

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Галиев Рамзиль Раушанович

**Оптимизация режима затягивания частоты
полупроводникового лазера высокочастотным
микрорезонатором**

Специальность 1.3.2

«Приборы и методы экспериментальной физики»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Биленко Игорь Антонович

Москва — 2021

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Оптимизация стабилизации лазера затянутого на высокодобротный микрорезонатор	18
1.1 Введение	18
1.2 Эффект затягивания модель и основные параметры	19
1.3 Подавление ширины линии частоты иллучения лазера	24
1.3.1 Режим с нулевой фазой	25
1.3.2 Случай с фиксированной фазой затягивания и случай фиксированного обратного рассеяния	27
1.3.3 Оптимальная фаза затягивания	28
1.3.4 Реализация оптимального режима	34
1.3.5 Ограничения модели и нелинейные эффекты	36
1.4 Оптимизация в режиме нулевой фазы	38
1.5 Оптимальная фаза затягивания	40
1.6 Вывод	42
Глава 2. Затягивание частоты лазера на микрорезонатор с дополнительной призмой и зеркалом	49
2.1 Введение	49
2.2 Схема затягивания с дополнительной призмой и зеркалом	50
2.3 Лазер, стабилизированный затягиванием на резонатор с дополнительным зеркалом	52
2.4 Модель затягивания с зеркалом	57
2.5 Оптимальные режимы при ограничении уровня обратной волны	60
2.6 Оптимальный режим при ограничении нелинейных эффектов	63
2.7 Заключение	66
Глава 3. Коллапс спектра, узкая ширина линии и эффект Богатова в диодных лазерах, затянутых на микрорезонаторы	71

3.1	Введение	71
3.2	Эксперимент	74
3.2.1	Экспериментальная установка	74
3.2.2	Ширина линии затянутого лазера	77
3.2.3	Многомодовый режим затягивания	80
3.3	Модель	80
3.4	Модель лазера с оптической обратной связью	82
3.5	Спектр излучения затянутого лазера	84
3.6	Вывод	87
Глава 4. Оптимизация калибровки перестраиваемого лазера		
	частотной гребенкой	90
4.1	Введение	90
4.2	Модель	91
4.3	Вывод	95
	Заключение	96
	Список литературы	104
	Список рисунков	123
	Список таблиц	130

Введение

Затягивание - это динамическое явление, представляющее собой стабилизацию частоты излучения генератора высокодобротным пассивным резонатором, позволяющим осуществлять частотно-фильтрованную когерентную обратную связь с резонатором генератора. Например, затягивание частоты полупроводникового лазера на микрорезонатор с высокой добротностью может привести к существенному подавлению фазовых шумов и соответствующему уменьшению ширины линии генерации лазера на несколько порядков. Это явление широко изучалось в экспериментах и были получены впечатляющие результаты, в том числе и уменьшение ширины линии менее 1 Гц, но детальной теоретической модели, позволяющей как широко использовать эту методику в различных приложениях, так и оптимизировать ее для дальнейшего улучшения характеристик источников лазерного излучения, не существует. В данной работе разработана такая теория, а также детально проанализированы возможные режимы, реализующиеся при затягивании одночастотных и многочастотных лазеров высокодобротными микрорезонаторами.

В течение многих лет эффект затягивания используется в радиофизике, радиоинженерии и микроволновой электронике с целью улучшения спектральной чистоты устройств [1–11]. Возможность стабилизации лазерных источников эффектом затягивания позволяет использовать данный эффект в различных практических приложениях, включая спектроскопию высокого разрешения и высокоточную метрологию.

Оптический эффект затягивания интенсивно изучался в течение последних тридцати лет. Первоначально было показано, что добавление дополнительного частично прозрачного зеркала на выходе лазера Фабри-Перо может привести к уменьшению шума лазера [12–17]. Однако эта схема стабилизации имеет существенные ограничения из-за динамической неустойчивости, возникающей при достаточно сильной оптической обратной связи. Обратная связь по относительной мощности на уровне 10^{-4} способна дестабилизировать систему.

Нестабильность может быть уменьшена, если обратная связь является частотно-селективной. Привязка линии генерации лазера к режиму с высокой добротностью внешнего резонатора обеспечивает быструю частотно-селективную

оптическую обратную связь, что приводит к улучшенной стабилизации частоты лазера [18–22]. Эта конфигурация динамически стабильна и может производить когерентный свет, даже когда относительная обратная связь по мощности превышает десятки процентов. Первоначально она была продемонстрирована с вакуумными кольцевыми резонаторами [18]. Совсем недавно она была изучена с монолитными резонаторами, такими как резонаторы полного внутреннего отражения [22]. Было показано, что затягивание приводит к уменьшению фазового и амплитудного шума [18;23], позволяет перестраивать частоту лазерного излучения [22], а также способствует эффективному удвоению частоты [22]. Ширина линии лазера может быть уменьшена на шесть порядков, если использовать микрорезонатор с высокой добротностью [24].

Теория явления затягивания была разработана для больших оптических резонаторов почти тридцать лет назад [20;23]. Анализ показал, что для достижения наилучших характеристик необходимо иметь высокую добротность оптических мод и высокостабильный оптический путь. К сожалению, метод стабилизации с использованием больших оптических резонаторов редко использовался из-за чувствительности резонаторов к внешним воздействиям.

Микрорезонаторы с модами шепчущей галереи (МШГ) [25–35], сочетающие высокую добротность в широком спектральном диапазоне с малыми размерами и низкой чувствительностью к окружающей среде, оказались подходящими элементами для реализации подхода затягивания. Недавние исследования продемонстрировали возможность использования высокодобротных МШГ для пассивной стабилизации одночастотных полупроводниковых лазеров [24; 36–40] или даже многочастотных [41–44] полупроводниковых лазеров и получения субкилогерцовых ширин линий. Некоторые из лазеров стали коммерческими продуктами [45]. Последние исследования показали возможность сборки лазеров на фотонных интегральных схемах, где микрорезонаторы с МШГ были заменены высокодобротными интегральными кольцевыми резонаторами [46–51].

Помимо метода затягивания в настоящее время известны несколько способов достижения стабильной частоты генерации и узкой ширины линии генерации лазерных источников. Одной из возможностей одновременного достижения высокой мощности и узкой ширины линии является передача узкого частотного спектра хорошо стабилизированного, но маломощного основного лазера в мощный ведомый диодный лазер широкого спектра с использованием оптической

инжекции [52]. Однако такие системы довольно сложны и очень чувствительны к условиям окружающей среды, что значительно сокращает возможность их использования. Уменьшение ширины линии может быть также достигнуто путем стабилизации лазерного диода внешним резонатором с высокой добротностью. Активная стабилизация, такая как метод Паунда-Древера-Холла (ПДХ) [53–55], является наиболее часто используемым методом, требующим оптической модуляции и электронной схемы обратной связи. Стабилизация боковой линией [56] обеспечивает стабилизацию без оптической модуляции, но требует стабильной интенсивности лазера и эталонного уровня. Пассивная стабилизация полупроводниковых лазеров использует резонансную оптическую обратную связь от внешнего оптического элемента [14–16; 18; 22; 57; 58], то есть дифракционные, брэгговские или голографические решетки в конфигурации Литтрова или Литтмана [59–63], высокодобротные резонаторы, такие как резонаторы Фабри-Перо [19; 20; 64; 65] и их комбинации [66; 67]. Высокодобротные резонаторы ФП, успешно используемые для многих применений лазерной стабилизации, являются сравнительно громоздкими, в то время как высококачественные зеркальные покрытия специфичны для выбранной длины волны. Эти проблемы отсутствуют для микрорезонаторов МШГ [27; 32; 68; 69], которые хорошо совместимы с обычными лазерными диодами. Современные микрорезонаторы МШГ изготавливаются из различных стеклянных и кристаллических материалов, таких как кварц, щелочноземельные фториды (CaF_2 , MgF_2 , BaF_2 , SrF_2), алмаз, ВВО, LiNbO_3 и т.д. Они обладают сверхвысокой добротностью в широком спектральном диапазоне [70; 71]. При применении микрорезонаторов МШГ для стабилизации лазеров используется эффект резонансного рэлеевского рассеяния [72; 73] на внутренних и поверхностных неоднородностях, когда доля входящего излучения в резонансе с частотой МШГ моды отражается обратно на лазер, что приводит к известному в радиофизике эффекту затягивания. Известно, что если к одноконтурному радиочастотному генератору подключается резонансная нагрузка с добротностью выше, чем у генератора, то стабильность результирующей частоты генерации будет выше. Коэффициент стабилизации при этом может составлять много порядков и связан с отношением добротности высокодобротного резонатора к добротности генератора. При связи лазера с микрорезонатором этот эффект обеспечивает быструю оптическую обратную связь и может привести к значительному уменьшению ширины линии лазера.

Впервые продемонстрированный с резонаторами из плавленого кварца [74] этот метод теперь активно применяется для управления спектральными характеристиками, например, для сужения ширины линии и стабилизации частоты, различных лазерных источников [37; 75; 76], в том числе волоконно-кольцевых [77] и DFB-лазеров [38]. Отметим, что за последнее десятилетие был достигнут большой прогресс в применении этой методики: в 2010 году докладывалось об уменьшении ширины линии полупроводникового лазера с внешним резонатором в 10^4 раз и была достигнута мгновенная ширина линии менее 200 Гц [38], а в 2015 году ширина линии уменьшилась в 10^7 раз и достигла суб-Гц уровня [76].

Работы в этом направлении продолжают и в последние годы и можно выделить ряд основных направлений. Во-первых, методика, ранее использовавшаяся, в основном, для телекоммуникационных длин волн, распространяется и на другие спектральные диапазоны, видимый, УФ и ИК. Например, была достигнута суб-кГц ширина линии в полупроводниковом лазере с внешним резонатором на длине волны 698 нм (добротность микрорезонатора превышала 10^{10}) [78]. Также был продемонстрирован полупроводниковый лазерный диод Фабри-Перо из GaN, работающий на длине волны 446.5 нм, с шириной линии менее 1 МГц [42]. Уменьшение ширины линии достигалось путем затягивания частоты лазера МШГ резонатором из фторида магния с добротностью 10^9 . Затягивание обеспечивало работу лазера в режиме с одной продольной модой. Отметим, что нагруженная добротность резонаторных мод превысила 10^9 на длине волны 446.5 нм, что на порядок больше, чем добротность, наблюдаемая в резонаторах МШГ с ультрафиолетовым излучением. Также изучались характеристики лазерного диода Фабри-Перо из нитрида галлия, работающего на длине волны 370 нм, затянутого высокодобротным резонатором МШГ из фторида магния [44]. Было показано, что состояние связи сильно зависит от частотной отстройки между модами лазерного резонатора и микрорезонатора МШГ. Оптимизируя эту отстройку, можно наблюдать монохроматическое лазерное излучение с шириной линии менее 100 кГц. Измеренная в этом режиме добротность резонатора МШГ превысила 10^9 . Изучалась также возможность стабилизации лазеров в ИК диапазоне. В частности, исследовалась стабилизация микрорезонатором МШГ полупроводникового лазера с распределенной обратной связью на длине волны 2.05 мкм [39]. Измеренный частотный шум стабилизированного лазера не превышал величину $100 \text{ Гц}/\text{Гц}^{1/2}$ в диапазоне от

10 Гц до 1 Гц. Мгновенная ширина линии уменьшилась на 4 порядка по сравнению со свободным лазером и составила 15 Гц при времени измерения 0.1 мс. Интегральная ширина линии составила 100 Гц. Интересные результаты были получены для полупроводникового лазера с распределенной обратной связью, работающего на длине волны 2 мкм, и затянутого высокодобротным кристаллическим резонатором МШГ [40]: частотный шум лазера был ниже $50 \text{ Гц}/\text{Гц}^{1/2}$ при 10 Гц, достигая $0.4 \text{ Гц}/\text{Гц}^{1/2}$ при 400 кГц. Мгновенная ширина линии лазера улучшилась почти на 4 порядка по сравнению со свободным лазером и составила 50 Гц при времени измерения 0,1 мс. Девиация Аллана частоты лазера составила порядка 10^{-9} от 1 до 1000 с. Измеренная чувствительность лазера к ускорению составила менее $5 \times 10^{-11} \text{ г}^{-1}$ в полосе частот 1–200 Гц, а тепловая чувствительность не превышает $12 \text{ МГц}/^\circ\text{C}$. Кроме этого, изучалась возможность стабилизации квантово-каскадного лазера на длине волны 4.3 мкм, и было показано уменьшение ширины линии до уровня порядка 10 кГц для времен интегрирования от 1 мс до 1 с [79]. Добротность микрорезонатора из фторида кальция на этой длине волны была порядка 2.2×10^7 . Также была продемонстрирована возможность перестройки частоты путем управления температурой резонатора. Отметим, что добротность кристаллических микрорезонаторов из многих стандартных материалов, в том числе и фторидов магния и кальция, падает в среднем ИК из-за многофононного поглощения [80], что ограничивает применимость этих материалов для стабилизации лазеров в данном диапазоне. Этому недостатка лишены микрорезонаторы из кристаллического кремния, у которого двухфотонное поглощение отсутствует для длин волн более 2.3 мкм, а многофононное – для длин волн менее 7 мкм. Этот материал также обладает высокой нелинейностью, что может быть использовано для генерации частотных гребенок стабилизированным лазером. Ранее известная из литературы добротность кремниевых микрорезонаторов не превышала 2.2×10^7 , что было на два порядка меньше, чем добротность микрорезонаторов из кристаллических флюоридов. Однако разработанная недавно революционная методика, основанная на алмазном точении и последующей асимптотической полировке с использованием коллоидного раствора диоксида кремния с зерном 0-0.07 мкм вместо алмазной суспензии, позволила достичь добротности 1.2×10^9 на длине волны 1550 нм, что делает кремниевые микрорезонаторы весьма перспективными для стабилизации лазерных источников в среднем ИК [35].

Актуальной темой исследований является улучшение стабильности микрорезонаторов к различным флуктуациям, в том числе температуры и давления, и попытки достичь предельного уровня стабильности частоты, определяемого фундаментальными термодинамическими шумами [28]. Как показали предыдущие исследования тепловых флуктуаций в микрорезонаторах МШГ [81], достижимый уровень стабильности частоты для резонаторов мм размера может быть лучше, чем 10^{-13} при времени интегрирования 1 с. Важным направлением исследований стала разработка методов компенсации теплового расширения микрорезонаторов из-за термо-механических флуктуаций. Например, резонаторы МШГ обычно характеризуются относительной частотной термочувствительностью порядка $10^{-5}/\text{C}$. Температуру окружающей среды следует стабилизировать на уровне мкК, чтобы ширина линии лазера на основе резонатора составляла менее 10 кГц в течении 1 с. Для такой термостабилизации нежелательны высокое энергопотребление и большой размер упаковки. Проблема может быть решена с помощью термокомпенсированного резонатора. Термокомпенсация достигается за счет использования специально разработанной конструкции композитного резонатора. Для микрорезонаторов из фторида магния была разработана сэндвичевая структура со слоями из зеродура, что привело к уменьшению чувствительности к флуктуациям в 7 раз [82]. Для фторида кальция применение композитной структуры со слоями зеродура обеспечивало уменьшение чувствительности к флуктуациям в 3 раза. Однако, для фторида кальция более перспективным оказалось создание композитной структуры со слоями из керамики с отрицательным коэффициентом теплового расширения [83]. Такой подход позволил уменьшить чувствительность к флуктуациям более чем в 100 раз, что позволило при нормальном атмосферном давлении достичь уровня стабильности частоты 10^{-12} при времени интегрирования 1 с [84]. Для дальнейшего улучшения стабильности перспективными являются интеграция лазеров в вакуумированных термостабилизированных корпусах, внедрение активной стабилизации оптического пути и использование высокодобротных термокомпенсированных резонаторов. Для термокомпенсированного микрорезонатора из фторида магния в жесткой вакуумированной оболочке была получена ширина линии менее 25 Гц и относительная стабильность частоты 1.67×10^{13} (5.0×10^{12}) для времени интегрирования 0.1 (1.0) с. для частоты 191 ТГц [82]. Разрабатываются также и активные методы термоста-

билизации. В частности, с помощью кросс-поляризованной двухмодовой температурной стабилизации для двулучепреломляющего высокодобротного резонатора МШГ улучшена долговременную стабильность в 51 раз при времени интегрирования 1000 с [85]. Достигнут уровень неустойчивости температуры резонатора в 10 мкК даже до времени интегрирования 1000 с, что позволяет этому компактному оптическому резонаторному модулю служить в качестве эталона частоты в потенциальных приложениях для метрологии, синхронизации и передачи частоты. Тенденцией последнего времени стало использование помимо стандартных кристаллических микрорезонаторов интегральных микрорезонаторов, например, из нитрида кремния. Это позволяет существенно повысить технологичность процесса изготовления лазера и кардинально уменьшить размеры создаваемых устройств. Использование интегральных микрорезонаторов из нитрида кремния позволяет перейти к полностью интегральным КМОП-совместимым элементам и использовать элементы кремниевой фотоники. Ранее добротность интегральных микрорезонаторов не превышала 10^6 , что было существенно меньше, чем добротность кристаллических микрорезонаторов. Однако за последние годы были разработаны новые технологии, позволившие поднять добротность интегральных структур. Группой Спенсера были продемонстрированы кольцевые резонаторы из сверхтонкой пленки (40 нм) из нитрида кремния с добротностью, достигающей 8.0×10^7 [86]. Однако такие структуры отличались сильной делокализацией поля и миллиметровыми радиусами изгиба, что препятствовало их применению для создания компактных устройств фотоники. В 2016 году группой Вайнера были продемонстрированы интегральные микрорезонаторы из нитрида кремния с добротностью 1.7×10^7 и межмодовым расстоянием 24.7 ГГц [87]. Толщина волновода от 300 до 750 нм, ширина от 2 до 5 мкм. В 2017 группой Гаэты-Липсон были продемонстрированы интегральные микрокольца из нитрида кремния с добротностью 3.7×10^7 для кольца шириной 2.5 мкм и 6.7×10^7 для кольца шириной 10 мкм [88]. Радиус кольца для ширины 2.5 мкм – 115 мкм, а для ширины 10 мкм – 369 мкм. Толщина колец – 730 нм. Также были проведены оценки максимальной добротности, определяемой только потерями в материале, которые дали величину 1.7×10^8 . Работы по созданию высокодобротных микрорезонаторов из нитрида кремния также велись и в группе Кишпенберга, где также была достигнута добротность, превышающая 10^7 [89; 90]. Также были созданы эффективные методы связи с такими

структурами [91; 92]. Также разрабатывалась технология изготовления интегральных микрорезонаторов из оксида кремния. В частности, в группе Вахалы были продемонстрированы интегральные микрорезонаторы на чипах из кремния с добротностью, превышающей 10^8 [93] и контролируемой дисперсией [94]. В основном, такие интегральные структуры используются для создания компактных генераторов оптических гребенок на чипе [92; 95–99]. Однако в ряде работ было отмечено, что помимо генерации гребенки микрорезонатор использовался и для управления шириной линии лазера. В частности, будучи использованным в качестве лазерного резонатора, высокодобротный интегральный микрорезонатор из нитрида кремния позволил достичь ширины линии интегрального лазерного источника в 13 кГц на длине волны 1550 нм [100]. Комбинация из усиливающего чипа и нескольких интегральных кольцевых микрорезонаторов позволила создать интегральный лазер с мгновенной шириной линии 290 Гц [101]. Связь лазерного диода Фабри-Перо и интегрального микрокольцевого резонатора позволила уменьшить ширину линии в 111 раз и получить линию генерации с шириной 8 кГц и перестройкой 17 нм [47]. Кроме этого, как было показано в работе [95], использование интегрального микрорезонатора позволило преобразовать спектр излучения лазерного диода из многочастотного в одночастотный и сузить ширину линии излучения более чем в 1000 раз до суб-кГц.

Несмотря на отличные экспериментальные результаты, систематический анализ оптимальных параметров затягивания с использованием МШГ еще не проводился. В предварительных исследованиях [102; 103] рассматривались упрощенные модели, не учитывающие всех параметров сложной системы. В данной была разработана детальная модель затягивания частоты лазера на высокодобротный резонатор, учитывающая все ключевые параметры экспериментальной установки затягивания. Подробно изучен эффект затягивания для широкого диапазона параметров затягивания и показали, что существует глобальный оптимум для эффективного затягивания.

Целью данной работы является разработка эффективных теоретических моделей, точно описывающих явление стабилизации одночастотных и многочастотных лазерных источников при их затягивании высокодобротными микрорезонаторами, поиск новых оптических схем и выявление оптимальных режимов, обеспечивающих наилучшее подавление фазовых шумов в стабилизированных лазерах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи:**

1. Разработать оригинальную теоретическую модель для описания эффекта затягивания частоты многочастотного лазера на высокодобротный микрорезонатор и сравнить полученные численные результаты с имеющимися экспериментальными данными.
2. Выявить параметры системы, влияющие на эффективность стабилизации лазерных источников, затянутых на высокодобротные микрорезонаторы. Определить оптимальные параметры, обеспечивающие наибольшее подавление фазовых шумов затянутого лазера.
3. Проанализировать возможность использования дополнительных оптических элементов для расширения пределов применимости метода стабилизации лазера путем затягивания его на высокодобротный микрорезонатор. Определить особенности и оптимальные параметры такой системы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Предложенная модель взаимодействия многочастотного полупроводникового лазера и оптического микрорезонатора, содержащая пять параметров, позволяет оптимизировать режим затягивания с учётом нелинейных эффектов в микрорезонаторе для достижения наилучшей стабилизации полупроводникового лазера и минимальной ширины линии генерации до 300 Гц.
2. Предложенная модель взаимодействия многочастотного полупроводникового лазера и оптического микрорезонатора позволяет настроиться на режим затягивания нескольких мод лазера, каждая из которых имеет узкую ширину линии, при этом не затянутые моды лазера подавлены на 35 дБ.
3. Предложенный метод управления характеристиками обратной волны с помощью дополнительной призмы и зеркала позволяет гибко контролировать процесс затягивания, что обеспечивает возможность получения минимальной ширины линии генерации при фиксированных параметрах микрорезонатора.
4. В оптимальном режиме затягивания частоты полупроводникового лазера на микрорезонатор с модами «шепчущей галереи» продемонстриро-

вана генерация когерентных (солитонных) керровских частотных гребенок

5. Предложенная модель калибровки перестраиваемого лазера частотной гребенкой позволяет найти оптимальное соотношение скорости перестройки частоты и ширины полосы узкополосного фильтра для разных типов фазового шума и узкополосного фильтра, обеспечивающего наивысшую точность измерения частоты лазера.

Научная новизна:

1. Впервые продемонстрирован метод создания мощного одночастотного источника когерентного излучения на основе многочастотного полупроводникового лазера в режиме затягивания.
2. Разработана оригинальная модель для описания эффекта затягивания частоты многочастотного лазера на высокочастотный микрорезонатор.
3. Продемонстрированы и проанализированы новые типы диодных лазеров в режиме затягивания, работающих одновременно на нескольких длинах волн с узкой шириной линии.
4. Впервые выявлены параметры системы, влияющие на эффективность стабилизации лазерных источников, затянутых на высокочастотные микрорезонаторы.
5. Впервые определены оптимальные режимы и параметры системы, обеспечивающие наиболее эффективную стабилизацию лазера в зависимости от величины обратной связи с учётом нелинейных эффектов в микрорезонаторе.
6. Разработан оригинальный метод увеличения эффективности затягивания и улучшения шумовых характеристик лазера. Предложена модифицированная схема затягивания частоты лазера на высокочастотный оптический микрорезонатор с дополнительной призмой и зеркалом, в которой уровень оптической обратной связи регулируется настройкой связи между дополнительной призмой и резонатором.
7. Разработана оригинальная модель для описания эффекта затягивания частоты лазера на высокочастотный микрорезонатор с дополнительной призмой и зеркалом.
8. Впервые определены оптимальные режимы и параметры схемы затягивания с дополнительной призмой и зеркалом, обеспечивающие наи-

более эффективную стабилизацию лазера в зависимости от величины обратной связи с учетом нелинейных эффектов в микрорезонаторе.

Научная и практическая значимость Для многих актуальных практических приложений необходимы мощные компактные источники лазерного излучения с малой шириной линии. Зачастую существующие на сегодняшний день одночастотные лазеры из-за своих конструктивных особенностей, обеспечивающих одночастотный режим генерации, обладают недостаточной мощностью (несколько десятков милливатт). При этом мощность представленных на рынке многочастотных лазерных диодов составляет несколько сотен милливатт, что делает их привлекательными объектами исследований. В данной работе впервые предложен метод создания мощного одночастотного источника когерентного излучения на основе многочастотного лазерного диода, работающего в режиме затягивания модой высокочастотного микрорезонатора МШГ. Также разработана модель затягивания частоты лазера на высокочастотный микрорезонатор, которая, с одной стороны, позволяет глубже понять основные физические особенности затягивания, а с другой стороны, позволяет повысить его эффективность. Разработанная модель также проясняет фундаментальные ограничения на ширину линии затянутых лазеров.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются высокочастотные кристаллические микрорезонаторы с модами типа "шепчущей галереи" и полупроводниковые лазеры. Предметом исследования является эффект затягивания частоты лазерного диода на собственную частоту высокочастотного микрорезонатора с модами типа "шепчущей галереи", а также нелинейные эффекты в высокочастотных микрорезонаторах при накачке лазерным источником в режиме непрерывного излучения.

Методология и методы исследования. В работе использовались следующие методы: метод Рунге — Кутты для решения систем дифференциальных уравнений, метод гетеродинамирования для определения мгновенной ширины линии лазерных источников, метод квадратурного анализа спектральной плотности для характеристики уровня фазовых шумов лазерного излучения, методы Монте-Карло для исследования распределения статистик вероятностных распределений, а также общепринятые методы теоретической и экспериментальной физики.

Степень достоверности Достоверность представленных в диссертационной работе результатов подтверждается соответствием теоретических результатов и результатов численного моделирования, а также соответствием результатов численного моделирования экспериментальным данным, полученных как в работах соискателя, так и в работах других авторов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на ряде престижных всероссийских и международных конференций:

1. R. R. Galiev, N. G. Pavlov, N. M. Kondratiev, S. Koptyaev, V. E. Lobanov, A. S. Voloshin, A. S. Gorodnitskiy, and M. L. Gorodetsky//Optics Express. 2018. Vol. 26, No. 23, P. 30509-30522. Impact factor WoS 3.894
2. Ramzil R. Galiev, Nikita M. Kondratiev, Valery E. Lobanov, Andrey B. Matsko, and Igor A. Bilenko Optimization of Laser Stabilization via Self-Injection Locking to a Whispering-Gallery-Mode Microresonator//Physical Review Applied. 2020. Vol. 14, No. 1, P. 014036. Impact factor WoS 4.985.
3. Ramzil R. Galiev, Nikita M. Kondratiev, Valery E. Lobanov, Andrey B. Matsko, and Igor A. Bilenko Mirror-Assisted Self-Injection Locking of a Laser to a Whispering-Gallery-Mode Microresonator//Physical Review Applied. 2021. Vol. 16, No. 6, P. 064043. Impact factor WoS 4.985.
4. Raja A.S., Voloshin A.S., Guo H., Agafonova S.E., Liu J., Gorodnitskiy A.S., Karpov M., Pavlov N.G., Lucas E., Galiev R.R., Shitikov A.E., Jost J.D., Gorodetsky M.L., Kippenberg T.J. Electrically pumped photonic integrated soliton microcomb//Nature communications. 2019. Vol. 10., No. 1, P. 1-8. Impact factor WoS 14.919.
5. R. R. Galiev, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. B. Matsko, and I. A. Bilenko, "Optimization of Laser Frequency Stabilization via Self-Injection Locking to WGM Microresonator,"in OSA Advanced Photonics Congress (AP) 2020 (IPR, NP, NOMA, Networks, PVLED, PSC, SPPCom, SOF), L. Caspani, A. Tauke-Pedretti, F. Leo, and B. Yang, eds., OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2020), paper ITu4A.12.
6. R. R. Galiev, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. B. Matsko, and I. A. Bilenko, "Mirror-assisted tuning of laser stabilization via self-injection locking to WGM microresonator,"in Laser Applications Conference, OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2021), paper JTU1A.40

7. Ramzil R. Galiev, Nikita M. Kondratiev, Valery E. Lobanov, and Igor A. Bilenko "Optimization of a frequency comb-based calibration of a tunable laser Proc. SPIE 11552, Optical Metrology and Inspection for Industrial Applications VII, 115521J (16 October 2020)
8. R. Galiev, N. Kondratiev, V. Lobanov and I. Bilenko, "Surface and bulk scattering engineering in microresonators for enhancement of laser stabilization via self-injection locking,"2020 IEEE Photonics Conference (IPC), 2020, pp. 1-2
9. R. R. Galiev, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. B. Matsko, and I. A. Bilenko, "Frequency Stability Enhancement of Self-Injection Locked Laser,"in *Frontiers in Optics / Laser Science*, B. Lee, C. Mazzali, K. Corwin, and R. Jason Jones, eds., OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2020), paper JTh4A.2.
10. R. R. Galiev, N. G. Pavlov, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. S. Voloshin, A. S. Gorodnitskiy, S. Koptyaev, I. A. Bilenko, and M. L. Gorodetsky, "Spectrum collapse and Kerr frequency comb generation with multi-frequency laser diodes self-injection locked to high-Q optical microresonator,"in *2019 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe and European Quantum Electronics Conference*, OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2019), paper cb91.
11. R. Galiev, N. M. Kondratiev, N. G. Pavlov, V. E. Lobanov and M. L. Gorodetsky, "Bogatov effect in self-injection locked multimode diode laser: Theory and experiment,"2018 International Conference Laser Optics (ICLO), 2018, pp. 155-155,
12. Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Лобанов В.Е., Биленко И.А. Анализ поверхностного и объемного рассеяния в микрорезонаторах для усиления стабилизации лазера эффектом затягивания// Сборник трудов XII Международной конференции «Фундаментальные проблемы оптики – 2020». -С. 158-160
13. Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Лобанов В.Е., Биленко И.А "Оптимизация схемы калибровки перестраиваемого лазера на основе частотной гребенки Когерентная оптика и оптическая спектроскопия: сборник статей. – 2020. – Изд-во «ФЭН» АН РТ. – С. 40 -43

14. Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Лобанов В.Е., Биленко И.А "ОЭффективность подавления фазового шума диодного лазера затянутого на резонатор с модами шепчущей галереи Когерентная оптика и оптическая спектроскопия: сборник статей. – 2019. – Изд-во «ФЭН» АН РТ.
15. Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Павлов Н.Г., Лобанов В.Е., Городецкий М.Л. "Теория затыгивания частоты многочастного лазерного диода модой высокодобротного микрорезонатора Когерентная оптика и оптическая спектроскопия: сборник статей. – 2018. – Изд-во «ФЭН» АН РТ. – С. 54-57
16. Галиев Р.Р. и др. "Затыгивание частоты многочастного лазерного диода модой высокодобротного микрорезонатора //в сборнике Труды школы-семинара «Волны-2018». Когерентная и нелинейная оптика. - 2018.
17. Галиев Р.Р. и др. "Генерация частотной гребенки многочастотным лазером, затынутым на высокодобротный резонатор //в сборнике Труды школы-семинара «Волны-2019». Когерентная и нелинейная оптика. - 2019.

Личный вклад. Задачи исследования были сформулированы совместно с научным руководителем работы. Все изложенные в работе результаты получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. Лично автором разработана модель взаимодействия многочастотного полупроводникового лазера и оптического микрорезонатора и модель калибровки перестраиваемого лазера частотной гребенкой, а также предложены алгоритмы расчета ширины линии затынутого лазера. Автор непосредственно участвовал в анализе экспериментальных данных, подготовке основных публикаций по выполненной работе.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 17 печатном издании [А1-А17], из которых 4 - статьи [А1-А4], индексируемые в базах SCOPUS, Web of Science.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 130 страниц с 28 рисунками и 2 таблицами. Список литературы содержит 164 наименования.

Глава 1. Оптимизация стабилизации лазера затянутого на высокодобротный микрорезонатор

Эффект затягивания широко изучался в экспериментах, но детальной теоретической модели, позволяющей улучшить характеристики стабилизации, не существует. В данной главе разработана такая теория. Вводятся пять параметров, определяющих эффективность затягивания в эксперименте: эффективность обратного рассеяния, фазовую задержку между лазером и высокодобротным резонатором, частотную перестройку между лазером и высокодобротным резонатором, эффективность связи накачки, длину оптического пути между лазером и микрорезонатором. Наши расчеты показывают, что ширина линии лазера может быть уменьшена на два порядка по сравнению со случаем неоптимального затягивания. Из анализа разработанной модели получены рекомендации по экспериментальной реализации оптимального режима затягивания.

1.1 Введение

В данной главе вводятся пять основных параметров описывающих эффект затягивания частоты лазера на высокодобротный резонатор: а) коэффициент связи прямой и обратной волн, определяемая обратным рассеянием в резонаторе и соответствующей эффективностью обратной связи; б) фаза затягивания, определяемая оптическим путем между лазером и микрорезонатором и частотой режима затягивания микрорезонатора; в) оптический путь между лазером и микрорезонатором; г) перестройка частоты лазерного резонатора, определяющая рабочую точку системы, и д) эффективность связи накачки с режимом резонатора, определяемая геометрическим согласованием мод (отметим, что последние четыре параметра могут варьироваться и могут быть определены в эксперименте). Подробно изучен эффект затягивания для широкого диапазона этих параметров и показали, что существует глобальный оптимум для четырех из них. Показано, например, что увеличение коэффициента обратного рассеяния выше некоторого оптимального значения не обеспечивает

лучшей стабилизации. Также предложены рекомендации по достижению оптимальной частотной перестройки и фазы затягивания. Наш анализ показывает, что оптимизация позволяет частотный шум лазера на порядки по сравнению с неоптимально подобранными параметрами.

Данная глава организована следующим образом. Вначале представлены теоретическая модель и основные уравнения представлены. После представлены результаты аналитической и численной оптимизации системы. В конце главы представлены методы экспериментальной реализации оптимального режима затягивания и ограничения разработанной модели.

1.2 Эффект затягивания модель и основные параметры

Схематическое иллюстрация эффекта затягивания представлено на рис. 1.1, где расфокусированный лазерный луч резонансно связан с высокодобротным МШГ-резонатором. Из-за релеевского рассеяния внутри микрорезонатора [73], часть лазерного излучения резонансно рассеивается обратно (см. рис.1.1) в резонатор лазера, затягивая частоту лазерного излучения на частоту моды микрорезонатора [102].

Было показано, что эта система может быть описана нелинейным уравнением скорости (см. [102]).

$$\dot{A} + \left[\frac{\kappa_{LC}}{2} - \frac{g}{2}(1 + i\alpha_g) - i(\omega - \omega_{LC}) \right] A = \kappa_{do}B, \quad (1.1)$$

где ω_{LC} и κ_{LC} - собственная частота и коэффициент потерь резонатора лазера, κ_{do} - коэффициент связи его выходного зеркала, $g = g(|A|^2)$ - коэффициент усиления лазера, α_g - коэффициент Генри лазерной среды, ω - частота генерации лазера, A - медленно меняющаяся комплексная амплитуда лазерного поля, B - комплексная амплитуда поля, отраженного от микрорезонатора. Отраженная волна может быть описана следующим уравнением [A2]

$$B(t) = \sqrt{\Theta} \frac{2i\eta\beta}{(1 - i\zeta)^2 + \beta^2} A(t - \tau_s) e^{i\omega\tau_s}. \quad (1.2)$$

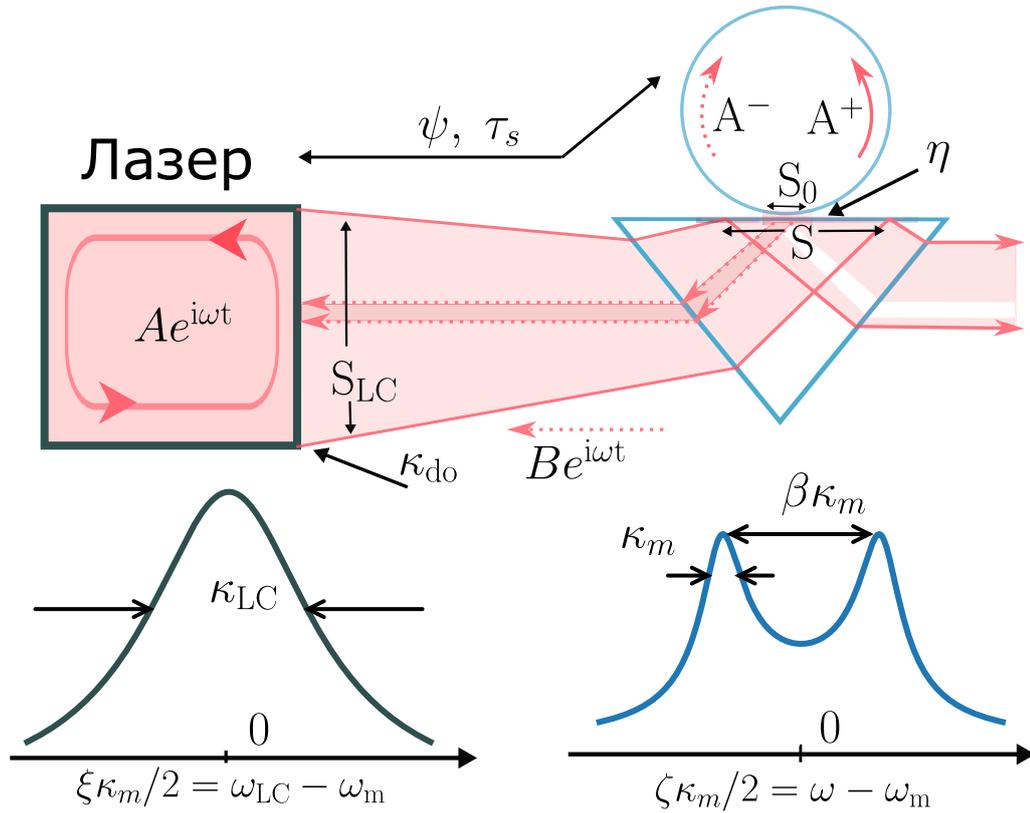


Рисунок 1.1 — Вверху: Схема затыгивания частоты лазера на МШГ резонатор с помощью призмы связи. Внизу: Резонансные кривые лазера (слева) и МШГ(справа). A – амплитуда поля генерации лазера, ω_{LC} и κ_{LC} – частота и ширина линии моды резонатора лазера, κ_{do} – коэффициент связи выходного зеркала лазера, B – обратная отраженная волна, S_{LC} и S – площадь сечения лазерного пучка в апертуре лазера и на поверхности призмы, τ_s – время прохождения обратной волны, ψ – фаза затыгивания, A^+ и A^- – амплитуды прямой и обратной волн внутри микрорезонатора, η – коэффициент связи микрорезонатора, ω_m и κ_m – частота и ширина линии мод микрорезонатора, ω – частота генерации.

