

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Иванов Андрей Александрович

Ковариантные непрерывные функторы в категориях $\mathbf{Com}^p$ и $\mathbf{P}$

1.1.3. Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2025

Диссертация подготовлена на кафедре общей топологии и геометрии механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научные руководители – **Комбаров Анатолий Петрович**, доктор физико-математических наук, доцент;
Садовничий Юрий Викторович, доктор физико-математических наук, доцент.

Официальные оппоненты – **Геворкян Павел Самвелович**, доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет, Институт математики и информатики, кафедра математического анализа имени академика П.С. Новикова, заведующий кафедрой.
Фоменко Татьяна Николаевна, доктор физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра общей математики, профессор.
Щепин Евгений Витальевич, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, отдел геометрии и топологии, главный научный сотрудник.

Защита диссертации состоится «7» ноября 2025 г. в 17 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/3560>.

Автореферат разослан «__» октября 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук

В.А. Кибкало

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её разработанности

Диссертационная работа относится к исследованиям в области общей топологии и теории категорий. В работе исследуются ковариантные функторы в топологических категориях. Несмотря на то, что само понятие категории появилось только в 1945 году в работе¹ С. Эйленберга и С. Маклейна, первыми работами, относящимися к этой тематике, можно считать статьи Л. Вьеториса² и Т. Важевского³ 1923 года, посвящённые пространству непустых замкнутых подмножеств в топологическом пространстве X ($\exp X$). Далее отдельные свойства этого пространства изучались в работах различных топологов, а отправной точкой систематического исследования и применения можно считать работу⁴ Майкла 1951 года. После того, как в 1981 году Е.В. Щепин ввёл⁵ понятие нормального функтора, действующего в категории $\mathbf{Comp}$ компактов и их непрерывных отображений, операция гиперпространства $\exp(\cdot)$ стала одним из первых нетривиальных примеров подобного функтора, и при дальнейшем развитии теории нормальных функторов неоднократно применялась, в том числе и в диссертационной работе.

Одним из применений этой теории стали обобщения классической теоремы Катетова, доказанной⁶ в 1948 году. Согласно этой теореме, если

¹*Eilenberg S., Mac Lane S.* General Theory of Natural Equivalences // Transactions of the American Mathematical Society. — 1945. — vol. 58. — pp. 231–294.

²*Vietoris L.* Kontinua zweiter Ordnung // Monatshefte für Mathematik und Physik. — 1923. — vol. 33. — pp. 49–62.

³*Ważewski T.* Sur un continu singulier // Fundamenta Mathematicae. — 1923. — vol. 4. — pp. 214–245.

⁴*Michael E.* Topologies on spaces of subsets // Transactions of the American Mathematical Society. — 1951. — vol. 71. — pp. 152–182.

⁵*Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи математических наук. — 1981. — Т. 36, № 3. — С. 3–62.

⁶*Katětov M.* Complete normality of Cartesian products // Fundamenta Mathematicae. — 1948. — vol. 35. — pp. 271–274.

куб компакта наследственно нормален, то сам компакт метризуем. Естественным образом возникающий вопрос о том, верно ли это утверждение при замене куба компакта на его квадрат, был решён в следующих работах: во-первых, в 1977 году П. Никош построил⁷ отрицательный пример в предположении аксиомы Мартина и отрицании континуум-гипотезы, в 1993 году он вместе с Г. Грюнхаге построил⁸ другой отрицательный пример, но уже в предположении континуум-гипотезы, и наконец, в 2002 году П. Ларсон и С. Тодорчевич построили⁹ модель теории множеств, в которой из наследственной нормальности квадрата компакта следует метризуемость этого компакта. Таким образом, вопрос о том, верна ли теорема Катетова при замене куба на квадрат, также известный как проблема Катетова, не зависит от аксиом ZFC.

Другим путём по обобщению теоремы Катетова, которым, в частности, посвящена первая глава работы, является замена куба на целый класс возможных пространств, образованных из искомого компакта, а также изменение требования наследственной нормальности на иные. Последнее происходит, в частности, в работе¹⁰ Ф. Зенора 1971 года: он доказал, что из наследственной счётной паракомпактности куба следует метризуемость компакта. Ключевой же для этой темы является работа¹¹ В.В. Федорчука 1989 года, в которой он применил понятие нормального функтора для следующего обобщения теоремы Катетова: если для нормального функтора $\mathcal{F}$

⁷ *Nyikos P.* A compact nonmetrizable space P such that P^2 is completely normal // *Topology Proceedings*. — 1977. — vol. 2. — pp. 359–364.

