был введен и исследовался лишь для формального произведения ряда и полинома Уолша.

Что касается множеств относительной единственности, то здесь также, начиная с упомянутой выше основополагающей работы Кацнельсона, большинство работ посвящалось тригонометрическому случаю. В последнее десятилетие появился и ряд работ, связанных с рядами Уолша, которые мы используем в наших исследованиях.

В настоящей работе по тематике, связанной с вопросами счетного объединения множеств относительной единственности для системы Уолша и для системы Виленкина–Джафарли, а также по вопросам классификации U_r-множеств, получены окончательные результаты.

Для тригонометрической системы результаты об объединении U_r-множеств получены лишь при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты рядов.

Цель работы.

- Распространение теории Райхмана формального произведения тригонометрических рядов на ряды Уолша. Исследование с помощью введенного обобщенного формального произведения рядов Уолша свойств ядер и приведенных ядер нуль-рядов.
- Классификация U_r-множеств для тригонометрической системы и системы Уолша.
- Изучение объединения U_r-множеств для системы Уолша.
- Изучение объединения U_r-множеств для системы характеров группы целых p-адических чисел — системы Виленкина–Джафарли.
- Изучение объединения U_r-множеств для тригонометрической системы.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Проведена классификация U_r-множеств для тригонометрической системы и для системы Уолша.

2. Введено и исследовано обобщенное формальное произведение (ОФП) рядов Уолша; тем самым теория Райхмана ФП для тригонометрических рядов распространена на ряды Уолша.

3. Изучены свойства ядер и приведенных ядер нуль-рядов Уолша (с помощью ОФП), нуль-рядов системы Виленкина–Джафарли.

4. Установлено, что при $r > 2$ объединение счетного числа замкнутых U_r-множеств для системы Уолша является U_r-множеством для этой системы.

5. Установлено, что при $r > 2$ объединение счетного числа замкнутых U_r-множеств для системы Виленкина–Джафарли является U_r-множеством для этой системы.

6. Изучена связь суммируемости коэффициентов тригонометрического ряда и суммируемости коэффициентов его формального произведения на абсолютно сходящийся ряд.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение при решении вопросов единственности по другим конкретным ортогональным системам, а также в абстактном гармоническом анализе при изучении рядов по системам характеров абелевых групп.

Методы исследования. В работе используются методы классического гармонического анализа (в том числе теория формального произведения рядов, варианты теорем локализации), методы теории рядов Фурье, общие методы действительного анализа, теории меры, теории размерности Хаусдорфа и теории характеров нуль-мерных групп (двоичной группы Кантора и группы p-адических чисел).

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются вопросы представления функций ортогональными рядами. Поэтому она соответствует паспорту специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ — по следующим направлениям: вещественный анализ, локальные и глобальные свойства функций вещественных переменных, их представления и приближения; метрическая теория функций, в которой на основе понятий меры и интеграла исследуются свойства функций и их производных, изучаются функциональные (в т. ч. ортогональные) ряды и их приложения.

Положения, выносимые на защиту:

1. Проведена классификация U_r-множеств для тригонометрической системы и для системы Уолша.

2. Теория Райхмана о формальном произведении рядов распространена на случай рядов Уолша.

3. Подробно изучены свойства ядер и приведенных ядер нуль-рядов Уолша и нуль-рядов по системе Виленкина–Джафарли.

4. Получены новые результаты о счетном объединении замкнутых U_r-множеств ($r > 2$) для системы Уолша и для системы Виленкина–Джафарли.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

1. Четвертая Международная научная конференция «Моделирование нелинейных процессов и систем» (MNPS - 2019), Москва, Россия, МГТУ «СТАНКИН», 10–13 декабря 2019 г.

2. Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов, Россия, 28 января–1 февраля 2020 г.

3. Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов, Россия, 31 января–4 февраля 2022 г.

4. Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов, Россия, 28 января–31 января 2024 г.

Были также сделаны сообщения на научно-исследовательском семинаре «Тригонометрические и ортогональные ряды» (руководители семинара — профессор М. И. Дьяченко, профессор Т. П. Лукашенко, профессор В. А. Скворцов, профессор А. П. Солодов), механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (многократно 2017–2026 гг.).