Здесь коэффициент $\Theta = S_{LC}/S$, отношение площади апертуры лазера S_{LC} к конечной площади пучка S , вводится для учета перефокусировки пучка без изменения его мощности, что потребуется в дальнейшем. Второй множитель – амплитудный коэффициент отражения микрорезонатора [73], представленный в безразмерных единицах. Он включает в себя отстройку частоты колебаний лазера ω от ближайшей собственной частоты микрорезонатора $\zeta = 2(\omega - \omega_m)/\kappa_m$ (эффективная отстройка), безразмерный коэффициент связи накачки η и нормированный коэффициент расщепления мод β . Здесь ω_m и κ_m – частота моды

микрорезонатора и ширина линии нагрузки (коэффициент потерь), а τ_s - коэффициент расщепления мод. τ_s - время прохождения кругового пути от лазера до микрорезонатора.

Перестроечную кривую удобно использовать для анализа эффекта затягивания. Кривая показывает зависимость эффективной перестройки частоты ζ от отстройки частоты резонатора лазера ω_{LC} от собственной частоты микрорезонатора $\xi = 2(\omega_{LC} - \omega_m)/\kappa_m$. Кривая настройки может быть описана следующим выражением [102]:

$$\xi = \zeta + \tilde{\kappa}_{do} \frac{4\eta\beta}{\kappa_m} \frac{2\zeta \cos \bar{\psi} + (1 + \beta^2 - \zeta^2) \sin \bar{\psi}}{(1 + \beta^2 - \zeta^2)^2 + 4\zeta^2}, \quad (1.3)$$

$$\bar{\psi} = \psi + \frac{\kappa_m \tau_s}{2} \zeta, \quad (1.4)$$

где $\psi = \omega_m \tau_s - \arctan \alpha_g - 3/2\pi$ - фаза затягивания [102], определяемая временем прохождения τ_s от лазера до микрорезонатора, резонансной частотой микрорезонатора ω_m и фактором Генри α_g , $\tilde{\kappa}_{do} = \kappa_{do} \sqrt{\Theta} \sqrt{1 + \alpha_g^2}$ - это модифицированная скорость связи лазерного резонатора, а сдвиг частоты лазерного резонатора, связанный с фактором Генри, включен в ω_{LC} . Коэффициенты связи также могут быть выражены в терминах более общих коэффициентов связи $\eta = \kappa_c/(\kappa_0 + \kappa_c)$ и $\beta = 2\gamma/(\kappa_0 + \kappa_c)$, где κ_c и 2γ - связи накачки и прямой-обратной волны, а κ_0 - внутренние потери микрорезонатора ($\kappa_m = \kappa_c + \kappa_0$).

Перестроечные кривые для высоких и низких значений коэффициента расщепления мод β представлены на рис. 1.2. Важно отметить, что перестроечная кривая испытывает расщепление из-за расщепления резонанса. В данной главе показано, что расщепление влияет на процесс затягивания, и стабилизация может ухудшаться при больших значениях расщепления. Подводя итог, можно сказать, что производительность лазера в режиме затягивания определяется пятью основными параметрами: а) связью прямой и обратной волн в резонаторе β ; б) фазой затягивания ψ , определяемой оптическим путем между лазером и микрорезонатором и частотой затягивания; в) временем оптического обхода τ_s между лазером и микрорезонатором; г) отстройкой частоты резонатора-микрорезонатора ξ , и е) эффективностью связи накачки η . В дальнейшем рассматривается эффективная настройка ζ вместо нормированной разности частот между модой лазерного резонатора и МШГ, ξ , поскольку $\xi \ll 1$ в режиме затягивания.

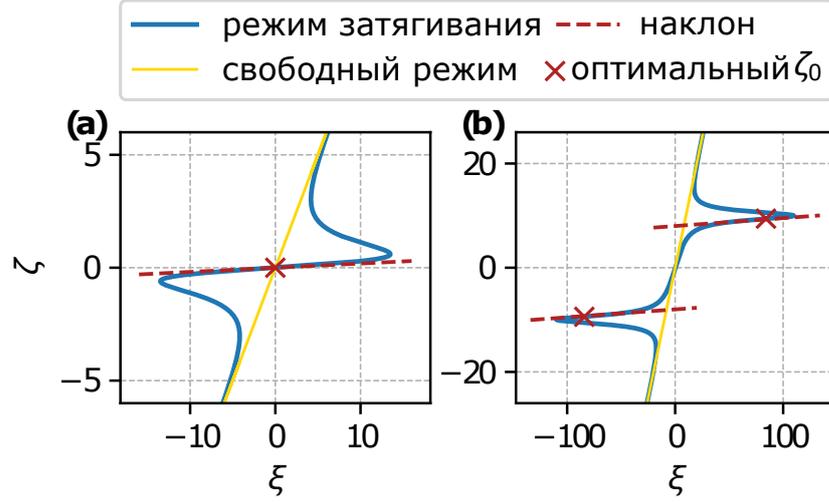


Рисунок 1.2 — Синие линии показывают перестроечные кривые для $\beta = 0.1$ (панель **a**) и $\beta = 10$ (панель **b**) в режиме затягивания ($\psi = 0$, $\eta\tilde{\kappa}_{do}/\kappa_m = 50$ и $\kappa_m\tau_s = 0.011$). Желтые линии показывают перестроечные кривые ($\zeta = \xi$) в режиме свободного лазера, красные пунктирные линии показывают наклон перестроечной кривой в оптимальной точке, а красные крестики показывают оптимальные точки $\zeta = \zeta_0$ (1.8). Все величины представлены в безразмерных единицах.

Для иллюстрации важности этих пяти параметров упрощается уравнение (1.3) до классического уравнения затягивания частоты, которое справедливо в случае оптимальной фазовой задержки между ними ($\cos\bar{\psi} = 1$ и $\omega_{LC} \simeq \omega_m$). Используя эти приближения, получается

$$\frac{\omega - \omega_{LC}}{\tilde{\kappa}_{do}} = -\frac{2\kappa_c}{\kappa_m} \frac{4\beta}{(1 + \beta^2)^2} \frac{\omega - \omega_m}{\kappa_m}. \quad (1.5)$$

Уравнение 1.5 является аналогом формулы Адлера для затягивания [104;105]. Из уравнения (1.5) сразу видно, что малое значение параметра обратного рассеяния $\beta \ll 1$, которое рассматривалось в более ранних исследованиях, включающих стабилизацию лазеров Фабри-Перо с помощью внешнего зеркала не является оптимальным. Также очевидно, что большое обратное рассеяние не является оптимальным для затягивания частоты. Эффект максимален для критической связи $2\kappa_c = \kappa_m$. Стоит отметить, что полная выходная мощность света ненулевая для критической связи, если лазерный пучок не согласован с МШГ ($S_0 < S$).

Сим.	Определение	Значения
K	коэффициент стабилизации: $\partial\xi/\partial\zeta$	0–1000
ξ	нормализованная LC перестройка: $2(\omega_{LC} - \omega_m)/\kappa_m$	-500 – 500
ζ	нормированная отстройка генерации: $2(\omega - \omega_m)/\kappa_m$	-500–500
μ	коэффициент обратного рассеяния: $2\gamma/\kappa_0$	0.01–10
β	нормализованное обратное рассеяние: $2\gamma/\kappa_m$	0.01–4
η	коэффициент связи: κ_c/κ_m	01
$\kappa_0\tau_s$	нормализованный параметр обратного пути	0–0.01
ψ	фаза блокировки: $\psi \approx \omega_m\tau_s$	0– 2π
Θ	апертура лазера – отношение площади пятна связи	0–1
ω	частота генерации системы	≈ 194 ТГц
ω_{LC}	частота лазерного резонатора (LC)	≈ 194 ТГц
ω_m	частота моды микрорезонатора	≈ 194 ТГц
κ_0	ширина внутренней линии микрорезонатора	0.1–10 МГц
κ_m	ширина линии нагрузки микрорезонатора	0.1–100 МГц
κ_c	скорость связи ($\kappa_c = \kappa_m - \kappa_0$)	0.1–100 МГц
γ	скорость обратного рассеяния	0.001–1 МГц
τ_s	время прохождения обратной связи	0.01–0.1 ns
κ_{do}	скорость связи выходного зеркала лазера	10–300 ГГц

Таблица 1 — Определение наиболее важных физических параметров, описывающих эффект затягивания частоты лазера, и их типичные значения. Верхняя часть таблицы включает безразмерные параметры модели. Нижняя часть таблицы содержит размерные параметры для облегчения сравнения с экспериментальными значениями

1.3 Подавление ширины линии частоты иллучения лазера

Ограниченная дробовым шумом ширина линии лазера уменьшается пропорционально квадрату коэффициента стабилизации [64; 106], определяемого наклоном кривой настройки $K(\eta, \beta, \zeta, \psi) = \partial\xi/\partial\zeta$. Ширины линий свободно работающего и затянутого лазера связаны как [А3]

$$\delta\omega_{\text{locked}} = \frac{\delta\omega_{\text{free}}}{K^2}. \quad (1.6)$$

Простая формула для уменьшения ширины линии была получена в [102] в условиях малого обратного рассеяния $\beta \ll 1$, нулевой фазы затягивания $\psi = 0$, резонансной настройки $\zeta = 0$ и критической связи $\eta = 0.5$. Далее проводится пяти параметрическое ($\psi, \zeta, \eta, \beta, \kappa_0\tau_s$) оптимизационное исследование коэффициента стабилизации. Взяв производную от уравнения (1.3) и подставив туда $\kappa_m = \kappa_0/(1 - \eta)$, получим:

$$\begin{aligned} K &= 1 + 4\frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0}\eta(1 - \eta)\beta\frac{a \cos \bar{\psi} + b \sin \bar{\psi}}{((1 + \beta^2 - \zeta^2)^2 + 4\zeta^2)^2}, \\ a &= -2(3\zeta^4 - 2(\beta^2 - 1)\zeta^2 - (\beta^2 + 1)^2) \\ &\quad - \frac{\kappa_m\tau_s}{2}(\zeta^6 - (3\beta^2 - 1)(\zeta^2 - \beta^2 - 1)\zeta^2 - (\beta^2 + 1)^3), \\ b &= 2\zeta(\zeta^4 - (2\zeta^2 - \beta^2 + 3)(\beta^2 + 1)) \\ &\quad - \kappa_m\tau_s\zeta(\zeta^4 - 2(\beta^2 - 1)\zeta^2 + (\beta^2 + 1)^2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

В отличие от общеизвестного мнения, увеличение обратного рассеяния, описываемого параметром β , не монотонно увеличивает коэффициент стабилизации (1.7), а приводит к его конечному насыщению. Оптимальный выбор параметров системы приводит к уменьшению ширины линии лазера на несколько порядков. Это основной результат данной главы. Далее рассматривается несколько примеров оптимизации системы.

1.3.1 Режим с нулевой фазой

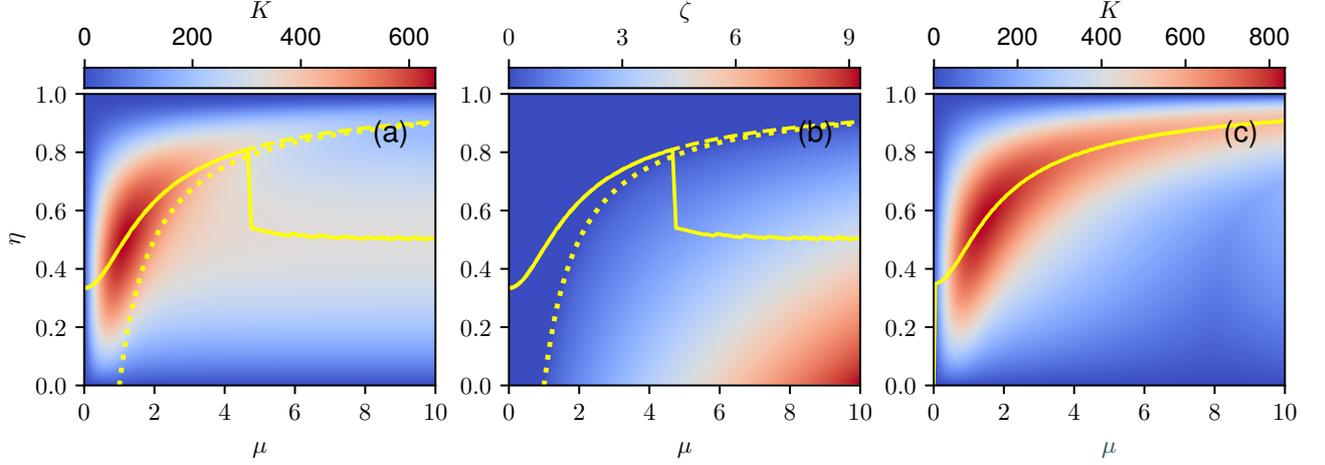


Рисунок 1.3 — Коэффициент стабилизации K (панель **a**) и оптимальная отстройка ζ (панель **b**) для $\psi = 0$, $\kappa_0\tau_s = 0$, $\frac{\kappa_{do}}{\kappa_0} = 1000$. На панели **c** показан коэффициент стабилизации для $\kappa_0\tau_s = 0.4$ и тех же других параметров. Сплошная линия - численный максимум относительно η , пунктирная линия - (1.12) (точки вблизи $\mu = 1$ пропущены), пунктирная линия соответствует $\beta = 1$. Все величины построены в безразмерных единицах.

В этом подразделе вычисляются значения параметров, определяющих оптимальную рабочую точку лазера $(\zeta_0, \eta_0, \beta_0)$ для случая нулевой разности фаз $\psi = 0$. Также показывается, что β не является подходящим параметром для оптимизации в эксперименте и вводим параметр коэффициента обратного рассеяния μ , который является внутренним параметром резонатора и не зависит от параметров установки. Также обсуждается влияние времени прохождения обратной связи $\kappa_0\tau_s$ на оптимальную точку работы системы.

Параметры $\psi = 0$ и $\kappa_m\tau_s \ll 1$ выбраны как наиболее распространенные и наглядные. В этом случае резонансная кривая режима затягивания LI (для свободного лазерного диода она совпадает с кривой зависимости мощности излучения от тока накачки лазера), которую можно наблюдать при широком сканировании частоты лазера в диапазоне затягивания и вне его, имеет почти прямоугольную форму [102; 107]. Фаза, которую накапливает свет при прохождении между лазером и резонатором ψ , может регулироваться либо путем настройки расстояния лазер-микрорезонатор, либо путем выбора режима затягивания

с соответствующей частотой, в соответствии с $\psi = \omega_m \tau_s - \arctan \alpha_g - 3/2\pi$. Различные моды могут иметь различное обратное рассеяние β [108; 109]. Практически, режим с желаемыми ψ и β может быть выбран путем анализа кривой LI (см. раздел 1.3.4).

Для оптимизации работы лазера ищется эффективная отстройка ζ_0 , которая максимизирует коэффициент стабилизации K . Выражение $\partial K(\zeta, \psi = 0, \eta, \beta) / \partial \zeta|_{\zeta_0} = 0$ приводит к ζ - бикубическому характеристическому уравнению, зависящему только от β . Решая его, получаем для различных значений β

$$\zeta_0 = \begin{cases} 0, & \beta \leq 1 \\ \sqrt{\frac{3}{5}(\beta^2 - 1)}, & \beta \in (1; 1.48) \\ \beta - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots & \beta > 1.48 \end{cases} \quad (1.8)$$

Это выражение имеет простой физический смысл. Линейное взаимодействие встречно распространяющихся волн приводит к резонансному расщеплению [73]. Величина расщепления приблизительно равна $\beta \kappa_m$ (см. рис. 1.1). Полоса затягивания расщепляется на две для больших β [см. рис. 1.2(b), крестиками отмечены точки $\zeta = \pm(\beta - 1/\sqrt{3})$ и вершины пиков близки к $\zeta = \pm\beta$].

Мы можем переписать выражение для коэффициента стабилизации как произведение двух частей, где одна часть зависит только от η , а другая - только от β . Подставляя Eq. (1.8) в Eq. (1.7), получаем:

$$K(\eta, \beta, \zeta_0, 0) = 1 + 8 \frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} \eta(1 - \eta) \beta \times \begin{cases} \frac{1}{(1 + \beta^2)^2}, & \beta \leq 1 \\ \frac{25}{4} \frac{7\beta^4 + 11\beta^2 + 7}{(\beta^4 + 23\beta^2 + 1)^2}, & \beta \in (1; 1.48) \\ \frac{27}{32} \beta \frac{\beta^2 \sqrt{3} - 2\beta + \sqrt{3}}{(3\beta^2 - \beta\sqrt{3} + 1)^2}. & \beta > 1.48 \end{cases} \quad (1.9)$$

Максимум коэффициента стабилизации составляет выражается формулой:

$$K_{\max}^0 \approx \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} + 1, \quad (1.10)$$

$$\eta_{\max}^0 = 1/2, \quad \beta_{\max}^0 = 3^{-1/2}, \quad \psi_{\max}^0 = 0$$

Для больших β коэффициент стабилизации становится независимым от β и выражается через коэффициент связи

$$K_{\beta \rightarrow \infty}^0 \approx \frac{3\sqrt{3}}{4} \eta (1 - \eta) \frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} + 1. \quad (1.11)$$

Данное выражение достигает максимума при $\eta_{\beta \rightarrow \infty}^0 = 1/2$, достигая значения $K_{\beta \rightarrow \infty}^0 \rightarrow (3\sqrt{3}/16)(\tilde{\kappa}_{do}/\kappa_0) + 1$. Это вдвое меньше, чем максимальная стабилизация (1.10).

Таким образом обнаружено, что оптимальная отстройка ненулевая для сильного обратного рассеяния.

1.3.2 Случай с фиксированной фазой затягивания и случай фиксированного обратного рассеяния

Связь прямой и обратной волны 2γ обычно фиксирована в эксперименте. Можно оптимизировать стабилизацию лазера, изменяя только значения отстройки ζ , фазы затягивания ψ и коэффициента связи η . Поскольку β зависит от общих потерь κ_m и, следовательно, от η , он не может быть использован как независимый параметр оптимизации.

Мы вводим другой параметр $\mu = 2\gamma/\kappa_0$ ($\beta = \mu(1 - \eta)$), который является константой для данного резонатора. Используя это обозначение, проведена полная параметрическая оптимизация коэффициента стабилизации. На рисунке 1.3 (а) показаны результаты численной оптимизации для нулевой фазы $\psi = 0$ и оптимальной перестройки частоты (1.8). Видно, что критическая связь оптимальна для малого расстояния лазер-микрорезонатор ($\kappa_0\tau_s < 0.1$) и для большого обратного рассеяния $\beta \geq 1$.

Зависимость оптимального коэффициента связи накачки η от нормированной скорости связи μ показана сплошной линией. При увеличении μ необходимо увеличивать нагрузку, чтобы сохранить $\beta < 1$, предотвращая расщепление резонанса ($\beta = 1$ показано на рис. 1.3 пунктирной линией). Это также хорошо видно на карте оптимальной настройки (см. рис. 1.3(b)). В определенный мо-

мент (при $\mu \approx 5$ для рассматриваемых параметров) увеличение отстройки уже не выгодно и критическая связь становится оптимальной.

Аппроксимация первой части кривой $\eta(\mu)$ может быть найдена с помощью выражения (1.13) для $\beta < 1$ и оптимизации K относительно η . Подстановка $\beta = \mu(1 - \eta)$ в (1.13) и дифференцирование K относительно η приводит к кубическому характеристическому уравнению (1.31) (см. раздел 1.4). Это уравнение квадратично относительно μ . Оно имеет точное решение (см. раздел 1.4, (1.32)), но более наглядным является решение уравнения относительно η .

Для η существует три корня, только один из которых принадлежит области $[0; 1]$. Найдем асимптотическое решение этого корня

$$\eta_0 \approx \begin{cases} \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \mu^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 \mu^4, & \mu \ll 1 \\ 1 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\mu^2}. & \mu \gg 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

Это решение все еще представляет собой локальный максимум для $\mu > 5$, но его значение уменьшается. Максимум остается постоянным (1.11) при критическом режиме связи и становится основным (см. также кривые “ $\psi = 0$ ” и “2-ветвь” на рис. 1.6).

Мы проверили аналитические результаты и исследовали ненулевой случай $\kappa_m \tau_s$ численно, используя (1.7). Для относительно большого расстояния между лазером и микрорезонатором ($\kappa_m \tau_s > 0.1$) перегруженный режим оптимален при больших значениях коэффициента связи (см. рис. 1.3(с)). Абсолютное значение K растет с $\kappa_0 \tau_s$ (см. рис. 1.3(с) и кривую “ $\kappa_0 \tau_s = 0.4$ ” на рис. 1.6).

1.3.3 Оптимальная фаза затягивания

В этом подразделе показано, что максимум предела маленького значения β , найденного в предыдущем подразделе, не меняется при оптимизации фазы затягивания ψ для широкого диапазона значений времени обхода обратной связи, в то время как предел большого значения β увеличивается. Также выведены поправки, связанные с большими значениями параметра $\kappa_m \tau_s$.

Уравнение (1.7) может быть оптимизировано относительно ψ (см. раздел 1.5). Для оптимальной фазы получаем

$$\psi_{\text{opt}} = \alpha - \frac{\kappa_m \tau_s}{2} \zeta + \pi n, \quad (1.13)$$

где $\sin \alpha = b/(a^2 + b^2)^{1/2}$. Уравнение (1.7) упрощается как

$$K \simeq 1 + 4 \frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} \eta (1 - \eta) \beta \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{((1 + \beta^2 - \zeta^2)^2 + 4\zeta^2)^2}. \quad (1.14)$$

Производная (1.14) относительно ζ является бикубическим уравнением, умноженным на ζ (1.35). Уравнение превращается в биквадратичное, если пренебречь $\kappa_m \tau_s$, в результате чего получается

$$\zeta_{\text{opt}} = \begin{cases} 0, & \beta \leq \beta_{\text{cr}} \\ \sqrt{\frac{\beta^2}{3} - 1 + \frac{2}{3} \sqrt{\beta^2(\beta^2 + 3)}}, & \beta > \beta_{\text{cr}} \end{cases} \quad (1.15)$$

где $\beta_{\text{cr}} = \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx 0.68$ - это значение β , при котором ненулевой корень становится действительным. Выбран положительный знак для ζ_{opt} , но параметр может быть и отрицательным. Этот знак меняет знак ψ_{opt} (см. (1.13)). Для малых β ($\beta \leq \beta_{\text{cr}}$), и, следовательно, малых μ , получается то же $\zeta_{\text{opt}} = 0$ (см. также рис. 1.5(b)), что и для случая нулевой фазы. Это критическое значение β_{cr} увеличивается со временем круговой задержки и коэффициентом связи накачки ($\kappa_m \tau_s$), но всегда остается меньше единицы (см. Приложение 1.5). Эта зависимость может быть аппроксимирована следующим образом

$$\beta_{\text{cr}} = 1 - 2 \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{\kappa_m \tau_s (1 - \sqrt{2\sqrt{3} - 3}) + 2}. \quad (1.16)$$

Подставляя $\zeta = 0$ в выражение (1.7), получаем $b = 0$. Подставляя этот результат в выражение для оптимальной фазы (1.13), находим, что $\psi_{\text{opt}} = 0$ (см. рис. 1.5(c)). Таким образом, оптимум является универсальным для произвольного значения $\kappa_m \tau_s$. Оптимум для случая малого β , найденный в предыдущем разделе, является абсолютным.

На следующем шаге используется $\kappa_m \tau_s = \kappa_0 \tau_s / (1 - \eta)$ и оценим глобальный максимум с учетом $\kappa_0 \tau_s \neq 0$. Подставим (1.15) в (1.14). Численно можно

показать, что не существует локального максимума для K в режиме большого значения β . Для случая малой β получено

$$K|_{\beta < \beta_{\text{cr}}} = 1 + 2 \frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} \eta \beta \frac{4(1 - \eta) + \kappa_0 \tau_s (1 + \beta^2)}{(1 + \beta^2)^2}. \quad (1.17)$$

Проведя оптимизацию, получены окончательные выражения для глобального максимума

$$\begin{aligned} \beta_{\text{max}} &= \sqrt{\frac{6 - \kappa_0 \tau_s - 2\sqrt{9 - 4\kappa_0 \tau_s}}{\kappa_0 \tau_s}}, \\ \eta_{\text{max}} &= \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{9 - 4\kappa_0 \tau_s}, \\ K_{\text{max}} &= 1 + \frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} \frac{(3 + 2\kappa_0 \tau_s + \sqrt{9 - 4\kappa_0 \tau_s})^2}{32} \beta_{\text{max}}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Это выражение, описывающее глобальный максимум коэффициента K , а также соответствующие оптимальные параметры, позволяющие получить максимум, является основным результатом главы. Реализация указанных значений параметров в эксперименте обеспечивает оптимальную работу устройства. Оптимальное значение β в основном определяется материалом микрорезонатора и его механической обработкой и обычно не может быть настроено (настройка все же возможна, если микрообъект помещен в спадающее поле [108; 110]).

Рассмотрим несколько специальных случаев, позволяющих упростить выражения (1.18). Для случая микрорезонаторов с высокой добротностью и малых расстояний $\kappa_0 \tau_s \ll 1$, эти выражения раскладываются в ряд относительно $\kappa_0 \tau_s$ и можно обнаружить, что они сводятся к простым поправкам к формуле (1.10)

$$\begin{aligned} \beta_{\text{max}} &\approx \beta_{\text{max}}^0 + \frac{2\sqrt{3}}{27} \kappa_0 \tau_s, \\ \eta_{\text{max}} &\approx \eta_{\text{max}}^0 + \frac{1}{6} \kappa_0 \tau_s, \\ K_{\text{max}} &\approx K_{\text{max}}^0 + \frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} \frac{\sqrt{3}}{4} \kappa_0 \tau_s. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Все три величины растут с увеличением $\kappa_0 \tau_s$.

Согласно (1.16), граница области низкой β также смещается так, что глобальный максимум лежит почти на границе в области низкой β (см. также рис. 1.10). Максимум по-прежнему описывается (1.18) до тех пор, пока $\kappa_0\tau_s = 2$, где η_{\max} становится больше 1. Это означает, что коэффициент стабилизации $K(\eta, \beta, \zeta_{\text{opt}}, \psi_{\text{opt}})$ монотонно возрастает с η . Коэффициент K перестает иметь экстремальные свойства по отношению к η . В перегруженном режиме ($\eta \approx 1$) K насыщается с β .

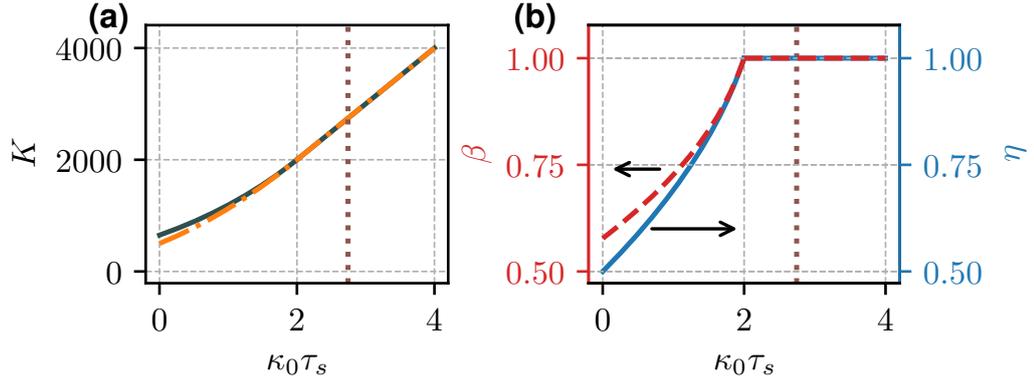


Рисунок 1.4 — **а)** Предел коэффициента стабилизации при большом значении β (1.20) с (1.22) (оранжевая пунктирная линия) и его глобально максимальное значение (1.18) (темно-салатово-серая сплошная линия) для разного времени круговой задержки. **б)** Оптимальные параметры η (правая ось, сплошная линия) и β (левая ось, пунктирная линия) для различных режимов $\kappa_0\tau_s$. Параметры $\zeta = 0$ и $\psi = 0$ являются оптимальными во всех режимах $\kappa\tau_s$. Все величины построены в безразмерных единицах.

Для описания этого режима можно использовать асимптотические выражения (1.14) и (1.15) для больших β . Для коэффициента стабилизации получается

$$K_{\beta \rightarrow \infty} \approx \frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} \eta (\kappa_0\tau_s + 2(1 - \eta)) + 1. \quad (1.20)$$

Это аналогично выражению для случая нулевой фазы (1.11) (но в 1,5 раза больше случая малого $\kappa_0\tau_s$). Результат также указывает на переход оптимального режима от критически сцепленного к сверхсцепленному для больших времен круговой задержки.

Наконец, для насыщенного коэффициента стабилизации при условии больших $\kappa_0\tau_s$ получаем

$$\begin{aligned}\beta_{\kappa_0\tau_s > 2} &> 1, \\ \eta_{\kappa_0\tau_s > 2} &= 1, \\ K_{\kappa_0\tau_s > 2} &= \frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} \kappa_0\tau_s + 1.\end{aligned}\tag{1.21}$$

Значения оптимального коэффициента стабилизации и соответствующих оптимальных параметров показаны на рис. 1.4. Значение $\kappa_0\tau_s = 2$ соответствует полному оптическому расстоянию $l_{cr} \approx 2Q\lambda/(2\pi) \approx 5$ м для $Q = 10^7$. Также важно отметить, что абсолютное значение K растет пропорционально $\kappa_0\tau_s$.

Используя (1.14) с $\beta = \mu(1 - \eta)$ получено выражение для оптимальной связи накачки как функции обратного рассеяния (см. раздел 1.5). Точное решение может быть получено для $\mu(\eta)$ (1.41), но решение для η является более наглядным. Предполагая малое значение μ в (1.17) и раскладывая результат в ряд по $\kappa_0\tau_s$, найдены поправки для случая малого значения β . Поправки для оптимального коэффициента связи η_{opt} для области с большим значением β также могут быть найдены с помощью (1.20). В результате получается

$$\eta_{opt} \approx \begin{cases} \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 \mu^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 \mu^4 + \frac{\kappa_0\tau_s}{24}, & \beta < \beta_{cr} \\ \frac{1}{2} + \frac{\kappa_0\tau_s}{4}. & \beta \gg \beta_{cr} \end{cases}\tag{1.22}$$

Приведенные выше расчеты показывают, что оптимальный коэффициент стабилизации увеличивается с расстоянием лазер-микрорезонатор. Однако не следует бесконтрольно увеличивать расстояние, так как увеличение приводит к снижению качества лазерного сигнала, а также к появлению избыточных метастабильных полос на кривой перестройки [102]. Критерий стабильной работы был аппроксимирован как $\kappa_m\tau_s < 9.4(8\eta(1 - \eta)\beta\tilde{\kappa}_{do}/\kappa_0)^{-0.36}$. Для точки максимума (1.18) этот критерий упрощается до $\kappa_0\tau_s > 2.74$ (см. рис. 1.4). Более того, $\kappa_0\tau_s > 1$ приведет к увеличению шума механической неустойчивости. Эти соображения подлежат отдельному экспериментальному исследованию.

Карта коэффициента стабилизации (1.14) в условиях оптимальной отстройки (1.15) и фазы затягивания (1.13) показана на рис. 1.5(а) для различных

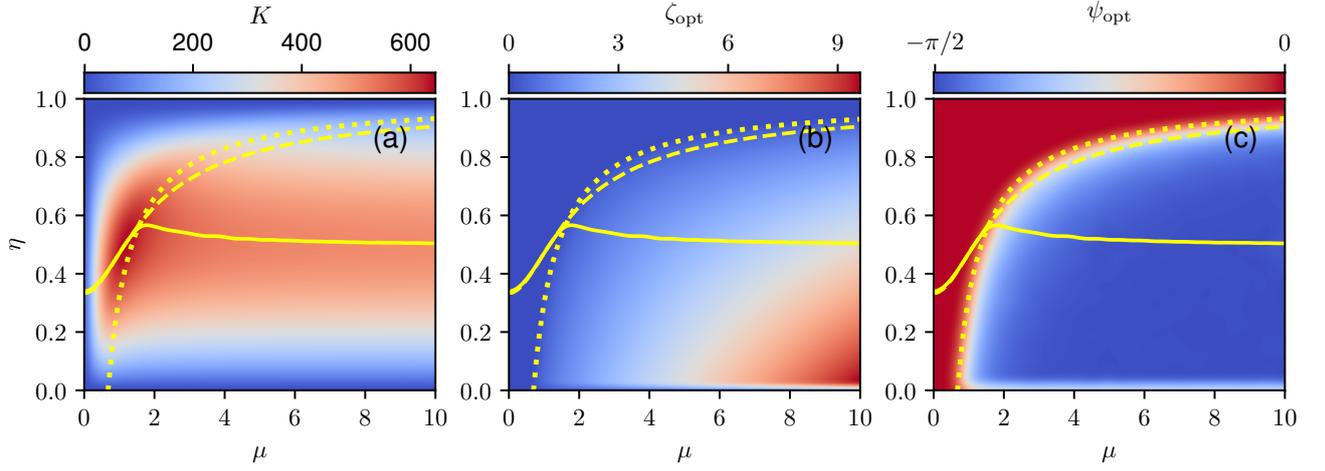


Рисунок 1.5 — Коэффициент стабилизации K (панель **a**), оптимальная отстройка ζ_{opt} (панель **b**) и оптимальная ψ_{opt} (панель **c**) для $\kappa_0\tau_s = 0$, $\frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} = 1000$. Сплошная линия - численный максимум относительно η , пунктирная линия - (1.12) (точки вблизи $\mu = 1$ опущены), пунктирная линия соответствует $\beta = \beta_{\text{cr}} \approx 0.68$. Все величины построены в безразмерных единицах.

комбинаций η и μ . Карты оптимальной отстройки и оптимальной фазы показаны на рис. 1.5(b) и 1.5(c). Нулевая фаза ($\psi = 0$) является точным оптимумом для $\beta < 0.68$ (см. рис. 1.5(c)), что связано с оптимальным условием $\zeta = 0$ (см. рис. 1.5(b)). Поскольку оптимальное значение β , найденное ранее для случая нулевой фазы $\beta_{\text{max}} = 3^{-1/2}$ меньше 0.68, максимальное значение коэффициента стабилизации для фазы нулевого затягивания является глобальным максимумом.

Критическая связь $\eta = 0.5$, рассмотренная в [102], очень близка к оптимальной линии $\eta(\mu)$ (см. рис. 1.5a). Интересно зафиксировать $\eta = 0.5$ и провести оптимизацию относительно других параметров. Подставляя (1.22) для малых μ в (1.17), находим:

$$K_{\mu \rightarrow 0} = 1 + \frac{32}{27} \mu \frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} \left(1 + \frac{3}{8} \kappa_0 \tau_s \right). \quad (1.23)$$

Для случая критической связи ($\eta = 0.5$) менее резкая зависимость

$$K_{\mu \rightarrow 0} = 1 + \mu \frac{\tilde{\kappa}_{do}}{\kappa_0} \left(1 + \frac{1}{2} \kappa_0 \tau_s \right). \quad (1.24)$$

Разница довольно мала (1.18 раза).

Максимальный коэффициент стабилизации обычно достигается выбором мод с оптимальным фазовым сдвигом ψ , оптимальной связью η , а также оптимальной отстройкой частоты лазерного излучения от резонанса ζ для данного μ . На рис. 1.6 представлена зависимость K от параметра резонатора μ для наиболее интересных режимов. Также найдены соответствующие оптимальные значения ψ , η и ζ на рис. 1.7. Во всех рассмотренных режимах максимальное значение коэффициента стабилизации достигается при $\mu = \beta_{\max}/(1 - \eta_{\max}) < 2$. При больших значениях μ он либо насыщается, либо монотонно уменьшается из-за расщепления мод. Настройка ψ и ζ необходима при $\mu > 2$ для достижения максимального значения коэффициента стабилизации [см. рис. 1.7 (а) и (b)]. Это трудно сделать экспериментально. Поэтому желательно выбрать режим с $\mu \leq 2$, что соответствует "полу расщепленному" режиму (см. рис. 2(d) в [49]).

Согласно нашей модели, оптимизация затягивания может привести к значительному уменьшению ширины линии лазера по сравнению с лучшими экспериментальными результатами. Например, в [24] было продемонстрировано уменьшение ширины полосы диодного лазера с 2 МГц в режиме свободного хода до суб-100 Гц в режиме затягивания. Уменьшение ширины линии в случае оптимальных параметров $\eta_{\text{opt}}(\mu)$, $\psi_{\text{opt}}(\mu)$ и $\zeta_{\text{opt}}(\mu)$ для $\mu = 3$ может быть улучшено в 15 раз, что как минимум на порядок лучше результата, полученного для неоптимального режима. Более того, если мода резонатора выбрана оптимально ($\mu = 1.16$), уменьшение ширины линии может быть улучшено в 94 раза (подробности см. в разделе 1.3.4).

Подводя итог, в этом подразделе найден глобальный максимум для коэффициента стабилизации K . Глобальный оптимум находится в окрестности значения $\beta = 3^{-1/2}$, $\eta = 1/2$, $\zeta = 0$, $\psi = 0$ и растет линейно с увеличением $\kappa_0\tau_s$.

1.3.4 Реализация оптимального режима

В этом разделе описывается процесс реализации предложенной модели оптимизации с использованием экспериментальных данных из [24]. Экспери-

ментальные параметры: ненагруженная добротность $\sim 6 \times 10^9$, нагруженная добротность $\sim 6 \times 10^8$, величина расщепления мод порядка 100 кГц, что соответствует $\mu \sim 3$ и $\eta \approx 0.91$. Нормализованное обратное рассеяние оценивается в $\beta = 0.27$, что указывает на режим малого рассеяния. Согласно карте оптимизации на рис. 1.5(b,c) оптимальные значения фазы и отстройки равны нулю.

Мы предполагаем, что отстройка и фаза в эксперименте были близки к оптимальным значениям $\zeta = 0$ и $\psi = 0$, что обеспечивает типичную близкую к прямоугольной кривую LI (см. синюю кривую на рис. 1.8). Оптимальное отклонение отмечено точкой. Теоретическая LI-кривая получена из резонансной кривой пропускания, заданной [73]:

$$B_t \approx B_{\text{in}} \left(1 - 2\eta \frac{(1 - i\zeta)}{(1 - i\zeta)^2 + \beta^2} \right) \quad (1.25)$$

Только часть кривой (1.25) доступна при монотонной развертке частоты лазера [102] и составляет кривую LI. На рисунке 1.8 резонансные кривые (1.25) показаны пунктирными линиями, а кривые LI при увеличении частоты (уменьшении тока) - сплошными линиями. Отметим, что при достаточно высокой добротности микрорезонатора точка входа в область затягивания близка к нулевой отстройке, что также помогает настроиться на оптимум. Другим важным моментом является то, что в реальном эксперименте изменение тока также изменяет выходную мощность лазера, и поэтому кривая LI может быть наклонена $B'_t = B_t + (\partial B_{\text{in}}/\partial I)(\partial I/\partial \xi)\xi$, где I обозначает ток.