⁸ *Gruenhage G., Nyikos P.* Normality in X^2 for compact X // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1993. — vol. 340. — pp. 563–586.

⁹ *Larson pp., Todorčević S.* Katětov's problem // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 2002. — vol. 354. — pp. 1783–1791.

¹⁰ *Zenor P.* Countable paracompactness in product spaces // *Proceedings of the American Mathematical Society*. — 1971. — vol. 30, No. 1. — pp. 199–201.

¹¹ *Федорчук В. В.* К теореме Катетова о кубе // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. — 1989. — № 4. — С. 93–96.

степени ≥ 3 в категории Comp компактов и их непрерывных отображений пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормально, то компакт X метризуем. В 2000 году Т.Ф. Жураев доказал¹² аналог теоремы Федорчука, в котором он заменил наследственную нормальность на наследственную счётную паракompактность. В 2017 году А.П. Комбаров получил результат, обобщающий одновременно результаты Жураева и Федорчука, используя предложенное¹³ в 1984 году П. Никошем понятие паранормального пространства, в частности в работе¹⁴ А.П. Комбарова было доказано следующее: если для нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 в категории Comp пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно паранормально, то компакт X метризуем.

Также, вместо компактов можно рассматривать другой класс топологических пространств. В 1965 году А.В. Архангельский ввёл¹⁵ понятие перистого пространства, позже названного p -пространством. Используя его, М.А. Добрынина в 2011 году рассматривает¹⁶ категорию $\mathcal{P}$ паракompактных p -пространств и их совершенных отображений, вводит понятие нормального функтора в этой категории и доказывает следующий аналог теоремы Федорчука: если для нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 в категории $\mathcal{P}$ пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормально, то паракompактное p -пространство X метризуемо. В 2015 году А.П. Комбаров доказал¹⁷ аналог

¹² Жураев Т. Ф. Нормальные функторы и метризуемость бикompактов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2000. — № 4. — С. 8–11.

¹³ Nyikos P. Problem section: Problem B // Topology Proceedings. — 1984 — vol. 9. — pp. 367.

¹⁴ Комбаров А. П. Об одной слабой форме нормальности // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2017. — № 5. — С. 48–51.

¹⁵ Архангельский А. В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикompактные пространства // Математический сборник. — 1965. — Т. 67. — С. 55–85.

¹⁶ Добрынина М. А. К теореме Федорчука о нормальном функторе // Математические заметки. — 2011. — Т. 90, № 4. — С. 630–633.

¹⁷ Комбаров А. П. Счетная паракompактность и нормальные функторы // Мате-

данной теоремы, заменив требование наследственной нормальности $\mathcal{F}(X)$ на наследственную счётную паракомпактность.

Как оказалось, требование к нормальности функтора $\mathcal{F}$ является избыточным в теореме Федорчука. При развитии теории нормальных функторов возникло понятие полунормального функтора в категории Comp , которое получается, если отказаться от части требований, налагаемых на нормальные функторы. Для них построено¹⁸ особое комбинаторное условие (*) (см. страницу 12), которому, в частности, удовлетворяют все нормальные функторы степени ≥ 3 , и доказана теорема, которая гласит, что если для полунормального функтора $\mathcal{F}$ в категории Comp компактов и их непрерывных отображений его спектр имеет вид $sp\mathcal{F} = \{1, m, n, \dots\}$, $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию (*) и пространство $\mathcal{F}_n(X) \setminus X$ наследственно нормально, то компакт X метризуем. В частности, условиям этой теоремы удовлетворяет функтор суперрасширения $\lambda(\cdot)$, впервые рассмотренный¹⁹ Дж. де Гроотом в 1969 году, и в последствии встречающийся в работах многих топологов.

В 2017 году вводится²⁰ понятие порядка метрической аппроксимации, позднее известной как размерность квантования. В данной работе описывается конструкция, позволяющая для метризуемого, полунормального, эпиморфного и сохраняющего вес функтора $\mathcal{F}$ и метрического компакта X определить размерность элементов пространства $\mathcal{F}(X)$. В последующих работах были отмечены взаимосвязи этого понятия с уже известными понятиями. В частности, для функтора $\exp(\cdot)$ это понятие совпадает с ёмкостной математические заметки. — 2015. — Т. 98, № 5. — С. 794–796.

¹⁸ *Иванов А. В.* Теорема Катетова о кубе и полунормальные функторы // Ученые записки Петрозаводского государственного Университета. — 2012. — № 2. — С. 104–108.

¹⁹ *de Groot. J.* Superextensions and supercompactness // Proceedings of the I International Symposium «Extension Theory of Topological Structures and its Applications», VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. — 1969. — pp. 89–90.

²⁰ *Ivanov A. V.* On metric order in spaces of the form $\mathcal{F}(X)$ // Topology and its Applications. — 2017. — vol. 221. — pp. 107–113.

размерностью замкнутых подмножеств X , которая была подробно изучена в монографии²¹ Я. Б. Песина 1997 года. В 2019 году доказан²² ряд утверждений, касающихся возможных значений размерности квантования для функтора суперрасширения. В частности доказано, что верхняя ёмкостная размерность достигает всех промежуточных значений от нуля до верхней ёмкостной размерности объемлющего компакта X на каких-то его подмножествах. Также верхняя размерность квантования для функтора суперрасширения может принимать и принимает на каких-то максимальных сцепленных системах из λX все значения из этого же отрезка. В 2023 году было доказано²³, что аналогичное утверждение неверно для нижней ёмкостной размерности, в частности, существует компакт X , нижняя ёмкостная размерность которого равна 1, в то время как нижняя ёмкостная размерность любого его собственного непустого замкнутого подмножества равна 0.

Цели и задачи диссертации

Целью диссертационной работы является дальнейшее обобщение упомянутых выше теорем Федорчука, Добрыниной и Комбарова с помощью функторов в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p -пространств и их совершенных отображений. Также целью работы является исследование нижней размерности квантования для функтора суперрасширения.

В диссертационной работе решаются следующие задачи:

- Получить обобщения упомянутых выше теоремы Добрыниной и теоремы Комбарова, используя понятие нормального функтора в кате-

²¹ *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2002. — 404 с.

²² *Иванов А. В., Фомкина О. В.* О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Труды Карельского научного центра РАН. — 2019. — № 7. — С. 5–14.

²³ *Иванов А. В.* О промежуточных значениях емкостных размерностей // Сибирский математический журнал. — 2023. — Т. 64, № 3. — С. 540–545.

гории $\mathcal{P}$ и паранормального пространства. Определить понятие полунормального функтора в категории $\mathcal{P}$ и получить с его помощью дальнейшее обобщение этих теорем.

- Доказать, что для любого метрического компакта X нижняя размерность квантования для функтора суперрасширения принимает все возможные значения от нуля до нижней ёмкостной размерности X на каких-то максимальных сцепленных системах, или же доказать обратное, построив контрпример.

Основные результаты диссертации

- Теорема, обобщающая теоремы Добрыниной и Комбарова, использующая понятия паранормальности и нормального функтора в категории $\mathcal{P}$.
- Теорема, являющаяся дальнейшим обобщением ряда известных ранее результатов, посвящённых обобщениям теоремы Катетова при помощи ковариантных функторов, и использующая определение полунормального функтора в категории $\mathcal{P}$, введённое автором.
- Описание всех возможных промежуточных значений для нижней размерности квантования для функтора суперрасширения.

Положения, выносимые на защиту

- Паракомпактное p -пространство X с наследственно паранормальным пространством $\mathcal{F}(X)$ для нормального функтора $\mathcal{F}$ в категории $\mathcal{P}$ степени ≥ 3 является метризуемым.
- Если куб паракомпактного p -пространства X наследственно паранормален, то X – метризуемое пространство.
- Паракомпактное p -пространство X с наследственно паранормальным пространством $\mathcal{F}_n(X) \setminus X$ для полунормального функтора $\mathcal{F}$ в кате-

гории $\mathcal{P}$ со степенным спектром $sp(\mathcal{F}) = \{1, m, n, \dots\}$ и удовлетворяющего условию (*) является метризуемым.

- Для каждого метрического компакта X нижняя размерность квантования для функтора суперрасширения принимает все возможные значения от нуля до нижней ёмкостной размерности X на каких-то максимальных сцепленных системах.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Ключевые из них:

- Теорема о метризуемости паракомпактного p -пространства X с nasledstvenno паранормальным пространством $\mathcal{F}_n(X) \setminus X$ для полунормального функтора $\mathcal{F}$ в категории $\mathcal{P}$ со степенным спектром $sp(\mathcal{F}) = \{1, m, n, \dots\}$ и удовлетворяющий условию (*).
- Теорема о том, что для любого неотрицательного числа b , не превосходящего нижнюю ёмкостную размерность метрического компакта (X, ρ) , существует максимальная сцепленная система, нижняя размерность квантования которой равна b , а её носитель совпадает с X .

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер, её результаты относятся к таким разделам математики, как общая топология, теория категорий и могут быть использованы для дальнейшего развития этих и смежных областей.

Степень достоверности

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Методы исследования

В работе используются методы теории множеств, общей топологии, математического анализа и теории категорий.

Апробация и публикации

Основные результаты диссертационной работы изложены в 3 печатных работах по теме диссертации (общим объёмом 0,9375 п.л.), все из которых опубликованы в научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI и рекомендованных для защиты из списка МГУ (см. работы [1]–[3]).

Также результаты этой работы докладывались на научных семинарах и следующих конференциях:

- Кафедральный семинар им. П.С. Александрова (неоднократно, Москва, МГУ, 2021 г., 2022 г., 2023 г., 2024 г., 2025 г.)
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов—2023» (Москва, МГУ, 10.04.2023—21.04.2023)
- Научная конференция «Топология и её приложения», посвящённая памяти Е.Г. Пыткеева (международная конференция, Екатеринбург, Институт математики и механики УрО РАН, 07.02.2024—09.02.2024)

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации составляет 77 страниц. Библиография включает 35 наименований.

Краткое содержание работы

Введение содержит краткую историю вопросов, актуальность работы, цели, методы, терминологию и основные результаты.

Первая глава посвящена обобщениям упомянутых выше теоремы Добрыниной и теоремы Комбарова для функторов в категории Comp компактов и их непрерывных отображений и в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p -пространств и их совершенных отображений. Перечислим тут основные определения и результаты этой главы.

В параграфе 1.1 рассматриваются две топологические категории и описывается несколько примеров ковариантных функторов, действующих в этих категориях. В частности, упоминаются функторы гиперпространства $\text{exp}(\cdot)$, k -ой гиперсимметрической степени $\text{exp}_k(\cdot)$ и функтор суперрасширения $\lambda(\cdot)$.

Определение 1.1.1. Категория Comp — это категория, объектами которой являются компакты, а морфизмами — непрерывные отображения между компактами.

Определение 1.1.2. Для топологического пространства X его гиперпространством $\text{exp}(X)$ называется множество всех его непустых замкнутых подмножеств, снабженное топологией Вьеториса. База данной топологии состоит из множеств

$$O < U_1, \dots, U_n > = \{F \in \text{exp}(X) : F \subset U_1 \cup \dots \cup U_n, F \cap U_1 \neq \emptyset, \dots, F \cap U_n \neq \emptyset\},$$

где $U_1, \dots, U_n$ — открытые подмножества в X .

Определение 1.1.3. Пусть X — компакт. Тогда k -ой гиперсимметрической степенью пространства X называется множество $\text{exp}_k(X) = \{F \in \text{exp}(X) : |F| \leq k\}$, наделённое топологией, индуцированной топологией Вьеториса.

Определение 1.1.4. Пусть X — топологическое пространство. Система ξ замкнутых подмножеств X называется сцепленной, если любые два её элемента имеют непустое пересечение.

Определение 1.1.5. Если X — топологическое пространство, то через λX

обозначается множество всех максимальных по включению сцепленных систем (то есть не содержащихся в других сцепленных системах). Далее такие системы будем называть максимальными сцепленными системами.

Определение 1.1.6. Множество λX с топологией, заданной при помощи следующей предбазы:

$$O(U) = \{\xi \in \lambda X : \text{существует такое } F \in \xi, \text{ что } F \subset U\},$$

где U — открытое подмножество X , называется суперрасширением топологического пространства X .

Определение 1.1.7. Топологическое пространство X называется r -пространством (или же перистым пространством), если существует последовательность $\mathcal{U}_n$ семейств открытых подмножеств стоун-чеховской компактификации βX такая, что каждая система $\mathcal{U}_n$ покрывает X и для каждого $x \in X$ выполняется включение $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} st(x, \mathcal{U}_n) \subset X$, где $st(x, \mathcal{U}_n) = \bigcup \{U \in \mathcal{U}_n : x \in U\}$.

Определение 1.1.8. Категория $\mathcal{P}$ — это категория, объектами которой являются паракомпактные p -пространства, а морфизмами — совершенные отображения между паракомпактными p -пространствами.

В параграфе 1.2 рассматриваются нормальные функторы в категориях Comp и $\mathcal{P}$, а также ряд сопутствующих понятий.^{24,25}

Определение 1.2.5. Ковариантный функтор $\mathcal{F}$, действующий в категории Comp компактов и их непрерывных отображений называется нормальным, если он непрерывен, мономорфен, эпиморфен, сохраняет точку, пустое множество, пересечения, прообразы и вес.

²⁴ Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи математических наук. — 1981. — Т. 36, № 3. — С. 3–62.

²⁵ Добрынина М. А. К теореме Федорчука о нормальном функторе // Математические заметки. — 2011. — Т. 90, № 4. — С. 630–633.