Публикации по теме диссертации. Автор имеет 8 работ по теме диссертации. Из них 3 работы опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М. В. Ломоносова по специальности и отрасли наук. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, основной части, состоящей из четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 66 страниц. Список литературы содержит 36 наименований.

Краткое содержание диссертации

Утверждения (теоремы, леммы) и формулы каждого параграфа имеют свою внутреннюю нумерацию. Так, например, наряду с теоремой 2.3.1 нумерацию (2.3.1) имеет первая формула в параграфе 2.3 главы 2.

В **главе 1** даны определения всех понятий, фигурирующих в работе, вместе с необходимыми пояснениями. Сообщаются известные результаты, связывающие эти понятия: теорема локализации для каждой из рассматриваемых систем функций, связь размерности Хаусдорфа множества $E \subset [0, 2\pi)$, $|E| = 0$, с длиной промежутка значений r ($r \geqslant 1$) такого, что E – U_r-множество для тригонометрической системы, аналог теоремы Валле–Пуссена для системы характеров нуль-мерных абелевых групп и др. Некоторые из известных результатов мы приводим в несколько упрощенной форме, достаточной для последующего применения в нашей работе.

В 2.1 **главы 2** вводится понятие обобщенного формального произведения рядов Уолша и с его помощью в 2.1 и 2.2 основные теоремы теории Райхмана формального произведения тригонометрических рядов распространяются на случай рядов Уолша. Именно, формальным произведением ряда Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$ с коэффициентами, стремящимися к нулю, и ряда Фурье–Уолша функции

$$\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n w_n(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n| < \infty,$$

назовем ряд Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x)$, коэффициенты которого определяются равенством

$$c_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n \oplus p} \gamma_p \,.$$

Для получения двоичного разложения числа $n \oplus p$ нужно коэффициенты двоичных разложений чисел n и p сложить покоординатно по модулю 2.

Условимся говорить, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n w_n(x)$$

быстро сходится к функции $\lambda(x)$ на множестве $E \subset [0, 1)$, если он сходится к $\lambda(x)$ на этом множестве и если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma_k$, где $\Gamma_k = \sum\limits_{n=k}^{\infty} |\gamma_n|$.

В 2.1 доказываются некоторые леммы о свойствах обобщенного формального произведения. В частности, доказано, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\gamma_n|<\infty$, то все ряды $c_n=\sum\limits_{p=0}^{\infty}a_{n\oplus p}\gamma_p$, $n=0,1,2,\ldots$, сходятся абсолютно, и $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.

В 2.2 **главы 2** доказаны следующие теоремы об обобщенном формальном произведении рядов Уолша.

Теорема 2.2.1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ *и ряд* (2.3) *быстро сходится к нулю на интервале* $(a,b)\subset[0,1)$, *причем* $\gamma_0=\gamma_0(x)$ *— ограниченная на* $[0,1)$ *функция, то подпоследовательность* $Q_{2^M}(x)$ *частичных сумм ряда* (2.4) *сходится к нулю в каждой точке интервала* (a,b).

Теорема 2.2.1′. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, *и ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n w_n(x)$ *быстро сходится к нулю на интервале* $(a,b)\subset[0,1)$, *то формальное произведение* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n w_n(x)$ *сходится к нулю в каждой точке интервала* (a,b).

Теорема 2.2.2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, *и ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n w_n(x)$ *быстро сходится к функции* $\lambda(x)$ *на* $[0,1)$, *то подпоследовательность частичных сумм* $S_{2^M}(x)$ *ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_n-\lambda(x)a_n)w_n(x)$$

сходится к нулю в каждой точке полуинтервала $[0,1)$.

При исследовании специальных вопросов теории единственности представления функций рядами необходима функция, «локализующая» свойства произвольного ряда на некотором интервале (α,β). Если α и β — двоично-рациональные числа, то для рядов Уолша такой функцией является, например, характеристическая функция полуинтервала $[\alpha,\beta)$.