Согласно рис. 1.5(a) лазерная система может быть дополнительно оптимизирована в отношении η . Выбирая лучшие параметры в соответствии с желтой линией на рис. 1.5(b,c), получено $\eta = 0.54$, $\zeta = -1.3$ (соответствует $\xi = 8.97$), $\psi = 0.43\pi$. Соответствующая ширина линии может быть уменьшена в $K_{\eta=0.54, \mu=3}^2 / K_{\eta=0.91, \mu=3}^2 \approx 15$ раз, что на порядок лучше, чем в эксперименте. Нужно поменять знаки ζ и ψ , чтобы оптимум наступил в прямом сканировании. Уменьшая связь накачки до оптимального значения, связь устанавливается близко к критической связи, поэтому пропускание будет уменьшаться [73]. В то же время β возрастает до 1.38 и ширина затягивания увеличивается. И то и другое видно на соответствующей кривой LI (см. зеленую кривую на рис. 1.8). Поскольку β теперь больше критического значения (1.16), оптимальная фаза становится ненулевой. Правильную фазу также можно контролировать

с помощью резонансной формы пропускания (см. разницу между зеленой и оранжевой кривыми на рис. 1.8). Если расстояние между лазером и микрорезонатором неизменно в конкретной установке, фаза может быть настроена путем переключения между модами резонатора. Такой подход, однако, может изменить и коэффициент рассеяния μ .

Если режим резонатора оптимально выбран так, что $\mu = 1.15$, уменьшение ширины линии улучшается $K_{\eta=0.5, \mu=1.15}^2 / K_{\eta=0.91, \mu=3}^2 \approx 94$. Также определить оптимальный режим позволяет анализ кривой LI, которая должна иметь определенную форму в оптимальном режиме (см. рис. 1.8, красная кривая).

В целом можно выработать следующие рекомендации по оптимизации на основе нашей теоретической модели.

1. Если можно оценить μ , выбираем режим с оптимальным μ .
2. Устанавливаем критический режим связи, на который указывает максимальная глубина провала, при которой ширина LI-кривой также максимальна.
3. Настраиваем фазу так, чтобы LI-кривая приобрела правильную форму – первый угол (отсчет в направлении сканирования частоты) должен быть острым, а второй – с закруглением в направлении сканирования.
4. Если не известно значение μ и еще не выбрали режим и/или не можем изменить положение лазера, то можно просто искать резонанс правильной формы (см. выше).

Любая конкретная экспериментальная реализация затягивания частоты лазера требует корректировки алгоритма оптимизации в соответствии с теоретической моделью, описанной выше.

1.3.5 Ограничения модели и нелинейные эффекты

Существуют некоторые ограничения на уменьшение ширины линии с помощью эффекта затягивания которые не включены в нашу модель. Например, механический шум может ограничить стабильность затягивания. Влияние механического шума на частотный шум затянутого лазера частично обсуждалось в [102]. Было показано, что его влияние растет с увеличением τ_s . Соб-

ственный шум микрорезонатора [111] (преимущественно терморелактивный шум [112;113]) и вариации фазы затягивания (обусловленные как механической, так и тепловой неустойчивостью устройства [107] или терморелактивными шумами линз и волноводов) будут влиять на работу реального устройства. Термодинамические шумы не подлежат оптимизации и являются фундаментальным ограничением. Высокая внутрирезонаторная интенсивность может привести к нежелательным эффектам нелинейной генерации (например, четырехволновое смешение или комбинационное рассеяние) и к переходу шума интенсивности лазера (RIN) в частотный шум. Интересно, что гиперпараметрические колебания (или даже генерация солитонов) [43;49] [114] наблюдались в режиме затягивания. Однако их влияние на характеристики лазера не было тщательно изучено. Предполагается, что эти эффекты нежелательны для стабилизации частоты лазера в режиме затягивания. Очевидно, их влияние может быть уменьшено путем снижения мощности внутри режима микрорезонатора.

Порог процессов, связанных с параметрической неустойчивостью, может быть оценен из выражения нормализованной накачки [115;116]

$$f = \sqrt{\frac{6\chi_3 Q_0 \eta (1 - \eta)^2 P_{\text{input}}}{\kappa_0 n^4 \epsilon_0 V_0}} \sqrt{\frac{n S_0}{n_c S}} > 1, \quad (1.26)$$

где P_{input} - мощность накачки, χ_3 - нелинейность третьего порядка микрорезонатора, $Q_0 = \omega/\kappa_0$ - его внутренняя добротность, V_0 - объем моды, n и n_c - показатели преломления микрорезонатора и призмы. Гиперпараметрическая осцилляция и рамановское излучение имеют почти одинаковые пороги в WGM резонаторах [114;117;118]. Далее рассмотрены несколько подходов, позволяющих снизить мощность внутри микрорезонатора ниже порога гиперпараметрических колебаний (2.43).

Самый простой подход к уменьшению мощности, циркулирующей в моде микрорезонатора, заключается в том, чтобы перегрузить или недогрузить связь микрорезонатора с призмой, изменяя η . Другим решением является перефокусировка лазерного пучка в области связи (см. рис. 1.1), изменяя $\Theta = S_{LC}/S$, отношение площади апертуры лазера S_{LC} к конечной площади пучка S . Перефокусировка изменяет мощность обратно отраженного пучка в $\sqrt{\Theta}$ раз (см. рис. 1.1), что для простоты обозначения было скрыто в $\tilde{\kappa}_{do}$. В обоих подходах

коэффициент стабилизации (K) уменьшается, поэтому существует компромисс между условиями сохранения высокого K и уменьшения мощности накачки.

Для рассмотрения этой проблемы вводится безразмерное отношение:

$$\Sigma = \frac{\left. \frac{dK}{df} \right|_{\eta}}{\left. \frac{dK}{df} \right|_{\Theta}} = \frac{\frac{\partial K}{\partial \eta} / \frac{\partial f}{\partial \eta}}{\frac{\partial K}{\partial \Theta} / \frac{\partial f}{\partial \Theta}}, \quad (1.27)$$

где Θ - эффективная площадь области связи [см. рис. 1.1]. Числитель отношения описывает относительное изменение (скорость) K по отношению к f за счет η перестройки (производная параметрической функции dK/df). Знаменатель отношения описывает относительное изменение K относительно f , но с Θ настройкой. Таким образом, само отношение (1.27) имеет смысл эффективности настройки η над Θ с точки зрения сохранения высокого K и уменьшения f .

Данное отношение инвариантно относительно переопределения параметра стабилизации $K \rightarrow F(K)$, где F - произвольная функция. Таким образом, рассмотрение коэффициента стабилизации K или коэффициента уменьшения ширины линии K^{-2} дает один и тот же результат оптимизации. Аналогичный вывод справедлив и для f .

На рисунке 1.9 показана зависимость (1.27) параметра Σ от значений связи накачки и обратной волны для нулевой и оптимальной фазы затягивания вместе с оптимальной $\eta(\mu)$. Видно, что настройка связи накачки предпочтительнее, так как оптимальные кривые находятся внутри области $|\Sigma| < 1$ для обоих случаев.

1.4 Оптимизация в режиме нулевой фазы

Мы ищем эффективную настройку ζ_0 , которая максимизирует коэффициент стабилизации K . Для простоты обозначений введем $b_\beta = \beta^2 + 1$. Уравнение

$$\frac{\partial K(\zeta, 0, \eta, \beta)}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.28)$$

можно представить в виде умноженного на ζ бикубического уравнения в отношении ζ

$$\zeta(3\zeta^6 - 3(b_\beta - 2)\zeta^4 - (3b_\beta^2 + 8b_\beta - 8)\zeta^2 + 3b_\beta^2(b_\beta - 2)) = 0. \quad (1.29)$$

Единственным свободным параметром является β . Определитель кубического выражения

$$S = (b_\beta - 1)(9b_\beta^4 - 6b_\beta^3 + 11b_\beta^2 - 10b_\beta + 5) \quad (1.30)$$

больше нуля, так как $\beta > 0$ ($b_\beta > 1$), поэтому бикубическая часть (1.29) имеет три пары корней. Первая пара корней мнимая для $\beta > 0$ и, следовательно, может быть опущена. Вторая пара корней соответствует минимуму коэффициента стабилизации. Наконец, третья пара корней соответствует максимуму коэффициента стабилизации и становится мнимой при $b_\beta < 1$. Нас интересует этот корень. Разложим его в ряд в окрестности нуля и на бесконечности. Эти два приближения пересекаются при $\beta = 1.48$. Объединив решения, можно получить выражение (1.8).

Аппроксимация для первой части кривой $\eta(\mu)$ может быть найдена путем оптимизации $\beta < 1$ части выражения (1.13) для η . Подставляя $\beta = \mu(1 - \eta)$ в выражение (1.13) и дифференцируя его относительно η , можно получить следующее характеристическое уравнение

$$\mu(1 - \eta)(\mu^2\eta^3 - \mu^2\eta^2 - (\mu^2 + 3)\eta + \mu^2 + 1) = 0. \quad (1.31)$$

Это уравнение может быть решено для μ :

$$\mu = \sqrt{\frac{3\eta - 1}{(\eta + 1)(1 - \eta)^2}}. \quad (1.32)$$

Полезно решить уравнение (1.31) для η . Определитель кубического уравнения (1.31) положителен, поэтому получаем три корня, но только один находится внутри $\eta \in [0; 1]$. Этот корень можно разложить в ряд в окрестности $\mu = 0$ и $\mu = \infty$, чтобы получить асимптотическое выражение (1.12).

1.5 Оптимальная фаза затягивания

Уравнение (1.7) может быть оптимизировано для ψ следующим образом. Взяв производную по ψ , получаем

$$0 = \frac{\partial K}{\partial \psi} = -a \sin \bar{\psi} + b \cos \bar{\psi}, \quad (1.33)$$

где коэффициенты a и b были введены в (1.7). Обозначая $\sin \alpha = b/(a^2 + b^2)^{1/2}$ и используя (1.4), получаем

$$0 = \sin\left(\psi + \frac{\kappa_m \tau_s}{2} \zeta - \alpha\right), \quad (1.34)$$

решение которого дается (1.13). Это выражение может быть подставлено в уравнение (1.7) для получения фазового коэффициента стабилизации (1.14).

Введя $W = \kappa_m \tau_s / 2 = \kappa_0 \tau_s / [2(1 - \eta)]$ и взяв производную по ζ , получаем

$$\begin{aligned} 0 = & \zeta(W^2 \zeta^6 - (3(W(Wb_\beta - 2W - 2) - 2))\zeta^4 + \\ & + (W(W(3b_\beta^2 - 8b_\beta + 8) + 4b_\beta + 8) - 4b_\beta + 16)\zeta^2 \\ & - W(Wb_\beta^2(b_\beta - 2) + 2b_\beta(5b_\beta - 8)) - 2b_\beta^2 - 8b_\beta + 16). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Заметим, что $\zeta = 0$ является экстремумом для всех значений W . Используя $W = 0$, получаем биквадратичное уравнение для ζ , которое легко решается. Уравнение (1.35) также может быть решено аналитически для произвольного W , так как оно является бикубическим уравнением. Его дискриминант меняет знак с положительного на отрицательный при b_β , который уменьшается с увеличением W . Только один из корней положителен при достижении определенного значения β_{cr} . Разложив этот корень в ряд по W , получаем (1.15) со следующей поправкой на время обхода:

$$\delta_{\tau_s} \zeta_{\text{opt}} = \beta^2 \frac{\sqrt{\beta^2 + 3(\beta^2 - 1) - \beta(\beta^2 + 1)}}{\sqrt{\beta^2 + 3(\beta^4 + 6\beta^2 - 3)}} \frac{\kappa_0 \tau_s}{2(1 - \eta)}. \quad (1.36)$$

Наилучшее соответствие обеспечивается только при использовании ряда 4-го порядка относительно β .

Точное решение уравнения (1.35) показывает, что пороговое значение связи обратной волны β_{cr} (см. (1.15)), при котором оптимальная ζ становится ненулевой, меняется с W . Точные аналитические решения в частных случаях показывают, что $\beta_{\text{cr}} = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$ для $W = 0$ и $\beta_{\text{cr}} \rightarrow 1$ для $W \rightarrow \infty$. Приближение $\beta_{\text{cr}}(W)$ может быть построено как рациональная функция (1.16), имеющая указанные выше пределы. Это приближение было проверено численно и показало очень хорошее соответствие с точным решением (1.35). На рисунке 1.10 показано приближение (1.16) (красная пунктирная линия) вместе с численной оценкой (сплошная синяя линия). Зависимость оптимального обратного рассеяния β_{max} (1.18) также представлена, чтобы показать, что глобальный максимум всегда находится ниже β_{cr} , т.е. в области нулевой отстройки.

Мы также вывели асимптотическое решение для большой β .

$$\zeta_{\text{opt}} = \beta - \frac{W(W+2)}{2(W^2+4W+2)\beta} + O(\beta^{-2}). \quad (1.37)$$

Чтобы получить глобальный максимум, подставим $\zeta = 0$ (1.15) в (1.14) и получим (1.17). Взяв производные по β и η и решив соответствующие уравнения, получим

$$\beta_{\text{o1}} = \sqrt{\frac{6(\eta-1) + \sqrt{32(1-\eta)^2 + (2(1-\eta) + \kappa_0\tau_s)^2}}{\kappa_0\tau_s}}, \quad (1.38)$$

$$\eta_{\text{o1}} = \frac{\kappa_0\tau_s}{8}(\beta^2 + 1) + \frac{1}{2}. \quad (1.39)$$

Подставляя (1.39) в производную (1.17) относительно β , получаем биквадратичное уравнение для β_{max} . Подставляя результат в (1.39) и в (1.17), получаем (1.18).

Чтобы получить η_{opt} , подставим $\beta = \mu(1-\eta)$ в (1.14) и возьмем производную по η .

$$0 = \mu(1-\eta)(2(1-\eta)^2(\kappa_0\tau_s + 2\eta + 2)\mu^2 - 4(3\eta - 1) + \kappa_0\tau_s(1-\eta)^3\mu^4 - \kappa_0\tau_s\frac{2\eta-1}{1-\eta}). \quad (1.40)$$

Хотя это полное уравнение 4th порядка относительно η , оно является биквадратичным уравнением относительно μ и, следовательно, может быть решено

аналитически. Единственным действительным корнем является

$$\mu_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta)^3 W}} \left(W(2\eta - 1) - \eta - 1 + \sqrt{W^2 \eta^2 - 2\eta(5\eta - 3)W + (\eta + 1)^2} \right)^{1/2}. \quad (1.41)$$

Грубая оценка поправки для η_0 может быть получена для малых μ . Пренебрегая μ^2 в (1.40), получаем

$$12\eta^2 - (2\kappa_0\tau_s + 16)\eta + \kappa_0\tau_s + 4 = 0. \quad (1.42)$$

Большой корень превышает единицу и поэтому находится вне области действия η . Разложив меньший корень в ряд, получаем.

$$\eta_{\beta=0} \approx \frac{1}{3} + \frac{\kappa_0\tau_s}{24} - \frac{\kappa_0^2\tau_s^2}{128}. \quad (1.43)$$

Комбинируя это выражение с (1.12) и предполагая малые β (или μ), получаем предел малого рассеяния (1.22).

1.6 Вывод

В данной главе проведено пятипараметрическую оптимизацию лазера затянутого на резонатор с высокой добротностью. Было обнаружено, что оптимальные параметры схемы затягивания (ψ , ζ , η) зависят только от одного параметра резонатора, β (коэффициент обратного рассеяния, нормированный на ширину линии нагрузки микрорезонатора), и от расстояния между лазером и микрорезонатором (параметр $\kappa_0\tau_s$). Было обнаружено, что две оптимальные области параметров разделены $\beta_{\text{cr}} \in [0.68; 1]$ в зависимости от параметра расстояния (1.16).

Были получены оптимальные комбинации параметров затягивания для различных экспериментально реализуемых режимов: все оптимальные параметры (ψ_{opt} , ζ_{opt} , η_{opt}); режим длинного плеча $\kappa_0\tau_s > 0.1$; режим критической

связи $\eta = 0.5$; фиксированная фаза $\psi = 0$, которая расходуется на две ветви, соответствующие режимам пересоединения и критической связи.

Как нулевая отстройка, так и нулевая фаза являются оптимальными значениями для режима малого обратного рассеяния. Также обнаружен глобальный максимум коэффициента стабилизации (1.18) для других параметров ($\eta = 1/2$, $\beta \approx 0.58$). Оптимальные значения параметров и коэффициент стабилизации увеличиваются с ростом параметра расстояния $\kappa_0\tau_s$. Глобальный максимум всегда остается в области с низким β (при $\psi = 0$ и $\zeta = 0$), так как β_{cr} также растет с $\kappa_0\tau_s$. Обсуждался также случай режима высокого обратного рассеяния.

Мы обнаружили, что для экспериментальных параметров [24] возможно улучшение ширины линии на порядок, если параметры установки настроены на оптимальную точку η_{opt} , ψ_{opt} и ζ_{opt} . Ширина линии может быть уменьшена еще больше, почти на два порядка, если оптимально выбрать режим резонатора. Были перечислены рекомендации по экспериментальной реализации оптимального режима затягивания. Также предложены методы подавления влияния нежелательных нелинейных эффектов.

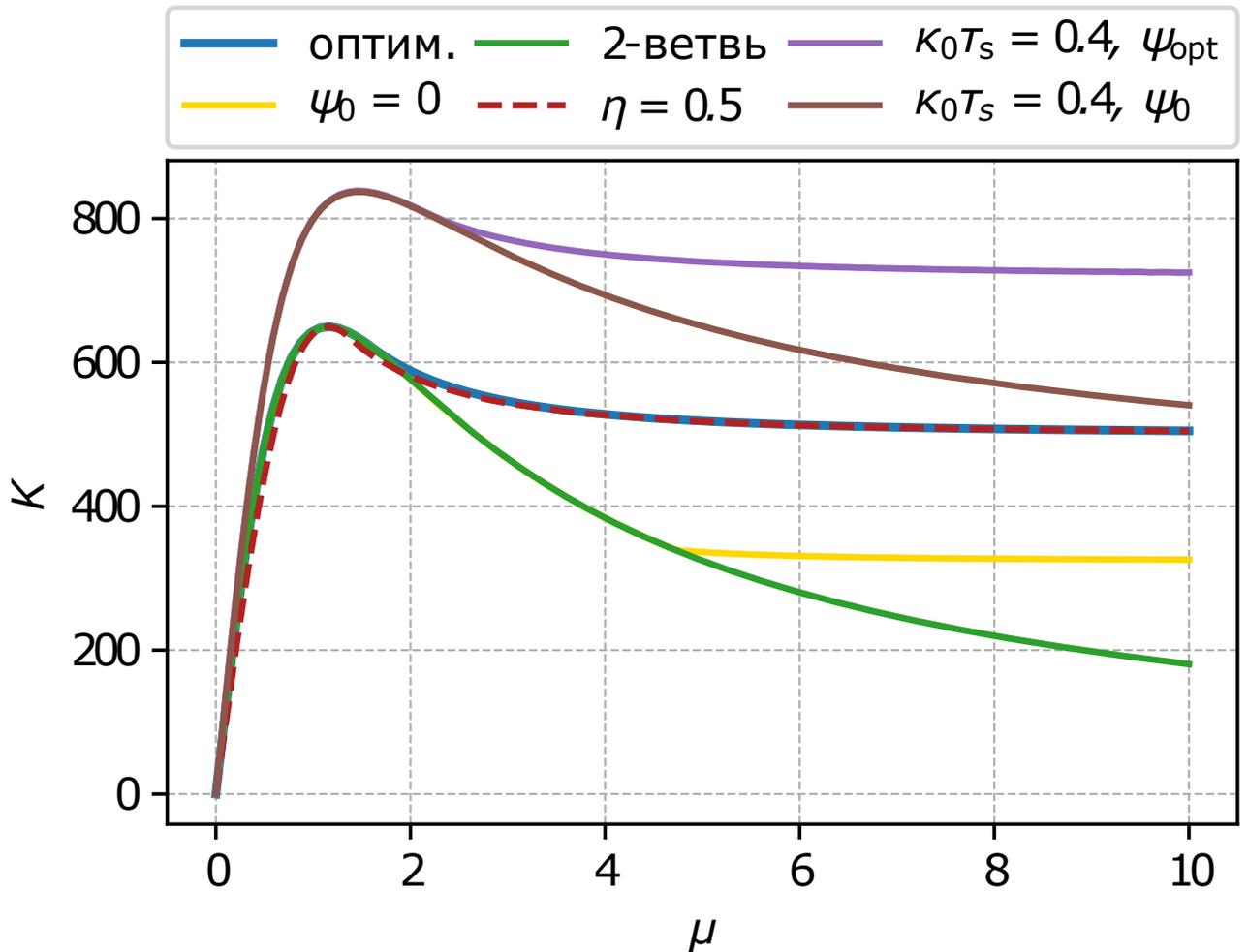


Рисунок 1.6 — Максимальный коэффициент стабилизации частоты в зависимости от параметра резонатора μ для различных режимов параметров затягивания. Линии соответствуют: **Синяя**: оптимальному состоянию $(\psi_{opt}, \zeta_{opt}, \eta_{opt})$; **Зеленый**: вторая ветвь фиксированной фазы $\psi = 0$ и оптимального (ζ_0, η_0) , (1.12); **Желтый**: фиксированная фаза $\psi = 0$ и оптимальная (ζ_0, η_{opt}) ; **Красно-пунктирный**: критическая связь $\eta = 0.5$ и оптимальная (ψ, ζ) ; **Фиолетовый**: $K_0 T_s = 0.4$ для оптимальных параметров $(\psi_{opt}, \zeta_{opt}, \eta_{opt})$; **Коричневая**: $K_0 T_s = 0.4$ для фиксированной фазы $\psi = 0$ и (ζ_0, η_0) . Все величины построены в безразмерных единицах.

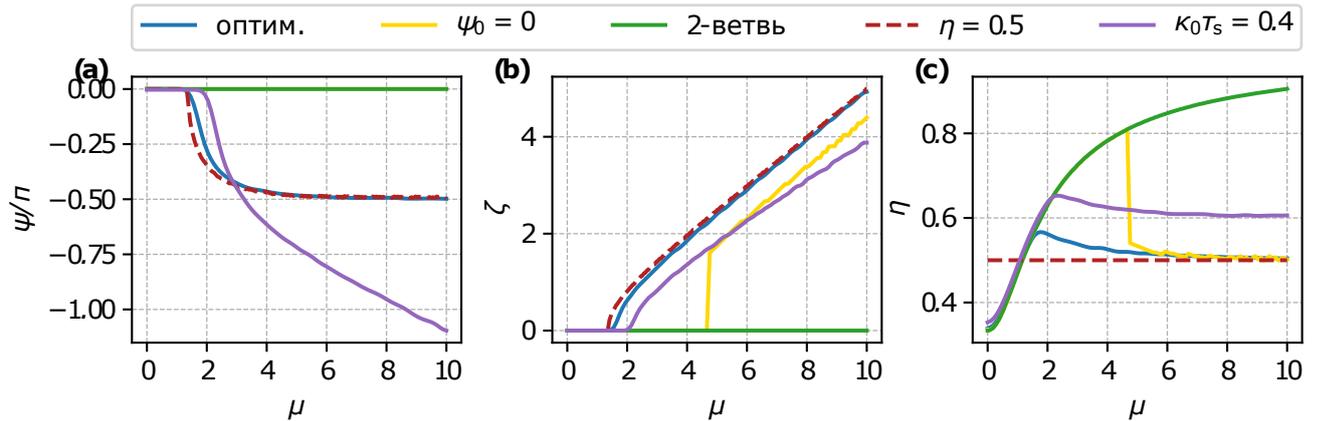


Рисунок 1.7 — а) Оптимальный фазовый сдвиг между лазером и резонатором;

б) оптимальная настройка частоты излучения лазера; с) оптимальная эффективность связи. Линии соответствуют: **Синяя линия:** оптимальному состоянию $(\psi_{\text{опт}}, \zeta_{\text{опт}}, \eta_{\text{опт}})$; **Зеленая линия:** (вторая ветвь) построена при фиксированной фазы $\psi = 0$ и оптимальном значении параметров (ζ_0, η_0) , (1.12); **Желтая линия:** построена при фиксированной фазы $\psi = 0$ и оптимальном значении параметров (ζ_0, η_0) ;

Красно-пунктирная линия: построена при критической связи $\eta = 0.5$ и оптимальном значении параметров (ψ, ζ) ; **Фиолетовая линия:** построена при $\kappa_0 \tau_s = 0.4$ для оптимальных параметров $(\psi_{\text{опт}}, \zeta_{\text{опт}}, \eta_{\text{опт}})$; **Коричневая линия:** построена при $\kappa_0 \tau_s = 0.4$ для фиксированной фазы $\psi = 0$ и (ζ_0, η_0) .

Все величины представлены в безразмерных единицах.

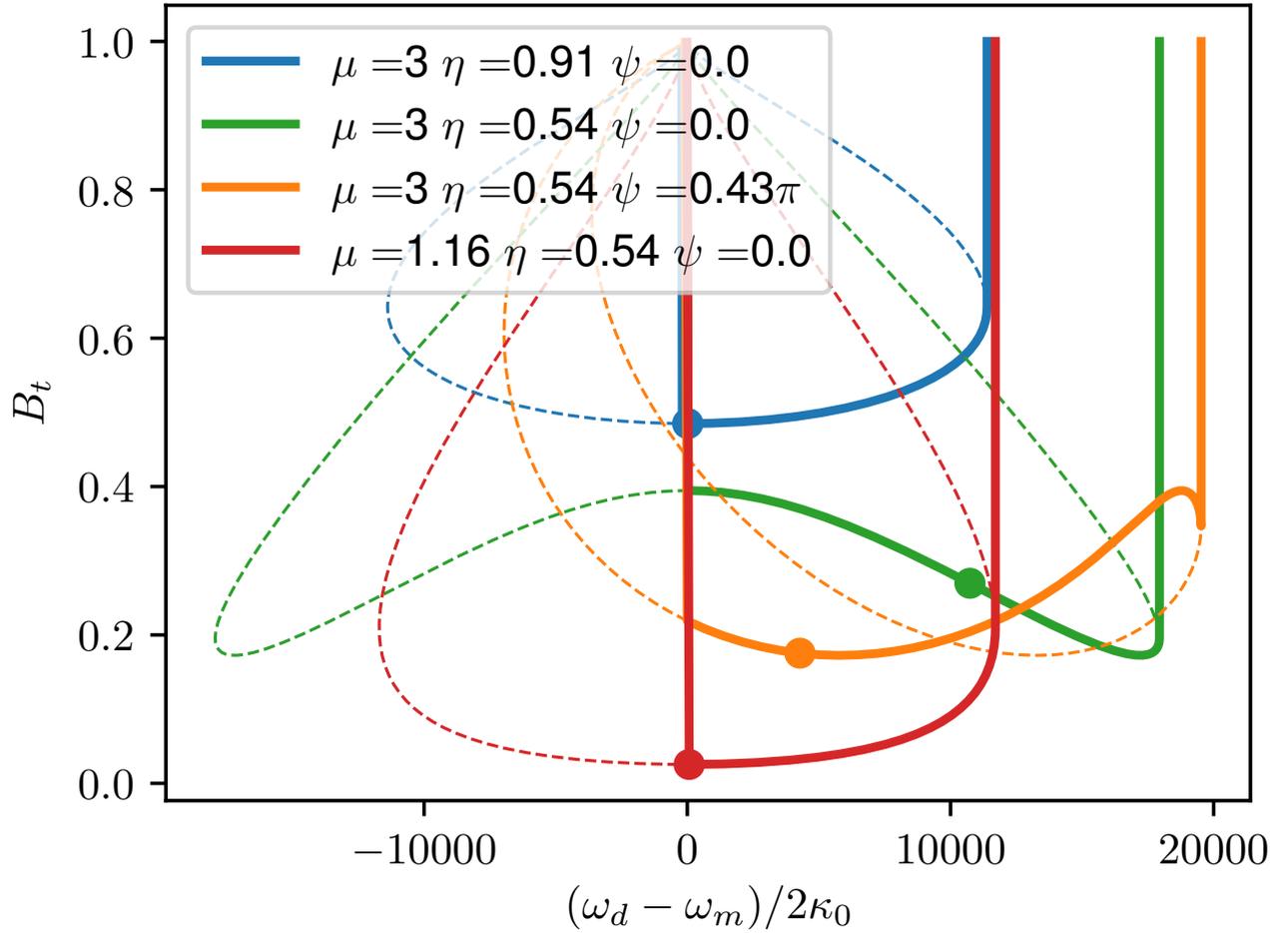


Рисунок 1.8 — Численно получены резонансные кривые пропускания (1.25) для параметров, взятых из [24]. Параметр $\zeta(\xi)$ был оценен с помощью (1.3) (пунктирные линии), и соответствующие кривые LI были оценены для возрастающей частоты (сплошные линии). Точки на кривых пропускания отмечают оптимальные значения отстройки. Все величины построены в безразмерных единицах.

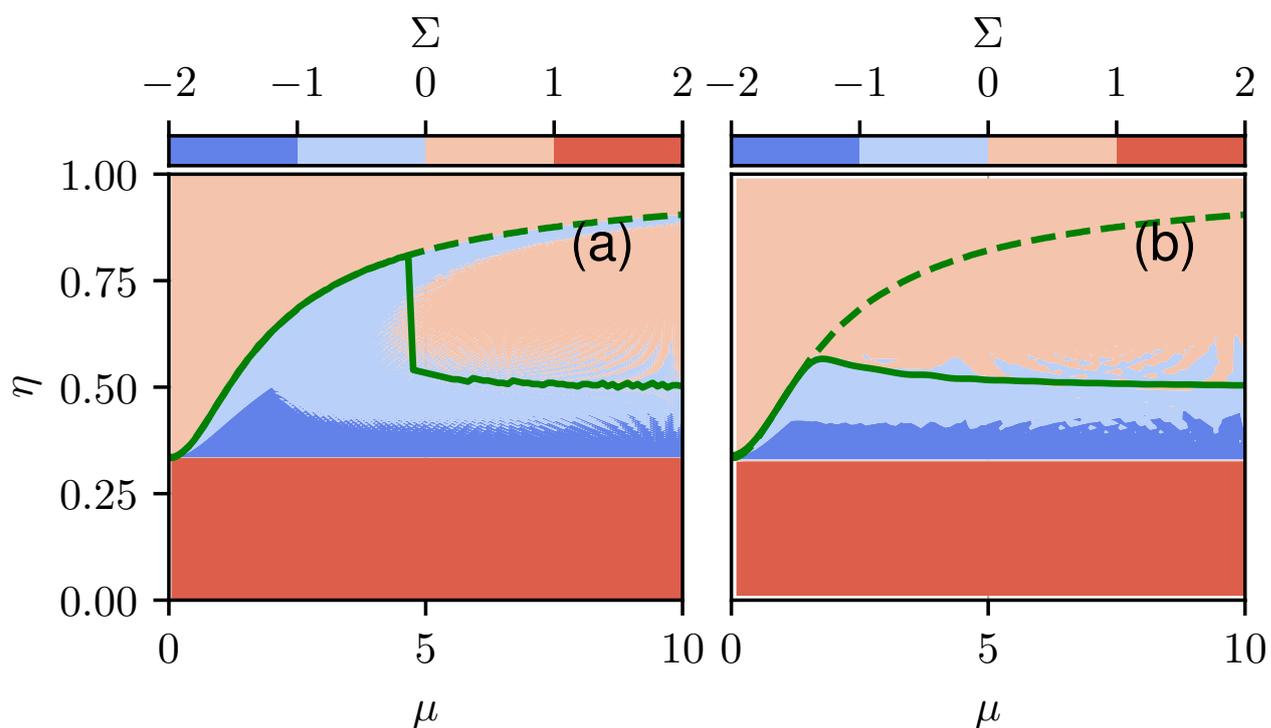


Рисунок 1.9 — а) Параметр Σ для оптимальных ζ_0 , η_0 и фиксированной фазы $\psi = 0$; б) Параметр Σ для оптимальных ψ_{opt} , ζ_{opt} , η_{opt} . Сплошная зеленая линия обозначает оптимальную зависимость $\eta(\mu)$, а пунктирная зеленая линия - (1.12). Все величины представлены в безразмерных единицах.

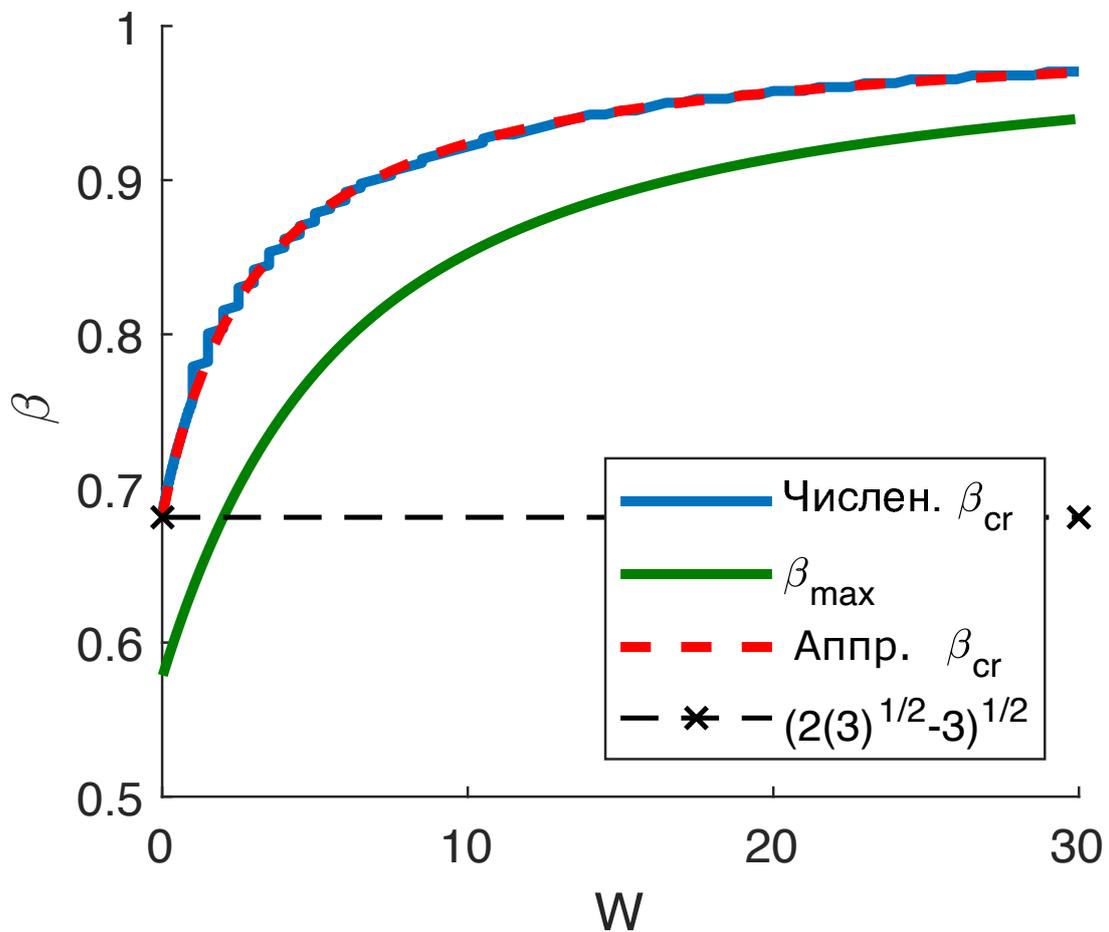


Рисунок 1.10 — Сравнение точной численной и приближенной границы оптимального выбора параметров нулевой отстройки. Сплошная синяя линия - численное решение, красная пунктирная линия - аппроксимация (1.16), а сплошная зеленая линия обозначает глобальный максимум β_{max} (1.18). Пороговое значение (1.15) $\sqrt{2\sqrt{3}-3}$ показано черной пунктирной линией.

Все величины представлены в безразмерных единицах

Глава 2. Затягивание частоты лазера на микрорезонатор с дополнительной призмой и зеркалом

В этой главе предлагается схема затягивания частоты полупроводникового лазера на микрорезонатор с дополнительной призмой и зеркалом, в которой уровень оптической обратной связи регулируется настройкой связи между дополнительной призмой и микрорезонатором. Для этой схемы была разработана модель, анализ которой показал, что максимальный коэффициент стабилизации предложенной схемы аналогичен максимальному коэффициенту стабилизации классической схемы, где оптическая обратная связь с МШГ возникает за счет рэлеевского рассеяния на внутренних и поверхностных неоднородностях. Однако, для классической схемы максимальный уровень стабилизации лазера требует точной настройки коэффициента рэлеевского рассеяния, что не является тривиальной задачей, в то время как это может быть легко реализовано с помощью настройки связи между дополнительной призмой и микрорезонатором. Более того, было обнаружено, что оптимальный режим предложенной схемы находится далеко от критической связи (в отличие от классической схемы затягивания), что приводит к меньшим потерям излучения. Было показано, что для обеих схем мощность, циркулирующая в микрорезонаторе в оптимальном режиме, примерно одинакова, что важно, поскольку режим высокой мощности в микрорезонаторе может привести к нежелательным нелинейным эффектам, ограничивающим ширину линии затянутого лазера.

2.1 Введение

Данная глава организована следующим образом. В разделе 2.2 представлена теоретическая модель схемы связи МШГ с зеркалом. В разделе 2.3 представлена теоретическая модель стабилизации частоты полупроводникового лазера с помощью резонансной оптической обратной связи от МШГ с зеркалом. Раздел 2.4 содержит подробный вывод модели для предложенной схемы. В разделах

2.5 и 2.6 рассматривается стабилизация частоты лазера при ограничениях на уровень оптической обратной связи и нелинейные эффекты, соответственно.

2.2 Схема затыгивания с дополнительной призмой и зеркалом

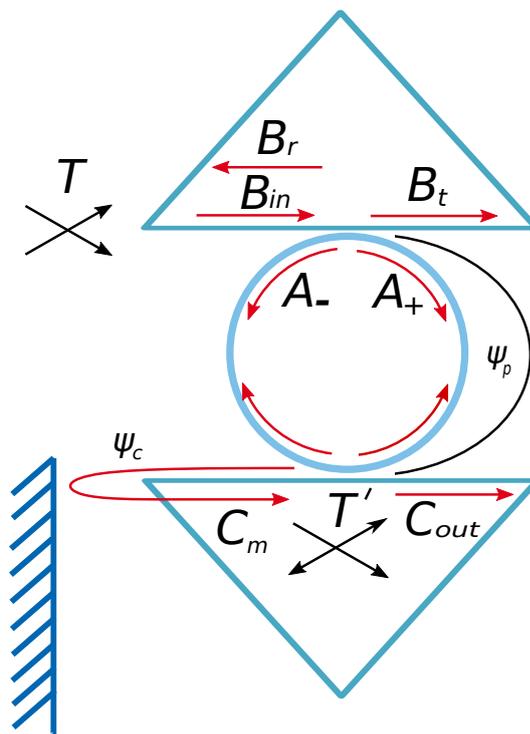


Рисунок 2.1 — Схема затыгивания с дополнительной призмой и зеркалом.