Определение 1.2.6. Пусть $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор в категории $\mathbf{Comp}$, пространство X — компакт, точка $a \in \mathcal{F}(X)$. Тогда подмножество компакта X , задаваемое формулой

$$\text{supp}(a) = \bigcap \{D : D \text{ — замкнутое подмножество } X, a \in \mathcal{F}(D)\},$$

называется носителем точки a .

Определение 1.2.8. Если $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор и n — натуральное число такие, что для любого компакта X и для любой точки $a \in \mathcal{F}(X)$ верно неравенство $|\text{supp}(a)| \leq n$, то говорят, что степень функтора $\mathcal{F}$ не превосходит n ($\deg \mathcal{F} \leq n$). Если для некоторого натурального n верно утверждение $\deg \mathcal{F} \leq n$, но не верно $\deg \mathcal{F} \leq n - 1$, то говорят, что степень $\mathcal{F}$ равна n ($\deg \mathcal{F} = n$).

Пусть n — натуральное число. Тогда для мономорфного функтора $\mathcal{F}$ и компакта X имеет место следующее обозначение:

$$\mathcal{F}_n(X) = \{a \in \mathcal{F}(X) : |\text{supp}(a)| \leq n\}.$$

Определение 1.2.9. Пусть X — компакт, $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{F}$ — мономорфный функтор в категории $\mathbf{Comp}$. Рассмотрим отображение $\pi_n : X^n \times \mathcal{F}(n) \rightarrow \mathcal{F}(X)$, где n обозначает как натуральное число, так и n -точечное дискретное пространство, а само отображение π_n задаётся формулой $\pi_n(\xi, a) = \mathcal{F}(\xi)(a)$, в которой точка $\xi \in X^n$ в правой части равенства отождествляется с отображением $\xi : n \rightarrow X$. Тогда π_n называется отображением Басманова²⁶.

Для мономорфных функторов в категории $\mathcal{P}$ аналогичным образом определяется понятие носителя supp , понятие $\mathcal{F}_n(X)$ и отображение Басманова π_n .

²⁶ Басманов В. Н. Ковариантные функторы, ретракты и размерность // Доклады Академии наук СССР. — 1983. — Т. 271, № 5. — С. 1033–1036.

Определение 1.2.10. Ковариантный функтор $\mathcal{F}$ в категории $\mathcal{P}$ называется нормальным, если он непрерывен, мономорфен, эпиморфен, сохраняет точку, пустое множество, пересечения, прообразы и вес, а также обладает непрерывным отображением Басманова $\pi_n : X^n \times \mathcal{F}(n) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ для любого натурального n и любого паракомпактного p -пространства X .

В параграфе 1.3 подробно описываются упомянутые выше результаты В.В. Федорчука, Т.Ф. Жураева, А.П. Комбарова и М.А. Добрыниной по обобщению теорем Катетова и Зенора при помощи нормальных функторов в категориях $\mathbf{Comp}$ и $\mathcal{P}$, а также понятие паранормального (по Никошу²⁷) пространства.

Определение 1.3.5. Топологическое пространство X называется паранормальным (в смысле Никоша), если для любой счётной дискретной системы замкнутых подмножеств $\{F_n : n < \omega\}$ найдется локально конечная система открытых множеств $\{U_n : n < \omega\}$ такая, что $F_n \subset U_n$, и $F_m \cap U_n \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $F_m = F_n$.

Также в этом параграфе автором работы сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 1.3.8. Пусть X — паракомпактное p -пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор степени ≥ 3 , действующий в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p -пространств и их совершенных отображений. Тогда если пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно паранормально, то X — метризуемое пространство.

Для её доказательства в этом же параграфе доказываются следующие предложения.

²⁷ Nyikos P. Problem section: Problem B // Topology Proceedings. — 1984 — vol. 9. — pp. 367.

Предложение 1.3.11. Пусть X — паракомпактное p -пространство с единственной неизолированной точкой x_0 , причём $\chi(x_0, X) \geq \omega_1$. Тогда гиперсимметрическая степень $\text{exr}_3 X$ не является наследственно паранормальным пространством.

Предложение 1.3.13. Пусть X — паракомпактное p -пространство, причём его гиперсимметрическая степень $\text{exr}_3(X)$ наследственно паранормальна. Тогда пространство X метризуемо.

В параграфе 1.4 рассматриваются полунормальные функторы в категории Comp и ряд сопутствующих понятий, а также автором вводится понятие полунормального функтора в категории $\mathcal{P}$ и проверяется несколько простых его свойств в рамках предложений 1.4.6-1.4.9.