В 2.3 **главы 2** «локализующая» функция $\lambda(x)$ построена для интервала с произвольными концами α и β. Именно, доказана

Теорема 2.3.1. *Для любого интервала* $(\alpha,\beta)\subset[0,1)$ *и любой последовательности* $p_n\downarrow 0$, $p_n\not\equiv 0$ *существует функция* $\lambda(x)\in L(0,1)$, *отличная от нуля во всех точках* (α,β), *равная нулю во всех точках* $[0,1)\setminus[\alpha,\beta)$ *и такая, что ее коэффициенты Фурье—Уолша*

$$\hat{\lambda}(n)=o(p_n).$$

Из теорем 2.2.2, 2.2.1′, 2.3.1 и леммы 2.3.2 выводится

Теорема 2.3.3. *Пусть ядро B нуль-ряда Уолша замкнуто. Для любой непустой порции $\delta(B)$ можно построить другой нуль-ряд Уолша, для которого его ядро совпадает с $\delta(B)$, а его приведенное ядро N_1 является множеством всюду плотным в $\delta(B)$. Каждая точка $\delta(B)$ является точкой конденсации для N_1.*

Глава 3 посвящена классификации U_r-множеств для тригонометрической системы и классификации U_r-множеств для системы функций Уолша.

В 3.1 **главы 3** устанавливается, что любое подмножество E окружности с размерностью Хаусдорфа $\dim E = 0$ является U_r-множеством для всех $r \geqslant 1$. Тем самым следующая теорема Кахана и Салема[11] распространена на случай $\dim E = \alpha = 0$.

Теорема A. (*Ж-П. Кахан, Р. Салем*). *Пусть множество E имеет размерность Хаусдорфа α, $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant r < 2/\alpha$. Тогда не существует тригонометрического нуль-ряда*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

сходящегося к нулю всюду вне E, коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^r < \infty.$$

В 3.2 **главы 3** проведена следующая классификация подмножеств окружности нулевой меры Лебега.

Утверждение 3.2.1. *Совокупность всех замкнутых множеств нулевой меры Лебега можно разбить на три класса:*

а) *U_r-множества для тригонометрической системы для всех $1 \leqslant r < \infty$;*

б) *более «толстые» множества, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r < r_0$ и M_r-множествами для всех $r_0 < r < \infty$, $r_0 \geqslant 2/\dim E$;*

в) *наиболее «толстые» из множеств меры нуль, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r \leqslant 2$ и M_r-множествами для всех $2 < r < \infty$.*

При этом, как доказывается в 3.1 **главы 3**, множества E с $\dim E = 0$ входят в класс а). Пример M-множества с $\dim E = 0$ построил Ивашев–

[11] Kahane J.–P., Salem R. Ensembles parfaits et series trigonometriques. Paris, Hermann. 1963.

Мусатов[12]. Как следует из наших результатов, это множество тоже входит в класс а). Доказывается непустота и других классов.

Для получения классификации множеств положительной меры мы используем некоторые результаты Кацнельсона[5] и Хиршмана[13] и приходим к следующему утверждению.

Утверждение 3.2.3. *Совокупность всех замкнутых множеств положительной меры Лебега можно разбить на три класса:*

а) *U_r-множества для тригонометрической системы для всех $1 \leqslant r < 2$ и M_r-множества для всех $2 \leqslant r < \infty$;*

б) *более «толстые» множества, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r < r_0 < 2$ и M_r-множествами для всех $r_0 < r < \infty$;*

в) *M_r-множества для всех $1 \leqslant r < \infty$.*

В параграфе 3.3 **главы 3** проведена классификация U_r-множеств для системы функций Уолша. При этом важную роль играет доказанная здесь следующая теорема, а также следствие из нее:

Теорема 3.3.2. *Для любого $r > 2$ существует множество $E \subset [0, 1)$, $|E| = 0$, являющееся M_r-множеством для системы Уолша.*

Следствие. Существует множество $E \subset [0, 1)$, $|E| = 0$, являющееся M_r-множеством для системы Уолша для всех $r > 2$.

При доказательстве теоремы 3.3.2 использованы построения, описанные в теореме 1 статьи Г. Геворкяна[14].

В результате мы получаем

Утверждение 3.3.3. *Совокупность всех множеств нулевой меры Лебега $E \subset [0, 1)$ можно разбить на два класса:*

а) *U_r-множества для системы Уолша для всех $1 \leqslant r < \infty$;*

б) *множества, являющиеся U_r-множествами при всех r, для которых $1 \leqslant r < r_0$, $2 \leqslant r_0 < \infty$, и M_r-множествами при всех r, для которых $r_0 \leqslant r < \infty$;*

Заметим, что приведенное выше следствие показывает, что в этой теореме случай $r_0 = 2$ может быть реализован.

[12]Ивашев–Мусатов О. С. M-множества и мера Хаусдорфа // ДАН СССР. 1962. Т. 142, N 5. С. 1001–1004.

[13]Hirschmann J. J., Katznelson Y. Sets of uniqueness and multiplicity for $l^{p,\alpha}$ // Israel J. Math. 1965. V. 3. P. 221–231.

[14]Gevorkian G. On coefficients of null-series and sets of uniqueness of trigonometric and Walsh systems // Analysis Math. 1988. V. 14. P. 219–251.

Пусть теперь $E \subset [0,1)$, $|E| > 0$. Используя принцип локализации для рядов Уолша, можно доказать, что множество E является M_r-множеством для всех $2 \leqslant r < \infty$.

С помощью теоремы 5 работы Г. Геворкяна[15] приходим к следующему утверждению.

Утверждение 3.3.5. *Совокупность всех множеств положительной меры $E \subset [0,1)$ можно разбить на три класса:*

а) *U_r-множества для системы Уолша для всех $1 \leqslant r < 2$ и M_r-множества для всех $2 \leqslant r < \infty$;*

б) *множества, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r < r_0$, $1 \leqslant r_0 < 2$ и M_r-множествами для всех $r_0 < r < \infty$;*

в) *M_r-множества для всех $1 \leqslant r < \infty$.*

Глава 4 посвящена вопросу об объединении U_r-множеств.

Теорема 4.1.1. *Объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств, $2 \leqslant r < \infty$, для системы функций Уолша является U_r-множеством для этой системы.*

В доказательстве используется

Лемма 4.1.3. *Пусть B-ядро нуль-ряда Уолша. Тогда существует совершенное множество B, $B \subset P$, любая непустая порция $\delta(P)$ которого содержит непустую порцию $\delta(B)$.*

Группу характеров Γ для группы $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел образует система Виленкина—Джафарли

$$\gamma_n(g) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=0}^{s} \frac{t_k}{p^{k+1}} \sum_{j=0}^{s} x_j p^j\right).$$

Здесь $g \in \mathbb{Z}_p$, $g = (x_0, x_1, \ldots, x_j, \ldots)$, $n = \sum\limits_{k=0}^{s} t_k p^k$, $0 \leqslant t_k \leqslant p-1$.

Теорема 4.2.1. *Объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств, $2 < r < \infty$, для системы Виленкина—Джафарли является U_r-множеством для этой системы.*

Доказательство теоремы 4.2.1 предваряет несколько лемм.

[15] Геворкян Г. Г. О множествах единственности для некоторых ортогональных рядов // Известия АН Арм. ССР. 1983. 18. С. 448–475.

Лемма 4.2.2. *Ядро Дирихле для системы Виленкина–Джафарли удовлетворяет равенству*

$$D_{p^s}(g) = \begin{cases} p^s, & \text{если } g \in G_s, \\ 0, & \text{если } g \in \mathbb{Z}_p \backslash G_s. \end{cases}$$

Лемма 4.2.3. *Пусть $2 \leqslant r < \infty$, измеримое множество $E \subset \mathbb{Z}_p$ и является U_r-множеством для системы характеров группы $\mathbb{Z}_p$. Тогда мера Хаара множества E равна нулю.*

Лемма 4.2.4. *Пусть $\delta(B)$ — непустая порция ядра B нуль-ряда Виленкина–Джафарли, N — приведенное ядро этого нуль-ряда. Существует другой нуль-ряд Виленкина–Джафарли, для которого соответсвенно ядром и приведенным ядром являются порции $\delta(B)$ и $\delta(N)$ ядра и приведенного ядра исходного нуль-ряда.*

Лемма 4.2.5. *Приведенное ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли является несчетным множеством.*

Лемма 4.2.6. *Приведенное ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли является множеством второй категории на себе.*

Лемма 4.2.7. *Пусть B—ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли. Существует замкнутое множество P, $B \subset P$, любая непустая порция $\delta(P)$ которого содержит непустую порцию $\delta(B)$.*

В параграфе 4.3 **главы 4** изучаются некоторые проблемы, связанные с объединением U_r-множеств для тригонометрической системы функций.

Аналоги доказанных в параграфах 4.1 и 4.2 теорем об объединении U_r-множеств для системы Уолша и системы Виленкина–Джафарли мы сможем получить и для тригонометрической системы, но лишь при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты тригонометрического ряда.

Рассмотрению этих условий и посвящен параграф 4.3.

Формальным произведением тригонометрических рядов $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$ называется ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n e^{inx},$$

коэффициенты которого определяются равенством

$$K_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \gamma_{n-k}.$$

Сложности с проблемой объединения U_r-множеств для тригонометрической системы связаны с тем, что при доказательстве теоремы 4.1.1 достаточно воспользоваться тем фактом, что коэффициенты формального произведения ряда Уолша и полинома Уолша принадлежат l^p, если коэффициенты исходного ряда из l^p. Аналогичный факт используется и при доказательстве теоремы 4.2.1. Но для тригонометрической системы неясно, вытекает ли из условия $c_n \in l^p$ тот факт, что и $K_n \in l^p$. Однако, некоторые дополнительные предположения о поведении коэффициентов c_n позволяют сделать заключение, что $K_n \in l^p$. (Отметим, что здесь и всюду в дальнейшем мы позволяем себе для упрощения записей при упоминании какой-нибудь последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ писать просто a_n; например, $a_n \in l^p$ будет обозначать $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^p$.)

Мы вводим в рассмотрение вспомогательную последовательность a_n, определяемую соотношением $a_{|n|} = \max\limits_{|k| \geqslant |n|} |c_k|$, и доказываем, что если последовательность $a_n \in l^p$, то и $K_n \in l^p$ (следствие из Утверждение 4.3.1).

Далее мы показываем, что одно лишь условие $c_n \in l^p$ не гарантирует, что $a_n \in l^p$. Рассматривая случай $n \geqslant 0$, при котором $a_n \equiv \max\limits_{k \geqslant n} |c_k|$, мы сначала устанавливаем справедливость следующего утверждения:

Утверждение 4.3.2. *Пусть $c_n \in l^p$, $p \geqslant 2$; $|c_{m_n}|$ — подпоследовательность последовательности $|c_n|$, состоящая из всех таких элементов последней, для которых $|c_{m_n}| > |c_k|$, если $k > m_n$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r^p = |c_{m_1}|^p + \sum_{n=1}^{\infty} (m_n - m_{n-1}) |c_{m_n}|^p.$$

С помощью этого утверждения построен пример последовательности $c_n \in l^p$, $p \geqslant 2$, для которой $a_n \notin l^p$. Однако при этом $K_n \in l^p$. Это следует из Утверждения 4.3.3, которое, при тех же обозначениях, формулируется так:

Утверждение 4.3.3. *Пусть $p \geqslant 2$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{m_n}|^p < \infty$, $c_k = 0$, если $k \neq m_n$. Тогда $K_n \in l^p$.*

Приведенные выше утверждения показывают, что условие $a_n \in l^p$ является лишь достаточным для $K_n \in l^p$, но не является необходимым.

Далее мы описываем достаточно широкий класс последовательностей $c_n \in l^p$, $p > 1$, для которых и $a_n \in l^p$ (а, значит, и коэффициенты формального произведения $K_n \in l^p$). А именно, доказано следующее условие, являющееся достаточным для принадлежности a_n пространству l^p.

Утверждение 4.3.4. *Пусть последовательность c_n имеет монотонную мажоранту d_n, и $d_n \in l^p$, $p > 1$. Тогда и последовательность $a_n \equiv \max_{k \geqslant n} |c_k|$ принадлежит пространству l^p.*

В результате мы приходим к следующему выводу: если априори потребовать, что у последовательности c_n существует монотонная мажоранта из пространства l^p, то для тригонометрической системы справедлива теорема об объединении U_r-множеств.

Заключение

В диссертации введено и исследовано обобщенное формальное произведение (ОФП) для рядов Уолша; тем самым теория Райхмана ФП для тригонометрических рядов распространена на ряды Уолша; с помощью ОФП изучены свойства ядер и приведенных ядер нуль-рядов Уолша; изучены свойства ядер и приведенных ядер нуль-рядов по системе Виленкина–Джафарли.

Проведена классификация U_r-множеств для тригонометрической системы и для системы Уолша.

Установлено, что объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств ($r > 2$) для системы Уолша является U_r-множеством для этой системы; установлено, что объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств ($r > 2$) для системы Виленкина–Джафарли является U_r-множеством для этой системы; изучена связь суммируемости коэффициентов тригонометрического ряда и суммируемости коэффициентов его формального произведения на абсолютно сходящийся ряд.

Перспективы дальнейших исследований связаны с распространением полученных результатов на случай общих нуль-мерных групп. Предполагается, в частности, установить связи размерности Хаусдорфа множества на такой группе с наличием нуль-ряда по системе характеров таких групп (аналог Теоремы А из главы 3 диссертации).

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору МГУ Валентину Анатольевичу Скворцову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М. В. Ломоносова по специальности и отрасли наук

[1] Козловская Т. Д. О произведении рядов Уолша–Пэли и его применении // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. – 2002. – № 3. С. 16–21.
Импакт-фактор 0,467 (РИНЦ) / 0.3 п.л.
Kozlovskaya T. D. On the product of Walsh–Paley series and its application // Moscow University Mathematics Bulletin – 2002. –Vol. 57, No. 3. – P. 16–21.
Импакт-фактор 0,607 (SJR) / 0.3 п.л.

[2] Козловская Т. Д. Об объединении U_p-множеств для системы характеров группы целых p-адических чисел // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. – 2019. – № 4. С. 42–46.
EDN: LDZOYX, Импакт-фактор 0,467 (РИНЦ)
Kozlovskaya T. D. The Union of Ur-sets for the Characters System of the Group of p-adic Integers // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2019. –Vol. 74, No. 4. – P. 159–162.
Импакт-фактор 0,607 (SJR) / 0.3 п.л.

[3] Козловская Т. Д. О множествах единственности для рядов Уолша–Пэли // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. – 2020, № 3. С. 56–58.
EDN: QZRNVF, Импакт-фактор 0,467 (РИНЦ)
Kozlovskaya T. D. On uniqueness sets for Walsh–Paley series // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2020. –Vol. 75, No. 3. – P. 66–68.
Импакт-фактор 0,607 (SJR) / 0.3 п.л.

Иные публикации

[4] Козловская Т. Д. О формальном произведении рядов Уолша // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем / Под ред. Л. А. Уваровой. М.: Изд-во «Станкин». 2001. N 4. С. 22–28.

[5] Козловская Т. Д. Классификация U_p-множеств для системы функций Уолша // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем / Под ред. Л. А. Уваровой. М.: Изд-во «Янус-К». 2004. N 7. С. 28–30. ISBN 5-8037-0175-0.

[6] Козловская Т. Д. Об одной числовой последовательности // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем / Под ред. Л. А. Уваровой. М.: Изд-во «Янус-К». 2007. N 10. С. 14–15. ISBN 978-5-8037-0943-5.

[7] Козловская Т. Д. Об U_p-множествах для системы функций Уолша // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2012. N1 (18). С. 85–88. ISSN 2072-3172.

[8] Козловская Т. Д. О коэффициентах формального произведения тригонометрических рядов // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем / Под ред. Л. А. Уваровой. М.: Изд-во «Янус-К» 2016. N17. С. 98–102. ISBN 978-5-8037-09684-7.