Амплитуды в точке связи входной призмы: B_{in} - амплитуда накачки; B_t и B_r - амплитуды, прохождения и отражения; A_+ и A_- - амплитуды прямой и обратной волны в микрорезонаторе. **Амплитуды в точке связи выходной призмы:** C_m - амплитуда, отраженная от зеркала обратно в выходную призму; C_{out} - выходная амплитуда. T и T' - амплитудный коэффициент прохождения входной и выходной призмы, соответственно.

Схема установки затыгивания на основе МШГ-резонатора модифицированная дополнительным призмой представлена на рисунке 2.1. Для анализа влияния дополнительного элемента обратной связи с зеркалом на характеристики оптической обратной связи резонатора, используется квазигеометрический подход, который был представлен в [119]. Набор уравнений для амплитуд прямой и обратной волны МШГ A_+ и A_- в предположении идеально согласованных

по моде (или одномодовых) устройств связи (для связи лазер-микрорезонатор и для связи зеркало-микрорезонатор) имеет вид

$$(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)A_+ = i\gamma A_- + i\frac{2\delta_c}{T}B_{\text{in}}, \quad (2.1)$$

$$(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)A_- = i(\gamma + 2\delta_m\tilde{R})A_+, \quad (2.2)$$

где B_{in} - амплитуда накачки, $\delta_\Sigma = \delta_0 + \delta_c + \delta_m$; δ_0 - декремент внутренних потерь микрорезонатора; δ_c и δ_m - связь входной и выходной призмы, соответственно; γ - коэффициент обратного рассеяния Рэлея; $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$ - отстройка резонансной частоты МШГ ω_0 от частоты накачки ω . \tilde{R} - комплексный коэффициент отражения от зеркала, которая включает набег фаз от зеркала до точки контакта выходной призмы с микрорезонатором (см. раздел 2.4). Далее предполагается, что комплексный коэффициент отражения настроен оптимально ($\tilde{R} = 1$). Обозначив отражение и прохождение резонатора $\Gamma = B_r/B_{\text{in}}$ и $T_{\text{out}} = B_t/B_{\text{in}}$, соответственно (см. рис. 2.1), получим:

$$\Gamma = -\frac{2i\delta_c(\gamma + 2\delta_m)}{(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m)}, \quad (2.3)$$

$$T_{\text{out}} = \frac{(\delta_\Sigma - 2\delta_c + i\Delta\omega)(\delta_\Sigma + i\Delta\omega) + \gamma(\gamma + 2\delta_m)}{(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m)}, \quad (2.4)$$

$$|C_{\text{out}}| = |B_{\text{in}}| \left| \sqrt{\frac{\delta_m}{\delta_c} \frac{2\delta_c(\delta_\Sigma - 2\delta_m + i\Delta\omega - \gamma)}{(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m)}} \right|. \quad (2.5)$$

Подробный вывод приведенных выше уравнений представлен в разделе 2.4.

Прямая и обратная волны в микрорезонаторе связаны через релеевское рассеяние, описываемое через γ и связь с зеркалом, описываемую через δ_m (см. уравнения 2.1, 2.2). Связь прямой и обратной волн вызывает резонансное расщепление обратной связи $\Gamma(\omega)$ (см. рис. 2.2а). Величина расщепления резонанса отражения задается следующим образом

$$\Delta\omega_\Gamma = \pm \sqrt{\gamma(\gamma + 2\delta_m) - \delta_\Sigma^2}. \quad (2.6)$$

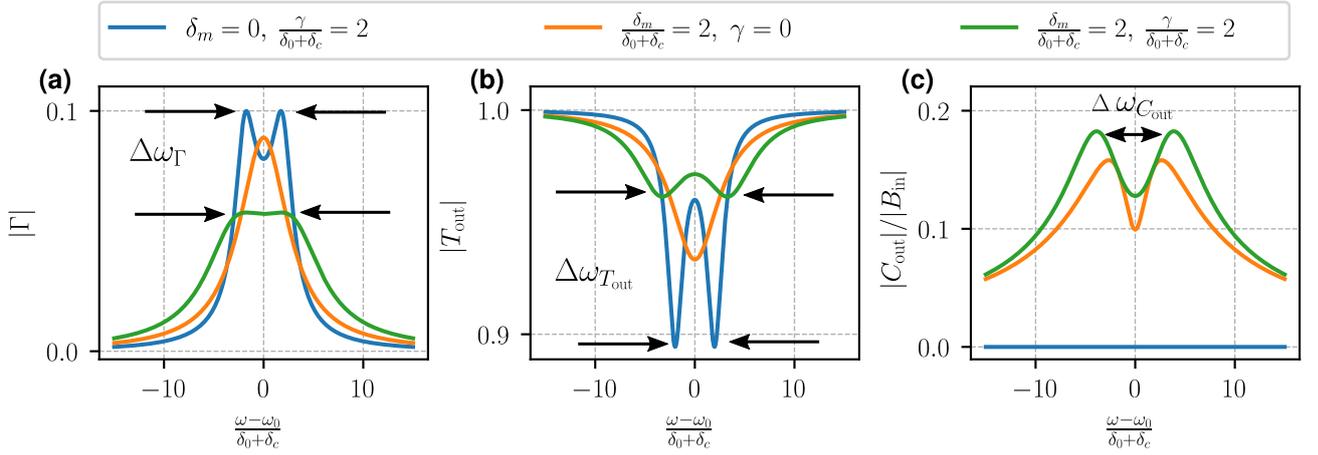


Рисунок 2.2 — Резонансное расщепление отражения Γ , прохождения T_{out} и C_{out} представлены в **a**, **b** и **c**, соответственно. Синие линии соответствуют классической схеме $\delta_m = 0$ и $\frac{\gamma}{\delta_0 + \delta_c} = 2$. Оранжевые линии соответствуют малому обратному рассеянию $\frac{\delta_m}{\delta_0 + \delta_c} = 2$ и $\frac{\gamma}{\delta_0 + \delta_c} = 0$. Зеленые линии соответствуют общему случаю $\frac{\delta_m}{\delta_0 + \delta_c} = 2$ и $\frac{\gamma}{\delta_0 + \delta_c} = 2$.

Условием расщепления обратной связи является $\gamma(\gamma + 2\delta_m) > \delta_\Sigma^2$, что можно переписать как $\gamma > \delta_m + \sqrt{\delta_m^2 + \delta_\Sigma^2}$. Заметим, что таким образом можно устранить резонансное расщепление Γ , нагружая δ_m . В классической схеме затягивания $\Delta\omega_\Gamma$ используется для оценки релеевского рассеяния γ [49]. Аналогично, можно оценить δ_m через резонансное расщепление C_{out} , которое выражается как

$$\Delta\omega_{C_{\text{out}}}\Big|_{\gamma=0} = \pm\sqrt{(\delta_0 + \delta_c)(6\delta_m - \delta_0 - \delta_c)}. \quad (2.7)$$

Важно отметить, что расщепление C_{out} имеет место даже для случая $\gamma \ll \delta_0$ (см. оранжевые линии на рис. 2.2). Таким образом, в эксперименте расщепление C_{out} может быть использовано для расчета δ_c и δ_m даже для случая $\gamma \ll \delta_0$.

2.3 Лазер, стабилизированный затягиванием на резонатор с дополнительным зеркалом

Резонансная оптическая обратная связь (см. уравнение 2.3), попадая в лазер, приводит к затягиванию частоты излучения лазера ω к частоте резонатора ω_0 . Модель полупроводникового лазера со слабой оптической обратной связью

от зеркала впервые была разработана Ланг-Кобаяши [120]. Модель полупроводникового лазера для слабой оптической обратной связи от высокодобротного МШГ резонатора была разработана в [102]. Модели описывают зависимость ω (частоты излучения лазера) от ω_d (частоты резонатора лазера), эта зависимость называется перестроечной кривой.

$$\omega - \omega_d = \kappa_{do} \Im[\Gamma e^{i\omega\tau_s - i \arctan(\alpha)}], \quad (2.8)$$

где τ_s - время прохождения по кругу между резонатором и затынутым лазером; $\kappa_{do} = \frac{\sqrt{1+\alpha^2} 1-R_o^2}{\tau_d R_o}$, которая объединяет параметры полупроводникового лазера: α - фактор Генри, τ_d - время обхода лазерного резонатора и R_o - отражательная способность передней грани лазерного резонатора. Затыгивание происходит, когда частота лазерного резонатора ω_d близка к собственной частоте микрорезонатора ω_0 . В этот момент Γ обеспечивает резонансную оптическую обратную связь, которая затыгивает частоту излучения лазера ω на частоту микрорезонатора ω_0 .

Резонансная оптическая обратная связь приводит к стабилизации частоты излучения лазера. Коэффициент стабилизации определяется как

$$K = \frac{d\omega_d}{d\omega}, \quad (2.9)$$

что можно понять следующим образом: если частота свободного лазера ω_d колеблется на величину $\delta\omega_d$, то частота затынутого лазера ω будет отклоняться только на $\delta\omega = \frac{\delta\omega_d}{K}$.

Для случая слабого релеевского обратного рассеяния $\gamma \ll \delta_0$ резонансное расщепление отсутствует и максимальное значение коэффициента стабилизации достигается при $\Delta\omega = 0$ и $\omega\tau_s = \arctan(\alpha) + \frac{3\pi}{2}$. Тогда для фазово-оптимизированного коэффициента стабилизации предложенной схемы (подробности см. в разделе 2.5) получаем

$$K = 1 + \kappa_{do} \frac{4\delta_c(\gamma + 2\delta_m)}{\delta_\Sigma^3}. \quad (2.10)$$

Эта формула является хорошим приближением для $\gamma < 0.3\delta_0$. Максимальное значение коэффициента стабилизации достигается при $\delta_m = \delta_c = \delta_0$, при этом $K \approx \frac{8}{27} \frac{\kappa_{do}}{\delta_0}$, что в $\delta_0/(2\gamma)$ раз больше оптимума классической схемы затыгивания

($\delta_m = 0$). Например, в [43] авторы измерили $|\Gamma| \approx 3 \times 10^{-2}$ при критическом соединении ($\delta_c \approx \delta_0$) для классической схемы затягивания, что соответствует $\frac{\gamma}{\delta_0} \approx 6 \times 10^{-2}$ (см. уравнение 2.26). Таким образом, схема затягивания с зеркалом может увеличить коэффициент стабилизации примерно в $\delta_0/(2\gamma) \approx 8$ раз (или уменьшить ширину линии частоты излучения лазера в 64 раза).

Указанный оптимум соответствует уровню обратной связи $|\Gamma| = \frac{4}{9}$. В ранних исследованиях эффекта затягивания было показано, что сильная внешняя оптическая обратная связь $|\Gamma|$ может привести к мультистабильности затянутого лазера [75; 120; 121], что ставит компромиссную задачу - установить максимально возможное значение коэффициента стабилизации и сохранить оптическую обратную связь ниже порогового уровня. Решение этой задачи вместе с более подробной информацией об оптимальных параметрах представлено в разделе 2.5.

Максимальные значения коэффициента стабилизации для схемы затягивания с зеркалом и для классической схемы затягивания с оптимальным рэлеевским рассеянием, о которых сообщалось в [A2], примерно одинаковы (см. рис. 2.3). Однако для классической схемы максимальный уровень стабилизации лазера требует точной настройки рэлеевского рассеяния, что не является тривиальной задачей по сравнению с настройкой связи с зеркалом.

При высоком уровне рэлеевского рассеяния все три резонансные кривые WGMR расщепляются из-за связи прямой и обратной волн (см. Eq. 2.6, синие и зеленые линии на рис. 2.2). В схеме затягивания с зеркалом при малом значении γ обратная волна накачивается в основном прямой волной за счет отражения от зеркала, поэтому расщепление в прохождении и отражении отсутствует (см. оранжевые линии на рис. 2.2a,b). Отсутствие расщепления упрощает процесс настройки на оптимальную точку, так как в этом случае при изменении связи с призмами нет необходимости подстраивать отстройку частоты и фазовый сдвиг.

Анализ модели показал, что оптимальный режим схемы с зеркалом далек от критической связи (см. сплошные линии на рис. 2.4) в отличие от оптимального режима классической схемы затягивания. Обозначив потери на излучение в виде

$$\text{Loss} = 1 - |\Gamma|^2 - |T_{\text{out}}|^2 - |C_{\text{out}}/B_{\text{in}}|^2 \quad (2.11)$$

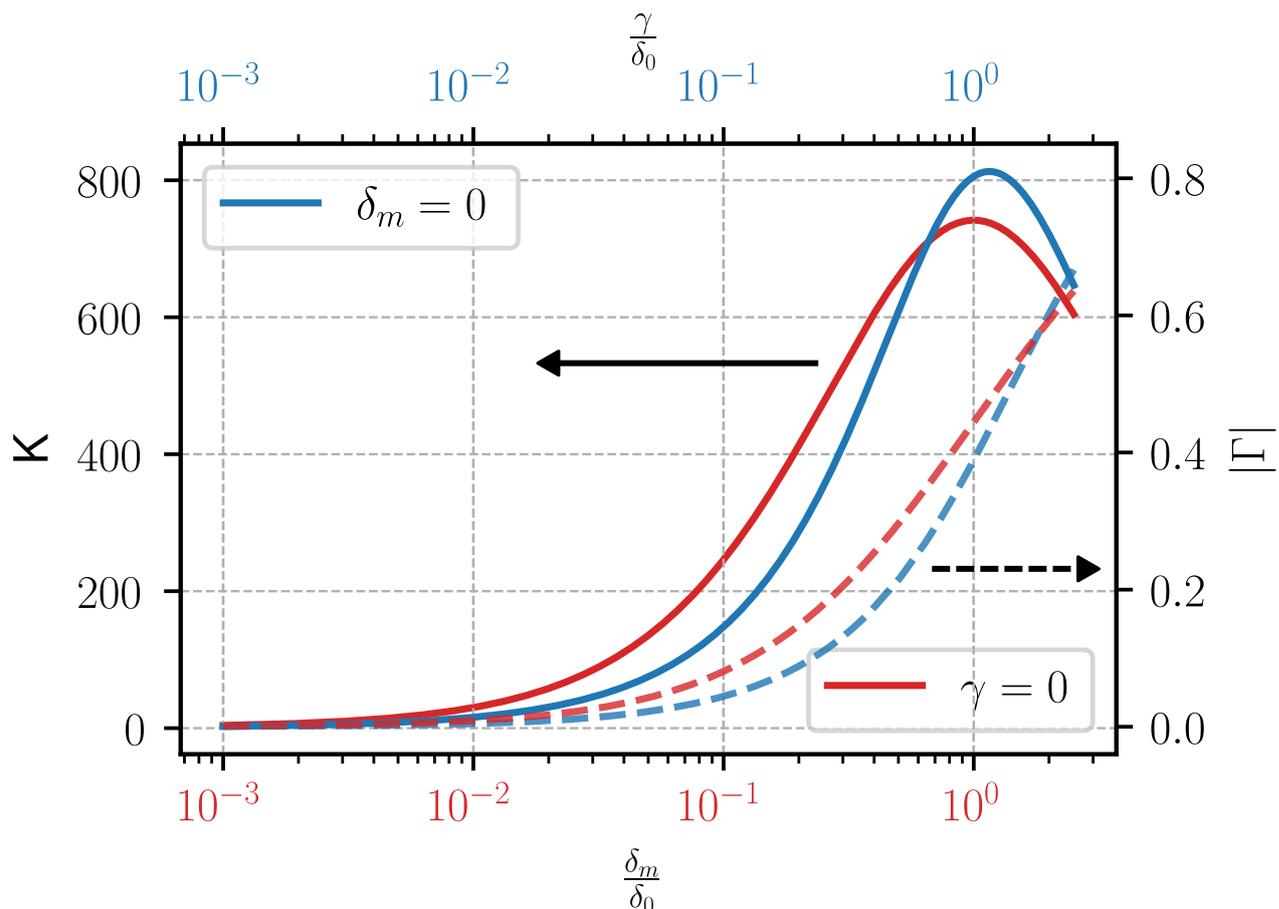


Рисунок 2.3 — Сравнение коэффициента стабилизации (Сплошные линии — левая ось y) и коэффициент отражения $|\Gamma|$ (Пунктирные линии — правая ось y) для случая пренебрежимо малого рэлеевского рассеяния (красная линия) и для классической схемы затягивания (синяя линия).

Остальные параметры выбраны оптимальными (см. рис.2.6).

мы показываем, что потери уменьшаются, по сравнению с классической схемой (см. пунктирные линии на рис. 2.4). Показано, что для обеих схем мощность, циркулирующая в микрорезонаторе при оптимальном режиме, примерно одинакова (см. рис. 2.5). Отметим, что интенсивность прямой волны не зависит от связи с выходной призмой, что объясняется тем, что оптимум $\delta_c = (\delta_0 + \delta_m)/2$ для фиксированного δ_m . Высокая интенсивность поля внутри микрорезонатора может привести к нежелательным эффектам нелинейной генерации (например, четырехволновое смешение или стимулированное комбинационное рассеяние), что приводит к переходу шума относительной интенсивности лазера (RIN) в частотный шум. В предыдущих работах было показано, что нежелательные нелинейные эффекты ограничивают ширину линии затянутого лазера [76]. Нелиней-

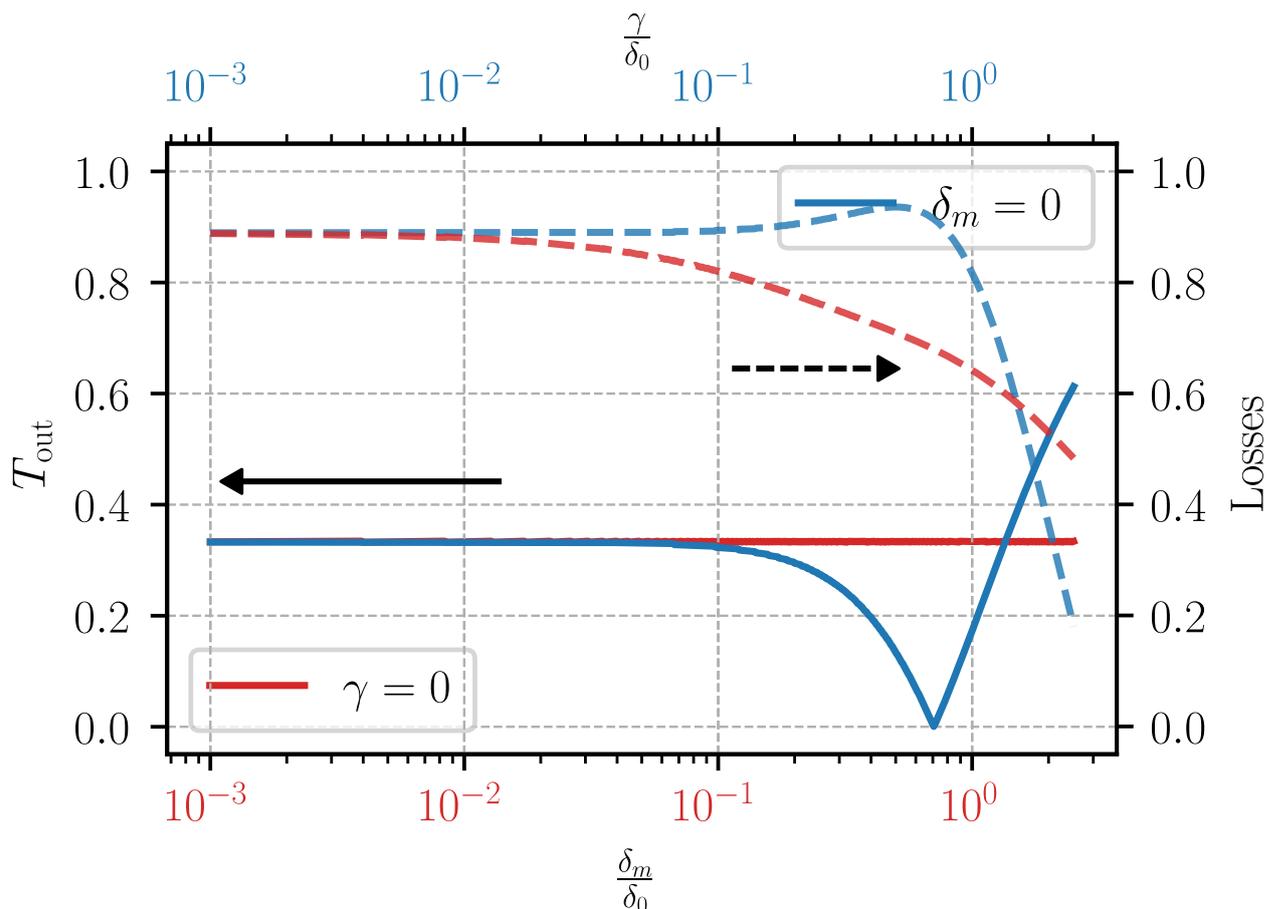


Рисунок 2.4 — Сравнение T_{out} (Сплошные линии – левая ось y) и потерь в микрорезонаторе (Пунктирные линии – правая ось y) для схемы с зеркалом при пренебрежимо малом значении рэлеевского рассеяния (красная линия) и для классической схемы затягивания (синяя линия). Параметры схем выбраны оптимальными (см. рис.2.6).

ные эффекты внутри микрорезонатора возникают, если интенсивность прямой или обратной волны превышает пороговое значение. В предложенной схеме в оптимальном режиме интенсивность прямой и обратной волны близка к интенсивности прямой или обратной волны классической схемы затягивания в оптимальном режиме рэлеевского обратного рассеяния (см. рис.2.5). В целом, минимизация интенсивности прямой и обратной волны находится вне оптимальных параметров для получения наибольшего коэффициента стабилизации. Этот факт декларирует компромиссную задачу установки максимально возможного значения коэффициента стабилизации и удержания нелинейных эффектов ниже порогового уровня, решение которой для режима слабой оптической обратной связи представлено в разделе 2.6.

2.4 Модель затягивания с зеркалом

Уравнения для амплитуд связи лазер-микрорезонатор в предположении идеально согласованных по моде (или одномодовых) устройств связи дается в виде (см. рис. 2.1):

$$\frac{dA_+}{dt} + (\delta_m + \delta_0 + \delta_c + i\Delta\omega)A_+ = i\gamma A_- + i\frac{T}{\tau_0}B_{\text{in}}, \quad (2.12)$$

$$\frac{dA_-}{dt} + (\delta_m + \delta_0 + \delta_c + i\Delta\omega)A_- = i\gamma A_+ + i\frac{T'}{\tau_0}C_m e^{i\psi_p}, \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

$$B_t = \sqrt{1 - T^2}B_{\text{in}} + iTA_+, \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

$$B_r = iTA_-, \quad (2.17)$$

$$C_m = iR_m T' A_+ e^{i(\psi_p + \psi_c)}, \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

$$C_{\text{out}} = \sqrt{1 - T'^2}C_m + iT' A_- e^{-i\psi_p}, \quad (2.20)$$

где уравнения 2.12-2.17 записаны для точки связи с входной призмой, а уравнения 2.18-2.20 записаны для точки связи с выходной призмой (см. рис. 2.1). Волна накачки с амплитудой B_{in} возбуждает прямую волну МШГ с амплитудой A_+ через спадающее поле в точке связи между входной призмой и микрорезонатором. Далее T - амплитудный коэффициент пропускания верхнего элемента связи, а τ_0 - время обхода резонатора. Обратная волна с амплитудой A_- возбуждается прямой волной A_+ из-за релеевского рассеяния на внутренних и поверхностных неоднородностях резонатора [73; 122–126], где γ - скорость обратного рассеяния. δ_0 - декремент внутренних потерь; $2\delta_c = T^2/\tau_0$ - декремент связи с входной призмой [119]. T' - амплитудный коэффициент прохождения; $2\delta_m = T'^2/\tau_0$ - декремент связи с выходной призмой. C_m - амплитуда волны, отраженной от зеркала обратно в выходную призму. ψ_c - набег фазы, включая фазовый сдвиг из-за зеркала (см. рис. 2.1). ψ_p - набег фаз между двумя контактами призм в направлении прямой волны (см. рис. 2.1). Далее, обозначая $\tilde{\psi} = \psi_c + 2\psi_p + \pi/2$, $\tilde{R} = R_m \exp(i\tilde{\psi})$ и $\delta_\Sigma = \delta_m + \delta_0 + \delta_c$ стационарные уравнения

для A_+ и A_- записываются так

$$(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)A_+ = i\gamma A_- + i\frac{2\delta_c}{T}B_{\text{in}}, \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

$$(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)A_- = i(\gamma + 2\delta_m\tilde{R})A_+, \quad (2.23)$$

где учитывается $\delta_m \approx \frac{T'^2}{2\tau_0}$ и $\delta_c \approx \frac{T^2}{2\tau_0}$ [119], что является правильным приближением для случая $\delta_c\tau_0 \ll 1$ и $\delta_m\tau_0 \ll 1$. Таким образом, получаем

$$A_+ = \frac{\delta_\Sigma + i\Delta\omega}{i(\gamma + 2\delta_m\tilde{R})}A_-, \quad (2.24)$$

и

$$A_- = -\frac{B_{\text{in}}}{T} \frac{2\delta_c(\gamma + 2\delta_m\tilde{R})}{(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m\tilde{R})}. \quad (2.25)$$

Обозначив далее коэффициенты отражения и прохождения резонатора как $\Gamma = B_r/B_{\text{in}}$ и $T_{\text{out}} = B_t/B_{\text{in}}$, соответственно (см. уравнение 2.15-2.17), получаем:

$$\Gamma = -\frac{2i\delta_c(\gamma + 2\delta_m\tilde{R})}{(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m\tilde{R})} \quad (2.26)$$

и

$$\begin{aligned} T_{\text{out}} &= \sqrt{1 - 2\delta_c\tau_0} - \\ &\quad \dots \frac{2\delta_c(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)}{(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m\tilde{R})} = \\ &= \sqrt{1 - 2\delta_c\tau_0} \times \\ &\quad \frac{(\delta_\Sigma - 2\delta'_c + i\Delta\omega)(\delta_\Sigma + i\Delta\omega) + \gamma(\gamma + 2\delta_m\tilde{R})}{(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m\tilde{R})}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где $\delta'_c = \frac{\delta_c}{\sqrt{1-2\delta_c\tau_0}} \approx \delta_c$. Коэффициент отражения Γ обеспечивает резонансную обратную связь с лазером накачки. Таким образом, можно привязать частоту лазера накачки к резонансу МШГ резонатора. Подробный анализ процесса затягивания представлен в разделе 2.3.

Критическая связь ($T_{\text{out}} = 0$ в резонансе) для реальной $\tilde{R} = R_m$ достигается, если $\delta_c^2 = (\delta_m + \delta_0)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m R_m)$, где учтено $\delta_c\tau_0 \ll 1$. Резонансное

отражение Γ для случая критической связи дается следующим образом

$$\Gamma = -i \frac{\gamma + 2\delta_m R_m}{\delta_\Sigma} \Big|_{\gamma \ll \delta_0 + \delta_m} \approx -i \frac{\delta_m R_m}{\delta_0 + \delta_m}. \quad (2.28)$$

Для режима низкой связи ($\frac{\delta_c}{\delta_0 + \delta_c} \ll 1$) удобнее использовать C_{out} . Поскольку C_{out} в $\sqrt{\frac{\delta_m}{\delta_c}}$ раз более чувствителен к изменению δ_m и $\Delta\omega$, чем B_t :

$$C_{\text{out}} = iB_{\text{in}} \sqrt{\frac{\delta_m}{\delta_c}} e^{-i\psi_p} \sqrt{1 - 2\delta_m \tau_0} \times \quad (2.29)$$

$$\times \frac{2\delta_c((\delta_\Sigma - 2\delta'_m + i\Delta\omega)\tilde{R} - \gamma')}{(\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m \tilde{R})} \quad (2.30)$$

где $\delta'_m = \frac{\delta_m}{\sqrt{1 - 2\delta_m \tau_0}} \approx \delta_m$ и $\gamma' = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - 2\delta_m \tau_0}} \approx \gamma$. Критическая связь для выходной призмы ($C_{\text{out}} = 0$) для реальной $\tilde{R} = R_m$ выражается как $\delta_m = \delta_0 + \delta_c - \gamma/R_m$. Заметим, что это не согласуется с критической связью входной призмы, так что критическое сцепление как для входной призмы, так и для выходной призмы невозможно.

C_{out} – содержит только затянутую моду. Для использования C_{out} в качестве фильтрованного выхода может потребоваться установить амплитуду C_{out} на максимальное значение. Максимальная амплитуда C_{out} достигается при

$$\delta_m = (3 - 2\sqrt{2}) \times (\delta_0 + \delta_c), \quad (2.31)$$

при данной связи амплитуда C_{out} выражается как

$$\max_{\delta_m} C_{\text{out}} = \frac{ie^{-i\psi_p}}{2} \sqrt{\frac{\delta_c}{\delta_0 + \delta_c}} B_{\text{in}}. \quad (2.32)$$

2.5 Оптимальные режимы при ограничении уровня обратной волны

В соответствии с (2.8) и (2.9) коэффициент стабилизации выражается следующим образом

$$\begin{aligned} K &= 1 - \kappa_{do} \Im \left[e^{i\omega\tau_s - i \arctan(\alpha)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} \right] = \\ &= 1 - \Im \left[\frac{4\kappa_{do} e^{-i \arctan(\alpha)} \delta_c (\gamma + 2\delta_m \tilde{R}) (\delta_\Sigma + i\Delta\omega)}{e^{-i\omega\tau_s} \left((\delta_\Sigma + i\Delta\omega)^2 + \gamma(\gamma + 2\delta_m \tilde{R}) \right)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.33)$$

где γ взята из уравнения 2.26.

Для случая слабого релеевского обратного рассеяния $\gamma \ll \delta_0$ резонансное расщепление отсутствует и максимальное значение коэффициента стабилизации достигается при $\tilde{R} = R_m$, $\Delta\omega = 0$ и $\omega\tau_s = \omega_0\tau_s = \arctan(\alpha) + \frac{3\pi}{2}$.

$$K = 1 + \kappa_{do} \frac{4\delta_c (\gamma + 2\delta_m R_m)}{\delta_\Sigma^3}. \quad (2.34)$$

Приведенная выше формула может быть хорошим приближением для $\gamma \ll 0.3\delta_0$. Используя ее, можно вывести оптимальные параметры. Для фиксированных γ и δ_m получаем $\delta_c = (\delta_0 + \delta_m)/2$ (см. рис. 2.6, красная линия) и для глобального максимума

$$\begin{aligned} \delta_m &= \delta_0 - \gamma/R_m; & \delta_c &= \delta_0 - \gamma/R_m/2; \\ K &= 1 + \frac{16 \kappa_{do}}{27 \delta_0} \frac{R_m^2}{2R_m - \gamma/\delta_0}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Максимальное значение коэффициента стабилизации достигается при $\delta_0 = \delta_m = \delta_c$, при этом $K = \frac{8 \kappa_{do}}{27 \delta_0}$, что в $1/(2\gamma)$ раз больше оптимума для классической схемы затягивания ($\delta_m = 0$).

В ранних исследованиях эффекта затягивания было показано, что достаточно сильный уровень внешней оптической обратной связи может привести к мультистабильности затянутого лазера [75; 120; 121]. Выше указанный оптимум соответствует $|\Gamma| = \frac{4}{9}$. Дальнейший анализ будет рассмотрен при ограни-

чении $|\Gamma| < \rho \ll 1$, где ρ - уровень оптической обратной связи, гарантирующий стабильность затянутого лазера. Таким образом, максимальное значение коэффициента стабилизации в режиме стабильного излучения задается следующим условием

$$\begin{cases} \max K, \\ |\Gamma| = \rho \ll 1, \end{cases} \quad (2.36)$$

решение которой может быть выражено как:

$$\begin{aligned} \arg \max_{\delta_c, \delta_m} (K) \Big|_{|\Gamma|=\rho \ll 1} &= \begin{cases} \delta_c = \frac{\sqrt{\rho}}{2(1-\sqrt{\rho})} \delta_0, \\ \delta_m = \delta_c, \end{cases} \\ \max_{\delta_0, \delta_c} K \Big|_{|\Gamma|=\rho \ll 1} &= 2 \frac{\kappa_{do}}{\delta_0} (\rho - \rho^{3/2}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Таким образом, увеличивая уровень оптической обратной связи до $\rho = \frac{4}{9}$ при оптимально настроенных δ_c и δ_m можно увеличить коэффициент стабилизации. Максимальный уровень оптической обратной связи ρ , при котором затягивание устойчиво, зависит от параметров лазера. Например, в [75] при $\rho > 10^{-2}$ проявлялось нестабильность лазера, а результирующая ширина линии составляла 20 кГц. В [43] лазер был стабилен при $\rho = 3 \times 10^{-2}$ и была достигнута суб-кГц ширина линии. Стабильное затягивание частоты лазера при $\rho \approx 0.5$ и значительное уменьшение ширины линии до суб-100 Гц было продемонстрировано в [127]. В то же время глобальный максимум, согласно (2.35), может быть достигнут, если $\rho > 0.44$.

Для достижения максимально возможного коэффициента стабилизации в эксперименте необходимо увеличивать δ_m и δ_c , уменьшая расстояние между призмами и микрорезонатором до тех пор, пока не наступит нестабильность лазера. Таким образом, схема затягивания с зеркалом позволяет не только увеличивать коэффициент стабилизации, но также позволяет исследовать зависимость стабильности лазера от уровня оптической обратной связи. Стабильность режима затягивания частоты лазера одномодовым высокочастотным резонатором была теоретически проанализирована в [121], где стационарное состояние

излучения выражается через лазерную частоту релаксационных пульсаций Ω_r .

$$K\delta_0 < \Omega_r. \quad (2.38)$$

Принимая во внимание наибольшее значение K для данного ρ (см. уравнение 2.37), получаем $\rho - \rho^{3/2} < \frac{\Omega_r}{2\kappa_{do}}$. Следовательно, ρ выражается только параметрами лазера.

Далее оценивается увеличение коэффициента стабилизации за счет связи с зеркалом в случае ограничения на уровень обратной волны:

$$\frac{K|_{\delta_m \neq 0}}{K|_{\delta_m = 0}} = \frac{27}{8} \frac{\delta_0}{\gamma} (\rho - \rho^{3/2}), \quad (2.39)$$

где учтено, что $\max K|_{\delta_m = 0} = \kappa_{do} \frac{16\gamma}{27\delta_0^2}$ достигается при $\delta_c = \frac{\delta_0}{2}$ и обратная волна мала ($4\gamma/9 < \rho\delta_0$), чтобы удовлетворить критерию устойчивости. Таким образом, для случая $\frac{\delta_0}{\gamma}\rho \gg 1$ значительное увеличение коэффициента стабилизации может быть достигнуто с помощью связи с зеркалом. Например, в работе [43] авторы измерили $|\Gamma| \approx 3 \times 10^{-2}$ при критической связи ($\delta_c \approx \delta_0$), что соответствует $\frac{\gamma}{\delta_0} \approx 6 \times 10^{-2}$ (см. уравнение 2.26). Таким образом, схема затягивания с зеркалом может увеличить коэффициент стабилизации примерно в 8 раз (или дополнительно уменьшить ширину линии в 64 раза), где учитывается оптимальный уровень оптической обратной связи $\rho = \frac{4}{9}$. В обычных интегральных микрорезонаторах обратное рэлеевское рассеяние относительно велико ($\gamma \approx \delta_0$) [50], поэтому нет необходимости реализовывать для них схему затягивания с зеркалом.

В эксперименте может быть проще установить один из параметров δ_c или δ_m , а затем подстроить другой. Для этого подхода оптимальные параметры даются следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_{\delta_c \text{ or } \delta_m} (K) \Big|_{|\Gamma|=\rho \ll 1} &= \frac{2}{3} \frac{\kappa_{do}}{\delta_0} \rho \\ \arg \max_{\delta_c \text{ or } \delta_m} (K) \Big|_{|\Gamma|=\rho \ll 1} &\approx \delta_c = \frac{3}{8} \rho \delta_0, \quad \delta_m = \frac{\delta_0 + \delta_c}{2} \delta_m = \frac{3}{8} \rho \delta_0, \quad \delta_c = \frac{\delta_0 + \delta_m}{2} \max_{\delta_c \text{ or } \delta_m} (K) \Big|_{|\Gamma|=\rho \ll 1} \end{aligned}$$

Настраивая связь с выходной призмой δ_m и связь с выходной призмой δ_c можно настроить установку на $\max_{\delta_m} C_{\text{out}}$ (см. уравнение 2.31). Для этого режима получаем:

$$\begin{aligned} \arg \max_{\delta_c} (K) \Big|_{|\Gamma|=\rho \ll 1}^{\max_{\delta_m} C_{\text{out}}} &= \begin{cases} \delta_m = (3 - 2\sqrt{2})(\delta_0 + \delta_c), \\ \delta_c = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{3-2\sqrt{2}} \delta_0 \rho. \end{cases} \\ \max_{\delta_c} (K) \Big|_{|\Gamma|=\rho \ll 1}^{\max_{\delta_m} C_{\text{out}}} &= \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \frac{\kappa_{do}}{\delta_0} \rho \end{aligned} \quad (2.42)$$

Коэффициент стабилизации рассматриваемых режимов близок к оптимальному (см. уравнение 2.37). Карта коэффициентов стабилизации представлена на рис. 2.8, где темно-серая линия соответствует ограничению $|\Gamma| = 0.1$ (см. рис. 2.7).

2.6 Оптимальный режим при ограничении нелинейных эффектов

Высокая интенсивность поля внутри микрорезонатора может привести к нежелательным эффектам нелинейной генерации. Из уравнения 2.24 получаем $\left| \frac{A_-}{A_+} \right| = \frac{\gamma + 2\delta_m}{\delta_\Sigma}$. Для случая $\gamma \ll \delta_0$ (что имеет место для кристаллических микрорезонаторов) и $\delta_m = 0$, внутрирезонаторная интенсивность в основном определяется A_+ как $|A_-| \ll |A_+|$. Таким образом, для достижения достаточного уровня обратной связи $|\Gamma|$ для затягивания частоты лазера необходимо иметь высокую амплитуду прямой волны A_+ и, следовательно, сильную связь δ_c . Однако увеличение прямой волны может привести к нежелательным нелинейным эффектам в микрорезонаторах с высокой добротностью. Можно показать, что в схеме с дополнительным зеркалом, изменяя связь с зеркалом, можно настроить эффективный уровень обратного рассеяния через δ_m ($A_- \approx \frac{2\delta_m}{\delta_\Sigma} A_+$) и достичь достаточного уровня обратной волны $|\Gamma|$ без значительного увеличения прямой волны, что может предотвратить возникновение нелинейных эффектов. Далее в этом разделе представлен детальный анализ подавления нелинейных эффектов в схеме зеркалом на основе порога параметрической неустойчивости, который

задается выражением [115; 116]:

$$f = \sqrt{\frac{\delta_c}{\delta_\Sigma^3}} \sqrt{\frac{6\omega\chi_3 P_{\text{in}}}{n^4 \epsilon_0 V_0}} \sqrt{\frac{nS}{n_c S_c}} > 1, \quad (2.43)$$

где P_{in} - мощность накачки, χ_3 - нелинейность третьего порядка микрорезонатора, V_0 - объем моды, n и n_c - показатели преломления микрорезонатора и призмы, S и S_c - площади пучка лазера и контакта с МШГ. Гиперпараметрическая осцилляция и рамановское излучение имеют почти одинаковые пороги в WGM резонаторах [114; 117; 118].

Параметр f может быть уменьшен ниже порогового уровня путем уменьшения δ_c . В этом случае коэффициент стабилизации также уменьшается. С точки зрения сохранения высокого коэффициента стабилизации и низкого значения f схема с зеркалом более эффективна, чем традиционная схема затягивания (без зеркала). В новой схеме необходимо учитывать связь с зеркалом и, используя (2.34) и (2.26) для $\gamma \ll \delta_0$, выражение для нормированной амплитуды накачки можно переписать как

$$f = \sqrt{\frac{\delta_c \theta^2}{\delta_\Sigma^3}} \approx \sqrt{\frac{\theta^2 K}{\kappa_{do}(\gamma + 2\delta_m R_m)}}, \quad (2.44)$$

где $\theta = \sqrt{\frac{6\omega\chi_3 P_{\text{in}}}{n^4 \epsilon_0 V_0}} \sqrt{\frac{nS}{n_c S_c}}$. Анализируя это выражение, можно увидеть, что при одинаковом коэффициенте стабилизации схема затягивания с зеркалом имеет меньшее значение порога параметрической неустойчивости:

$$\frac{f|_{\delta_m \neq 0}}{f|_{\delta_m = 0}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + 2\delta_m R_m}}. \quad (2.45)$$

Приведенное выше соотношение верно, если нет ограничений на уровень оптической обратной связи. Далее рассмотрим систему для максимизации коэффициента стабилизации при ограничении на уровень оптической обратной связи и нелинейных эффектов:

$$\begin{cases} \max K, \\ f^2 = \frac{\delta_c \theta^2}{\delta_\Sigma^3} \leq 1, \\ |\Gamma| = \frac{4\delta_c \delta_m}{\delta_\Sigma^2} \leq \rho \end{cases} \quad (2.46)$$

Подставляя (2.37) в (2.44) получаем $f^2 = \frac{2\theta^2 \sqrt{\rho}(1-\sqrt{\rho})^2}{\delta_0^2}$. Поэтому, если $\frac{2\theta^2 \sqrt{\rho}(1-\sqrt{\rho})^2}{\delta_0^2} < 1$ оптимальные значения δ_m и δ_c могут быть заданы из (2.37), поэтому для этого случая решение (2.46) дается выражением (2.37).

Далее, рассмотрим случай $\frac{2\theta^2 \sqrt{\rho}(1-\sqrt{\rho})^2}{\delta_0^2} > 1$. В этом случае необходимо отстроить δ_m и δ_c от оптимального положения (2.37), чтобы удовлетворить $f \leq 1$. Объединяя $f^2 = \frac{\delta_c \theta^2}{\delta_\Sigma^3}$ и $|\Gamma| = \frac{4\delta_c \delta_m}{\delta_\Sigma^2}$ и $\delta_\Sigma = \delta_0 + \delta_c + \delta_m$ получаем:

$$\delta_m^2 - \frac{|\Gamma|}{4f^2} \theta^2 + \frac{|\Gamma|^3}{64f^4} \frac{\theta^4}{\delta_m^2} + \delta_0 \delta_m = 0. \quad (2.47)$$

Обозначая $\tilde{\delta}_m = \frac{2\delta_m f}{\theta \sqrt{|\Gamma|}}$ получаем

$$\tilde{\delta}_m^2 - 1 + \frac{|\Gamma|}{4} \frac{1}{\tilde{\delta}_m^2} + \frac{2\delta_0 f}{\theta \sqrt{|\Gamma|}} \tilde{\delta}_m = 0. \quad (2.48)$$

Далее рассмотрим случай сильной нелинейности $\frac{2\delta_0 f}{\theta \sqrt{|\Gamma|}} \ll 1$ и $\frac{|\Gamma|}{4} \ll \frac{\rho}{4} \ll 1$. Для этого случая приближенное решение дается $\tilde{\delta}_m \approx 1$ и

$$\delta_m^2 \approx \frac{|\Gamma|}{4f^2} \theta^2. \quad (2.49)$$

Далее можем написать:

$$\begin{cases} \delta_m = \frac{\theta \sqrt{|\Gamma|}}{2f}, \\ \delta_c = \frac{|\Gamma| \theta \sqrt{|\Gamma|}}{8f}, \\ K = \frac{\kappa_{do} \sqrt{|\Gamma|} f^2}{2\theta}. \end{cases} \Rightarrow \max K \begin{cases} \delta_m = \frac{\theta \sqrt{\rho}}{2}, \\ \delta_c = \frac{\rho \theta}{8} \sqrt{\rho}, \\ K = \frac{\kappa_{do} \sqrt{\rho}}{2\theta}, \end{cases} \quad (2.50)$$

где для максимизации K положим $|\Gamma| = \rho$ и $f^2 = 1$. Согласно приведенной системе, оптимальное состояние при сильной нелинейности достигается при асимметричной нагрузке призм ($\frac{\delta_c}{\delta_m} = \frac{\rho}{4}$).

2.7 Заключение

Мы предложили модифицированную схему затягивания, в которой оптическая обратная связь регулируется зеркалом, связанным с микрорезонатором через дополнительную призму. Усиление обратной волны за счет связи зеркала с прямой и обратной волной в МШГ позволяет усилить коэффициент стабилизации частоты лазера, максимальный уровень которого близок к максимальному уровню классической схемы. Таким образом, схема затягивания с зеркалом решает проблему слабого релеевского обратного рассеяния некоторых кристаллических высокодобротных резонаторов.

Для предложенной схемы максимальный уровень стабилизации лазера может быть достигнут перестройкой уровня связи зеркала с микрорезонатором через выходную призму, что упрощает настройку на оптимальный режим по сравнению с классической схемой затягивания.

Анализ разработанной модели показал, что оптимальный режим предложенной схемы находится вдали от критической связи (в отличие от классической схемы затягивания), что приводит к меньшим потерям излучения. Показано, что для обеих схем мощность, циркулирующая в микрорезонаторе в оптимальном режиме, примерно одинакова, что важно, поскольку режим высокой мощности в микрорезонаторе может привести к нежелательным нелинейным эффектам, ограничивающим ширину линии затянутого лазера.

Поскольку высокий уровень оптической обратной связи может дестабилизировать лазер, оптимальные параметры настройки приведены для различных режимов с ограничением на поддержание заданного уровня обратной волны. Таким образом, схема затягивания с зеркалом позволяет исследовать чувствительность лазера к резонансной оптической обратной связи и, следовательно, установить максимально возможный уровень обратной связи.

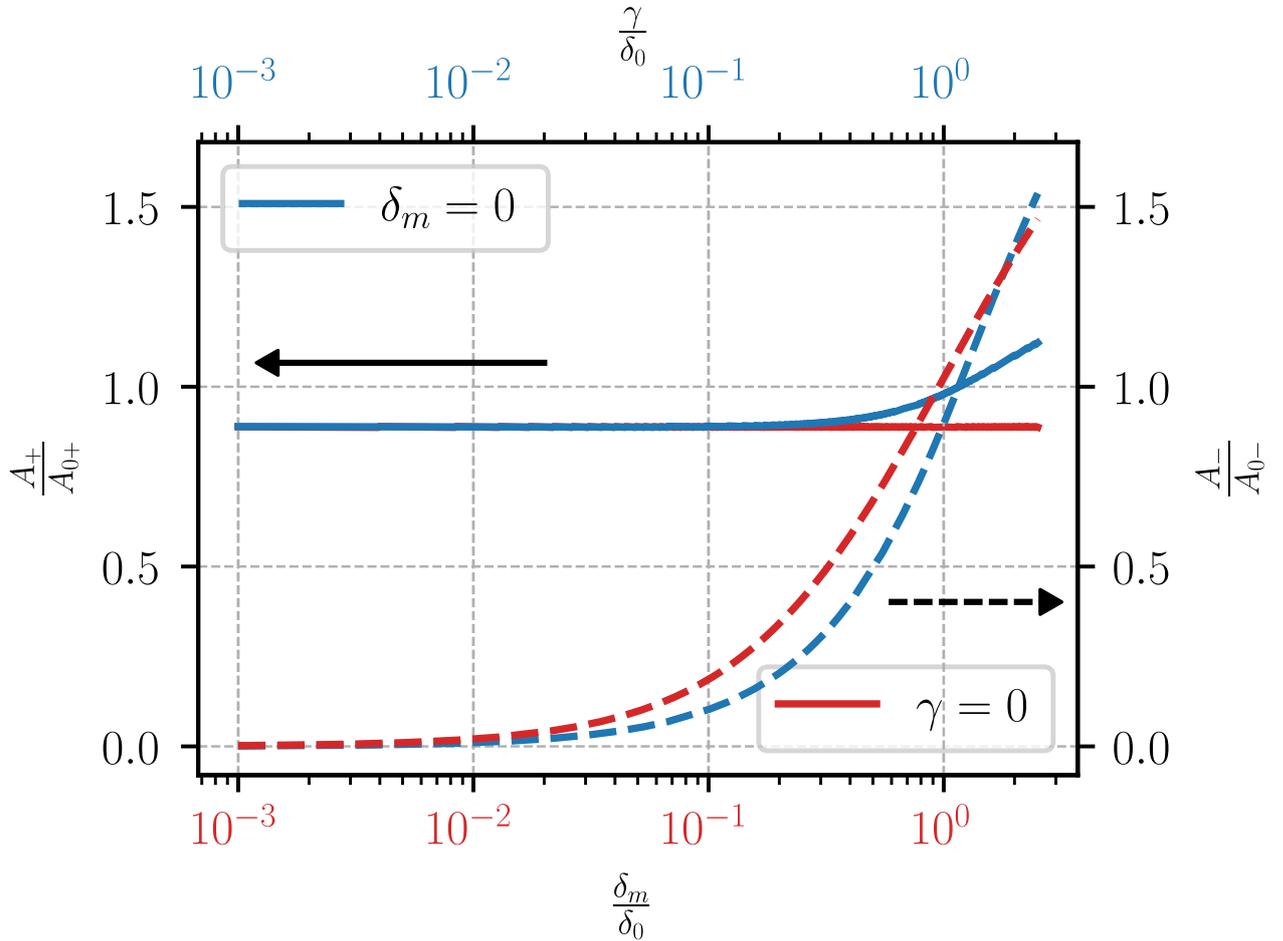


Рисунок 2.5 — Сравнение нормированных амплитуд прямой волны $\frac{A_+}{A_{0+}}$ (сплошные линии – левая ось y) и обратной волны $\frac{A_-}{A_{0-}}$ (пунктирные линии – правая ось y) для случая пренебрежимо малого рэлеевского рассеяния (красная линия) и для классической схемы затягивания (синяя линия). Остальные параметры выбраны оптимальными (см. рис.2.6), $A_{0\pm}$ - амплитуды A_{\pm} при $\frac{\gamma}{\delta_0} = 1.16$ и $\delta_m = 0$, что соответствует оптимуму классической схемы

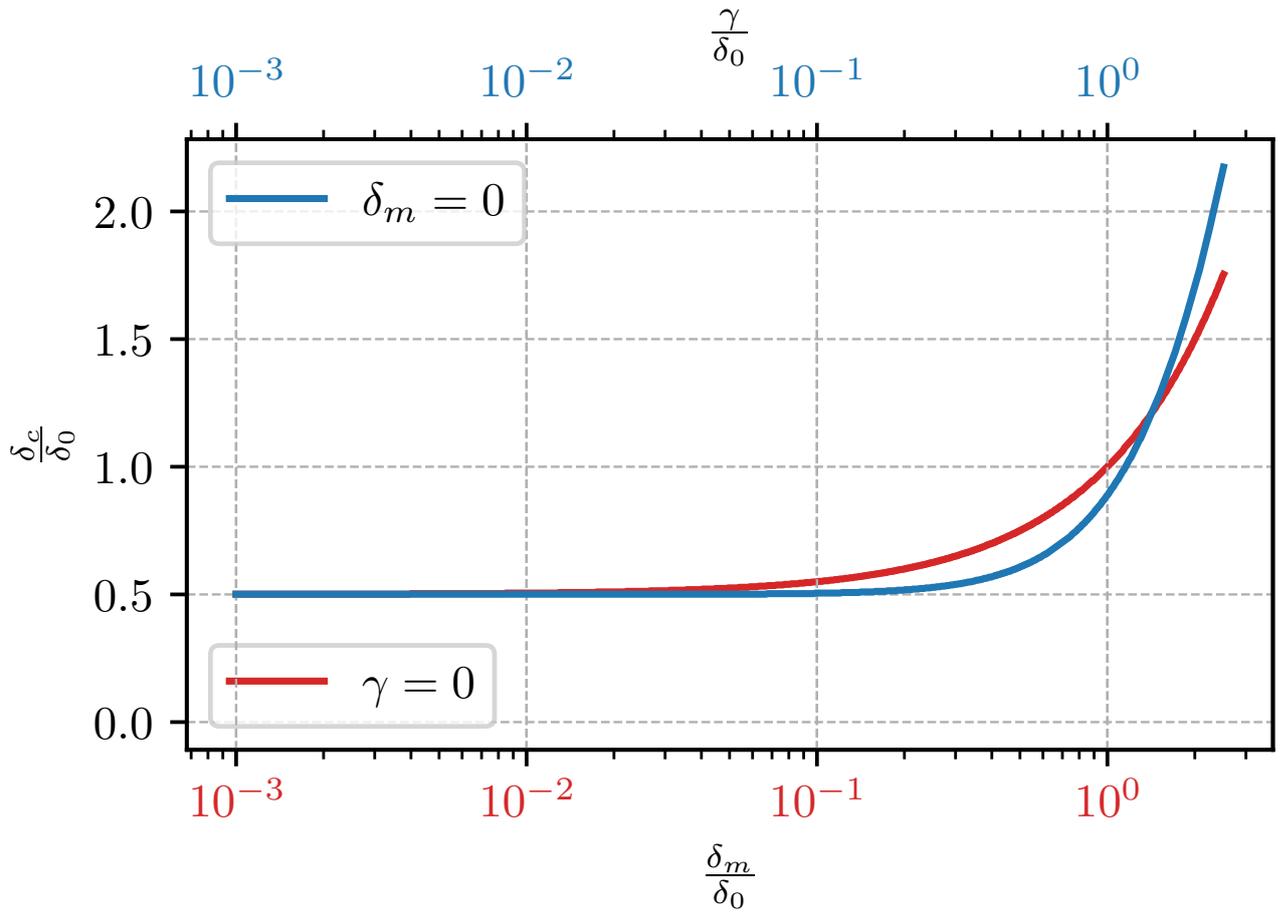


Рисунок 2.6 — Оптимальные значения δ_c для случая малого рассеяния $\gamma = 0$ (синяя линия) и для классической схемы затягивания $\delta_m = 0$ (красная линия). Оптимальными параметрами для случая малого рассеяния являются $\Delta\omega = 0$ и $\omega\tau_s = \arctan(\alpha) + \frac{3\pi}{2}$ и $\tilde{R} = 1$. Для классической схемы затягивания при $\gamma > \delta_0 + \delta_c$ отстройка и фаза имеют нетривиальные зависимости [A2]

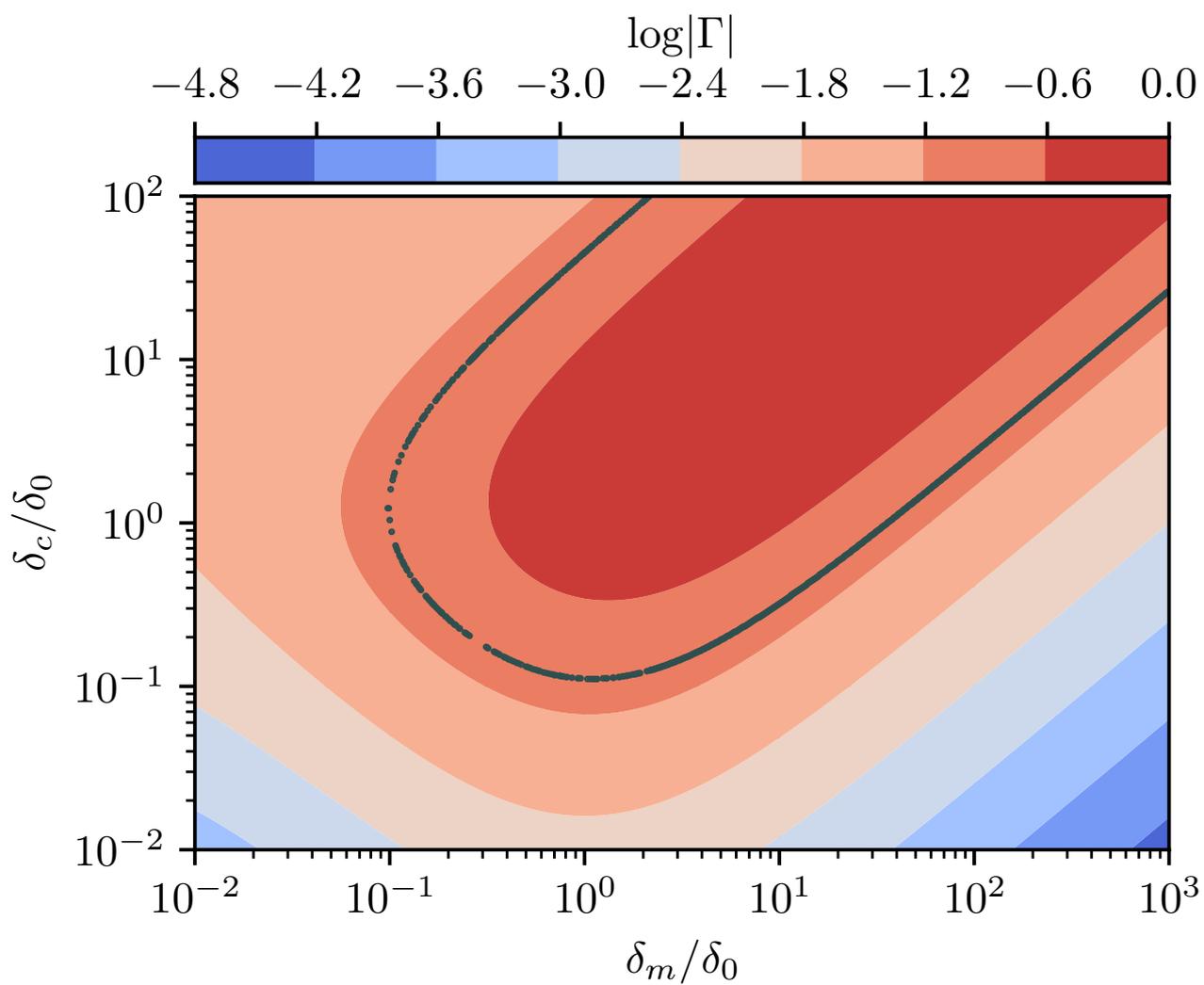


Рисунок 2.7 — Карта обратного отражения $|\Gamma|$ (см. уравнение 2.26).

Темно-серая линия соответствует $|\Gamma| = 0.1$.

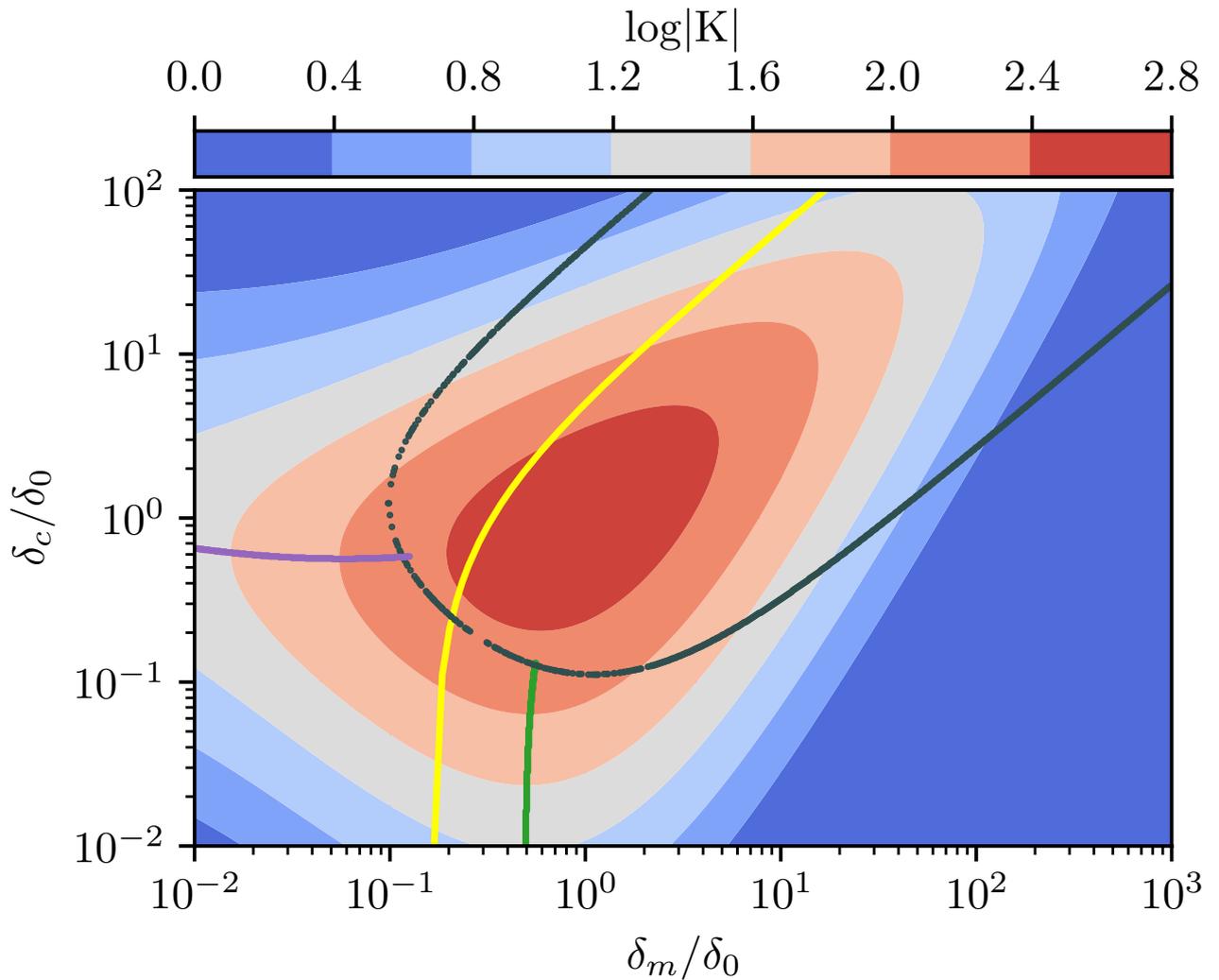


Рисунок 2.8 — Карта коэффициента стабилизации K (см. уравнение 2.10). Темно-серая линия соответствует $|\Gamma| = 0.1$. Фиолетовая и зеленая линии соответствуют $\arg \max(K) \Big|_{|\Gamma| \ll 1}$ (см. уравнение 2.5). Желтая линия соответствует $\arg \max |C_{\text{out}}|$ (см. уравнение 2.42).

Глава 3. Коллапс спектра, узкая ширина линии и эффект Богатова в диодных лазерах, затянутых на микрорезонаторы

В данной главе представлен новый метод, позволяющий получать мощное одночастотное излучение с шириной полосы пропускания менее кГц от компактного многочастотного лазерного диода, затянутого на высокодобротный оптический микрорезонатор. Используя микрорезонатор MgF_2 с высокой добротностью и многочастотный лазерный диод, работающий на длине волны 1535 нм с выходной мощностью 100 мВт и спектром излучения, состоящим примерно из 50 линий с шириной полосы МГц, наблюдалось трансформация спектра излучения до одной линии или нескольких линий с шириной линии суб-кГц и выходной мощностью 50 мВт. В спектре затянутого лазера наблюдался и исследовался эффект Богатова, предсказанный более 30 лет назад. Для анализа рассматриваемого эффекта была разработана оригинальная теоретическая модель, учитывающая эффект затягивания, конкуренцию мод и богатовское асимметричное взаимодействие мод, и проведено численное моделирование. Все численные результаты находятся в хорошем согласии с нашими экспериментальными данными. Были получены точные аналитические оценки для параметров, критических для рассматриваемого эффекта. Предложенный метод может быть применен для различных типов диодных лазеров, работающих в разных спектральных диапазонах.

3.1 Введение

Недорогие лазеры с узкой шириной линии необходимы во многих областях индустрии, таких как спектроскопия [128], зондирование [129], дальнометрия оптического диапазона [130], квантовая оптика [131], и атомные стандарты частоты [132]. Разработка перспективных интегрированных решений на базе микросхем требует компактных лазерных систем. Более того, для многих важных практических приложений, включая генерацию керровских гребенок и диссипа-

тивных солитонов Керра [133], лазер должен обладать достаточной мощностью, чтобы избежать дополнительных усилителей.

Диодные лазеры с внешним резонатором обеспечивают одночастотную работу с узкой шириной линии. Однако такие лазеры недостаточно компактны и обычно имеют невысокую выходную мощность. Для преодоления этих препятствий было предложено несколько подходов [134], но они не были коммерциализированы.

Диодные лазеры компактны и покрывают практически весь оптический спектральный диапазон. Однако типичная ширина линии лазера с распределенной обратной связью (DFB) или распределенным брэгговским отражателем (DBR) составляет около 1 МГц, тогда как для многих приложений требуется субкилогерцовый уровень. Можно применить несколько методов дальнейшего уменьшения ширины линии, например, используя оптическую обратную связь с различными внешними резонаторами, [57; 61; 64; 66; 100; 135–137]. Однако одночастотные диодные лазеры из-за конструктивных особенностей имеют низкую выходную оптическую мощность.

В этой главе используется эффект затягивания для стабилизации компактных и коммерчески доступных многочастотных диодных лазеров, которые могут иметь значительно более высокую выходную мощность нежели одночастотные диодные лазеры.

Различные методы, обеспечивающие одномодовое излучение из многочастотного лазера, широко исследованы, однако большинство из этих методов характеризуются недостаточной выходной мощностью [138]. Представлен новый метод, позволяющий получить мощное одночастотное излучение с шириной линии менее кГц от компактного многочастотного диодного лазера, затянутого на оптический микрорезонатор.

Благодаря эффекту конкуренции мод спектр затянутого многочастотного лазера трансформируется в одночастотный, что позволяет получить гораздо более высокую выходную мощность. В этой главе описывается модель, которая позволила получить точные аналитические оценки для параметров лазеров.

В этой главе показано, что в режиме затягивания диодного лазера на высокочастотный микрорезонатор многочастотный спектр излучения может трансформироваться до одной линии с шириной линии на уровне кГц или ниже. Вследствие явления конкуренции мод общая начальная мощность перераспре-

деляется в пользу затянутой моды (или, в некоторых случаях, в пользу нескольких затянутых мод), обеспечивая одночастотный ("несколькочастотный") режим с концентрацией энергии, достигающей 96%. Демонстрируется преобразование многочастотного режима мощностью 100 мВт в одночастотный режим мощностью 50 мВт. Некоторая потеря эффективности, вероятно, связана с потерями используемой оптической схемы и может быть улучшена в дальнейшем. Важно отметить, что эффект Богатова, предсказанный в [139], наблюдался и изучался с беспрецедентной точностью в спектре затянутого лазера. Предложенный подход может быть применен для различных типов диодных лазеров, работающих на разных длинах волн, поскольку микрорезонаторы могут обладать сверхвысокими добротностями от ультрафиолетовой [70] до средне-инфракрасной области [80].

Если несколько лазерных мод затянуты на разные моды, то может появиться одновременное излучение на разных частотах. Этот эффект открывает путь, например, к компактным двухчастотным лазерам, которые необходимы для спектроскопии [140; 141], ЛИДАРам [142–144], голографической интерферометрии [145], оптических терагерцовых источников [146–148] и других приложений.

Мы разработали теорию многочастотного затягивания на основе модели многомодового лазера Ямады [149] с асимметричным взаимодействием мод Богатова [139] и модели Ланга-Кобаяши [120], вводящей оптическую обратную связь в модель излучения. Было показано, что эта комбинированная модель обеспечивает хорошее описание динамики и спектров излучения многочастотных затянутых лазеров. Все численные результаты, полученные с помощью разработанной модели, находятся в хорошем согласии с нашими экспериментальными данными.

3.2 Эксперимент

3.2.1 Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки показана на рис. 4.1. В наших экспериментах использовался многочастотный (но пространственно одномодовый) диодный лазер, работающий на длине волны 1535 нм с шириной спектра ~ 10 нм и максимальной мощностью 200 мВт (при токе 350 мА, подаваемом на диод). Расстояние между линиями Фабри-Перо в спектре излучения диода составляло $\Delta f_d = c/2Ln \sim 17.6$ ГГц (c - скорость света, длина чипа $L = 2.5$ мм, $n = 3.154$ - показатель преломления чипа). Спектр диода имел ~ 50 некогерентных линий. Оптический спектр свободно работающего диодного лазера с теоретически рассчитанной кривой (красная линия) показан на рис. 3.2(а).

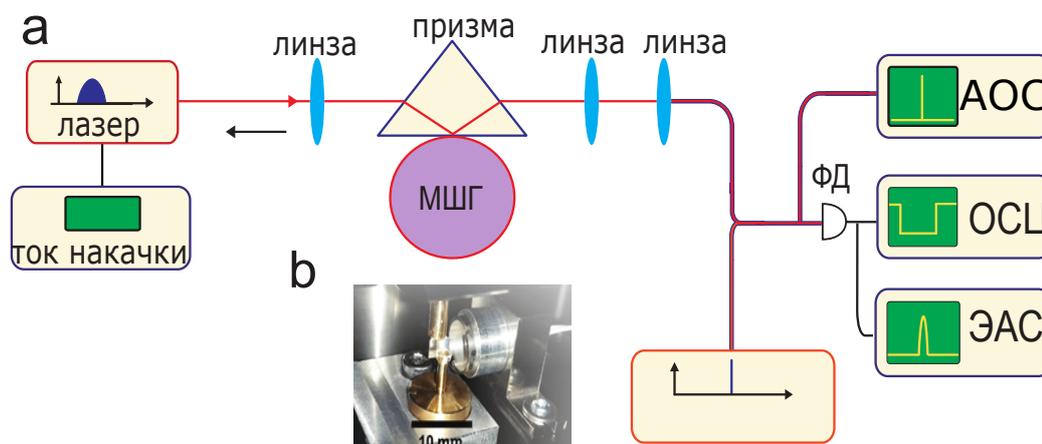


Рисунок 3.1 — Экспериментальная установка. Диодный лазер на 1535 нм (многочастотный); ФД — фотодетектор; ЭАС — электрический анализатор спектра; АОС — оптический анализатор спектра; ОСЦ — осциллограф; **b**: фотография микрорезонатора с призмой.

Для затягивания изготовлен кристаллический MgF_2 дисковый микрорезонатор диаметром 5 мм ($\text{FSR } \Delta f_{\text{WGR}} \approx 14$ GHz) с радиусом кривизны обода 500 μm . Добротность изготовленного микрорезонатора составила $\sim 10^9$.

Излучение диодного лазера фокусировалось на внутренней поверхности призмы полного внутреннего отражения для связи с микрорезонатором. Микрорезонатор размещался вблизи точки фокусировки, где можно было эффек-

тивно возбуждать моды микрорезонатора. После призмы выходное излучение направлялось в одномодовое волокно через коллимирующие линзы и поступало на осциллограф, оптический анализатор спектра и электрический анализатор спектра.

Между лазером и микрорезонатором не использовался оптический изолятор, поэтому была реализована эффективная обратная связь за счет резонансного рэлеевского обратного рассеяния на внутренних и поверхностных неоднородностях микрорезонатора [73]. Благодаря этому эффекту часть входящего излучения, находящегося в резонансе с частотой МШГ, отражалась обратно в активную область лазера (черная стрелка на рисунке 4.1). Резонансная обратная связь приводит к затягиванию частоты лазера, что приводит к радикальному сужению ширины линии лазера [150]. Максимальное значение уменьшения ширины полосы зависит от добротности микрорезонатора, используемого для затягивания и коэффициента отражения от резонатора [102].

В наших экспериментах режим затягивания с многочастотным диодом был также получен путем перестройки частоты лазера (регулировкой тока диода) вблизи одной из частот мод микрорезонатора. Варьируя расстояние между призмой связи и микрорезонатором и, соответственно, регулируя величину обратной волны, наблюдались различные режимы лазерной генерации. Было обнаружено, что в определенном диапазоне расстояний происходит значительное изменение спектра, включая переход от многочастотного к одночастотному режиму генерации. В этом случае мода диода, ближайшая к моде микрорезонатора, затягивалась, и спектр выходного излучения сводился к одной линии. За пределами этого диапазона спектр лазерного излучения оставался практически неизменным.

Рисунок 3.2(b) демонстрирует эффект затягивания частоты многочастотного диодного лазера на его выходной спектр. Видно, что первоначально многочастотный спектр излучения, состоящий примерно из 50 линий, был преобразован в одночастотный спектр с характерной асимметричной формой. Такой асимметричный спектр был впервые замечен и объяснен Богатовым [139]. Режим затягивания стабилен в стандартных лабораторных условиях в течение нескольких часов без какой-либо дополнительной техники стабилизации.

Изменение спектра является результатом эффекта затягивания, возникающего, когда частота одной из мод многочастотного лазера достаточно близка

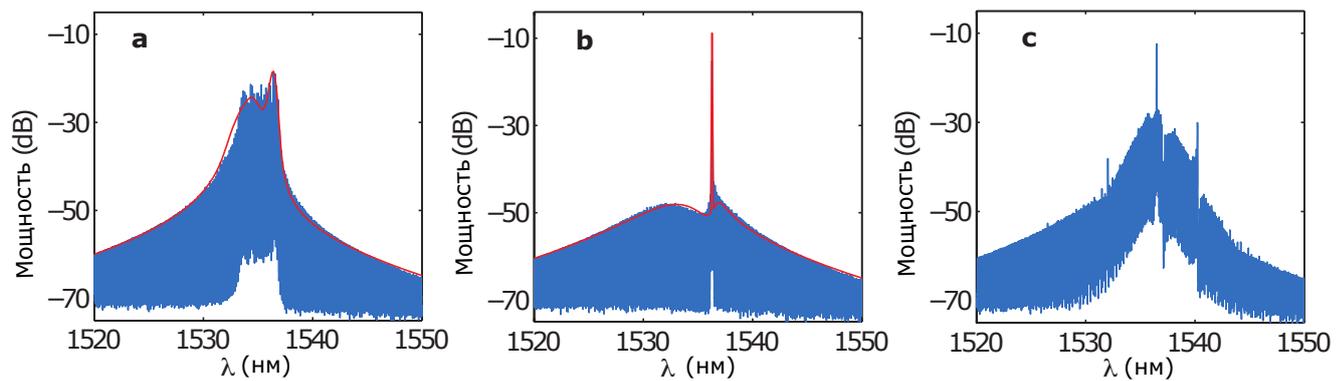


Рисунок 3.2 — **a**: Экспериментальный (синяя линия) и численно рассчитанный (красная линия) спектр излучения свободного многочастотного диодного лазера [уравнение (3.6)–уравнение (3.8)]; **b**: Экспериментальный (синяя линия) и численно рассчитанный (красная линия) спектр излучения затянутого многочастотного диодного лазера [уравнение (3.6), уравнение (3.8), уравнение (3.15)]. Параметры модели приведены в таблице 2.с: Спектр частотной гребенки в режиме затягивания [A5].

к резонансу МШГ [102]. В этом случае наблюдалось, что другие моды подавляются на 35 дБ из-за сложной динамики усиления лазера. Наиболее интенсивная мода "выжигает" инверсную населенность, тем самым лишая остальные моды источника энергии, что приводит к энергетической конкуренции мод [A1]. Таким образом, в затянтом режиме лазера закачивается дополнительная энергия, и интенсивность значительно возрастает [см. рис. 3.2]. Энергетическая эффективность такого преобразования спектра сильно зависит от коэффициента отражения внешнего резонатора и позволяет концентрировать энергию одной моды до 100%. В наших экспериментах наблюдалось, что значительная часть ($\sim 95\%$) лазерной мощности излучается доминирующей модой. Однако, из-за потерь в оптической схеме (отражения на поверхностях линз и призм) эта мощность уменьшается, что приводит к $\sim 50\%$ эффективности одночастотного излучения (по сравнению с полной мощностью свободно работающего лазера). Обратите внимание, что ограничение на максимальную рабочую мощность зависит от стабильности диодного лазера при большом токе. Хотя использованный диод имел максимальную указанную мощность 200 мВт, но стабильный режим был возможен только до 100 мВт (типичное значение тока 200 мА). Выше этого уровня наблюдался тепловой дрейф частоты лазера, поэтому режим затягивания не был стабильным. Очевидно, что потери могут быть уменьшены с по-

мощью оптимизированных элементов связи, а термостабилизация диода может быть улучшена. Тем не менее, максимальная мощность продемонстрированного одночастотного лазера (до 50 мВт) уже превышает мощность одночастотного диодного лазера с распределённой обратной связью (РОС).

3.2.2 Ширина линии затянутого лазера

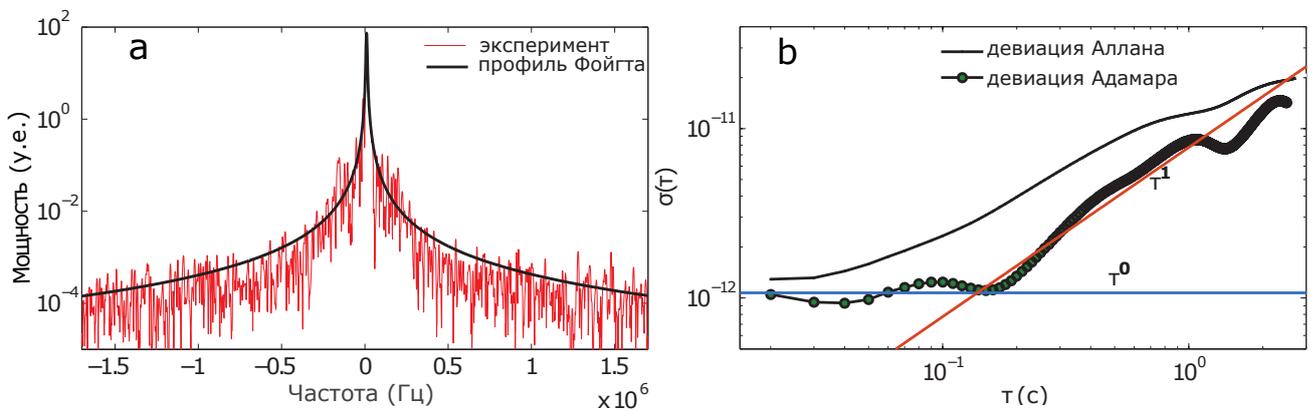


Рисунок 3.3 — **a**: Сигнал биения (около 7,5 ГГц) затянутого лазера с эталонным лазером NKT Coheras Adjustik (красная линия) и аппроксимация Voigt этого сигнала (черная линия). Полоса разрешения ESA 20 кГц, время развертки 2.4 мс, без усреднения. Время развертки было оптимально выбрано для минимизации дрейфа частоты и потерь низкочастотного шума [151]. **b**: Отклонения Хадамарда и Аллана разности частот двух лазеров, затянутых на разные моды (частота биений 2.8 ГГц) в одном микрорезонаторе и аппроксимация частотного фликер шума $\propto \tau^0$ (синяя линия) и $\propto \tau^{-1}$ аппроксимация (красная линия), что соответствует $\propto f^{-3}$ частотному шуму.

Ширина линии затянутого диодного лазера была измерена путем биения затянутого лазера с эталонным лазером (NKT Coheras Adjustik, с шириной линии 0.1 кГц). Биения двух лазеров регистрировались высокоскоростным детектором, а ширина линии измерялась с помощью анализатора электрического спектра. На рисунке 3.3(a) показан результат измерения ширины полосы (красная кривая). Чтобы учесть вклад белого шума и фликер шума частоты в ширину полосы, для аппроксимации (черная линия) профиля биений была использована функция Войгта [152]. Таким образом, общую ширину линии разложена

на две составляющие: Лоренциана $\Delta\nu_{\text{Lorentz}} = 0.3$ кГц для воздействия белого шума и Гаусса $\Delta\nu_{\text{Gauss}} = 1.7$ кГц для воздействия фликер шума частоты. Было обнаружено, что измеренный фликер шум частоты определяется эталонным лазером.

Для дальнейшего анализа внутренней частотной стабильности затянутого лазера аллановские и хадамардовские вариации относительной частоты $\sigma_A^2(\tau)$ и $\sigma_H^2(\tau)$ были измерены путем биений двух подобных диодных лазеров, затянутых на различные моды в одном и том же микрорезонаторе [см. рис. 3.3(b)]. Лазеры имели $L = 2,5$ мм (FSR=17,68 ГГц) и $L = 1,5$ мм (FSR=31,7 ГГц). Максимальная выходная мощность для обоих диодов составляла 200 мВт. Затягивание двух лазеров на один и тот же резонатор позволяет значительно подавить шум, вызванный тепловыми флуктуациями этого резонатора, тем самым подчеркивая остаточный шум затянутого лазера. Мы обнаружили, что линейный тепловой дрейф частоты в отсутствие тепловой стабилизации резонатора доминирует в дисперсии Аллана для времен усреднения между 0.1 с и 1 с (пунктирная линия на рис. 3.3(b)). Это не меняет общих характеристик стабильности частоты затянутого лазера, но затрудняет анализ частотного шума. Поэтому для анализа стабильности частоты во временной области была использована дисперсия Хадамарда, поскольку ее важнейшим преимуществом является нечувствительность к линейному дрейфу частоты [153]. Отклонение Аллана посчитано для сравнения с предыдущими работами [24;76;127]. Было обнаружено, что при временах меньше 10^{-1} с дисперсия Хадамарда составляет $\propto \tau^0$ [рис. 3.3(b), синяя линия], что соответствует фликкер шуму частоты, тогда как при временах больше 10^{-1} с доминирует шум более высокого порядка $\propto \tau^2$ [рис. 3.3(b), красная линия]. Таким образом, дисперсия Хадамарда имеет следующий вид:

$$\sigma_H^2(\tau) = a_2\tau^2 + a_0\tau^0. \quad (3.1)$$

Результаты аппроксимации дисперсии Хадамарда частотным шумом представлены следующим образом красной и синей линиями на рис. 3.3(b), соответствующие $a_2 = 6 \times 10^{-23} \text{ }^{-2}$, $a_0 = 1.15 \times 10^{-24}$. Учитывая белый частотный шум из приближения Фойгта ($\Delta\nu_{\text{Lorentz}} = 0.3$ кГц), спектральная плотность частотного шума для такого вида дисперсии Хадамарда может быть восстанов-

лена [154; 155]:

$$S_\nu(f) = \frac{0.8}{\pi^2} \nu_0^2 a_2 f^{-3} + 0.89 \nu_0^2 a_0 f^{-1} + \frac{\Delta\nu_{\text{Lorentz}}}{\pi}, \quad (3.2)$$

Чтобы найти вклад низкочастотного шума в ширину линии, была введена эффективная интегральная ширина линии [155; 156]:

$$\int_{\Delta\nu_{\text{eff}}}^{\infty} \frac{S_\nu}{f^2} df = \frac{1}{\pi}, \quad (3.3)$$

что дало $\Delta\nu_{\text{eff}} = 0,4$ кГц. Было установлено, что вклад $\propto \frac{1}{f^3}$ частотного шума в интегральную ширину линии пренебрежимо мал.

Выражение для уменьшения белого шума за счет затягивания может быть получено из модели Ланга и Кобаяши с частотно-зависимой оптической обратной связью и имеет вид [102; 121]:

$$\frac{\Delta\nu_{\text{locked}}}{\Delta\nu_{\text{free}}} \sim \frac{Q_d^2}{Q^2} \frac{1}{16\eta_d^2 \Gamma(1 + \alpha^2)}, \quad (3.4)$$

где Q_d и Q - добротности лазерного резонатора и внешнего резонатора, соответственно; $\Gamma \approx 10^{-2}$ - коэффициент отражения внешнего резонатора; α - коэффициент ширины линии; η_d - отношение потерь выходного зеркала к общим потерям.

$$Q_d = \frac{2\pi\nu_0\tau_d R_o}{1 - R_o^2}, \quad (3.5)$$

где R_o - коэффициент отражения выходного зеркала лазера, τ_d - время прохода лазерного резонатора, ν_0 - частота лазера. Коэффициент отражения, заданный производителем лазерного диода $R_o = 0,54$, а также $\alpha = 4$. Подставив экспериментальные данные в уравнение (3.4) было получено, что ширина линии затянутых мод составляет порядка 0.1 кГц, что соответствует измеренной $\Delta\nu_{\text{Lorentz}}$.

3.2.3 Многомодовый режим затягивания

Помимо схлопывания многочастотного спектра диодного лазера в одну узкую линию, наблюдалась одновременное заягивание нескольких лазерных мод к различным модам микрорезонатора. Этот эффект приводит к преобразованию исходного спектра с ~ 50 линиями в спектр с несколькими затянутыми узкими линиями. Затягивание происходит на модах, разнесенных на целое число интервалов межмодового расстояния микрорезонатора Δf_{WGR} и межмодового расстояния лазера Δf_{d} : $\Delta f_{\text{mult}} = M\Delta f_{\text{WGR}} = N\Delta f_{\text{d}}$. В этом случае конкуренция мод вблизи каждой затянутой моды диода действует так же, как и в случае одночастотного затягивания: спектр вблизи резонансной частоты подавляется, а энергия перераспределяется в пользу затянутой моды. Ширина линии затянутой моды также значительно уменьшается. Эта ситуация изображена на рис. 3.4, где показаны (а) двухчастотный режим [панель (а)], четырехчастотный режим [панель (b)] и шестичастотный режим [панель (c)]. Обратите внимание, что различные семейства мод в микрорезонаторе имеют немного разные межмодовое расстояние [157; 158], обеспечивая различные расстояния между затянутыми модами [рис. 3.4(b)–3.4(c)].

3.3 Модель

Для анализа экспериментальных результатов была разработана оригинальная модель, описывающая затягивание частоты многочастотного лазера модой высокодобротного микрорезонатора WGM.

Стандартная модель многомодового лазера может быть представлена в виде системы дифференциальных уравнений [120; 159]:

$$\dot{N} = \frac{I}{e} - \frac{N}{\tau_s} - \sum_l G_l^{(1)} S_l, \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

$$\dot{S}_l = (G_l - G_{\text{th}}) S_l + NF_{l,n} \quad (3.8)$$

где I - ток диода, e - заряд электрона, N - число возбужденных электронов, τ_s - время жизни возбужденного электрона, S_l , G_l и $G_l^{(1)}$ - соответственно, число фотонов, коэффициент линейного усиления (стимулированное излучение фотонов) и коэффициент стимулированного излучения l , G_{th} - пороговое усиление, F_l - коэффициент спонтанного излучения:

$$F_l = \frac{\tilde{\beta}}{[2(\lambda_l - \lambda_{peak})/\Delta\lambda]^2 + 1}, \quad (3.9)$$

$\tilde{\beta}$ - коэффициент спонтанной эмиссии (нормированный на время рекомбинации возбужденных электронов τ_r), $\Delta\lambda$ - ширина спонтанной эмиссии, λ_l - длина волны моды l , λ_{peak} - центральная длина волны лазера. Величина порогового усиления определяется конструктивными особенностями конкретного лазера, и в простейшем случае для лазерного резонатора, состоящего из двух зеркал с коэффициентами отражения R_o и R_e , можно получить следующее выражение:

$$G_{th} = \frac{c}{n_D} \alpha_{loss} + \frac{1}{\tau_d} \ln \frac{1}{R_o R_e}, \quad (3.10)$$

где n_D показатель преломления диода, c скорость света и α_{loss} коэффициент потерь материала. Усиление в каждой моде зависит от комбинации таких эффектов, как стимулированное излучение фотонов, выжигание спектральных дырок, выжигание спектральных дырок за счет соседних мод и асимметричное взаимодействие мод. Для коэффициента усиления G_l можно записать следующее выражение [149; 159]:

$$G_l = G_l^{(1)} - G_l^{(3)} S_l - \sum_{k \neq l} (G_{l(k)}^{(3)} + G_{l(k)}) S_k, \quad (3.11)$$

где $G_l^{(3)}$ - коэффициент самонасыщения (спектральное выжигание дыр), $G_{l(k)}^{(3)}$ - коэффициент симметричного кросс-насыщения (выжигание спектральных дыр за счет соседних мод), $G_{l(k)}$ - коэффициент асимметричного взаимодействия мод (эффект Богатова) [A1].

Коэффициент $G_l^{(1)}$ определяется как числом возбужденных электронов, так и дисперсией линейного усиления:

$$G_l^{(1)} = \theta(N - N_g - D(\lambda_l - \lambda_{peak})^2), \quad (3.12)$$

где θ - дифференциальное усиление, N_g - число возбужденных электронов, при котором лазерный диод становится оптически прозрачным, D - коэффициент дисперсии линейного усиления.

Эффект асимметричного взаимодействия мод был впервые описан Богатовым в [139], где в качестве теоретического объяснения этого эффекта была представлена модель стимулированного рассеяния лазерного излучения на динамических неоднородностях электронной плотности. Предложенная Богатовым модель описывает изменение диэлектрической проницаемости $\delta\epsilon$, вызванное динамической неоднородностью электронной плотности из-за стимулированной эмиссии возбужденных электронов под влиянием интерференции мод. Полученное Богатовым выражение для изменения диэлектрической проницаемости может быть переписано в терминах коэффициента усиления активной области лазера. Таким образом, получено, что коэффициент асимметричного усиления (коэффициент Богатова) описывается следующим выражением:

$$G_{l(k)} = \frac{3}{4}\theta^2(N - N_g) \frac{\frac{1}{\tau_s} + \frac{3}{2}\theta S + \alpha\Omega_{l(k)}}{(\frac{1}{\tau_s} + \frac{3}{2}\theta S)^2 + \Omega_{l(k)}^2}, \quad (3.13)$$

где $\Omega_{l(k)} = \omega_l - \omega_k$ - смещение мод лазера, $S = \sum S_l$ - общее количество фотонов, α - коэффициент увеличения ширины линии (коэффициент Генри).

3.4 Модель лазера с оптической обратной связью

Упрощенная модель лазера с обратной связью обычно включает три зеркала (зеркала передней и задней граней лазерного диода и внешнее зеркало). В этом подходе часть лазерного излучения, отраженная от внешнего зеркала, возвращается обратно в лазер, обеспечивая обратную связь. Динамика этой системы может быть описана уравнениями Ланга и Кобаяши [120], где вводится член обратной связи для амплитуды электрического поля E_l . Учитывая, что число фотонов $\dot{S}_l \propto 2\dot{E}_l E_l$, выражение для $\delta S_{\text{feedback}}$ вклад в динамику интенсивности моды в уравнении (3.8) может быть получен следующим образом:

$$\delta S_{\text{feedback}} = 2\tilde{\kappa}_{ol} \sqrt{S_l(t - \tau) S_l} \cos(\psi_l + \phi_l(t) - \phi_l(t - \tau)), \quad (3.14)$$

где $\tilde{\kappa}_{ol} \approx \frac{1-R_o^2}{R_o\tau_d}\Gamma(\omega_l)$ - коэффициент обратной связи, $\phi_l(t)$ - фаза моды, $\psi_l = \omega_l\tau + \arg(\Gamma(\omega))$, τ - время пути от лазера до отражателя и обратно.

Чтобы модифицировать систему уравнений Ланга-Кобаяши для случая, когда оптический микрорезонатор с высокой добротностью действует как внешнее зеркало, достаточно заменить коэффициент отражения зеркала $\Gamma(\omega_l)$ в выражении для коэффициента обратной связи в уравнении (3.14) выражением для коэффициента частотно-селективного отражения микрорезонатора [73]. Для упрощения анализа предполагается, что каждая лазерная мода эффективно взаимодействует только с одной модой микрорезонатора. Это предположение, очевидно, оправдано для случая, когда межмодовое расстояние лазера больше, чем расстояние между модами резонатора.

Перестраивая частоту лазера, можно достичь режима, когда определенная мода лазера $\omega_{l=p}$ становится достаточно близкой к некоторой моде оптического микрорезонатора ω_m . В этом случае обратная связь с этой модой лазера от микрорезонатора резко возрастает, и происходит затягивание частоты лазера на высокодобротную моду оптического микрорезонатора. В стационарном режиме можно считать, что $\Gamma(\tilde{\omega}_{l \neq p}) \ll 1$, поэтому выражение обратной связи упрощается:

$$\delta S_{\text{feedback}} = \delta_{lp} 2\tilde{\kappa}_{ol} S_l \cos(\psi_l), \quad (3.15)$$

где δ_{lp} - символ Кронекера, означающий, что обратная связь добавляется только к моде, ближайшей к частоте МШГ. Также предполагается, что фаза обратной связи настроена на целое число, кратное 2π , чтобы максимизировать обратную связь. Параметры модели были оценены путем аппроксимации наблюдаемых спектров излучения затянутого лазера к численно рассчитанным кривым [см. рис. 3.2(b)]. Затем было проверено, что, убрав обратную связь, получается спектр свободно работающего лазера, который совпадает с теоретически спектром [см. рис. 3.2(a)].

3.5 Спектр излучения затянутого лазера

Огибающая спектра излучения в модели свободно работающего многочастотного лазера [уравнение (3.6)-(3.8)] в основном определяется дисперсией линейного усиления [см. уравнение (3.12)] и спонтанной эмиссией [см. уравнение (3.9)]. В модели лазера с оптической обратной связью важную роль играет коэффициент частотно-селективной обратной связи, введенный в уравнение (3.15) в дополнение к дисперсии линейного усиления. Обнаружено, что если одна лазерная мода p затаянута на моду резонатора, то коэффициент обратной связи этой моды может компенсировать дисперсионный член линейного усиления. Тогда полное усиление этой моды превышает усиление центральной моды (моды с нулевой дисперсией) с длиной волны λ_{peak} . Это увеличивает мощность моды p до мощности, сравнимой с мощностью центральной моды. Дальнейшее усиление обратной связи может привести к сильной обратной связи - “полному” подавлению других мод (незатянутых мод)

$$S_i \ll S_p. \quad (3.16)$$

В этом случае мода p использует все возбужденные электроны, произведенные током накачки, что упрощает уравнение динамики электронов/фотонов (3.6), позволяя опустить суммирование. Следовательно, этот процесс эффективно передает энергию лазерных мод в затанутую моду.

Чтобы получить условие сильной обратной связи, выводится N из $G_p^{(1)}$ из стационарной формы уравнения (3.8) для затанутого режима и подставляем в $G_l^{(1)}$ в стационарной форме уравнения (3.8) для других мод. Таким образом, находится связь между S_p и S_l . Для согласованности наших начальных предположений и решения необходимо, чтобы из этого решения следовало условие, описываемое уравнением (3.16). Таким образом, получаем следующий критерий для сильной обратной связи:

$$2\tilde{\kappa}_{op}S_p \gg NF_p. \quad (3.17)$$

Физический смысл этого утверждения заключается в том, что для эффективно-го преобразования спектра сильная обратная связь должна быть больше, чем коэффициент спонтанного излучения.

Была проведена серия измерений спектра излучения многочастотного затынутого лазера при различных уровнях обратной связи. На рисунке 3.5 (а) показано несколько экспериментально полученных спектров излучения многочастотного затынутого лазера при различных уровнях обратной связи, где уровень оптической обратной связи контролировался через зазор между микрорезонатором и призмой. Проведя численное моделирование с различными уровнями обратной связи, получены теоретические кривые, показанные на рис. 3.5(а). По рисунку 3.5, можно сказать, что наблюдается хорошее соответствие между теорией и экспериментом.

В режиме сильной связи [фиолетовая кривая на рис. 3.5(а)] наблюдается единственная узкая линия и максимальное подавление других линий спектра. При увеличении зазора подавление уменьшается. Зеленая, красная и синяя линии на рис. 3.5(а) показывают, что при меньшей эффективности связи интенсивность подавленных мод начинает расти. При определенном пороговом уровне обратной связи в оптическом спектре начинают появляться другие линии [зеленая кривая на рис. 3.5(а)], выше которого затыгивание разрушается. Вблизи порогового уровня обратная связь слабая, другими словами, мощности обратной волны недостаточно для стабильного затыгивания.

Для оценки эффективности коллапса спектра был введен и рассчитан с помощью разработанной модели параметр $\eta = \frac{S_p}{\sum S_i}$, описывающий концентрацию энергии в затыгнутой моде. Кривая на рис. 3.5(б) показывает численную оценку η для различных уровней обратной связи Γ вместе с экспериментальными точками. Отметим, что после входа в режим сильной обратной связи [согласно уравнению (3.17)] концентрация быстро растет и достигает значения около 96%, что соответствует переходу к одночастотной генерации. Концентрацию энергии вблизи порогового уровня можно рассматривать только как оценочное значение. Все численные результаты, полученные с помощью разработанной модели, находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. Параметры модели приведены в таблице 2.

Измеренный уровень обратной связи по мощности $|\Gamma(\omega_p)|^2$ (около $\sim 10^{-4}$) оказался достаточно высоким для одночастотной генерации. Аналогичные изме-

Сим.	Определение	Исп.	[160]	[161]	Ед. изм.	Ист.
θ	коэффициент вынужденного излучения	20	10.5	5	кГц	апп.
D	коэффициент дисперсии усиления	10	1.36	-	фм ⁻²	апп.
$\tilde{\beta}$	коэффициент спонтанной эмиссии	1	10.5	-	МГц	апп.
$\Delta\lambda$	полуширина спонтанного излучения	30	23	-		апп.
G_{th}	пороговое усиление	0.05	0.2	1	ТГц	апп.
λ_{peak}	центральная длина волны лазера	1534	1550	-	нм	апп.
N_g	число электронов прозрачности	3	1.33	1	$\times 10^8$	апп.
τ_d	время прохождения лазера	0.05	7.2	-	нс	док.
R_o	коэффициент отражения передней грани	0.54	0.3	-	-	док.
R_e	коэффициент отражения задней грани	0.9	0.8	-	-	док.
α	α -фактор	4	4	3	-	стат.
τ_s	время жизни электрона	1	3.4	1	нс	стат.

Таблица 2 — Параметры, используемые в модели. Несколько параметров были получены путем аппроксимации экспериментального спектра [см. рис.3.4(b)] к расчетному [Ур.3.6, 3.8 и 3.15](помечены как "апп."). Параметры, помеченные как "док." были взяты из документации лазера. Параметры, известные в литературе, приведены для сравнения с экспериментально посчитанными параметрами вместе с соответствующими ссылками.

рения, когда лазерный диод был стабилизирован другими модами резонатора, дали оценку уровня оптической обратной связи около $10^{-3} - 10^{-4}$. Такой же уровень обратной связи был продемонстрирован с помощью РОС-лазера, затаянутого на микрорезонатор с высокой добротностью [162]. Полученные результаты показывают, что более высокий уровень концентрации энергии одиночной моды и сужения линии может быть достигнут путем разработки методики увеличения обратной связи. Следует отметить, что произвольное увеличение обратной связи приведет к уменьшению выходной мощности стабилизированного лазера. Однако, согласно рис. 3.5 сильная обратная связь может быть достаточно мала, чтобы не ухудшить выходную мощность.

3.6 Вывод

Мы впервые предложили и экспериментально продемонстрировали методику, позволяющую создать мощный одночастотный узкополосный компактный когерентный лазерный источник. Методика основана на эффекте затагивания частоты многочастотного диодного лазера со сравнительно широким спектром, состоящим из большого числа линий, на моду высокодобротного микрорезонатора, что приводит к схлопыванию спектра до одной линии с шириной линии до кГц. Кроме того, полная начальная мощность перераспределяется в пользу затаянутой моды, обеспечивая мощную одночастотную генерацию. Была разработана аналитическая модель, описывающая динамику и характеристики рассматриваемого лазера. Получено аналитическое выражение для порогового уровня обратной связи для эффективного преобразования спектра. Численные результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. Также продемонстрированы многочастотный лазер в режиме затагивания, работающих одновременно на нескольких длинах волн с узкой шириной спектра. Предложенный метод может быть применен для различных типов диодных лазеров, работающих в разных спектральных диапазонах.

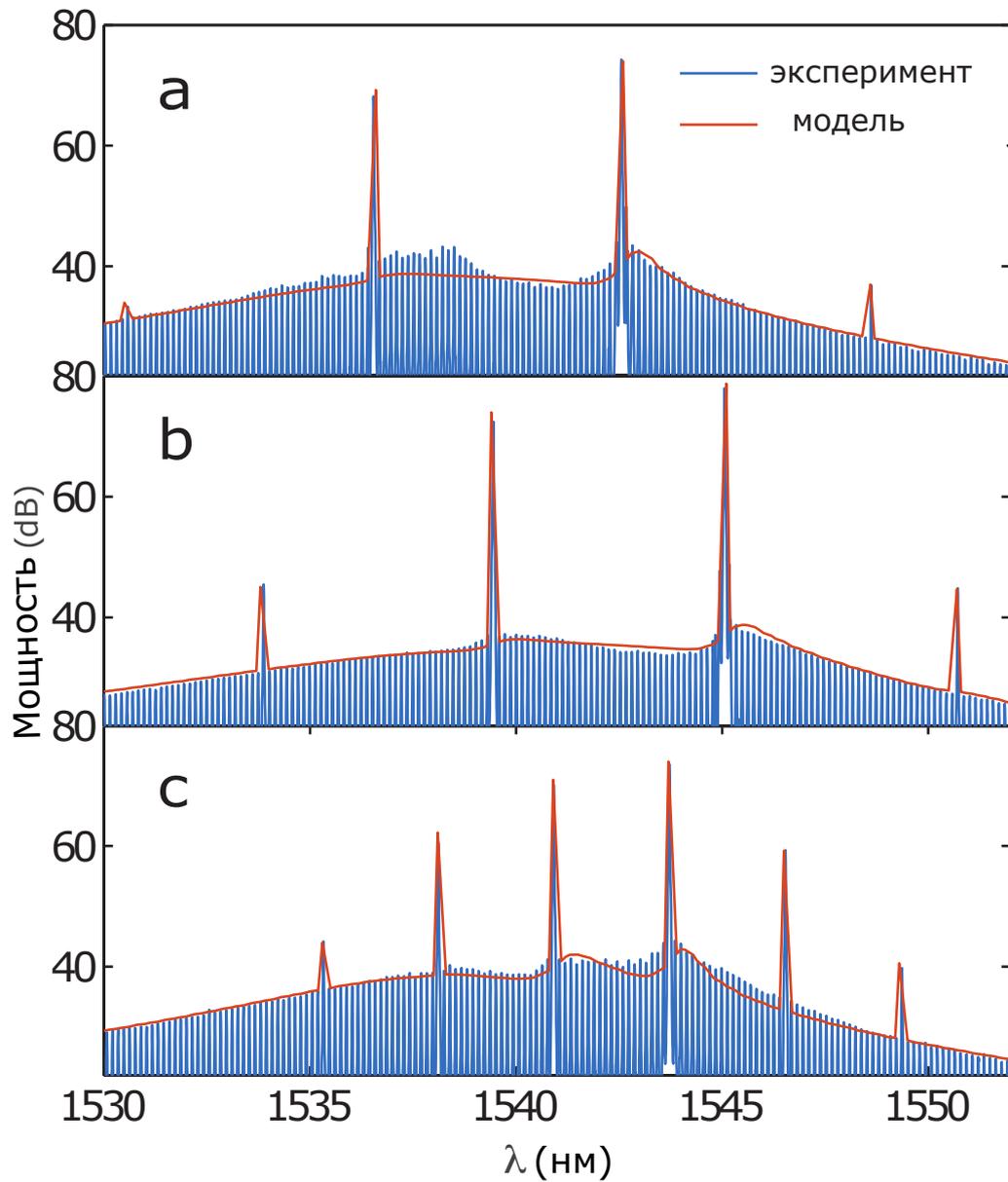


Рисунок 3.4 — Спектр излучения многомодового режима затыгивания частоты лазера (синий - эксперимент, оранжевый - модель): **а**: двухчастотный режим; **б**: четырехчастотный режим; **в**: шестичастотный режим. Параметры модели представлены в таблице 2.

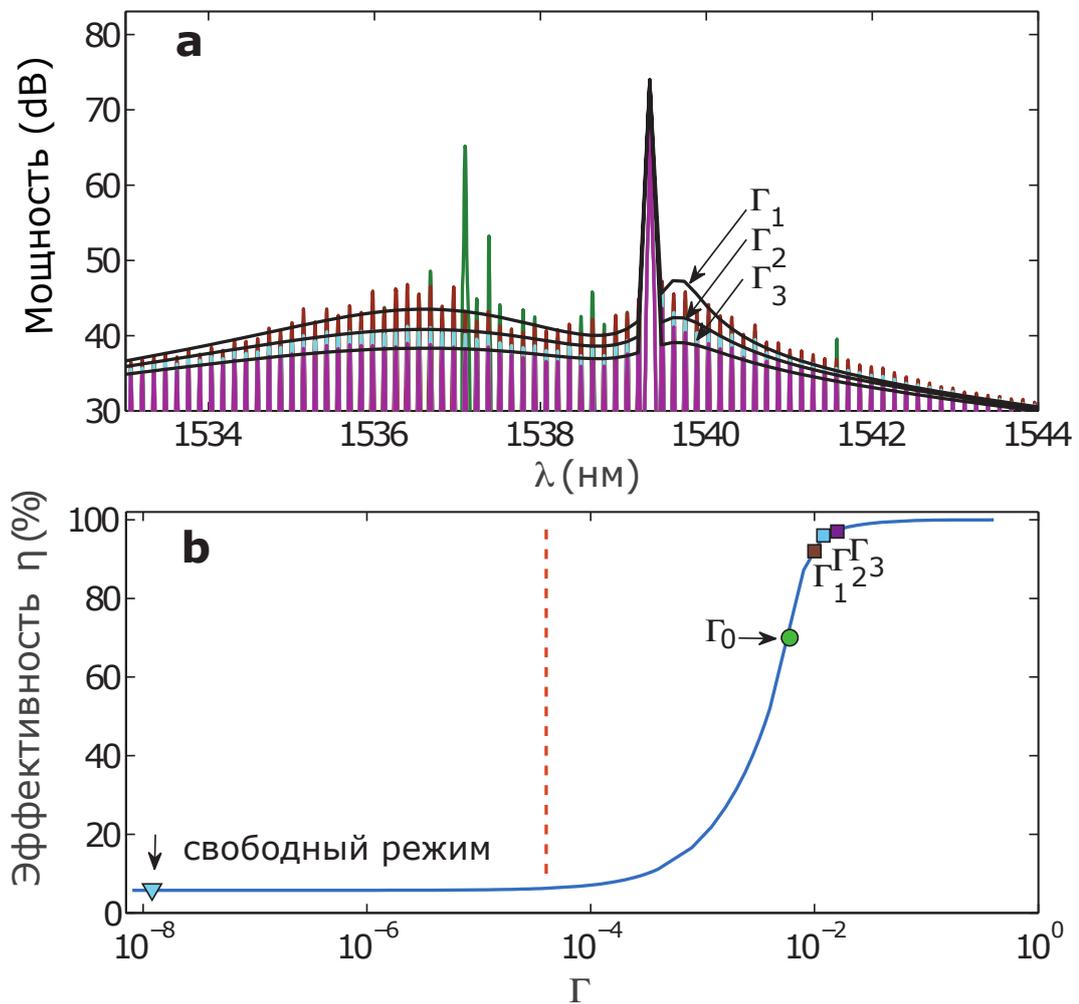


Рисунок 3.5 — **a**: Экспериментально полученные спектры излучения затянутого лазера при различных уровнях обратной связи (цветные сплошные линии) с численно рассчитанными огибающими (черные линии) для $\Gamma_1 = 1 \times 10^{-2}$, $\Gamma_2 = 1.2 \times 10^{-2}$, $\Gamma_3 = 1.5 \times 10^{-2}$, соответственно. **b**: Численно рассчитанная зависимость концентрации энергии одной моды (η) от уровня обратной связи (синяя линия) и экспериментально полученные точки концентрации энергии (квадраты). Круг соответствует зеленому спектру на верхнем рисунке (а), а треугольник - свободно работающему лазеру [рис. 3.2(а)]. Параметры модели приведены в таблице 2.

Глава 4. Оптимизация калибровки перестраиваемого лазера частотной гребенкой

Широкополосная спектроскопия, сочетающая точность частотных гребенок на основе волоконного лазера, широко используется для различных прецизионных приложений [130; 163; 164]. Схема лазера с непрерывной частотной модуляцией откалиброванного опорной гребенкой обеспечивает широкополосную и быструю спектроскопию с полосой пропускания более 4 ТГц при скорости сканирования до 1 ТГц/с при разрешении более 1 МГц [163]. Схема широко применялась в экспериментах, но детальной теоретической модели, позволяющей повысить ее точность, не существует. Кроме того, в рассматриваемой схеме частотная гребенка на основе волоконного лазера может быть заменена частотными гребенками Керра, генерируемыми в компактном резонаторе на моде шепчущей галереи (МШГ) [43].

4.1 Введение

В данной главе подробно анализируется схема калибровки перестраиваемого лазера частотной гребенкой и исследуется точность измерения частоты лазера. В этой схеме момент времени, когда частота перестраиваемого лазера совпадает с линией опорной частотной гребенки, детектируются путем фильтрации сигнала гетеродина между частотой гребенки и перестраиваемого лазера узкополосным фильтром. Проанализирована зависимость точности измерения мгновенной частоты от скорости развертки частоты, параметров полосы пропускания фильтра, фазового шума лазера и опорной частотной гребенки. Представлено оптимальное соотношение скорости перестройки частоты и ширины полосы фильтра для разных типов фазового шума и узкополосного фильтра, обеспечивающего наивысшую точность калибровки частоты.

4.2 Модель

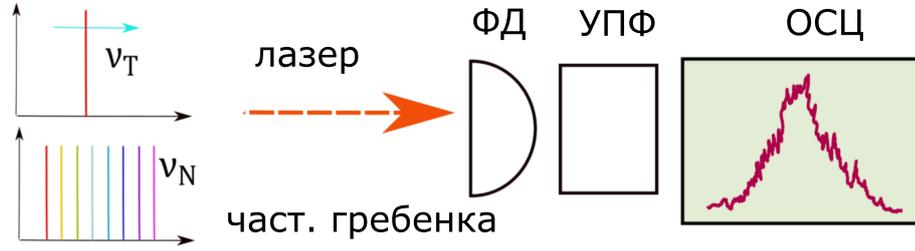


Рисунок 4.1 — Схема калибровки перестраиваемого лазера частотной гребенкой. Перестраиваемый лазер: тестируемый лазер с перестраиваемой частотой ν_T . Частотная гребенка - ν_N . ФД - фотодетектор; УПФ - узкополосный фильтр; ОСЦ - осциллограф

На схеме калибровки лазера сигнал биения опорной частотной гребенки и перестраиваемого лазера детектируются на фотодетекторе. Сигнал фотодетектора пропускается через узкополосный фильтр. Узкополосный фильтр отфильтровывает высокочастотный сигнал фототока. Поскольку полоса пропускания фильтра меньше межмодового расстояния частотной гребенки, входной сигнал фильтра можно рассматривать как сигнал биения частоты перестраиваемого лазера и ближайшей линии гребенки. Описанный подход упрощает численный анализ. Отфильтрованный узкополосным фильтром сигнал биения перестраиваемого лазера и линии гребенки можно представить в виде свертки сигнала биения и импульсной характеристики фильтра:

$$P(t) = P_0 \left| \int_0^T g(\tilde{t}) \exp[i\pi\nu(t - \tilde{t})^2] \exp[i2\pi\phi(\tilde{t} + t)] d\tilde{t} \right|, \quad (4.1)$$

где $g(t)$ - импульсная характеристика фильтра, $\exp[i\pi\nu(t - \tilde{t})^2]$ - сигнал биения перестраиваемого лазера и линии гребенки, ν - скорость развертки частоты лазера, $\phi(\tilde{t} + t)$ - фазовый шум линии гребенки и частоты лазера. В модели учитывался фликкер и белый шум со следующей спектральной плотностью фазового $S_\phi(f)$ и частотного шума $S_\nu(f)$, соответственно:

$$S_\phi(f) = \frac{h_0}{f^2} + \frac{h_1}{f^3}, \quad S_\nu(f) = h_0 + \frac{h_1}{f}, \quad (4.2)$$

Результаты численного моделирования отфильтрованного сигнала биения представлены на Рис. 4.2, где время для репрезентативности нормировано на скорость развертки лазера и ширину фильтра $\xi = tB$. Для калибровки лазера опорной частотной гребенкой необходимо точно детектировать момент времени, когда частота перестраиваемого лазера совпадает с линией опорной частотной гребенки, что соответствует $\xi = 0$ (см. Рис. 4.2). К сожалению, в эксперименте данный момент нельзя точно детектировать, так как из-за фазового шума линии гребенки и частоты лазера сигнал биения искажается (см. Рис. 4.2). В данной работе рассмотрены два метода оценки нулевого значения ξ . Метод максимального значения P_{\max} и метод центра масс:

$$\xi_{P_{\max}} = \operatorname{argmax}[P(\xi)], \quad (4.3)$$

$$\xi_c = \frac{\int_{\xi_{P_{\max}} - \Delta\xi_R}^{\xi_{P_{\max}} + \Delta\xi_R} \xi P(\xi) d\xi}{\int_{\xi_{P_{\max}} - \Delta\xi_R}^{\xi_{P_{\max}} + \Delta\xi_R} P(\xi) d\xi}. \quad (4.4)$$

где $\Delta\xi_R = 20$ - пределы интегрирования (см Рис. 4.2). Пределы интегрирования подбираются так, чтобы захватить всю область отфильтрованного сигнала.

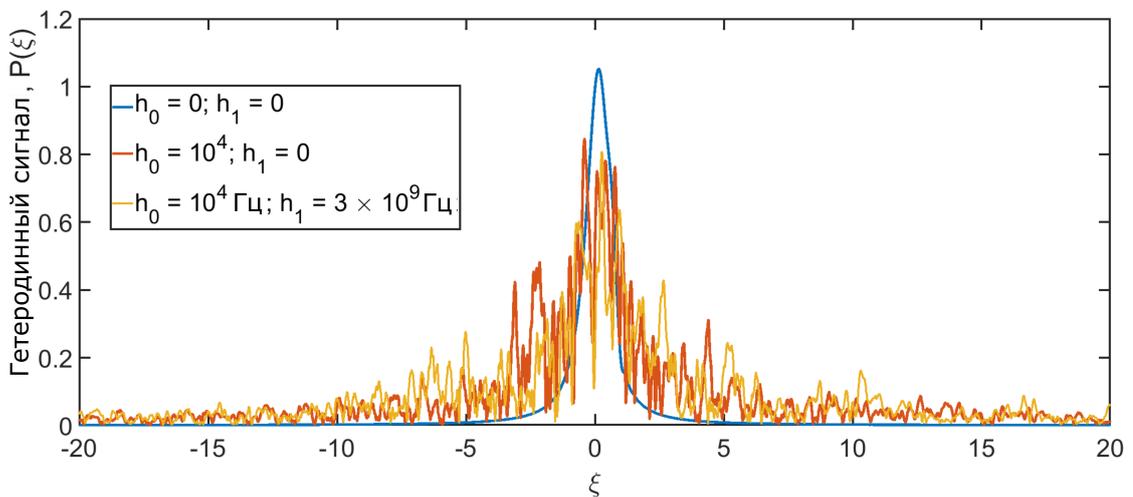


Рисунок 4.2 — Огибающая гетеродинного сигнала лазера и частотной гребенки с различным уровнем фазового шума.

Для сравнения двух методов оценки было численно сгенерировано $N=1000$ сигналов биения. Для каждого сигнала были посчитаны обе оценки $\xi_{P_{\max}}$ и ξ_c . Результаты оценок представлены в виде гистограммы на Рис. 4.3, где левая панель оценка методом максимального значения и правая панель оценка методом центра масс. Оказалось, что девиация ошибки оценки методом центра

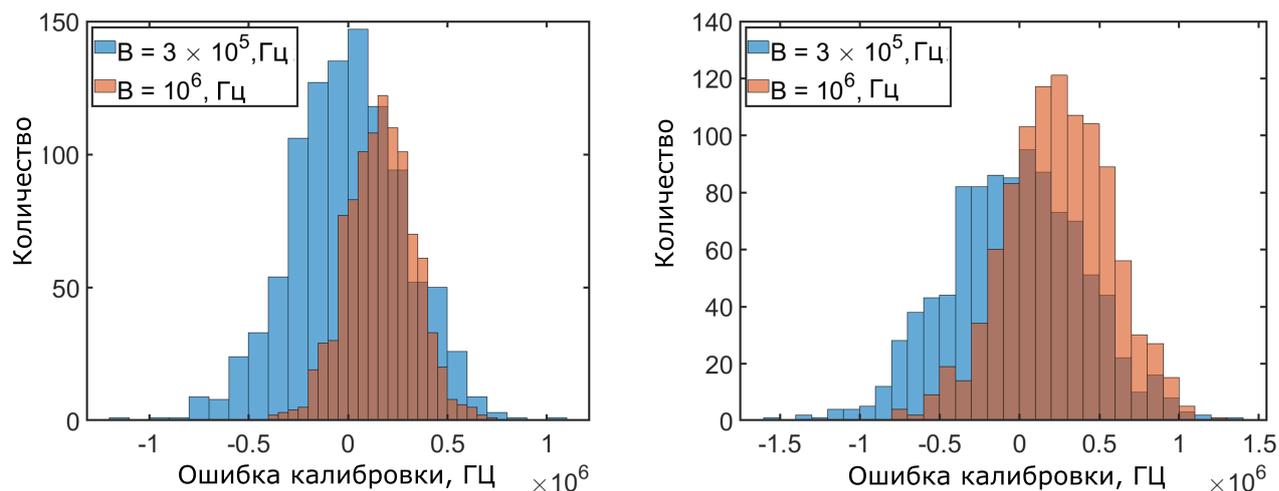


Рисунок 4.3 — Распределение центра масс калибровочного сигнала с различной полосой пропускания фильтра (слева); распределение максимального значения калибровочного сигнала с различной полосой пропускания фильтра (справа).

масс меньше по сравнению с девиацией ошибки оценки методом максимального значения [см Рис.4.3]. Для подбора оптимальных параметров схемы калибровки лазера была построена зависимость девиации ошибки оценки $\xi_{P_{\max}}$ и ξ_c от ширины узкополосного фильтра для разных уровней частотных шумов (см. Рис. 4.4). На Рис. 4 построена зависимость девиации ошибки рассчитанной для фиксированного значения скорости развертки частоты лазера и различных значений полосового фильтра. Для расчета девиации ошибки было проведено численное моделирование 1000 реализаций сигнала для каждого значения ширины полосы фильтра. Доверительные интервалы отклонения ошибок калибровки рассчитывались методом “складного ножа”. Оказалось, что подход центра масс демонстрирует меньшее значение отклонения ошибки на всем диапазоне (см. Рис. 3). Численный анализ показал, что девиация ошибки пропорционально квадратному корню ширины фильтра. Минимально допустимый уровень ширины пропускания полосового фильтра можно оценить с помощью ограничения, согласно которому время, необходимое ноте биений для прохождения полосового фильтра, должно быть меньше, чем время отклика фильтра. Из-за данного ограничения девиация ошибки выходит на плато при малых значениях ширины полосы пропускания фильтра (см Рис.3, 4).

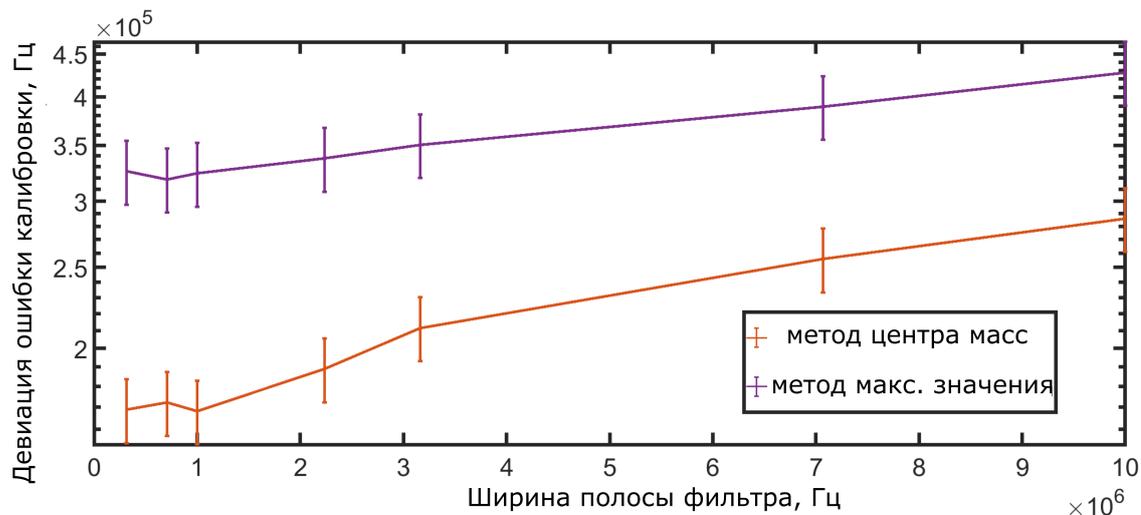


Рисунок 4.4 — Девиация ошибки калибровки при фиксированном значении скорости перестройки частоты лазера $\nu = 3 \times 10^{11}$ Гц/с и частотного шума $h_0 = 10^4$ Гц, $h_1 = 3 \times 10^9$ Гц². Оранжевая линия соответствует методу центра масс, а пурпурная линия - методу максимального значения

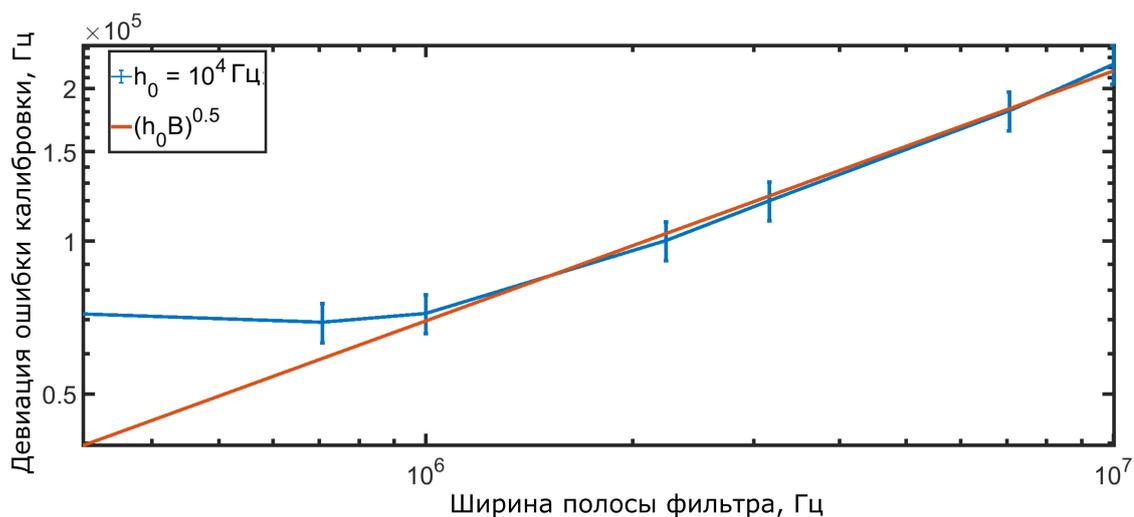


Рисунок 4.5 — Синяя линия - девиация ошибки калибровки для фиксированного значения скорости развертки частоты $\nu = 3 \times 10^{11}$ Гц/с и белого частотного шума $h_0 = 10^4$ Гц. Оранжевая линия аппроксимация $\sqrt{h_0 B}$

4.3 Вывод

В данной главе подробно проанализированы два подхода измерения частоты перестраиваемого лазера схемой фильтрации сигнала биения лазера с опорной частотной гребенкой. Для определения девиации ошибки калибровки рассматриваемых подходов были построены графики распределения точности измерения частоты для каждого подхода. Оказалось, что подход центра масс более точен, чем подход максимального значения. Для поиска оптимальных параметров схемы была посчитана зависимость девиации ошибки калибровочной частоты пропорционально $h_0 B$ в случае белого частотного шума. Например, для значений $h_0 = 10^4$ Гц, $h_1 = 3 \times 10^9$ Гц² и $v = 3 \times 10^{11}$ Гц/с, оптимальная ширина полосы фильтра составляет около 1 МГц. Минимальный уровень полосы пропускания полосового фильтра можно оценить с помощью ограничения, согласно которому время, необходимое сигналу биения для прохождения полосового фильтра, должно быть больше времени отклика фильтра. Для данной скорости развертки и частотного шума было обнаружено, что влияние фликкер-шума незначительно по сравнению с белым шумом из-за малого времени интегрирования.

Заключение

Была исследована зависимость эффективности затягивания от параметров системы. Проведена оптимизация параметров схемы затягивания частоты полупроводникового лазера на высокочастотный резонатор. Для описания схемы затягивания введено пять параметров, определяющих эффективность затягивания: эффективность обратного рассеяния в микрорезонаторе, параметр связи микрорезонатора с накачкой, отстройка частоты излучения лазера от резонансной частоты микрорезонатора, фазовая задержка между лазером и микрорезонатором и расстояние между лазером и микрорезонатором. Было установлено, что оптимальные параметры затягивания зависят только от одного параметра резонатора – обратного рассеяния, нормированного на ширину линии нагруженного микрорезонатора, и одного параметра установки – расстояния между лазером и микрорезонатором.

Оптимальные комбинации параметров затягивания были получены для различных экспериментально достижимых режимов: оптимальный режим; режим длинного плеча; фиксированная фаза, которая расходуется на две ветви, соответствующие режимам перегруженной связи и критической связи. Было обнаружено, что нулевая отстройка и нулевая фаза являются оптимальными значениями для режима слабого обратного рассеяния. Также найден глобальный максимум коэффициента стабилизации для других режимов. Оптимальные значения параметров и сам коэффициент стабилизации увеличиваются с расстоянием между лазером и резонатором. Глобальный максимум всегда остается в области слабого обратного рассеяния. Был также рассмотрен случай режима высокого обратного рассеяния. Результаты численного и аналитического моделирования были проверены по известным из литературы экспериментальным данным. Для параметров использовавшейся экспериментальной установки, было обнаружено возможность улучшения ширины линии по крайней мере на порядок, если параметры настройки настроены оптимально. Ширина линии может быть дальше улучшена на два порядка, если оптимально выбрана мода резонатора. Разработаны рекомендации по экспериментальной реализации оптимального режима затягивания.

Эффективность стабилизации лазера в классической схеме затягивания зависит от резонансного рэлеевского рассеяния на внутренних и поверхностных неоднородностях микрорезонатора. Максимальная эффективность стабилизации лазера достигается, когда уровень рэлеевского рассеяния сравним с уровнем потерь в резонаторе. Достижение такого режима является сложной технической задачей, так как в высокочастотных резонаторах внутренние и поверхностные неоднородности подавлены на стадии изготовления путем полировки.

Нами разработан метод увеличения эффективности затягивания и улучшения шумовых характеристик лазера. Нами предложена модифицированная схема затягивания частоты лазера высокочастотным оптическим микрорезонатором с дополнительной призмой и зеркалом, в которой уровень оптической обратной связи регулируется настройкой связи между дополнительной призмой и микрорезонатором. Для этой схемы была разработана модель, анализ которой показал, что максимальный коэффициент стабилизации предложенной схемы аналогичен максимальному коэффициенту стабилизации классической схемы, где оптическая обратная связь с МШГ возникает за счет рэлеевского рассеяния на внутренних и поверхностных неоднородностях. Однако, для классической схемы максимальный уровень стабилизации лазера требует точной настройки коэффициента рэлеевского рассеяния относительно внутренних потерь резонатора. В предложенной схеме с зеркалом максимальный уровень стабилизации лазера может быть легко достигнут с помощью настройки связи между дополнительной призмой и зеркалом. Важно отметить, что в классической схеме затягивания при высоком уровне рэлеевского рассеяния резонанс расщепляется из-за связи прямой и обратной волн микрорезонатора. В предложенной схеме затягивания отсутствует взаимная связь между прямой и обратной волной, так как обратная волна создается прямой волной за счет отражения от зеркала, поэтому расщепление резонанса в обратной волне отсутствует. Отсутствие расщепления упрощает процесс настройки параметров системы в оптимальный режим.

Нами определены оптимальные режимы и параметры системы, обеспечивающие наиболее эффективную стабилизацию лазера в зависимости от величины обратной связи. В ранних исследованиях эффекта затягивания было показано, что достаточно сильный уровень внешней оптической обратной связи может привести к мультистабильности затянутого лазера. Также стабильность лазера

ра в режиме затягивания ограничивают нежелательные нелинейные эффекты. Высокая интенсивность поля внутри микрорезонатора может привести к нежелательным эффектам нелинейной генерации (например, четырехволновое смешение или комбинационное рассеяние), что приводит к переходу амплитудного шума лазера в частотный шум. Так как коэффициент стабилизации затянутого лазера зависит от уровня обратной волны, то вышеописанная проблема ставит компромиссную задачу: максимизации коэффициента стабилизации в условиях ограничения на интенсивность поля внутри микрорезонатора и на уровень обратной волны. Данная задача была нами успешно решена для режимов слабой и высокой нелинейности. Анализ разработанной модели показал, что для достижения максимально возможного коэффициента стабилизации в случае слабой нелинейности в эксперименте необходимо симметрично нагружать обе призмы, уменьшая расстояние между призмами и микрорезонатором. Таким образом, мы показали, что схема затягивания с зеркалом позволяет не только увеличивать коэффициент стабилизации, но также позволяет исследовать режимы стабильности затянутого лазера, в частности, зависимость стабильности лазера от уровня оптической обратной связи. Нами также было обнаружено, что оптимальный режим предложенной схемы находится далеко от критической связи (в отличие от классической схемы затягивания), что приводит к меньшим потерям в системе. В случае сильной нелинейности выше поставленная компромиссная задача решается асимметричной связью призм с микрорезонатором. Данный режим затягивания позволяет подавить нежелательные нелинейные эффекты и при этом сохранить высокую стабильность затянутого лазера. Нами также было показано, что для классической и модифицированной схем затягивания мощность, циркулирующая в микрорезонаторе в оптимальном режиме, примерно одинакова. Таким образом оптимальные режимы классической и модифицированной схем затягивания одинаково чувствительны к нежелательным нелинейным эффектам, но в случае модифицированной схемы нелинейные эффекты эффективно подавляются асимметричной нагрузкой призм.

В данной работе была разработана оригинальная теоретическая модель, позволяющая описать явление затягивания частоты многочастотного лазера высокодобротным оптическим микрорезонатором. Теория базируется на модели многочастотного лазера Ямады с учетом асимметричного взаимодействия мод, описанного Богатовым, и обратной связи, описываемой с помощью модели

Лэнга-Кобаяши. Была численно показана возможность преобразования с помощью оптического микрорезонатора спектра излучения многочастотного лазера в эффективно одночастотный с сохранением полной мощности, а также в многочастотный с малым числом линий. Найдено пороговое значение уровня обратной связи, при котором происходит эффективная трансформация многочастотного спектра. Показано, что в случае затягивания частоты многочастотного лазера ярко проявляется ассиметричное перераспределение мощности в спектре излучения, связанное с возникновением периодической структуры из носителей электрических зарядов, которая связывает различные моды лазерного резонатора (эффект Богатова). Это приводит к характерному профилю спектра затянутого лазера. Полученные с помощью созданной модели численные результаты показали хорошее соответствие с экспериментальными данными.

Разработана и представлена оригинальная схема эксперимента, позволяющая детально изучить процесс затягивания частоты многочастотного лазера и различные режимы его работы. Методика основана на использовании высокочастотного микрорезонатора из фторида магния (MgF_2), который стабилизирует многочастотный диодный лазер, работающий при длине волны 1535 нм с выходной мощностью 100 мВт. В результате спектр излучения, состоящий из 50 линий (ширина в оптическом диапазоне 10 нм) с шириной линий порядка нескольких МГц, сужался в одну узкую линию мощностью 50 мВт. Помимо сужения спектра генерации впервые в явном виде наблюдался эффект Богатова, предсказанный более 30 лет назад. Также кроме сужения многочастотного спектра диода в одну узкую линию, наблюдается эффект затягивания, результатом которого являются многочастотные режимы. В частности, наблюдались режимы с генерацией на 2, 4, 6 и 8 частотах. В этих случаях затягивание происходит не на одной моде микрорезонатора и диода, а на нескольких. Данный эффект возникает когда одновременно несколько разных мод диода стабилизируются несколькими модами микрорезонатора. Затягивание происходит на нескольких модах, отстоящих друг от друга на частотный интервал кратный межмодовому интервалу резонатора (обычно 100 ОСД). При этом конкуренция мод вблизи каждой затянутой частоты действует, как и в одночастотном затягивании: весь спектр в окрестности резонансной частоты подавляется, и энергия перераспределяется в пользу одной или нескольких узких спектральных

линий. Все полученные экспериментальные данные полностью согласуются с разработанной теорией.

Мы разработали модель схемы лазера с непрерывной частотной модуляцией, откалиброванного опорной частотной гребенкой, генерируемой в высокодобротном оптическом микрорезонаторе. Данная схема обеспечивает широкополосную и быструю спектроскопию, что находит применение для различных прецизионных приложений. Мы подробно проанализировали схему калибровки перестраиваемого лазера частотной гребенкой и исследовали точность измерения мгновенной частоты лазера. В данной схеме момент времени, когда частота перестраиваемого лазера совпадает с линией опорной частотной гребенки, детектируют путем фильтрации сигнала биения частотной гребенки и перестраиваемого лазера узкополосным фильтром. Однако, из-за фазового шума лазера и опорной гребенки измерение момента времени совпадения частот осуществляется с определенной ошибкой, которую можно минимизировать подбирая оптимальные параметры системы и метод аппроксимации мгновенной частоты из измеренного сигнала. В нашей модели мы сравнили точность аппроксимации мгновенной частоты лазера методом центра масс и методом пикового значения. Численный анализ показал, что метод центра масс более точно аппроксимирует мгновенную частоту. Для метода центра масс мы посчитали зависимость точности измерения мгновенной частоты от скорости развертки частоты, параметров полосы пропускания фильтра, уровня фазового шума лазера и опорной частотной гребенки. На основе посчитанной зависимости было получено оптимальное соотношение скорости перестройки частоты и ширины полосы фильтра для разных типов фазового шума и узкополосного фильтра, обеспечивающего наивысшую точность калибровки частоты лазера.

Список опубликованных статей по теме диссертации (Scopus, Web of Science и RSCI)

- A1 R. R. Galiev, N. G. Pavlov, N. M. Kondratiev, S. Koptyaev, V. E. Lobanov, A. S. Voloshin, A. S. Gorodnitskiy, and M. L. Gorodetsky//Optics Express. 2018. Vol. 26, No. 23, P. 30509-30522. Impact factor WoS 3.894
- A2 Ramzil R. Galiev, Nikita M. Kondratiev, Valery E. Lobanov, Andrey B. Matsko, and Igor A. Bilenko Optimization of Laser Stabilization via Self-Injection Locking to a Whispering-Gallery-Mode Microresonator//Physical Review Applied. 2020. Vol. 14, No. 1, P. 014036. Impact factor WoS 4.985.
- A3 Ramzil R. Galiev, Nikita M. Kondratiev, Valery E. Lobanov, Andrey B. Matsko, and Igor A. Bilenko Mirror-Assisted Self-Injection Locking of a Laser to a Whispering-Gallery-Mode Microresonator//Physical Review Applied. 2021. Vol. 16, No. 6, P. 064043. Impact factor WoS 4.985.
- A4 Raja A.S., Voloshin A.S., Guo H., Agafonova S.E., Liu J., Gorodnitskiy A.S., Karpov M., Pavlov N.G., Lucas E., Galiev R.R., Shitikov A.E., Jost J.D., Gorodetsky M.L., Kippenberg T.J. Electrically pumped photonic integrated soliton microcomb//Nature communications. 2019. Vol. 10., No. 1, P. 1-8. Impact factor WoS 14.919.

Статьи в сборниках материалов конференций

- A5 R. R. Galiev, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. B. Matsko, and I. A. Bilenko, "Optimization of Laser Frequency Stabilization via Self-Injection Locking to WGM Microresonator,"in OSA Advanced Photonics Congress (AP) 2020 (IPR, NP, NOMA, Networks, PVLED, PSC, SPPCom, SOF), L. Caspani, A. Tauke-Pedretti, F. Leo, and B. Yang, eds., OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2020), paper ITu4A.12.
- A6 R. R. Galiev, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. B. Matsko, and I. A. Bilenko, "Mirror-assisted tuning of laser stabilization via self-injection

- locking to WGM microresonator,"in Laser Applications Conference, OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2021), paper JTU1A.40
- A7 Ramzil R. Galiev, Nikita M. Kondratiev, Valery E. Lobanov, and Igor A. Bilenko "Optimization of a frequency comb-based calibration of a tunable laser Proc. SPIE 11552, Optical Metrology and Inspection for Industrial Applications VII, 115521J (16 October 2020)
- A8 R. Galiev, N. Kondratiev, V. Lobanov and I. Bilenko, "Surface and bulk scattering engineering in microresonators for enhancement of laser stabilization via self-injection locking,"2020 IEEE Photonics Conference (IPC), 2020, pp. 1-2
- A9 R. R. Galiev, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. B. Matsko, and I. A. Bilenko, "Frequency Stability Enhancement of Self-Injection Locked Laser,"in Frontiers in Optics / Laser Science, B. Lee, C. Mazzali, K. Corwin, and R. Jason Jones, eds., OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2020), paper JTh4A.2.
- A10 R. R. Galiev, N. G. Pavlov, N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. S. Voloshin, A. S. Gorodnitskiy, S. Koptyaev, I. A. Bilenko, and M. L. Gorodetsky, "Spectrum collapse and Kerr frequency comb generation with multi-frequency laser diodes self-injection locked to high-Q optical microresonator,"in 2019 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe and European Quantum Electronics Conference, OSA Technical Digest (Optical Society of America, 2019), paper cb91.
- A11 R. Galiev, N. M. Kondratiev, N. G. Pavlov, V. E. Lobanov and M. L. Gorodetsky, "Bogatov effect in self-injection locked multimode diode laser: Theory and experiment,"2018 International Conference Laser Optics (ICLO), 2018, pp. 155-155,
- A12 Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Лобанов В.Е., Биленко И.А. Анализ поверхностного и объемного рассеяния в микрорезонаторах для усиления стабилизации лазера эффектом затягивания// Сборник трудов XII Международной конференции «Фундаментальные проблемы оптики – 2020». -С. 158-160
- A13 Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Лобанов В.Е., Биленко И.А "Оптимизация схемы калибровки перестраиваемого лазера на основе частот-

- ной гребенки Когерентная оптика и оптическая спектроскопия: сборник статей. – 2020. – Изд-во «ФЭН» АН РТ. – С. 40 -43
- A14 Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Лобанов В.Е., Биленко И.А "ОЭффективность подавления фазового шума диодного лазера затянутого на резонатор с модами шепчущей галереи Когерентная оптика и оптическая спектроскопия: сборник статей. – 2019. – Изд-во «ФЭН» АН РТ.
- A15 Галиев Р.Р., Кондратьев Н.М., Павлов Н.Г., Лобанов В.Е., Городецкий М.Л. "Теория затыгивания частоты многочастного лазерного диода модой высокодобротного микрорезонатора Когерентная оптика и оптическая спектроскопия: сборник статей. – 2018. – Изд-во «ФЭН» АН РТ. – С. 54-57
- A16 Галиев Р.Р. и др. "Затыгивание частоты многочастного лазерного диода модой высокодобротного микрорезонатора //в сборнике Труды школы-семинара «Волны-2018». Когерентная и нелинейная оптика. - 2018.
- A17 Галиев Р.Р. и др. "Генерация частотной гребенки многочастотным лазером, затынутым на высокодобротный резонатор //в сборнике Труды школы-семинара «Волны-2019». Когерентная и нелинейная оптика. - 2019.

Список литературы

1. Ohta T., Murakami K. Reducing negative resistance oscillator noise by self-injection // *Electron. Commun. Jpn.* — 1968. — Vol. 51-B. — Pp. 80–82.
2. New Self-Injection Oscillator Using Directional Filter / T. Ohta, S. Makino, H. Nakano et al. // 1973 3rd European Microwave Conference. — Vol. 1. — 1973. — Sep. — Pp. 1–4.
3. Ota T., Nata M. Noise reduction of oscillator by injection locking // *Trans. IECEJ.* — 1970. — Vol. 53-B. — Pp. 487–494.
4. Heng-Chia Chang. Phase noise in self-injection-locked oscillators - theory and experiment // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques.* — 2003. — Sep. — Vol. 51, no. 9. — Pp. 1994–1999.
5. Heng-Chia Chang. Stability analysis of self-injection-locked oscillators // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques.* — 2003. — Sep. — Vol. 51, no. 9. — Pp. 1989–1993.
6. Choi J. J., Choi G. W. Experimental Observation of Frequency Locking and Noise Reduction in a Self-Injection-Locked Magnetron // *IEEE Transactions on Electron Devices.* — 2007. — Dec. — Vol. 54, no. 12. — Pp. 3430–3432.
7. Bliokh Y. P., Krasik Y. E., Felsteiner J. Self-Injection-Locked Magnetron as an Active Ring Resonator Side Coupled to a Waveguide With a Delayed Feedback Loop // *IEEE Transactions on Plasma Science.* — 2012. — Jan. — Vol. 40, no. 1. — Pp. 78–82.
8. Stabilization of gyrotron frequency by reflection from nonresonant and resonant loads / M. Yu. Glyavin, G. G. Denisov, M. L. Kulygin, Yu. V. Novozhilova // *Tech. Phys. Lett.* — 2015. — Vol. 41. — Pp. 628–631.
9. Frequency Stabilization of a 0.67-THz Gyrotron by Self-Injection Locking / M. M. Melnikova, A. G. Rozhnev, N. M. Ryskin et al. // *IEEE Transactions on Electron Devices.* — 2016. — March. — Vol. 63, no. 3. — Pp. 1288–1293.

10. Self-ILPLL Using Optical Feedback for Phase Noise Reduction in Microwave Oscillators / L. Zhang, A. K. Poddar, U. L. Rohde, A. S. Daryoush // *IEEE Photonics Technology Letters*. — 2015. — March. — Vol. 27, no. 6. — Pp. 624–627.
11. Phase noise reduction in RF oscillators utilizing self-injection locked and phase locked loop / L. Zhang, A. K. Poddar, U. L. Rohde, A. S. Daryoush // 2015 IEEE 15th Topical Meeting on Silicon Monolithic Integrated Circuits in RF Systems. — 2015. — Jan. — Pp. 86–88.
12. Minimum line width of an injection laser / V.L. Velichanskii, A.S. Zibrov, V.S. Kargopol'tsev et al. // *Sov. Tech. Phys. Lett. (Engl. Transl.); (United States)*. — 1978. — Vol. 4:9.
13. *Lang R., Kobayashi K.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. — 1980. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 347–355.
14. Methods for narrowing the emission line of an injection laser / É.M. Belenov, V.L. Velichanskiĭ, A.S. Zibrov et al. // *Soviet Journal of Quantum Electronics*. — 1983. — Vol. 13, no. 6. — Pp. 792–798. — URL:
15. Spectral linewidth reduction in semiconductor lasers by an external cavity with weak optical feedback / E. Patzak, Olesen H., A. Sugimura et al. // *El. Lett.* — 1983. — October. — Vol. 19. — Pp. 938–940(2).
16. *Agrawal G.* Line narrowing in a single-mode injection laser due to external optical feedback // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. — 1984. — May. — Vol. 20, no. 5. — Pp. 468–471.
17. *Tkach R., Chraplyvy A.* Regimes of feedback effects in 1.5- μm distributed feedback lasers // *Journal of Lightwave Technology*. — 1986. — Vol. 4, no. 11. — Pp. 1655–1661. — URL: <http://dx.doi.org/10.1109/JLT.1986.1074666>.
18. *Dahmani B., Hollberg L., Drullinger R.* Frequency stabilization of semiconductor lasers by resonant optical feedback // *Opt. Lett.* — 1987. — Vol. 12, no. 11. — Pp. 876–878. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-12-11-876>.

19. *Hollberg L., Ohtsu M.* Modulatable narrow-linewidth semiconductor lasers // *Applied Physics Letters*. — 1988. — Vol. 53, no. 11. — Pp. 944–946. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.100077>.
20. *Li H., Abraham N. B.* Analysis of the noise spectra of a laser diode with optical feedback from a high-finesse resonator // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. — 1989. — Aug. — Vol. 25, no. 8. — Pp. 1782–1793.
21. Optically stabilized narrow linewidth semiconductor laser for high resolution spectroscopy / A. Hemmerich, D.H. McIntyre, D. Schropp et al. // *Optics Communications*. — 1990. — Vol. 75, no. 2. — Pp. 118 – 122. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/003040189090239P>.
22. *Hemmerich A., Zimmermann C., Hansch T. W.* Compact source of coherent blue light // *Appl. Opt.* — 1994. — Vol. 33, no. 6. — Pp. 988–991.
23. *Hjelme D. R., Mickelson A. R., Beausoleil R. G.* Semiconductor laser stabilization by external optical feedback // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. — 1991. — March. — Vol. 27, no. 3. — Pp. 352–372.
24. Ultralow noise miniature external cavity semiconductor laser / W. Liang, V. S. Ilchenko, D. Eliyahu et al. // *Nat. Commun.* — 2015. — Vol. 6. — P. 7371.
25. *Braginsky V.B., Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S.* Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes // *Physics Letters A*. — 1989. — Vol. 137, no. 7. — Pp. 393–397. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960189909122>.
26. Kilohertz optical resonances in dielectric crystal cavities / Anatoliy A. Savchenkov, Vladimir S. Ilchenko, Andrey B. Matsko, Lute Maleki // *Phys. Rev. A*. — 2004. — Nov. — Vol. 70. — P. 051804. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.051804>.
27. *Matsko A. B., Ilchenko V. S.* Optical resonators with whispering-gallery modes-part I: basics // *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. — 2006. — Jan. — Vol. 12, no. 1. — Pp. 3–14.

28. Optical resonators with ten million finesse / Anatoliy A. Savchenkov, Andrey B. Matsko, Vladimir S. Ilchenko, Lute Maleki // *Opt. Express.* — 2007. — May. — Vol. 15, no. 11. — Pp. 6768–6773. — URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-15-11-6768>.
29. Ward J., Benson O. WGM microresonators: sensing, lasing and fundamental optics with microspheres // *Laser & Photonics Reviews.* — 2011. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 553–570.
30. Barium fluoride whispering-gallery-mode disk-resonator with one billion quality-factor / Guoping Lin, Souleymane Diallo, Rémi Henriet et al. // *Opt. Lett.* — 2014. — Oct. — Vol. 39, no. 20. — Pp. 6009–6012. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-39-20-6009>.
31. Kerr optical frequency comb generation in strontium fluoride whispering-gallery mode resonators with billion quality factor / Rémi Henriet, Guoping Lin, Aurélien Coillet et al. // *Opt. Lett.* — 2015. — Apr. — Vol. 40, no. 7. — Pp. 1567–1570. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-40-7-1567>.
32. Nonlinear and quantum optics with whispering gallery resonators / Dmitry V Strekalov, Christoph Marquardt, Andrey B Matsko et al. // *Journal of Optics.* — 2016. — Vol. 18, no. 12. — P. 123002.
33. Ultra high Q crystalline microcavities / Ivan S. Grudinin, Andrey B. Matsko, Anatoliy A. Savchenkov et al. // *Optics Communications.* — 2006. — Vol. 265, no. 1. — Pp. 33 – 38. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401806002136>.
34. Mid-infrared ultra-high-Q resonators based on fluoride crystalline materials / Caroline Lecaplain, Clément Javerzac-Galy, Michael L. Gorodetsky, T. J. Kippenberg // *Nature Communications.* — 2016. — Vol. 7.
35. Billion Q-factor in silicon WGM resonators / A. E. Shitikov, I. A. Bilenko, N. M. Kondratiev et al. // *Optica.* — 2018. — Vol. 5, no. 12. — Pp. 1525–1528. — URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-5-12-1525>.

36. Narrow-line-width diode laser with a high-Q microsphere resonator / V.V. Vassiliev, V.L. Velichansky, V.S. Ilchenko et al. // *Optics Communications*. — 1998. — Vol. 158, no. 1. — Pp. 305 – 312. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401898005781>.
37. *Vassiliev V.V., Il'ina S.M., Velichansky V.L.* Diode laser coupled to a high-Q microcavity via a GRIN lens // *Appl. Phys. B*. — 2003. — Vol. 76, no. 5. — Pp. 521–523.
38. Whispering-gallery-mode-resonator-based ultranarrow linewidth external-cavity semiconductor laser / W. Liang, V.S. Ilchenko, A.A. Savchenkov et al. // *Opt. Lett.* — 2010. — Vol. 35, no. 16. — Pp. 2822–2824. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-35-16-2822>.
39. Microresonator stabilized $2\mu\text{m}$ distributed-feedback GaSb-based diode laser / E. Dale, M. Bagheri, A.B. Matsko et al. // *Opt. Lett.* — 2016. — Vol. 41, no. 23. — Pp. 5559–5562. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-41-23-5559>.
40. On acceleration sensitivity of $2\mu\text{m}$ whispering gallery mode-based semiconductor self-injection locked laser / A.A. Savchenkov, D. Eliyahu, B. Heist et al. // *Appl. Opt.* — 2019. — Vol. 58, no. 9. — Pp. 2138–2145. — URL: <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-58-9-2138>.
41. Narrow linewidth diode laser self-injection locked to a high-Q microresonator / N. G. Pavlov, G. V. Lihachev, A. S. Voloshin et al. // *AIP Conference Proceedings*. — 2018. — Vol. 1936, no. 1. — P. 020005.
42. *Donvalkar P.S., Savchenkov A., Matsko A.* Self-injection locked blue laser // *Journal of Optics*. — 2018. — Vol. 20, no. 4. — P. 045801. — URL:
43. Narrow linewidth lasing and soliton Kerr-microcombs with ordinary laser diodes / N. G. Pavlov, S. Koptyaev, G. V. Lihachev et al. // *Nat. Photon.* — 2018. — Vol. 12. — Pp. 694–698.
44. Self-injection locking efficiency of a UV Fabry-Perot laser diode / Anatoliy A. Savchenkov, Sheng-Wey Chiow, Mohammadreza Ghasemkhani et al. // *Opt. Lett.* — 2019. — Sep. — Vol. 44, no. 17. — Pp. 4175–4178. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-44-17-4175>.

45. *Maleki L.* Novel Lasers: Whispering-gallery-mode resonators create ultranarrow-linewidth semiconductor lasers // *LaserFocusWorld*. — 2014. — October. — Vol. 16550216. — URL: <https://www.laserfocusworld.com/lasers-sources/article/16550216/novel-lasers-whisperinggallerymode-resonators-create-ultranarrowlinewidth-semicon>
46. Battery-operated integrated frequency comb generator / B. Stern, X. Ji, Y. Okawachi et al. // *Nature*. — 2018. — Vol. 562. — P. 401–405.
47. Tunable Self-Injected Fabry–Perot Laser Diode Coupled to an External High-Q Si₃N₄/SiO₂ Microring Resonator / Yu Li, Yuanjue Zhang, Hongwei Chen et al. // *J. Lightwave Technol.* — 2018. — Aug. — Vol. 36, no. 16. — Pp. 3269–3274. — URL: <http://jlt.osa.org/abstract.cfm?URI=jlt-36-16-3269>.
48. *Gaeta A.L., Lipson M., Kippenberg T.J.* Photonic-chip-based frequency combs // *Nature Photon.* — 2019. — Vol. 13. — P. 158–169.
49. Electrically pumped photonic integrated soliton microcomb / Arslan S. Raja, Andrey S. Voloshin, Hairun Guo et al. // *Nature Communications*. — 2019. — Vol. 10, no. 1. — P. 680. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-019-08498-2>.
50. Chip-based soliton microcomb module using a hybrid semiconductor laser / Arslan S. Raja, Junqiu Liu, Nicolas Volet et al. // *Opt. Express*. — 2020. — Feb. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 2714–2721. — URL: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-28-3-2714>.
51. Emerging material systems for integrated optical Kerr frequency combs / Andre Kovach, Dongyu Chen, Jinghan He et al. // *Adv. Opt. Photon.* — 2020. — Mar. — Vol. 12, no. 1. — Pp. 135–222. — URL: <http://aop.osa.org/abstract.cfm?URI=aop-12-1-135>.
52. *Hadley G.* Injection locking of diode lasers // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. — 1986. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 419–426.
53. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator / R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski et al. // *Applied Physics B*. — 1983. — Jun. — Vol. 31, no. 2. — Pp. 97–105. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF00702605>.

54. Compact, thermal-noise-limited optical cavity for diode laser stabilization at 1×10^{-15} / A. D. Ludlow, X. Huang, M. Notcutt et al. // *Opt. Lett.* — 2007. — Mar. — Vol. 32, no. 6. — Pp. 641–643. — URL: <http://www.osapublishing.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-32-6-641>.
55. Subhertz linewidth diode lasers by stabilization to vibrationally and thermally compensated ultralow-expansion glass Fabry-Pérot cavities / J. Alnis, A. Matveev, N. Kolachevsky et al. // *Phys. Rev. A.* — 2008. — May. — Vol. 77. — P. 053809. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.053809>.
56. *Kouroggi Motonobu, Ohtsu Motoichi.* Novel optical frequency discriminator for FM noise reduction of semiconductor lasers // *Optics Communications.* — 1991. — Vol. 81, no. 3. — Pp. 204–208. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/003040189190639U>.
57. Minimum line width of an injection laser / V.L. Velichanskii, A.S. Zibrov, V.S. Kargopol'tsev et al. // *Sov. Tech. Phys. Lett.* — 1978. — Sep. — Vol. 4(9). — Pp. 438–439.
58. *Wieman C. E., Hollberg L.* Using diode lasers for atomic physics // *Rev. Scient. Instr.* — 1991. — Vol. 62, no. 1. — Pp. 1–20.
59. Solitary Spectral Linewidth and Its Reduction with External Grating Feedback for a $1.55 \mu\text{m}$ InGaAsP BH Laser / Hening Olesen, Shigeru Saito, Takaaki Mukai et al. // *Japanese Journal of Applied Physics.* — 1983. — oct. — Vol. 22, no. Part 2, No. 10. — Pp. L664–L666. — URL: <https://doi.org/10.1143/jjap.22.l664>.
60. *Saito S., Nilsson O., Yamamoto Y.* Oscillation center frequency tuning, quantum FM noise, and direct frequency characteristics in external grating loaded semiconductor lasers // *IEEE Journ. Quant. El.* — 1982. — Vol. 18, no. 6. — Pp. 961–970.
61. A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics / L. Ricci, M. Weidemüller, T. Esslinger et al. // *Opt. Commun.* — 1995. — Vol. 117, no. 5. — Pp. 541 – 549.

62. Wavelength stabilization and spectrum narrowing of high-power multimode laser diodes and arrays by use of volume Bragg gratings / B. L. Volodin, S. V. Dolgy, E. D. Melnik et al. // *Opt. Lett.* — 2004. — Vol. 29, no. 16. — Pp. 1891–1893.
63. Volume Holographic Grating Wavelength Stabilized Laser Diodes / G. J. Steckman, W. Liu, R. Platz et al. // *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics.* — 2007. — May. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 672–678.
64. *Laurent P., Clairon A., Breant C.* Frequency noise analysis of optically self-locked diode lasers // *IEEE Journ. Quant. El.* — 1989. — Vol. 25, no. 6. — Pp. 1131–1142.
65. High-finesse cavity external optical feedback DFB laser with hertz relative linewidth / Y. Zhao, Q. Wang, F. Meng et al. // *Opt. Lett.* — 2012. — Vol. 37, no. 22. — Pp. 4729–4731.
66. *Patrick H., Wieman C. E.* Frequency stabilization of a diode laser using simultaneous optical feedback from a diffraction grating and a narrowband Fabry–Perot cavity // *Rev. Scient. Instrum.* — 1991. — Vol. 62, no. 11. — Pp. 2593–2595.
67. Subkilohertz linewidth reduction of a DFB diode laser using self-injection locking with a fiber Bragg grating Fabry-Perot cavity / F. Wei, F. Yang, X. Zhang et al. // *Opt. Express.* — 2016. — Vol. 24, no. 15. — Pp. 17406–17415.
68. *Braginsky V. B., Gorodetsky M. L., Ilchenko V. S.* Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes // *Physics Letters A.* — 1989. — Vol. 137, no. 7-8. — Pp. 393–397.
69. *Ilchenko V.S., Matsko A.B.* Optical resonators with whispering-gallery modes-part II: applications // *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics.* — 2006. — Vol. 12, no. 1. — Pp. 15–32.
70. High-Q UV whispering gallery mode resonators made of angle-cut BBO crystals / G. Lin, J. Furst, D. V. Strekalov et al. // *Opt. Express.* — 2012. — Sep. — Vol. 20, no. 19. — Pp. 21372–21378.

71. Ultra high Q crystalline microcavities / I. S. Grudinin, A. B. Matsko, A. A. Savchenkov et al. // *Opt. Commun.* — 2006. — Vol. 265, no. 1. — Pp. 33 – 38.
72. *Ilchenko Vladimir S, Gorodetskii Michael L.* Thermal nonlinear effects in optical whispering gallery microresonators // *Laser Phys.* — 1992. — Vol. 2, no. 6. — Pp. 1004–1009.
73. *Gorodetsky M. L., Pryamikov A. D., Ilchenko V. S.* Rayleigh scattering in high-Q microspheres // *J. Opt. Soc. Am. B.* — 2000. — Vol. 17, no. 6. — Pp. 1051–1057.
74. High-coherence diode laser with optical feedback via a microcavity with 'whispering gallery' modes / V. V. Vasilev, Vladimir L. Velichansky, M. L. Gorodetskii et al. // *Quantum Electronics.* — 1996. — aug. — Vol. 26, no. 8. — Pp. 657–658. — URL: <https://doi.org/10.1070%2Fqe1996v026n08abeh000747>.
75. Narrow-line-width diode laser with a high-Q microsphere resonator / V.V. Vasilev, V.L. Velichansky, V.S. Ilchenko et al. // *Opt. Commun.* — 1998. — Vol. 158, no. 1. — Pp. 305 – 312.
76. Compact stabilized semiconductor laser for frequency metrology / W. Liang, V. S. Ilchenko, D. Eliyahu et al. // *Appl. Opt.* — 2015. — Vol. 54, no. 11. — Pp. 3353–3359.
77. *Sprenger B., Schwefel H. G. L., Wang L. J.* Whispering-gallery-mode-resonator-stabilized narrow-linewidth fiber loop laser // *Opt. Lett.* — 2009. — Vol. 34, no. 21. — Pp. 3370–3372.
78. Extended ultrahigh-Q-cavity diode laser / Zhenda Xie, Wei Liang, Anatoliy A. Savchenkov et al. // *Opt. Lett.* — 2015. — Jun. — Vol. 40, no. 11. — Pp. 2596–2599. — URL: <http://www.osapublishing.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-40-11-2596>.
79. Whispering gallery mode stabilization of quantum cascade lasers for infrared sensing and spectroscopy / S. Borri, M. Siciliani de Cumis, G. Insero et al. // *Proc. SPIE.* — 2017. — Vol. 10090. — P. 1009008.

80. Mid-infrared ultra-high-Q resonators based on fluoride crystalline materials / C. Lecaplain, C. Javerzac-Galy, M. L. Gorodetsky, T. J. Kippenberg // *Nat. Commun.* — 2016. — Vol. 7. — P. 13383.
81. *Gorodetsky Michael L., Grudinin Ivan S.* Fundamental thermal fluctuations in microspheres // *J. Opt. Soc. Am. B.* — 2004. — Apr. — Vol. 21, no. 4. — Pp. 697–705. — URL: <http://www.osapublishing.org/josab/abstract.cfm?URI=josab-21-4-697>.
82. Chasing the thermodynamical noise limit in whispering-gallery-mode resonators for ultrastable laser frequency stabilization / Jinkang Lim, Anatoliy A. Savchenkov, Elijah Dale et al. // *Nature Communications.* — 2017. — Mar. — Vol. 8, no. 1. — P. 8. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-017-00021-9>.
83. *Savchenkov Anatoliy, Matsko Andrey.* Calcium fluoride whispering gallery mode optical resonator with reduced thermal sensitivity // *Journal of Optics.* — 2018. — jan. — Vol. 20, no. 3. — P. 035801. — URL: <https://doi.org/10.1088/2040-8986/aaa6f9>.
84. *Savchenkov Anatoliy, Williams Skip, Matsko Andrey.* On stiffness of optical self-injection locking // *Photonics.* — 2018. — Vol. 5, no. 4. — P. 43.
85. Probing 10 μ K stability and residual drifts in the cross-polarized dual-mode stabilization of single-crystal ultrahigh-Q optical resonators / Jinkang Lim, Wei Liang, Anatoliy A. Savchenkov et al. // *Light: Science & Applications.* — 2019. — Jan. — Vol. 8, no. 1. — P. 1. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41377-018-0109-7>.
86. Integrated waveguide coupled Si₃N₄ resonators in the ultrahigh-Q regime / Daryl T. Spencer, Jared F. Bauters, Martijn J. R. Heck, John E. Bowers // *Optica.* — 2014. — Sep. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 153–157. — URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-1-3-153>.
87. High-Q silicon nitride microresonators exhibiting low-power frequency comb initiation / Yi Xuan, Yang Liu, Leo T. Varghese et al. // *Optica.* — 2016. — Nov. — Vol. 3, no. 11. — Pp. 1171–1180. — URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-3-11-1171>.

88. Ultra-low-loss on-chip resonators with sub-milliwatt parametric oscillation threshold / Xingchen Ji, Felipe A. S. Barbosa, Samantha P. Roberts et al. // *Optica*. — 2017. — Jun. — Vol. 4, no. 6. — Pp. 619–624. — URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-4-6-619>.
89. Photonic Damascene process for integrated high-Q microresonator based non-linear photonics / Martin H. P. Pfeiffer, Arne Kordts, Victor Brasch et al. // *Optica*. — 2016. — Jan. — Vol. 3, no. 1. — Pp. 20–25. — URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-3-1-20>.
90. Ultra-smooth silicon nitride waveguides based on the Damascene reflow process: fabrication and loss origins / Martin H. P. Pfeiffer, Junqiu Liu, Arslan S. Raja et al. // *Optica*. — 2018. — Jul. — Vol. 5, no. 7. — Pp. 884–892. — URL: <http://www.osapublishing.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-5-7-884>.
91. Coupling Ideality of Integrated Planar High- Q Microresonators / Martin H. P. Pfeiffer, Junqiu Liu, Michael Geiselmann, Tobias J. Kippenberg // *Phys. Rev. Applied*. — 2017. — Feb. — Vol. 7. — P. 024026. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.7.024026>.
92. Double inverse nanotapers for efficient light coupling to integrated photonic devices / Junqiu Liu, Arslan S. Raja, Martin H. P. Pfeiffer et al. // *Opt. Lett.* — 2018. — Jul. — Vol. 43, no. 14. — Pp. 3200–3203. — URL: <http://www.osapublishing.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-43-14-3200>.
93. Chemically etched ultrahigh- Q wedge-resonator on a silicon chip / Hansuek Lee, Tong Chen, Jiang Li et al. // *Nature Photonics*. — 2012. — Jun. — Vol. 6, no. 6. — Pp. 369–373. — URL: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2012.109>.
94. Broadband dispersion-engineered microresonator on a chip / Ki Youl Yang, Katja Beha, Daniel C. Cole et al. // *Nature Photonics*. — 2016. — May. — Vol. 10, no. 5. — Pp. 316–320. — URL: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2016.36>.

95. Electrically pumped photonic integrated soliton microcomb / A.S. Raja, A.S. Voloshin, H. Guo et al. // *Nature Communications*. — 2019. — Vol. 10, no. 1. — P. 680. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41467-019-08498-2>.
96. Gaeta Alexander L, Lipson Michal, Kippenberg Tobias J. Photonic-chip-based frequency combs // *Nature Photonics*. — 2019. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 158–169.
97. Battery-operated integrated frequency comb generator / Brian Stern, Xingchen Ji, Yoshitomo Okawachi et al. // *Nature*. — 2018. — Vol. 562, no. 7727. — Pp. 401–405. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0598-9>.
98. Searching for exoplanets using a microresonator astrocomb / M.-G. Suh, X. Yi, Y.-H. Lai et al. // *Nature Photonics*. — 2019. — Vol. 13, no. 1. — Pp. 25–30. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41566-018-0312-3>.
99. An optical-frequency synthesizer using integrated photonics / Daryl T. Spencer, Tara Drake, Travis C. Briles et al. // *Nature*. — 2018. — May. — Vol. 557, no. 7703. — Pp. 81–85. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0065-7>.
100. Compact narrow-linewidth integrated laser based on a low-loss silicon nitride ring resonator / Brian Stern, Xingchen Ji, Avik Dutt, Michal Lipson // *Opt. Lett.* — 2017. — Nov. — Vol. 42, no. 21. — Pp. 4541–4544.
101. 290 Hz intrinsic linewidth from an integrated optical chip-based widely tunable InP-Si₃N₄ hybrid laser / Youwen Fan, Ruud M. Oldenbeuving, Marcel Hoekman et al. // *2017 European Conference on Lasers and Electro-Optics and European Quantum Electronics Conference*. — 2017.
102. Self-injection locking of a laser diode to a high-Q WGM microresonator / N. M. Kondratiev, V. E. Lobanov, A. V. Cherenkov et al. // *Opt. Express*. — 2017. — Nov. — Vol. 25, no. 23. — Pp. 28167–28178.
103. Oraevsky Anatolii N, Yarovitsky Alexander V, Velichansky Vladimir L. Frequency stabilisation of a diode laser by a whispering-gallery mode // *Quantum Electronics*. — 2001. — oct. — Vol. 31, no. 10. — Pp. 897–903.
104. Adler R. A Study of Locking Phenomena in Oscillators // *Proceedings of the IRE*. — 1946. — June. — Vol. 34, no. 6. — Pp. 351–357.

105. *Adler R.* A study of locking phenomena in oscillators // *Proceedings of the IEEE*. — 1973. — Oct. — Vol. 61, no. 10. — Pp. 1380–1385.
106. *Spano P., Piazzolla S., Tamburrini M.* Theory of noise in semiconductor lasers in the presence of optical feedback // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. — 1984. — April. — Vol. 20, no. 4. — Pp. 350–357.
107. *Savchenkov Anatoliy, Williams Skip, Matsko Andrey.* On Stiffness of Optical Self-Injection Locking // *Photonics*. — 2018. — Vol. 5, no. 4. — URL: <https://www.mdpi.com/2304-6732/5/4/43>.
108. On-chip single nanoparticle detection and sizing by mode splitting in an ultra-high-Q microresonator / Jiangang Zhu, Sahin Kaya Ozdemir, Yun-Feng Xiao et al. // *Nature Photonics*. — 2010. — Jan. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 46–49. — URL: <https://doi.org/10.1038/nphoton.2009.237>.
109. Azimuthal-order variations of surface-roughness-induced mode splitting and scattering loss in high-Q microdisk resonators / Qing Li, Ali A. Eftekhar, Zhixuan Xia, Ali Adibi // *Opt. Lett.* — 2012. — May. — Vol. 37, no. 9. — Pp. 1586–1588. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-37-9-1586>.
110. Normal Mode Splitting and Purcell enhancement of Local Rayleigh scattering in a Microsphere Resonator / A. Mazzei, O. Benson, L. de S. Menezes et al. // Conference on Lasers and Electro-Optics/Quantum Electronics and Laser Science Conference and Photonic Applications Systems Technologies. — Optical Society of America, 2007. — P. QMI2. — URL: <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=QELS-2007-QMI2>.
111. Whispering-gallery-mode resonators as frequency references. I. Fundamental limitations / Andrey B. Matsko, Anatoliy A. Savchenkov, Nan Yu, Lute Maleki // *J. Opt. Soc. Am. B*. — 2007. — Jun. — Vol. 24, no. 6. — Pp. 1324–1335. — URL: <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-24-6-1324>.
112. *Kondratiev N.M., Gorodetsky M.L.* Thermorefractive noise in whispering gallery mode microresonators: Analytical results and numerical simulation // *Physics Letters A*. — 2018. — Vol. 382, no. 33. — Pp. 2265 – 2268. — Special Issue in memory of Professor V.B. Braginsky. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960117302591>.

113. Thermorefractive noise in silicon-nitride microresonators / Guanhao Huang, Erwan Lucas, Junqiu Liu et al. // *Phys. Rev. A.* — 2019. — Jun. — Vol. 99. — P. 061801. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.99.061801>.
114. Passively Mode-Locked Raman Laser / W. Liang, V. S. Ilchenko, A. A. Savchenkov et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Sep. — Vol. 105. — P. 143903. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.143903>.
115. Temporal solitons in optical microresonators / T. Herr, V. Brasch, J. D. Jost et al. // *Nat. Photon.* — 2014. — Vol. 8, no. 2. — Pp. 145–152.
116. *Kondratiev Nikita M., Lobanov Valery E.* Modulational instability and frequency combs in whispering-gallery-mode microresonators with backscattering // *Phys. Rev. A.* — 2020. — Jan. — Vol. 101. — P. 013816. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.101.013816>.
117. *Lin H. B., Campillo A. J.* cw Nonlinear Optics in Droplet Microcavities Displaying Enhanced Gain // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Oct. — Vol. 73. — Pp. 2440–2443. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.2440>.
118. Optical hyperparametric oscillations in a whispering-gallery-mode resonator: Threshold and phase diffusion / Andrey B. Matsko, Anatoliy A. Savchenkov, Dmitry Strekalov et al. // *Phys. Rev. A.* — 2005. — Mar. — Vol. 71. — P. 033804. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.033804>.
119. *Gorodetsky M. L., Ilchenko V. S.* Optical microsphere resonators: optimal coupling to high-Q whispering-gallery modes // *J. Opt. Soc. Am. B.* — 1999. — Jan. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 147–154. — URL: <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-16-1-147>.
120. *Lang R., Kobayashi K.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // *IEEE Journal of Quantum Electronics.* — 1980. — Mar. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 347–355.
121. *Li H., Abraham N. B.* Power spectrum of frequency noise of semiconductor lasers with optical feedback from a high-finesse resonator // *Applied Physics Letters.* — 1988. — Vol. 53, no. 23. — Pp. 2257–2259.

122. *Kippenberg T. J., Spillane S. M., Vahala K. J.* Modal coupling in traveling-wave resonators // *Opt. Lett.* — 2002. — Oct. — Vol. 27, no. 19. — Pp. 1669–1671. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-27-19-1669>.
123. Splitting of high- Q Mie modes induced by light backscattering in silica microspheres / D. S. Weiss, V. Sandoghdar, J. Hare et al. // *Opt. Lett.* — 1995. — Sep. — Vol. 20, no. 18. — Pp. 1835–1837. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-20-18-1835>.
124. *Mohageg Makan, Savchenkov Anatoliy, Maleki Lute.* Coherent backscattering in lithium niobate whispering-gallery-mode resonators // *Opt. Lett.* — 2007. — Sep. — Vol. 32, no. 17. — Pp. 2574–2576. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-32-17-2574>.
125. Multiple-Rayleigh-scatterer-induced mode splitting in a high- Q whispering-gallery-mode microresonator / Xu Yi, Yun-Feng Xiao, Yong-Chun Liu et al. // *Phys. Rev. A.* — 2011. — Feb. — Vol. 83. — P. 023803. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.023803>.
126. Coherent suppression of backscattering in optical microresonators / Andreas Ø. Svela, Jonathan M. Silver, Leonardo Del Bino et al. // *Light: Science & Applications.* — 2020. — Dec. — Vol. 9, no. 1. — P. 204. — URL: <https://doi.org/10.1038/s41377-020-00440-2>.
127. High spectral purity Kerr frequency comb radio frequency photonic oscillator / W. Liang, D. Eliyahu, V. S. Ilchenko et al. // *Nat. Commun.* — 2015. — Vol. 6. — P. 7957.
128. Photonic crystal slot waveguide absorption spectrometer for on-chip near-infrared spectroscopy of xylene in water / Wei-Cheng Lai, Swapnajit Chakravarty, Xiaolong Wang et al. // *Applied Physics Letters.* — 2011. — Vol. 98, no. 2. — P. 023304.
129. Refractometric Sensors for Lab-on-a-Chip Based on Optical Ring Resonators / I. M. White, H. Zhu, J. D. Suter et al. // *IEEE Sensors Journal.* — 2007. — Vol. 7, no. 1. — Pp. 28–35.

130. Ultra-Narrow Line Tunable Semiconductor Lasers for Coherent LIDAR Applications / Elijah Dale, Wei Liang, Danny Eliyahu et al. // *Imaging and Applied Optics 2014*. — Optical Society of America, 2014. — P. JTU2C.3.
131. On-chip interference of single photons from an embedded quantum dot and an external laser / N. Prtljaga, C. Bentham, J. O'Hara et al. // *Applied Physics Letters*. — 2016. — Vol. 108, no. 25. — P. 251101.
132. An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10^{-18} level / B.J. Bloom, T.L. Nicholson, J.R. Williams et al. // *Nature*. — 2014. — Vol. 506. — Pp. 71–75.
133. Dissipative Kerr solitons in optical microresonators / Tobias J. Kippenberg, Alexander L. Gaeta, Michal Lipson, Michael L. Gorodetsky // *Science*. — 2018. — Vol. 361, no. 6402.
134. Micro-resonator soliton generated directly with a diode laser / N. Volet, X. Yi, Q.-F. Yang et al. // *Laser & Photonics Reviews*. — 2018. — Vol. 12, no. 5. — P. 1700307.
135. Agrawal G. Line narrowing in a single-mode injection laser due to external optical feedback // *IEEE Journ. Quant. El.* — 1984. — May. — Vol. 20, no. 5. — Pp. 468–471.
136. Methods for narrowing the emission line of an injection laser / E.M. Belenov, V. L. Velichanskii, A. S. Zibrov et al. // *Sov. Journ. of Quant. El.* — 1983. — Vol. 13, no. 6. — Pp. 792–798.
137. Oraevsky A. N, Yarovitsky A. V, Velichansky V. L. Frequency stabilisation of a diode laser by a whispering-gallery mode // *Quant. El.* — 2001. — Vol. 31, no. 10. — Pp. 897–903.
138. Smith P.W. Mode selection in lasers // *Proceedings of the IEEE*. — 1972. — 05. — Vol. 60. — Pp. 422 – 440.
139. Bogatov Alexandr P, Eliseev P G, Sverdlov B N. Anomalous interaction of spectral modes in a semiconductor laser // *Soviet Journal of Quantum Electronics*. — 1975. — Vol. 4, no. 10. — Pp. 1275–1276.

140. A shifted-excitation Raman difference spectroscopy (SERDS) evaluation strategy for the efficient isolation of Raman spectra from extreme fluorescence interference / M.T. Gebrekidan, C. Knipfer, F. Stelzle et al. // *Journal of Raman Spectroscopy*. — 2016. — Vol. 47, no. 2. — Pp. 198–209.
141. Dual-wavelength diode laser with electrically adjustable wavelength distance at 785 nm / Bernd Sumpf, Julia Kabitzke, Jörg Fricke et al. // *Opt. Lett.* — 2016. — Aug. — Vol. 41, no. 16. — Pp. 3694–3697.
142. *Diaz Rosemary, Chan Sze-Chun, Liu Jia-Ming*. Lidar detection using a dual-frequency source // *Opt. Lett.* — 2006. — Dec. — Vol. 31, no. 24. — Pp. 3600–3602.
143. Coherent laser radar with dual-frequency Doppler estimation and interferometric range detection / D. Onori, F. Scotti, F. Laghezza et al. // 2016 IEEE Radar Conference (RadarConf). — 2016. — Pp. 1–5.
144. Two-frequency lidar based on an ammonium laser / V.Yu. Anan'ev, B.I. Vasil'ev, A.N. Lobanov et al. // *Quantum Electronics*. — 2000. — Vol. 30, no. 6. — Pp. 535–539.
145. *Ninane N., Georges M. P.* Holographic interferometry using two-wavelength holography for the measurement of large deformations // *Appl. Opt.* — 1995. — Apr. — Vol. 34, no. 11. — Pp. 1923–1928.
146. New Two-Color Laser Concepts for THz Generation / C. S. Friedrich, C. Brenner, S. Hoffmann et al. // *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. — 2008. — March. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 270–276.
147. THz-dual-frequency $\text{Yb}^{3+}:\text{KGd}(\text{WO}_4)_2$ laser for continuous wave THz generation through photomixing / R Czarny, M Alouini, Christian Larat et al. // *Electronics Letters*. — 2004. — 08. — Vol. 40. — Pp. 942 – 943.
148. *Brenier A.* Tunable THz frequency difference from a diode-pumped dual-wavelength $\text{Yb}^{3+}:\text{KGd}(\text{WO}_4)_2$ laser with chirped volume Bragg gratings // *Laser Physics Letters*. — 2011. — Vol. 8, no. 7. — Pp. 520–524.

149. *Yamada Minoru, Suematsu Yasuharu.* Analysis of gain suppression in undoped injection lasers // *Journal of Applied Physics.* — 1981. — Vol. 52, no. 4. — Pp. 2653–2664.
150. Whispering-gallery-mode-resonator-based ultranarrow linewidth external-cavity semiconductor laser / W. Liang, V. S. Ilchenko, A. A. Savchenkov et al. // *Opt. Lett.* — 2010. — Vol. 35, no. 16. — Pp. 2822–2824.
151. *Domenico Gianni Di, Schilt Stéphane, Thomann Pierre.* Simple approach to the relation between laser frequency noise and laser line shape // *Appl. Opt.* — 2010. — Sep. — Vol. 49, no. 25. — Pp. 4801–4807.
152. *Olivero J.J., Longbothum R.L.* Empirical fits to the Voigt line width: A brief review // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* — 1977. — Vol. 17, no. 2. — Pp. 233 – 236.
153. *Riley W.J., Time Physics Laboratory (U.S.), Division Frequency.* Handbook of Frequency Stability Analysis. NIST special publication. — U.S. Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, 2008.
154. *Riehle Fritz.* Frequency Standards: Basics and Applications. — Wiley-VCH, 2005. — P. 526.
155. *Makdissi A., Vernotte F., Clercq E. D.* Stability variances: a filter approach // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control.* — 2010. — Vol. 57, no. 5. — Pp. 1011–1028.
156. *Hjelme D. R., Mickelson A. R., Beausoleil R. G.* Semiconductor laser stabilization by external optical feedback // *IEEE Journal of Quantum Electronics.* — 1991. — March. — Vol. 27, no. 3. — Pp. 352–372.
157. *Demchenko Yury A., Gorodetsky Michael L.* Analytical estimates of eigenfrequencies, dispersion, and field distribution in whispering gallery resonators // *J. Opt. Soc. Am. B.* — 2013. — Nov. — Vol. 30, no. 11. — Pp. 3056–3063.
158. Spatial multiplexing of soliton microcombs / Erwan Lucas, Grigori Lihachev, Romain Bouchand et al. // *Nat. Photon.* — 2018.

159. *Yamada Minoru*. Theoretical analysis of nonlinear optical phenomena taking into account the beating vibration of the electron density in semiconductor lasers // *Journal of Applied Physics*. — 1989. — Vol. 66, no. 1. — Pp. 81–89.
160. *Ahmed M., Yamada M.* Inducing single-mode oscillation in Fabry-Perot In-GaAsP lasers by applying external optical feedback // *IET Optoelectronics*. — 2010. — Vol. 4, no. 3. — Pp. 133–141.
161. *Lenstra Daan, Yousefi Mirvais*. Rate-equation model for multi-mode semiconductor lasers with spatial hole burning // *Opt. Express*. — 2014. — Apr. — Vol. 22, no. 7. — Pp. 8143–8149.
162. High-coherence diode laser with optical feedback via a microcavity with 'whispering gallery' modes / V. V. Vasiliev, V.L. Velichansky, M.L. Gorodetskii et al. // *Quantum Electronics*. — 1996. — Vol. 26(8). — Pp. 657–658.
163. Frequency comb assisted diode laser spectroscopy for measurement of microcavity dispersion / P. Del'Haye, O. Arcizet, M. L. Gorodetsky et al. // *Nature Photonics*. — 2009. — Sep. — Vol. 3, no. 9. — Pp. 529–533.
164. Comb-calibrated frequency-modulated continuous-wave ladar for absolute distance measurements / Esther Baumann, Fabrizio R. Giorgetta, Ian Coddington et al. // *Opt. Lett.* — 2013. — Jun. — Vol. 38, no. 12. — Pp. 2026–2028. — URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-38-12-2026>.

Список рисунков

- 1.1 Вверху: Схема затягивания частоты лазера на МШГ резонатор с помощью призмы связи. Внизу: Резонансные кривые лазера (слева) и МШГ(справа). A – амплитуда поля генерации лазера, ω_{LC} и κ_{LC} – частота и ширина линии моды резонатора лазера, κ_{do} – коэффициент связи выходного зеркала лазера, B – обратная отраженная волна, S_{LC} и S – площадь сечения лазерного пучка в апертуре лазера и на поверхности призмы, τ_s – время прохождения обратной волны, ψ – фаза затягивания, A^+ и A^- – амплитуды прямой и обратной волн внутри микрорезонатора, η – коэффициент связи микрорезонатора, ω_m и κ_m – частота и ширина линии мод микрорезонатора, ω – частота генерации. 20
- 1.2 Синие линии показывают перестроечные кривые для $\beta = 0.1$ (панель **a**) и $\beta = 10$ (панель **b**) в режиме затягивания ($\psi = 0$, $\eta\tilde{\kappa}_{do}/\kappa_m = 50$ и $\kappa_m\tau_s = 0.011$). Желтые линии показывают перестроечные кривые ($\zeta = \xi$) в режиме свободного лазера, красные пунктирные линии показывают наклон перестроечной кривой в оптимальной точке, а красные крестики показывают оптимальные точки $\zeta = \zeta_0$ (1.8). Все величины представлены в безразмерных единицах. 22
- 1.3 Коэффициент стабилизации K (панель **a**) и оптимальная отстройка ζ (панель **b**) для $\psi = 0$, $\kappa_0\tau_s = 0$, $\frac{\kappa_{do}}{\kappa_0} = 1000$. На панели **c** показан коэффициент стабилизации для $\kappa_0\tau_s = 0.4$ и тех же других параметров. Сплошная линия – численный максимум относительно η , пунктирная линия – (1.12) (точки вблизи $\mu = 1$ пропущены), пунктирная линия соответствует $\beta = 1$. Все величины построены в безразмерных единицах. 25

- 1.4 **а)** Предел коэффициента стабилизации при большом значении β (1.20) с (1.22) (оранжевая пунктирная линия) и его глобально максимальное значение (1.18) (темно-салатово-серая сплошная линия) для разного времени круговой задержки. **б)** Оптимальные параметры η (правая ось, сплошная линия) и β (левая ось, пунктирная линия) для различных режимов $\kappa_0\tau_s$. Параметры $\zeta = 0$ и $\psi = 0$ являются оптимальными во всех режимах $\kappa\tau_s$. Все величины построены в безразмерных единицах. 31
- 1.5 Коэффициент стабилизации K (панель **а**), оптимальная отстройка ζ_{opt} (панель **б**) и оптимальная ψ_{opt} (панель **с**) для $\kappa_0\tau_s = 0$, $\frac{\kappa_{\text{до}}}{\kappa_0} = 1000$. Сплошная линия - численный максимум относительно η , пунктирная линия - (1.12) (точки вблизи $\mu = 1$ опущены), пунктирная линия соответствует $\beta = \beta_{\text{cr}} \approx 0.68$. Все величины построены в безразмерных единицах. 33
- 1.6 Максимальный коэффициент стабилизации частоты в зависимости от параметра резонатора μ для различных режимов параметров затягивания. Линии соответствуют: **Синяя:** оптимальному состоянию $(\psi_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}})$; **Зеленый:** вторая ветвь фиксированной фазы $\psi = 0$ и оптимального (ζ_0, η_0) , (1.12); **Желтый:** фиксированная фаза $\psi = 0$ и оптимальная $(\zeta_0, \eta_{\text{opt}})$; **Красно-пунктирный:** критическая связь $\eta = 0.5$ и оптимальная (ψ, ζ) ; **Фиолетовый:** $\kappa_0\tau_s = 0.4$ для оптимальных параметров $(\psi_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}})$; **Коричневая:** $\kappa_0\tau_s = 0.4$ для фиксированной фазы $\psi = 0$ и (ζ_0, η_0) . Все величины построены в безразмерных единицах. 44

- 1.7 а) Оптимальный фазовый сдвиг между лазером и резонатором; б) оптимальная настройка частоты излучения лазера; в) оптимальная эффективность связи. Линии соответствуют:
- Синяя линия:** оптимальному состоянию $(\psi_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}})$;
- Зеленая линия:** (вторая ветвь) построена при фиксированной фазы $\psi = 0$ и оптимальном значении параметров (ζ_0, η_0) , (1.12);
- Желтая линия:** построена при фиксированной фазы $\psi = 0$ и оптимальном значении параметров (ζ_0, η_0) ;
- Красно-пунктирная линия:** построена при критической связи $\eta = 0.5$ и оптимальном значении параметров (ψ, ζ) ;
- Фиолетовая линия:** построена при $\kappa_0\tau_s = 0.4$ для оптимальных параметров $(\psi_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}})$; **Коричневая линия:** построена при $\kappa_0\tau_s = 0.4$ для фиксированной фазы $\psi = 0$ и (ζ_0, η_0) . Все величины представлены в безразмерных единицах. 45
- 1.8 Численно получены резонансные кривые пропускания (1.25) для параметров, взятых из [24]. Параметр $\zeta(\xi)$ был оценен с помощью (1.3) (пунктирные линии), и соответствующие кривые LI были оценены для возрастающей частоты (сплошные линии). Точки на кривых пропускания отмечают оптимальные значения отстройки. Все величины построены в безразмерных единицах. 46
- 1.9 а) Параметр Σ для оптимальных ζ_0, η_0 и фиксированной фазы $\psi = 0$; б) Параметр Σ для оптимальных $\psi_{\text{opt}}, \zeta_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}}$. Сплошная зеленая линия обозначает оптимальную зависимость $\eta(\mu)$, а пунктирная зеленая линия - (1.12). Все величины представлены в безразмерных единицах. 47
- 1.10 Сравнение точной численной и приближенной границы оптимального выбора параметров нулевой отстройки. Сплошная синяя линия - численное решение, красная пунктирная линия - аппроксимация (1.16), а сплошная зеленая линия обозначает глобальный максимум β_{max} (1.18). Пороговое значение (1.15) $\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$ показано черной пунктирной линией. Все величины представлены в безразмерных единицах 48

- 2.1 Схема затягивания с дополнительным призмой и зеркалом. **Амплитуды в точке связи входной призмы:** B_{in} - амплитуда накачки; B_t и B_r - амплитуды, прохождения и отражения; A_+ и A_- - амплитуды прямой и обратной волны в микрорезонаторе. **Амплитуды в точке связи выходной призмы:** C_m - амплитуда, отраженная от зеркала обратно в выходную призму; C_{out} - выходная амплитуда. T и T' - амплитудный коэффициент прохождения входной и выходной призмы, соответственно. 50
- 2.2 Резонансное расщепление отражения Γ , прохождения T_{out} и C_{out} представлены в **а, б** и **с**, соответственно. Синие линии соответствуют классической схеме $\delta_m = 0$ и $\frac{\gamma}{\delta_0 + \delta_c} = 2$. Оранжевые линии соответствуют малому обратному рассеянию $\frac{\delta_m}{\delta_0 + \delta_c} = 2$ и $\frac{\gamma}{\delta_0 + \delta_c} = 0$. Зеленые линии соответствуют общему случаю $\frac{\delta_m}{\delta_0 + \delta_c} = 2$ и $\frac{\gamma}{\delta_0 + \delta_c} = 2$ 52
- 2.3 Сравнение коэффициента стабилизации (**Сплошные линии – левая ось у**) и коэффициент отражения $|\Gamma|$ (**Пунктирные линии – правая ось у**) для случая пренебрежимо малого рэлеевского рассеяния (красная линия) и для классической схемы затягивания (синяя линия). Остальные параметры выбраны оптимальными (см. рис.2.6). 55
- 2.4 Сравнение T_{out} (**Сплошные линии – левая ось у**) и потерь в микрорезонаторе (**Пунктирные линии – правая ось у**) для схемы с зеркалом при пренебрежимо малом значении рэлеевского рассеяния (красная линия) и для классической схемы затягивания (синяя линия). Параметры схем выбраны оптимальными (см. рис.2.6). 56

- 2.5 Сравнение нормированных амплитуд прямой волны $\frac{A_+}{A_{0+}}$ (сплошные линии – левая ось y) и обратной волны $\frac{A_-}{A_{0-}}$ (пунктирные линии – правая ось y) для случая пренебрежимо малого рэлеевского рассеяния (красная линия) и для классической схемы затягивания (синяя линия). Остальные параметры выбраны оптимальными (см. рис.2.6), $A_{0\pm}$ – амплитуды A_{\pm} при $\frac{\gamma}{\delta_0} = 1.16$ и $\delta_m = 0$, что соответствует оптимуму классической схемы 67
- 2.6 Оптимальные значения δ_c для случая малого рассеяния $\gamma = 0$ (синяя линия) и для классической схемы затягивания $\delta_m = 0$ (красная линия). Оптимальными параметрами для случая малого рассеяния являются $\Delta\omega = 0$ и $\omega\tau_s = \arctan(\alpha) + \frac{3\pi}{2}$ и $\tilde{R} = 1$. Для классической схемы затягивания при $\gamma > \delta_0 + \delta_c$ отстройка и фаза имеют нетривиальные зависимости [A2] 68
- 2.7 Карта обратного отражения $|\Gamma|$ (см. уравнение 2.26). Темно-серая линия соответствует $|\Gamma| = 0.1$ 69
- 2.8 Карта коэффициента стабилизации K (см. уравнение 2.10). Темно-серая линия соответствует $|\Gamma| = 0.1$. Фиолетовая и зеленая линии соответствуют $\arg \max(K) \Big|_{|\Gamma| \ll 1}$ (см. уравнение 2.5). Желтая линия соответствует $\arg \max |C_{out}|$ (см. уравнение 2.42). 70
- 3.1 Экспериментальная установка. Диодный лазер на 1535 нм (многочастотный); ФД – фотодетектор; ЭАС – электрический анализатор спектра; ОАС – оптический анализатор спектра; ОСЦ – осциллограф; **б**: фотография микрорезонатора с призмой. 74
- 3.2 **а**: Экспериментальный (синяя линия) и численно рассчитанный (красная линия) спектр излучения свободного многочастотного диодного лазера [уравнение (3.6)–уравнение (3.8)]; **б**: Экспериментальный (синяя линия) и численно рассчитанный (красная линия) спектр излучения затянутого многочастотного диодного лазера [уравнение (3.6), уравнение (3.8), уравнение (3.15)]. Параметры модели приведены в таблице 2.с: Спектр частотной гребенки в режиме затягивания [A5]. 76

- 3.3 **а:** Сигнал биения (около 7,5 ГГц) затянутого лазера с эталонным лазером NKT Koheras Adjustik (красная линия) и аппроксимация Voigt этого сигнала (черная линия). Полоса разрешения ESA 20 кГц, время развертки 2.4 мс, без усреднения. Время развертки было оптимально выбрано для минимизации дрейфа частоты и потерь низкочастотного шума [151]. **б:** Отклонения Хадамарда и Аллана разности частот двух лазеров, затянутых на разные моды (частота биений 2.8 ГГц) в одном микрорезонаторе и аппроксимация частотного фликер шума $\propto \tau^0$ (синяя линия) и $\propto \tau^1$ аппроксимация (красная линия), что соответствует $\propto f^{-3}$ частотному шуму. 77
- 3.4 Спектр излучения многомодового режима затягивания частоты лазера (синий - эксперимент, оранжевый - модель): **а:** двухчастотный режим; **а:** четырехчастотный режим; **а:** шестичастотный режим. Параметры модели представлены в таблице 2. 88
- 3.5 **а:** Экспериментально полученные спектры излучения затянутого лазера при различных уровнях обратной связи (цветные сплошные линии) с численно рассчитанными огибающими (черные линии) для $\Gamma_1 = 1 \times 10^{-2}$, $\Gamma_2 = 1.2 \times 10^{-2}$, $\Gamma_3 = 1.5 \times 10^{-2}$, соответственно. **б:** Численно рассчитанная зависимость концентрации энергии одной моды (η) от уровня обратной связи (синяя линия) и экспериментально полученные точки концентрации энергии (квадраты). Круг соответствует зеленому спектру на верхнем рисунке (а), а треугольник - свободно работающему лазеру [рис. 3.2(а)]. Параметры модели приведены в таблице 2. 89
- 4.1 Схема калибровки перестраиваемого лазера частотной гребенкой. Перестраиваемый лазер: тестируемый лазер с перестраиваемой частотой ν_T . Частотная гребенка - ν_N . ФД - фотодетектор; УПФ - узкополосный фильтр; ОСЦ - осциллограф 91
- 4.2 Огибающая гетеродинного сигнала лазера и частотной гребенки с различным уровнем фазового шума. 92

- 4.3 Распределение центра масс калибровочного сигнала с различной полосой пропускания фильтра (слева); распределение максимального значения калибровочного сигнала с различной полосой пропускания фильтра (справа). 93
- 4.4 Девиация ошибки калибровки при фиксированном значении скорости перестройки частоты лазера $\nu = 3 \times 10^{11}$ Гц/с и частотного шума $h_0 = 10^4$ Гц, $h_1 = 3 \times 10^9$ Гц². Оранжевая линия соответствует методу центра масс, а пурпурная линия - методу максимального значения 94
- 4.5 Синяя линия - девиация ошибки калибровки для фиксированного значения скорости развертки частоты $\nu = 3 \times 10^{11}$ Гц/с и белого частотного шума $h_0 = 10^4$ Гц. Оранжевая линия аппроксимация $\sqrt{h_0 B}$ 94

Список таблиц

- 1 Определение наиболее важных физических параметров, описывающих эффект затягивания частоты лазера, и их типичные значения. Верхняя часть таблицы включает безразмерные параметры модели. Нижняя часть таблицы содержит размерные параметры для облегчения сравнения с экспериментальными значениями 23

- 2 Параметры, используемые в модели. Несколько параметров были получены путем аппроксимации экспериментального спектра [см. рис.3.4(b)] к расчетному [Ур.3.6, 3.8 и 3.15](помечены как "апп."). Параметры, помеченные как "док. были взяты из документации лазера. Параметры, известные в литературе, приведены для сравнения с экспериментально посчитанными параметрами вместе с соответствующими ссылками. 86