Определение 1.4.1. Функтор $\mathcal{F}$, действующий в категории Comp компактов и их непрерывных отображений называется полунормальным²⁸, если он непрерывен, мономорфен, сохраняет пересечения, точку и пустое множество.

Для всех натуральных n имеет место следующее обозначение:

$$\mathcal{F}_{nn}(X) = \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_{n-1}(X),$$

где за $\mathcal{F}_0(X)$ принимается пустое множество.

Определение 1.4.2. Степенным спектром полунормального функтора $\mathcal{F}$ называется множество

$$sp(\mathcal{F}) = \{k : k \in \mathbb{N}, \mathcal{F}_{kk}(k) \neq \emptyset\}.$$

Определение 1.4.4. Будем называть функтор $\mathcal{F}$, действующий в категории $\mathcal{P}$, полунормальным, если он непрерывен, мономорфен, сохраняет пере-

²⁸ Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 336 с.

сечения, точку и пустое множество, а также обладает непрерывным отображением Басманова $\pi_n : X^n \times \mathcal{F}(n) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ для любого натурального n и любого паракомпактного p -пространства X .

Пусть $sp(\mathcal{F}) = \{1, m, n, \dots\}$. Построим отображение $\varphi_{nm} : n \longrightarrow m$ по формуле $\varphi_{nm}(i) = i$ при $i < m$, $\varphi(i) = m - 1$ при $i \geq m$. Будем говорить, что $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию (*), если

$$\mathcal{F}(\varphi_{nm})(\mathcal{F}_{nn}(n)) \cap \mathcal{F}_{mm}(m) \neq \emptyset.$$

В параграфе 1.5 формулируется и доказывается основной результат этой главы — теорема, обобщающую теорему Добрыниной и теорему Комбарова при помощи понятия полунормального функтора в категории $\mathcal{P}$ и понятия наследственной паранормальности.

Теорема 1.5.1. *Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p -пространств и их совершенных отображений со степенным спектром $sp(\mathcal{F}) = \{1, m, n, \dots\}$ и удовлетворяющий условию (*). Если для паракомпактного p -пространства X пространство $\mathcal{F}_n(X) \setminus X$ наследственно паранормально, то пространство X метризуемо.*

Определение 1.5.3. Пусть X — топологическое пространство, а n — натуральное число. Обобщённой диагональю Δ_n пространства X называется подмножество пространства X^n , состоящее из точек, у которых хотя бы две координаты совпадают.

При доказательстве теоремы 1.5.1 доказывается следующее предложение.

Предложение 1.5.4. *Пусть X — паракомпактное p -пространство, причём Δ_n — G_δ -множество в X^n . Тогда X метризуемо.*

Также в этом параграфе разобрано предложение, показывающее, что теорема 1.5.1 обобщает некоторые ранее известные результаты.

Предложение 1.5.2. *Нормальный в категории $\mathcal{P}$ функтор $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 обладает степенным спектром $sp(\mathcal{F}) = \{1, t, n, \dots\}$ и удовлетворяет условию (*).*

Вторая глава работы посвящена понятию размерности квантования. Рассмотрим основные определения и результаты.

В параграфе 2.1 рассматривается понятие метризуемого функтора в категории Comr , а также разобраны два примера таких функторов: функтор гиперпространства $\text{exp}(\cdot)$ и функтор суперрасширения $\lambda(\cdot)$.

Определение 2.1.1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда следующая точная верхняя грань

$$\text{diam}(X) = \sup_{x, y \in X} (\rho(x, y))$$

называется диаметром пространства (X, ρ) .

Определение 2.1.2. Полуноормальный функтор $\mathcal{F}$ в категории Comr компактов и их непрерывных отображений называется метризуемым (по В.В. Федорчуку²⁹), если для любой метрики ρ на метризуемом компакте X можно указать совместимую с топологией метрику $\rho_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}(X)$ таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Если $i : (X, \rho^1) \longrightarrow (Y, \rho^2)$ — изометрическое вложение метризуемых компактов, то $\mathcal{F}(i) : (\mathcal{F}(X), \rho_{\mathcal{F}}^1) \longrightarrow (\mathcal{F}(Y), \rho_{\mathcal{F}}^2)$ — тоже изометрическое вложение.
2. Для любого метризуемого компакта (X, ρ) верно $\rho_{\mathcal{F}}|_X = \rho$.
3. Для любого метризуемого компакта (X, ρ) верно равенство

$$\text{diam}(\mathcal{F}(X)) = \text{diam}(X).$$

²⁹ Федорчук В. В. Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1990. — Т. 54, № 2. — С. 396–417.

Здесь под ограничением метрики $\rho_{\mathcal{F}}$ на пространство X подразумевается ограничение на $\mathcal{F}_1(X) \subset \mathcal{F}(X)$. Для полунормальных функторов $\mathcal{F}$ в категории $\mathbf{Compr}$ отображение $X \rightarrow \mathcal{F}_1(X)$, ставящее в соответствие точке x единственный элемент пространства $\mathcal{F}(\{x\})$, является гомеоморфизмом.

Определение 2.1.3. Если для метризуемого функтора $\mathcal{F}$, для всех метризуемых компактов X и для всех их метрик ρ заданы метрики $\rho_{\mathcal{F}}$ согласно определению выше, то говорят, что семейство метрик $\rho_{\mathcal{F}}$ задаёт метризацию функтора $\mathcal{F}$.

Параграф 2.2 посвящён непосредственно понятию размерности квантования и разобрано устройство этих размерностей для двух функторов из предыдущего параграфа. В частности, для функтора $\exp(\cdot)$ размерность квантования совпадает с ёмкостной размерностью.

Определение 2.2.1. Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный функтор в категории $\mathbf{Compr}$ компактов и их непрерывных отображений. Говорят, что функтор $\mathcal{F}$ имеет бесконечную степень, если для любого натурального числа n и для любого бесконечного компакта X верно, что $\mathcal{F}_n(X) \neq \mathcal{F}(X)$.

Пусть $\mathcal{F}$ — метризуемый, эпиморфный, сохраняющий вес функтор в категории $\mathbf{Compr}$, обладающий бесконечной степенью. Тогда для функтора $\mathcal{F}$ имеет место следующее обозначение для каждого $\xi \in \mathcal{F}(X)$ и каждого вещественного числа $\varepsilon > 0$:

$$N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X)) = \min\{n : \rho_{\mathcal{F}}(\xi, \mathcal{F}_n(X)) \leq \varepsilon\}.$$

Определение 2.2.2. Следующие две величины, характеризующие асимптотику роста $N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X))$ при стремлении ε к 0, называются верхней и нижней размерностью квантования точки ξ соответственно³⁰.

³⁰Иванов А. В., Фомкина О. В. О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и ёмкостных размерностях // Труды Карельского

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi &= \inf \{ \alpha : \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X)) = 0 \} = \\
&= \sup \{ \alpha : \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X)) = \infty \}, \\
\underline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi &= \inf \{ \alpha : \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X)) = 0 \} = \\
&= \sup \{ \alpha : \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X)) = \infty \}.
\end{aligned}$$

Если множество $\{ \alpha : \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X)) = 0 \}$ оказалось пустым, то считается, что $\overline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi = \infty$ (аналогично для нижней размерности квантования).

Определение 2.2.5. Для метрического компакта F верхняя и нижняя ёмкостные размерности определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_B F &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(F, \varepsilon)}{-\log \varepsilon}, \\
\underline{\dim}_B F &= \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(F, \varepsilon)}{-\log \varepsilon},
\end{aligned}$$

где $N(F, \varepsilon) = N(F, \varepsilon, \exp F)$.

Параграф 2.3 содержит подробное описание ряда известных результатов для ёмкостной размерности и размерности квантования для функтора суперрасширения, включая описанные выше в кратком обзоре истории этой темы. Формулируется ключевой вопрос этой главы: существует ли компакт с лакунами в множестве значений нижней размерности квантования для функтора суперрасширения, или же для любого компакта на каких-то максимальных сцепленных системах принимаются все возможные значения нижней размерности квантования в промежутке от нуля до нижней ёмкостной размерности объёмлющего компакта? В этом же параграфе рассматривается особая конструкция максимальной сцепленной системы $\xi(A, B)$, предложенная³¹ Е.В. Кашубой, и автором доказываются следующие важ-

научного центра РАН. — 2019. — № 7. — С. 5–14.

³¹Вакулова (Кашуба) Е. В. О носителях максимальных сцепленных систем // Труды Петрозаводского государственного университета. Серия "Математика". — 2004. — № 11. — С. 3–8.

ные свойства этой конструкции:

Определение 2.3.5. Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, а (X, ρ) — метрическое пространство. Множество $A \subset X$ называется ε -разделённым, если для любых различных точек $x, y \in A$ выполняется неравенство $\rho(x, y) > \varepsilon$.

Предложение 2.3.7. Если $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ — две непересекающиеся последовательности точек X такие, что $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, и для некоторых $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ множество $D = \{x_1, \dots, x_{k+1}\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ является ε -разделённым, то $N(\xi(A, B), \varepsilon/2) \geq 2k$.

Предложение 2.3.8. Если $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ — две непересекающиеся последовательности точек X такие, что $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, и для некоторых $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\rho(x_{k+1}, y_{k+1}) \leq \varepsilon$, то $N(\xi(A, B), \varepsilon) \leq 2k + 1$.

Параграф 2.4 содержит ответ на ключевой вопрос предыдущего параграфа:

Теорема 2.4.1. Пусть (X, ρ) — метрический компакт. Для любого неотрицательного числа $b \leq \underline{\dim}_B X = a \leq \infty$ существует максимальная сцепленная система $\xi \in \lambda X$, для которой $\underline{\dim}_\lambda(\xi) = b$ и $\text{supp}(\xi) = X$.

Эта теорема доказывается в этом же параграфе, но, так как доказательство случая $b = a$ несколько отличается от прочих, он выделен в отдельное предложение.

Предложение 2.4.2. Для любого метрического компакта (X, ρ) существует максимальная сцепленная система ξ , для которой

$$\underline{\dim}_\lambda \xi = \underline{\dim}_B X, \quad \overline{\dim}_\lambda \xi = \overline{\dim}_B X, \quad \text{supp}(\xi) = X.$$

Заключение

Отправной точкой для первой части работы были теоремы, развивавшие идею, представленную в теореме Федорчука, и при работе с этими теоремами автору удалось получить результаты, обобщающие многие из этих теорем. Центральной в этой главе является теорема для полунормальных функторов $\mathcal{F}$ в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p -пространств с наследственно паранормальным пространством $\mathcal{F}_n(X) \setminus X$. Однако, весьма вероятно, что эту теорему можно обобщать и далее, это касается как требований, накладываемых на сам функтор $\mathcal{F}$, так и на подпространства $\mathcal{F}(X)$.

Во второй главе диссертационной работы, посвящённой исследованию недавно введённого понятия размерности квантования, автором был получен следующий результат: верхние и нижние размерности квантования для полунормального функтора суперрасширения $\lambda(\cdot)$ обладают свойством принимать все возможные промежуточные значения на некоторых максимальных сцепленных системах, в то время как нижняя ёмкостная размерность лишена этого свойства, хотя эта размерность также является нижней размерностью квантования, но для другого функтора, а именно функтора гиперпространства $\exp(\cdot)$. Разумеется, понятие размерности квантования нуждается в дополнительном исследовании, в частности, в более подробном изучении размерности квантования для функтора суперрасширения $\lambda(\cdot)$ и других полунормальных функторов в категории $\mathbf{Comp}$, используемых в топологии.

Результаты работы могут быть интересны специалистам, работающим в областях топологии и теории категорий.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям, доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Петровичу Комбарову, и доктору физико-математических наук, профессору Юрию Викторовичу Садовничему за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные советы, а также всем сотрудникам кафедры общей топологии

и геометрии механико-математического факультета МГУ за тёплую доброжелательную атмосферу

Публикации автора по теме диссертации
Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных
для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности
1.1.3. Геометрия и топология, и входящие в базы цитирования
Scopus, РИНЦ, RSCI, Web of Science

- [1] Иванов А. А. Нормальные функторы и паранормальность // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2021. — № 6. — С. 51–53.

EDN: MUPRDT; Импакт-фактор 0,211(РИНЦ). 0,1875 п.л.

Перевод: Ivanov A. A. Normal Functors and Paranormality // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2021. — vol. 76. — pp. 271–273.

EDN: GMJYRK; Импакт-фактор 0,2(JIF). 0,1875 п.л.

- [2] Иванов А. А. Полуноральные функторы и паранормальность // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2023. — № 2. — С. 67–71.

EDN: ADKFMP; Импакт-фактор 0,211(РИНЦ). 0,3125 п.л.

Перевод: Ivanov A. A. Seminormal Functors and Paranormality // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2023. — vol. 78. — pp. 100–104.

EDN: DOJSVP; Импакт-фактор 0,2(JIF). 0,3125 п.л.

- [3] Иванов А. А. О размерности квантования максимальных сцепленных систем // Сибирский математический журнал. — 2024. — Т. 65, № 3. — С. 517–523.

EDN: QGQPFK; Импакт-фактор 0,571(РИНЦ). 0,4375 п.л.

Перевод: Ivanov A. A. On the Quantization Dimension of Maximal Linked Systems // Siberian Mathematical Journal. — 2024. — vol. 65. — pp. 575—581.

EDN:АНТУДК; Импакт-фактор 0,7 (JIF). 0,4375 п. л.