

**ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Иванова Андрея Александровича на тему: «Ковариантные
непрерывные функторы в категориях $\mathbf{Comp}$ и $\mathbf{P}$ »
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология**

Диссертационная работа А.А. Иванова «Ковариантные непрерывные функторы в категориях $\mathbf{Comp}$ и $\mathbf{P}$ » посвящена категорно-функториальному подходу к проблеме метризуемости топологического пространства. Как известно, имеются классические результаты о метризуемости. Это теорема П.С. Урысона о том, что всякое регулярное пространство со счётной базой метризуемо (достаточное условие) и теорема Стоуна о том, что всякое метризуемое пространство паракомпактно (необходимое условие).

В настоящее время весьма актуальным и важным направлением развития общей топологии является исследование топологических задач с позиции теории категорий и функторов. В частности, активно развивается исследование задачи о метризуемости пространства в рамках исследования свойств ковариантных функторов на категории $\mathbf{Comp}$ (компактных пространств и их непрерывных отображений) и на категории $\mathbf{P}$ (паракомпактных p -пространств (перистых пространств) и их совершенных отображений). В этом направлении диссертантом решен ряд задач, получены результаты, представляющие существенное развитие этих исследований.

Как известно, классическим результатом в общей топологии, полученным чешским математиком М. Катетовым в 1948 году, является так называемая теорема о кубе: *если куб компакта является наследственно нормальным пространством, то этот компакт метризуем*. В 1971 году американский тополог Ф. Зенор получил аналог теоремы о кубе, заменив свойство наследственной нормальности на свойство наследственной счётной паракомпактности куба компакта. Далее, в 1981 году Е.В. Щепин ввёл

понятие нормального функтора на категории Comp . Все нормальные функторы являются ковариантными и удовлетворяют ряду других естественных свойств, которые Е.В. Щепин вывел из рассмотрения свойств степенного функтора и функтора гиперпространства.

Используя понятие нормального функтора, В.В. Федорчук получил существенное обобщение теоремы М. Катетова, обратив внимание на ее функториальность. В.В. Федорчук доказал, что *если для нормального функтора F степени ≥ 3 на категории Comp пространство $F(X)$ наследственно нормально, то компакт X метризуем.*

Далее, Т.Ф. Жураев в 2000 году обобщил теорему В.В. Федорчука, используя результат М. Зенора и заменив в теореме В.В. Федорчука условие наследственной нормальности пространства $F(X)$ на условие наследственной счётной паракомпактности.

После этого, используя понятие паранормального пространства, введенное американским топологом П. Никошем в 1984 году, А.П. Комбаров в 2017 году получил следующее важное обобщение, доказав, что *если для нормального функтора F степени ≥ 3 на категории Comp пространство $F(X)$ наследственно паранормально, то компакт X метризуем.* Следует отметить, что понятие паранормальности пространства является одновременным обобщением понятий нормальности и счетной паракомпактности.

Ранее, в 1965 году А.В. Архангельским было введено понятие r -пространства (или перистого пространства). Используя это понятие, ученица А.П. Комбарова М.А. Добрынина в 2011 году ввела понятие нормального функтора в категории P (паракомпактных r -пространств и их совершенных отображений) и доказала следующую теорему: *если для нормального функтора F степени ≥ 3 на категории P пространство $F(X)$ наследственно нормально, то паракомпактное r -пространство X метризуемо.*

Фактически это перенос теоремы Федорчука на категорию P , более широкую, чем категория Comp .

В 2015 году А.П. Комбаров получил аналог теоремы М.А. Добрыниной в категории $\mathcal{P}$ для свойства наследственной счетной паракомпактности.

В первой главе диссертации А.А. Иванову удалось получить дальнейшее обобщение этих результатов М.А. Добрыниной и А.П. Комбарова. А именно, один из основных результатов первой главы диссертации следующий.

Теорема. Пусть X паракомпактное перистое пространство, F – нормальный функтор степени ≥ 3 , действующий в категории $\mathcal{P}$ (паракомпактных перистых пространств и их совершенных отображений). Тогда, если пространство $F(X)$ наследственно паранормально, то пространство X метризуемо.

Важным следствием из этой теоремы является другой результат первой главы диссертации, обобщающий теоремы М. Катетова и Ф. Зенора в категории $\mathcal{P}$:

Теорема. Если куб паракомпактного перистого пространства X наследственно паранормален, то это пространство метризуемо.

Следующей задачей, исследованной диссертантом в первой главе диссертации, является вопрос о том, насколько можно ослабить условие нормальности в полученной теореме так, чтобы сохранилось свойство непрерывности функтора F . Для решения этого вопроса А.А. Иванов вводит новое для категории $\mathcal{P}$ понятие *полунормального функтора*, отталкиваясь от определения полунормального функтора в категории $\mathbf{Comp}$, введенного В.В.Федорчуком. Перенесение этого понятия в категорию $\mathcal{P}$ потребовало от диссертанта некоторых дополнений для сохранения свойства непрерывности полунормального функтора в категории $\mathcal{P}$.

А именно, для осуществления такого переноса диссертант добавил к свойствам полунормального функтора в категории Comp дополнительные условия: непрерывность отображения Басманова $\pi_n: X^n \times F(n) \rightarrow F(X)$, для любого натурального n , а также специальное условие (*) о том, что спектр $\text{sp}(F) = \{1, m, n, \dots\}$, (то есть содержит по крайней мере 3 различных натуральных числа) и для отображения $\phi_{nm}: n \rightarrow m$, где $\phi_{nm}(i) = i, i < m$; $\phi_{nm}(i) = m - 1, i \geq m$, пересечение $F(\phi_{nm})(F_m(n)) \cap F_m(m)$ не пусто.

Несмотря на некоторую искусственность этих условий, оказывается (и диссертант доказывает это в первой главе), что ранее определенные нормальные функторы степени ≥ 3 удовлетворяют этим двум условиям и поэтому основной результат первой главы - следующая теорема - является дальнейшим и весьма нетривиальным обобщением предыдущей:

Теорема. Пусть F – полунормальный функтор в категории P со степенным спектром $\text{sp}(F) = \{1, m, n, \dots\}$ и удовлетворяющий условию (*). Если для паракомпактного r -пространства X пространство $F_n(X) \setminus X$ наследственно паранормально, то пространство X метризуемо.

Вторая глава диссертации в основном посвящена изучению важного примера полунормального функтора λ , возникающего из конструкции суперрасширения пространства. Во второй главе рассматриваются только метрические компакты и метризуемые (в смысле В.В. Федорчука) функторы.

Суперрасширение $\lambda(X)$ – это пространство всех максимальных сцепленных систем пространства X . Топология $\lambda(X)$ была определена в 1969 году голландским топологом де Гроотом, который доказал, что суперрасширение любого компакта является компактом. В 2013 году Я.Б. Песин определил верхнюю и нижнюю ёмкостные размерности замкнутых подмножеств метрического компакта.

Во второй главе диссертации исследуются *верхняя и нижняя размерности квантования* – понятия, введенные в 2019 А.В. Ивановым и О.В. Фомкиной для некоторых функторов в категории $\mathbf{Comp}$.

Диссертант А.А. Иванов показывает, что верхняя и нижняя размерности квантования для функтора *гиперпространства* совпадают с верхней и нижней ёмкостной размерностями Я.Б. Песина, о которых было известно, что для метрического компакта существуют подмножества со всеми возможными промежуточными значениями верхней ёмкостной размерности и что для нижней ёмкостной размерности это неверно.

Возникает вопрос, будет ли то же самое выполняться и для других полунормальных функторов? Было также известно, что верхняя размерность квантования максимальных сцепленных систем принимает все промежуточные значения вплоть до верхней ёмкостной размерности (результат А.В. Иванова и О.В. Фомкиной 2019 года), и оставался неразрешенным единственный вопрос: верно ли это для нижней размерности квантования максимальных сцепленных систем.

Основной результат второй главы состоит в положительном ответе на этот вопрос. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Для любого метрического компакта X с нижней ёмкостной размерностью a и любого неотрицательного числа $b \leq a$, найдется максимальная сцепленная система с носителем X , нижняя размерность квантования которой равна b .*

В целом изложение содержания и оформление диссертации производит хорошее впечатление. Тем не менее, следует отметить несколько редакционных недостатков по изложению истории вопроса и предшествующих результатов.

1) Имеется некоторая непоследовательность в ссылках на предшествующие работы, хотя в целом все необходимые ссылки даны.

2) Следовало бы ещё раз на странице 45 диссертации выписать условие (*), вполне аналогичное условию (*) на стр. 40, что облегчило бы чтение диссертации.

3) Существенных текстовых погрешностей не обнаружено, кроме нескольких опечаток и мелких технических ошибок. Вот некоторые из них. На стр. 35 в 11 строке сверху написано «в Параграфе», а должно быть «в параграфе». На стр. 39 во 2 строке сверху написано «в предыдущем разделе», хотя работа разделена на параграфы и главы, а не на разделы. На стр. 43 в 3 строке сверху написано «для всех одноточечные множеств», а должно быть «для всех одноточечных множеств». На стр. 59 в 5 строке снизу написано «поэтому значит», одно из этих двух слов лишнее. На стр. 60 и в некоторых местах далее используется интуитивно понятное слово надмножество, но это понятие формально в работе не определяется. На стр. 64 приводится общеизвестное определение 2.3.6 ε -сети, которое не используется и следовательно является лишним.

Наличие перечисленных недостатков изложения материала диссертации и текстовых погрешностей хотя и несколько затрудняет чтение, но на мой взгляд, не умаляет основных *достоинств работы*.

К ним следует отнести внимательное и кропотливое изучение автором предшествующих результатов разных авторов. С учётом того, что в данном направлении исследований много терминов и громоздких определений, это потребовало от диссертанта достаточно высокой квалификации в области общей топологии, свободного владения материалом теории категорий и функторов.

Следует отметить достаточно высокий уровень полученных новых результатов в диссертации. Диссертант проявил себя в этой работе как серьёзный самостоятельный исследователь, свободно владеющий большим математическим материалом в данной области.

В диссертации А.А. Иванова исследованы и решены актуальные задачи. Полученные результаты являются новыми и весьма востребованными. Некоторые из этих результатов открывают новые перспективы научных исследований в изучении топологических вопросов теории категорий и теории размерности.

Все утверждения аккуратно и подробно доказаны. Используемые в диссертации факты снабжены соответствующими ссылками.

Результаты, полученные в работе, носят теоретический характер и вносят вклад в развитие общей топологии и теории категорий, доказаны автором самостоятельно. При работе над диссертацией автор проявил высокую математическую квалификацию.

Результаты диссертации опубликованы в 3 печатных работах в научных изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ. Автореферат соответствует требованиям, правильно и полно отражает содержание диссертации.

Работа прошла многократную апробацию. Результаты работы обсуждались и докладывались на международных и всероссийских научных конференциях и на научных семинарах.

Считаю, что диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.3. Геометрия и топология (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Иванов Андрей Александрович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики
факультета вычислительной математики и кибернетики
ФГБОУ ВО «Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова»

Фоменко Татьяна Николаевна

Контактные данные:

тел.: , e-mail:

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация: 01.01.04 – Геометрия и топология.

Адрес места работы:

119234, г. Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 52,
ФГБОУ ВО «Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова», факультет вычислительной
математики и кибернетики, кафедра общей математики
Тел.: +7 (495) 939-55-91; e-mail: om@cs.msu.su

Подпись сотрудника факультета вычислительной математики и кибернетики
ФГБОУ ВО «Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова»
Т.Н. Фоменко удостоверяю: