

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Назмиев Альберт Ирекович

**Оптомеханическое и электрооптическое детектирование
резонансных сигналов с исключением обратного
флуктуационного влияния в широкой полосе частот**

1.3.2. Приборы и методы экспериментальной физики

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Вятчанин Сергей Петрович

Москва — 2025

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Обзор литературы	12
1.1 Фундаментальные шумы, ограничивающие чувствительность оптических преобразователей	12
1.1.1 Квантовый шум лазерного излучения	12
1.1.2 Тепловые флуктуации пробной массы	13
1.2 Методы измерения с исключением ОФВ	14
1.2.1 Квантово-невозмущающие измерения	14
1.2.2 Подсистемы, свободные от квантовой механики	15
1.3 Эрмит-Гауссовы моды резонаторов Фабри-Перо	16
1.3.1 Многомерные поляризованные моды	16
1.3.2 Одномерные моды в астигматических резонаторах	17
Глава 2. Широкополосное вариационное измерение	18
2.1 Описание физической системы	18
2.1.1 Модели оптомеханической системы	18
2.1.2 Гамильтониан оптомеханической системы	21
2.1.3 Решение уравнений Ланжевена	24
2.2 Метод измерения с исключением ОФВ	27
2.2.1 Анализ предельной чувствительности	27
2.2.2 Анализ влияния паразитных спектральных составляющих	28
2.3 Выводы	30
Глава 3. Широкополосное многомерное вариационное измерение	33
3.1 Описание физической системы	34
3.1.1 Гамильтониан оптомеханической системы	34
3.1.2 Решение уравнений Ланжевена	38
3.2 Метод измерения с исключением ОФВ	40
3.2.1 Анализ предельной чувствительности	40
3.2.2 Анализ влияния расстройки оптических мод	42

	Стр.
3.3 Особенности оптомеханической системы	48
3.3.1 Когерентная оптомеханическая связь	48
3.3.2 Подсистемы, свободные от квантовой механики	50
3.3.3 Модель трехмодовой оптомеханической системы	53
3.4 Выводы	54
Глава 4. Подсчет высокочастотных фотонов с помощью электрооптического преобразователя	55
4.1 Описание физической модели	55
4.1.1 Гамильтониан электрооптической системы	55
4.1.2 Решение уравнений Ланжевена	58
4.2 Метод измерения с вычитанием ОФВ	60
4.2.1 Анализ чувствительности схемы	61
4.2.2 Сравнение с системой с одной антистоксовой модой	64
4.2.3 Влияние внутренних потерь	67
4.3 Выводы	69
Глава 5. Расщепление поляризованных мод в резонаторах Фабри-Перо	70
5.1 Сила давления света	70
5.1.1 Построение многомерных мод Эрмита-Гаусса	70
5.1.2 Построение тензора напряжений Максвелла	73
5.1.3 Расчет силы давления света	76
5.2 Сдвиг частоты, вызванный деформацией зеркала	77
5.2.1 Сдвиг частот между значительно отличающимися состояниями	78
5.3 Расщепление поляризованных мод высших порядков	80
5.3.1 Сдвиг фазы Гюи и расщепление мод высших порядков	81
5.3.2 Расщепление ортогонально поляризованных мод	82
5.4 Выводы	83
Заключение	84
Публикации автора по теме диссертации	86

Список литературы	87
Приложение А. Вывод гамильтониана кольцевого резонатора . .	96
Приложение В. Подавление резонансного пондеромоторного возбуждения	97
Приложение С. Влияние паразитных спектральных составляющих на чувствительность	100
С.1 Квадратуры	101
С.2 Подавление остаточного ОФВ	103
Приложение D. Гамильтониан взаимодействия представленный через квадратуры	105
Приложение E. Вывод гамильтониана взаимодействия для трехмодовой схемы	107
E.1 Вывод собственных частот	108
E.2 Вывод собственных мод	109
E.3 Гамильтониан взаимодействия	111
Приложение F. Расчет компонентов электромагнитного поля и величины энергии	113
Приложение G. Вывод сдвига фазы Гюи	119
Приложение H. Справедливость вычисления с использованием второго тождества Грина для мод высших порядков	121

Введение

Оптомеханические преобразователи — это прецизионные приборы, позволяющие регистрировать слабые сигналы различной природы. Их принцип действия основан на преобразовании механического движения пробной массы в фазу, амплитуду, частоту или поляризацию света. Они обладают высокой чувствительностью, позволяющей обнаруживать смещение порядка 10^{-19} м, что нашло применение в гравитационно-волновых детекторах [1—5], датчиках крутящего момента [6—8], магнитометрах [9; 10]. Их чувствительность ограничена различными шумами, как техническими, так и фундаментальными. Кроме непосредственного детектирования сигналов оптомеханические системы используются для охлаждения пробных масс [11], пондеромоторного сжатия света [12], внесения оптической жесткости [13] и квантового запутывания [14].

Борьба с техническими шумами, такими как сейсмический шум [15], ньютоновский шум [16], флуктуации фазы из-за остаточного газа [17], тепловой шум подвеса и покрытия зеркал [18], позволила достичь и преодолеть стандартный квантовый предел измерения силы в узкой полосе частот [19—22]. Быстрые измерения позволяют избежать воздействия другого фундаментального шума — теплового [23]. Поэтому методы преодоления стандартного квантового предела в широкой полосе частот дают возможность подавления не только собственно квантового, но и теплового шума. К методам широкополосного преодоления стандартного квантового предела относятся измерение с пульсирующей накачкой [24] и когерентное вычитание квантового шума [25].

Аналогичными приборами для регистрации электромагнитных сигналов являются электрооптические преобразователи. В них нелинейное взаимодействие электромагнитного и оптического полей приводит к возникновению поля на суммарной или разностной оптической частоте [26]. Они используются для приема терагерцового, инфракрасного и микроволнового электромагнитного излучения, которое нельзя эффективно непосредственно зарегистрировать с помощью схем, основанных на маломушумящих усилителях или смесителях частоты [27; 28]. Это компактные и легкие приборы, которые не требуют высокой входной мощности, что мотивирует их использование в задачах спектроскопии, астрономии [29—31], а благодаря малым потерям в оптическом волокне, предварительное повышение частоты до оптической позволяет переда-

вать информацию на дальние расстояния, что играет большую роль в задачах квантовой коммуникации [32—34].

Таким образом, поиск методов для широкополосного исключения обратного флуктуационного влияния представляет собой актуальную задачу. В данной работе исследуется чувствительность оптомеханических систем, состоящих из оптического резонатора, поддерживающего две или три оптические моды, взаимодействующие с механическим осциллятором, на который действует резонансная сигнальная сила. Изучены особенности систем, позволяющие преодолеть стандартный квантовый предел. Так же изучена электрооптическая система для детектирования высокочастотных сигналов, описываемая аналогичной математической моделью. Предложены схемы для экспериментальной реализации резонаторов с необходимой структурой мод и рассчитано расщепление вырожденных мод в астигматических резонаторах Фабри-Перо, которое может быть использовано в этой связи.

Целью данной работы является теоретическое исследование предельной квантовой чувствительности оптомеханических и электрооптических детекторов резонансных сигналов, изучение влияния паразитных эффектов на чувствительность и возможности их подавления и анализ физических моделей для экспериментальной реализации данных систем. На основе данных исследований можно разработать подход для измерения с широкополосным подавлением обратного флуктуационного влияния. Кроме того анализ нацелен на создание нового метода расчета расщепления вырожденных мод в астигматических резонаторах Фабри-Перо, который может быть использован для расчета параметров детекторов.

Для достижения данной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Провести квантово-механическое описание исследуемых систем и решить уравнения Ланжевена для квантовых операторов оптических полей.
2. Рассчитать квантовую чувствительность измерения при исключении обратного флуктуационного влияния. Изучить вклад эффектов, снижающих чувствительность, и предложить способы их подавления.
3. Изучить особенности исследуемых систем, которые позволяют провести измерение с исключением обратного флуктуационного влияния.

4. Разработать физические модели, в которых реализуются данные особенности, для возможности их использования в эксперименте.
5. Разработать подход для расчета расщепления поляризованных мод в астигматических резонаторах на основе тензора напряжений Максвелла.

Объектом исследования являются оптические резонаторы, связанные с механическими осцилляторами или электрооптическими кристаллами, флуктуации, воздействующие на степени свободы в этих системах, резонансные силы, действующие на осцилляторы, и высокочастотные сигналы, действующие на электрооптические кристаллы. Предметом исследования являются методы измерения с исключением обратного флуктуационного влияния, предельная квантовая чувствительность и модели для экспериментальной реализации этих методов.

Научная новизна:

1. Предложен оригинальный принцип широкополосного вариационного измерения с накачкой на двух оптических модах, позволяющий полностью исключить обратное флуктуационное влияние и преодолеть стандартный квантовый предел, и проведен анализ его чувствительности.
2. Предложен оригинальный принцип многомерного широкополосного вариационного измерения, основанного на трехмодовом оптомеханическом датчике. Проанализирована чувствительность такого измерения и показана возможность исключения обратного флуктуационного влияния в широкой полосе частот.
3. Предложен оригинальный принцип широкополосного вариационного измерения, основанного на трехмодовом электрооптическом преобразователе. Продемонстрирована возможность измерения теплового шума с точностью выше стандартного квантового предела.
4. Предложен оригинальный метод вычисления расщепления ортогонально поляризованных мод высших порядков в резонаторе Фабри-Перо с зеркалами в форме эллиптических параболоидов, основанный на адиабатическом инварианте и расчете тензора Максвелла.

Теоретическая и практическая значимость данной работы состоит в разработанных новых теоретических принципах измерения сигналов с исключением обратного флуктуационного влияния и предложенном методе вы-

числения расщепления частот. В результате работы были выявлены физические эффекты, которые лежат в основе возможности проведения такого измерения, и эффекты, которые негативно влияют на чувствительность измерения. Были предложены схемы для экспериментальной реализации измерения, основанного на данных принципах. Использование метода вычисления расщепления частот позволяет создать оптические резонаторы с заданной структурой мод, что крайне важно в физическом эксперименте.

Методология диссертационного исследования. Основные результаты, представленные в данной работе, получены при помощи аналитического решения уравнений Гейзенберга для операторов квадратур оптических мод, электрического поля и механического осциллятора. Для анализа типа оптомеханического взаимодействия используется метод диагонализации гамильтониана. Для расчета гамильтонианов физических моделей используется волновой подход для оптических полей внутри резонатора. Для расчета расщепления мод в астигматических резонаторах используется метод последовательных приближений и теорема об адиабатическом инварианте. Все необходимые численные расчеты и построение графиков производилось в вычислительной системе Wolfram Mathematica.

Положения, выносимые на защиту:

1. Принцип широкополосного вариационного измерения, основанный на независимом измерении амплитудных квадратур двух выходных оптических сигналов, позволяет исключить обратное флуктуационное влияние и преодолеть стандартный квантовый предел в широкой полосе частот. Оптомеханическая система, основанная на этом принципе, является неустойчивой. Также в ней возникает шум, связанный с паразитными спектральными составляющими, который можно частично подавить. При мощности накачки равной 1 мкВт можно достичь стандартный квантовый предел, а увеличив мощность до 1 мВт, можно повысить чувствительность в 10^4 раз.
2. Принцип широкополосного вариационного многомерного измерения резонансной силы позволяет исключить обратное флуктуационное влияние и преодолеть стандартный квантовый предел в широкой полосе частот. В оптомеханической системе, основанной на этом принципе, не возникает неустойчивости из-за пондеромоторной нелинейности. В основе возможности исключения обратного флуктуационного влияния

лежит наличие в данной системе двух динамически независимых множеств квантово-невозмущающих переменных.

3. Принцип широкополосного вариационного многомерного измерения высокочастотного сигнала позволяет исключить обратное флуктуационное влияние и преодолеть стандартный квантовый предел в широкой полосе частот при измерении теплового шума. Схема, основанная на этом принципе, способна преобразовать один высокочастотный фотон в 490 фотонов выходного оптического сигнала.
4. Расщепление ортогонально поляризованных мод высших порядков в резонаторе Фабри-Перо с зеркалами в форме эллиптических параболоидов вызвано асимметрией силы давления света.

Степень достоверности полученных результатов определяется использованием обоснованных теоретических подходов, совпадением решений с известными предельными или частными случаями, использованием различных методов решения и сходством результатов, полученных разными способами, а также согласием полученных результатов с имеющимися расчетами других исследователей и с экспериментальными данными.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах в МГУ, а также были представлены на 6 международных конференциях:

1. XXXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2025”, г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 11-25 апреля 2025.
2. 18-я Российская гравитационная конференция, г. Казань, Казанский государственный университет, Россия, 25-29 ноября 2024.
3. XXIII International Scientific Conference “Physical Interpretations of the Relativity Theory” (PIRT-2023), г. Москва, МГТУ им. Н.Э.Баумана, Россия, 3-6 июля 2023.
4. XXX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2023”, г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 10-21 апреля 2023.
5. XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2022”, г. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 11-22 апреля 2022.

6. XXXIII Всероссийская школа-семинар «Волновые явления: физика и применения» им. А.П. Сухорукова («Волны-2022»), Красновидово (Московская область), Россия, 5-10 июня 2022.

Личный вклад. Задачи исследования были сформулированы совместно с научным руководителем работы. Все представленные в диссертационной работе результаты получены автором лично, либо при его определяющем участии.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных изданиях, опубликованных в научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и 8 приложений. Полный объём диссертации составляет 122 страницы, включая 17 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 97 наименований.

Первая глава диссертации представляет собой подробный обзор литературы по теме исследования, в котором обсуждаются работы по методам измерения с частичным или полным исключением обратного флуктуационного влияния, и особенностям астигматических резонаторов и поляризованного излучения.

Во второй главе диссертации изучается возможность измерения резонансной силы, действующей на механический осциллятор, с помощью двухмодового оптического резонатора, связанного с этим осциллятором, с накачкой на обеих модах. Предложен принцип широкополосного вариационного измерения, который позволяет исключить обратное флуктуационное влияние и преодолеть стандартный квантовый предел в широкой полосе частот. Показано, в данной системе возникает неустойчивость и предложен метод стабилизации системы с помощью использования ортогонально поляризованной накачки. Рассмотрено влияние паразитных спектральных составляющих на чувствительность и показано, как при помощи узкополосной фильтрации выходного сигнала, можно частично компенсировать дополнительные шумы, возникающие в данной системе. Предложено две модели физической системы для экспериментальной реализации.

В третьей главе диссертации рассматривается возможность измерения резонансной силы, действующей на механический осциллятор, с помощью трехмодового оптического резонатора, связанного с этим осциллятором, с накачкой только на центральной моде. Предложен принцип многомерного широкополосного вариационного измерения, который позволяет исключить обратное

флуктуационное влияние и преодолеть стандартный квантовый предел в широкой полосе частот. Показано, что в отличие от двухмодовой системы данная система не подвержена влиянию неустойчивости и паразитных спектральных составляющих. Проанализировано влияние расстройки оптических мод на чувствительность измерения и предложены режимы работы при различных величинах расстройки. Показано, что в данной схеме реализуется когерентная оптомеханическая связь и присутствуют подсистемы, свободные от квантовой механики, которые отвечают за возможность исключения обратного флуктуационного влияния. Предложена модель физической системы, в которой присутствуют эти особенности для экспериментальной реализации.

Четвертая глава посвящена возможности измерения резонансного высокочастотного сигнала с помощью электрооптического кристалла, помещенного в трехмодовый оптический резонатор с накачкой только на центральной моде. Показано, что принцип измерения, аналогичный оптомеханическому принципу многомерного широкополосного вариационного измерения, позволяет исключить обратное флуктуационное влияние в широкой полосе частот. Показано, что в отличие от оптомеханической системы, эта система позволяет только достичь стандартный квантовый предел при измерении сигнала, и что при измерении теплового шума чувствительность измерения не ограничена стандартным квантовым пределом. Проведено сравнение с двухмодовой электрооптической системой с одной антистоксовой модой и показано, что предложенная схема позволяет генерировать более одного оптического фотона на один высокочастотный фотон. Изучено влияние внутренних потерь на чувствительность измерения и показано, что ее ограничивают оптические потери.

Пятая глава диссертации посвящена разработке метода расчета расщепления ортогонально поляризованных мод высших порядков в астигматическом резонаторе Фабри-Перо, основанного на адиабатическом инварианте и расчете тензора Максвелла. Предложен метод расчета сдвига резонансной частоты при деформации конечного зеркала. Рассчитано расщепление мод и проведено сравнение с экспериментальными данными.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы диссертационной работы.

Глава 1. Обзор литературы

1.1 Фундаментальные шумы, ограничивающие чувствительность оптических преобразователей

1.1.1 Квантовый шум лазерного излучения

Процесс непрерывного измерения с помощью оптомеханических преобразователей можно разделить на три этапа: излучение света лазером, взаимодействие света с пробной массой и измерение выходного оптического излучения. Лазерное излучение имеет квантовую природу, поэтому при его описании необходимо учитывать флуктуации амплитуды (или числа фотонов ΔN) и фазы $\Delta\varphi$, связанные соотношением неопределенностей Гейзенберга $\Delta N \Delta\varphi \geq 1$ (при $\Delta N \ll N$). Равенство в этом выражении достигается для света в когерентном или сжатом состоянии [35; 36]. Излучение современных лазеров имеет распределение очень близкое к когерентному [37].

Во время взаимодействия с пробной массой из-за флуктуаций амплитуды возникает случайная сила давления света — обратное флуктуационное влияние (ОФВ). Оно возмущает движение пробной массы. После взаимодействия с пробной массой свет направляется на гомодинный детектор, который может измерять произвольную квадратуру света. При этом флуктуации фазы проявятся в виде ошибки измерения — дробового шума фотонов. При этом ОФВ растет с увеличением мощности лазерного излучения, а дробовой шум уменьшается. При определенной мощности излучения спектральные плотности мощности ОФВ и дробового шума становятся равными и суммарный шум, вносимый лазером, принимает наименьшее значение — стандартный квантовый предел (СКП, SQL) [38]. Для гармонического осциллятора он равен

$$\Delta x_{SQL}^{osc} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad (1.1a)$$

а для свободной массы

$$\Delta x_{SQL}^{free} = \sqrt{\frac{\hbar\tau}{2m}}, \quad (1.16)$$

где m — это масса пробной массы, ω — частота гармонического осциллятора, τ — время измерения.

СКП не является принципиальным ограничением, а связан с методом измерения. Вариационное измерение [39–41] и частотно-зависимое сжатие [42] позволяют частично подавить ОФВ и преодолеть СКП, но только в узкой полосе частот [43].

1.1.2 Тепловые флуктуации пробной массы

Другим фундаментальным шумом, ограничивающим чувствительность измерения, являются тепловой шум пробной массы. В соответствии с флуктуационно-диссипационной теоремой, если на тело действует сила вязкого трения $\mathbf{F} = -H\mathbf{v}$, то на него действует флуктуационная сила со спектральной плотностью мощности $S = 2k_B T H$, где T — это температура, H — это коэффициент трения. Под действием этой силы среднеквадратичное изменение амплитуды осциллятора за время τ ($\tau^* \gg \tau \gg 2\pi/\omega$) равно

$$\Delta x_{therm}^{osc} = \sqrt{\frac{k_B T \tau}{m \omega^2 \tau^*}}, \quad (1.2a)$$

а среднеквадратичное смещение свободной массы за время τ ($\tau^* \gg \tau$)

$$\Delta x_{therm}^{free} = \sqrt{\frac{k_B T \tau^3}{m \tau^*}}, \quad (1.2b)$$

где $\tau^* = m/H$ — это время звона пробной массы. Повышая время звона пробной массы и снижая температуру можно понизить тепловые флуктуации.

Сравнивая формулы (1.1) и (1.2) можно получить условие, при котором поведение пробной массы можно считать квантовым. Для гармонического осциллятора

$$\hbar \gg \frac{k_B T \tau}{\omega \tau^*}, \quad (1.3a)$$

а для свободной массы

$$\hbar \gg \frac{k_B T \tau^2}{\tau^*}. \quad (1.3b)$$

Кроме времени звона и температуры в это условие входит еще и время измерения τ . Его желательно делать как можно меньшим, но большим периода гармонического осциллятора, для чего следует использовать пробные массы с большим временем звона [23; 38]. Кристаллический напряженный кремний является перспективным материалом для создания механических наноосцилляторов. Осцилляторы, сделанные из этого материала, обладают добротностью $Q > 10^{10}$ [44], что на порядок больше добротности осцилляторов из нитрида кремния [45]. Для свободных масс планируется использовать кремний, охлажденный до температуры $T = 123$ К, так как при этой температуре коэффициент температурного расширения кремния при проходит через ноль, что влечет уменьшение термоупругих шумов и высокую добротность пробных масс [46].

Уменьшение времени измерения влечет расширение полосы частот $\Delta\Omega \simeq 2\pi/\tau$, из которой шум будет воздействовать на пробную массу. Поэтому для повышения чувствительности измерения необходима разработка широкополосных методов преодоления СКП.

1.2 Методы измерения с исключением ОФВ

1.2.1 Квантово-невозмущающие измерения

Квантово-невозмущающие измерения (КНИ) основаны на таких квантовых наблюдаемых O , которые коммутируют сами с собой в различные моменты времени t и t'

$$[O(t), O(t')] = 0. \quad (1.4)$$

Такие наблюдаемые называются КНИ-наблюдаемыми. Если условие (1.4) выполняется в любые моменты времени, то КНИ-наблюдаемая называется непрерывной, а если условие (1.4) выполняется только в дискретные моменты времени, то КНИ-наблюдаемая называется стробоскопической [47—49].

КНИ-наблюдаемые можно измерить точно, при этом ОФВ будет возмущать наблюдаемую, квантово-сопряженную КНИ-наблюдаемой, и квантовая

механика не накладывает пределы измерения классического сигнала. Примерами КНИ-наблюдаемых являются координата гармонического осциллятора (дискретная КНИ-наблюдаемая) и одна из его квадратур (непрерывная КНИ-наблюдаемая) [50].

Стробоскопическое измерение обычно используется в экспериментах с магнитными моментами атомов [51]. В оптомеханике рассматривается измерение квадратуры механического осциллятора с использованием пульсирующей накачки [24; 52; 53]. При этом получается исключить ОФВ в широкой полосе частот [54].

1.2.2 Подсистемы, свободные от квантовой механики

Обобщением понятия КНИ-наблюдаемых являются подсистемы, свободные от квантовой механики [55]. Это множество квантовых наблюдаемых $\{O_1, O_2, \dots, O_n\}$, попарно коммутирующих друг с другом в любые моменты времени t и t'

$$[O_i(t), O_j(t')] = 0 \text{ для всех } i, j. \quad (1.5)$$

Простейшим примером системы, в которой присутствуют такие подсистемы, является система из двух гармонических осцилляторов, один из которых имеет отрицательную массу [56].

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} - \frac{p'^2}{2m} - \frac{m\omega^2 q'^2}{2}. \quad (1.6)$$

Такой гамильтониан можно смоделировать с помощью двух мод электромагнитного поля a и b с частотами $\Omega \pm \omega$. Их гамильтониан $H = \hbar(\Omega + \omega)a^\dagger a + \hbar(\Omega - \omega)b^\dagger b$. При переходе к представлению взаимодействия на частоте быстрых осцилляций Ω , гамильтониан принимает искомый вид $H = \hbar\omega a^\dagger a - \hbar\omega b^\dagger b$.

Эта идея лежит в основе измерения с когерентным вычитанием квантового шума. Механический осциллятор с частотой ω связан с оптическим резонатором с частотой Ω . Эта оптическая мода посредством нелинейного кристалла связана с модой побочного резонатора с частотой $\Omega - \omega$, который играет роль осциллятора с отрицательной массой. Выходное излучение на частоте Ω уносит информацию о суммарном смещении двух осцилляторов, что позволяет

исключить обратное флуктуационное влияние при детектировании нерезонансной силы [25; 57].

1.3 Эрмит-Гауссовы моды резонаторов Фабри-Перо

1.3.1 Многомерные поляризованные моды

Благодаря резонансным свойствам, оптические резонаторы являются приборами для накопления, фильтрации или фокусировки электромагнитного поля. Оно может быть использовано в прецизионных опытах, в которых важны малые поперечные размеры сосредоточения оптического поля и точный подбор оптической частоты.

Стабильное распределение электромагнитного поля внутри резонаторов Фабри-Перо можно найти из волнового уравнения. В параксиальном приближении это распределение выражается в виде одномерных Эрмит-Гауссовых (или Лагерр-Гауссовых) мод [58—61]. Это стоячие поперечные волны с распределением поля в плоскости, перпендикулярной оптической оси резонатора.

Однако, это противоречит закону Гаусса $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, и закону Кулона в вакууме $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Неоднородное распределение поля должно порождать дополнительную продольную компоненту поля, величина которого в первом порядке малости относится к величине всего поля, как $1/(kw_0)$, где k – волновой вектор, w_0 – размер перетяжки [62—65]. Таким образом, в приложениях, связанных с поляризованным излучением, таких как генерация второй гармоники [66], оптические ловушки [67], оптическая микроскопия [68] и других, связанных с присутствием продольной компоненты поля [69—71], необходимо принимать во внимание особенности, которые следуют из ее наличия.

Одним из них является небольшое искривление волнового фронта. Он имеет форму эллиптического параболоида, при этом относительная разность радиусов кривизны волнового фронта составляет $2/(kw_0)^2$ [72]. Она мала, по сравнению с разностью радиусов кривизны астигматических резонаторов, но ведет к расщеплению полей с ортогональными поляризациями [73]. Использо-

ние двулучепреломляющих сред внутри резонатора является одним из способов усилить этот эффект [74].

1.3.2 Одномерные моды в астигматических резонаторах

В астигматических резонаторах волновой фронт нельзя рассматривать в виде сферического параболоида. Этого можно добиться с помощью небольшого наклона одного из зеркал относительно оптической оси резонатора или при использовании зеркал в форме эллиптического параболоида [75; 76].

Поперечное сечение луча света принимает эллиптический вид и с различными размерами перетяжки в перпендикулярных направлениях. Собственные моды резонатора имеют вид обобщенных Эрмит-Гауссовых мод. Одним из свойств этих мод является то, что в связи с различием фаз Гюи в перпендикулярных направлениях моды высшего порядка с одинаковым индексом моды $m_1 + n_1 = m_2 + n_2$ (например моды TEM_{01} и TEM_{10}) имеют различные частоты [77—79].

Глава 2. Широкополосное вариационное измерение

Оптические преобразователи часто используются для регистрации механического движения. Их чувствительность в принципе ограничена только квантовым шумом.

В данном разделе приведен анализ чувствительности двухмодовой оптомеханической системы с исключением ОФВ для детектирования резонансной силы. Показано, как корреляция в оптических гармониках позволяет вычесть ОФВ из измеряемого сигнала. Проанализировано влияние паразитных спектральных составляющих на чувствительность измерения и предложен способ частичного подавления их шума.

Данная глава основана на результатах, представленных в статье [A1].

2.1 Описание физической системы

2.1.1 Модели оптомеханической системы

Рассмотрим оптомеханическую систему, содержащую две оптические моды, связанные друг с другом и с механическим осциллятором. Разность частот оптических мод равна частоте механического осциллятора. Далее мы покажем возможность широкополосного детектирования малой сигнальной силы, действующей на механический осциллятор, с чувствительностью лучше, чем СКП.

Такую оптомеханическую систему можно реализовать в кольцевом резонаторе со связанными модами, распространяющимися в противоположных направлениях (рис. 2.1). Изначально не связанные моды вырождены по частоте. Допустим, что их собственная частота равна ω_0 . Вставив слабо отражающую мембрану (с коэффициентом пропускания t и отражения r) в резонатор, можно снять вырождение и расщепить моды $\omega_{\pm}$ (так называемая когерентная связь [11])

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm |\kappa|, \quad \kappa = \frac{rce^{i\phi}}{t(L_1 + L_2)}, \quad r \ll t \quad (2.1)$$

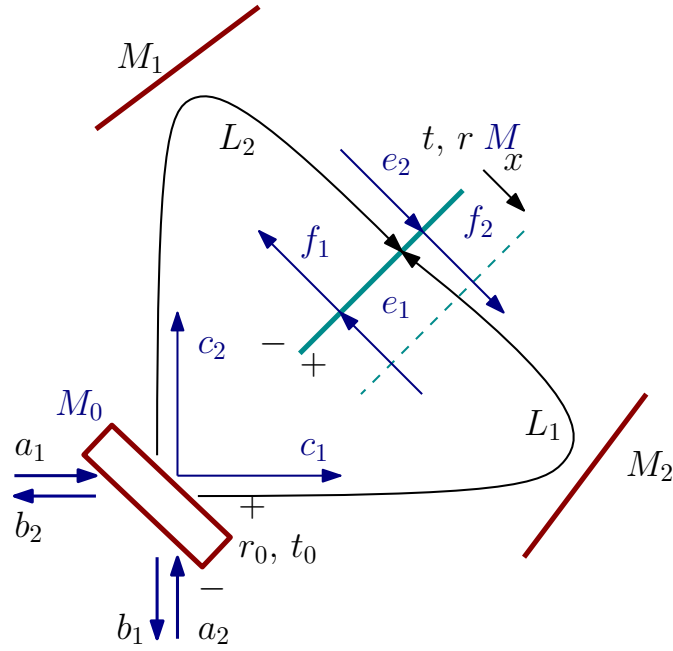


Рисунок 2.1 — Высокодобротный кольцевой резонатор с входным зеркалом M_0 с коэффициентами пропускания t_0 и отражения r_0 ($t_0 \ll r_0$) и внутренним диэлектрическим зеркалом M (мембраной) с коэффициентами пропускания t и отражения r ($r \ll t$).

где κ — это комплексный показатель расщепления. Особенность когерентной связи заключается в том, что модуль $|\kappa|$ зависит только от оптических параметров, а фаза ϕ зависит от положения мембраны [11]. Для резонансного оптомеханического взаимодействия частота механического осциллятора ω_m должна быть равна расщеплению оптических мод $2|\kappa| = \omega_m$.

Другим примером схемы, в которой возможно измерение с вычитанием ОФВ, является интерферометр Майкельсона-Саньяка, изображенный на рис. 2.2. Если положение идеально отражающего зеркала M зафиксировано, то одна мода с частотой ω_+ , задает волну, путешествующую между входным зеркалом M_1 и светоделителем. Разделяясь на светоделителе, свет доходит до зеркала M , отражается и полностью возвращается обратно к зеркалу M_1 , не разделяясь в сторону зеркала M_2 . Вторая мода с частотой ω_- соответствует волне, которая распространяется от входного зеркала M_2 к светоделителю и после отражения от зеркала M возвращается обратно к зеркалу M_2 , не разделяясь в сторону зеркала M_1 . Частоты мод $\omega_{\pm}$ задаются длинами плеч ℓ_1 , ℓ_2 . Движение зеркала M создает связь между модами. Зеркало M играет роль пробной массы механического осциллятора с массой m и частотой ω_m .

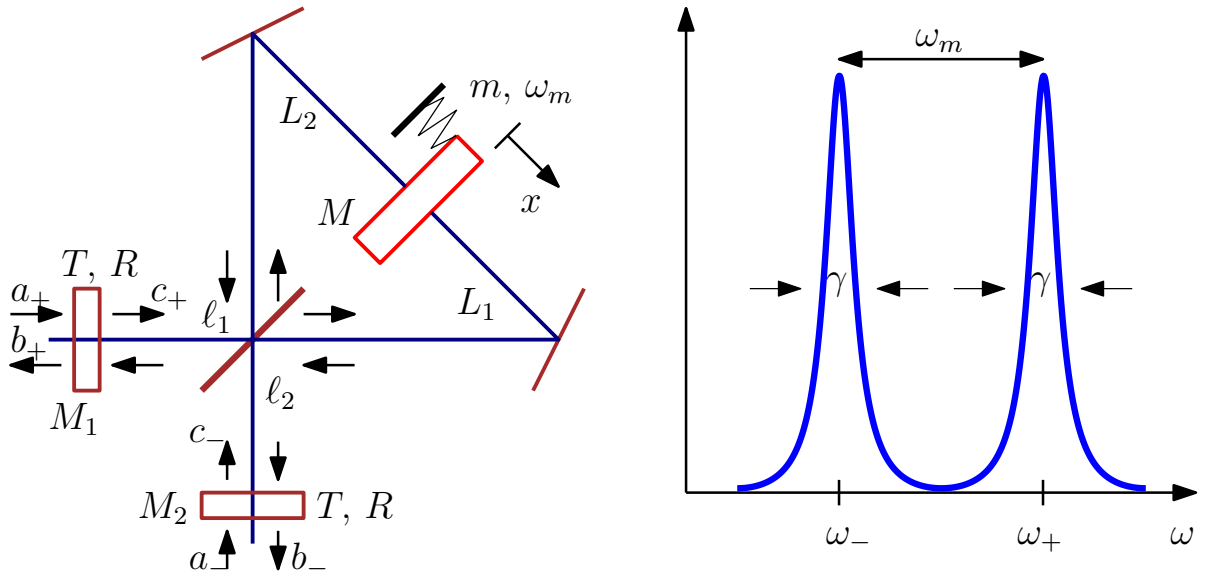


Рисунок 2.2 — Интерферометр Майкельсона-Саньяка с идеально отражающим зеркалом M . Зеркало играет роль пробной массы m механического осциллятора с частотой ω_m . Собственные моды интерферометра с частотами ω_- , ω_+ связаны с механическим осциллятором. Показатель затухания γ одинаковый для обеих мод, $\gamma \ll \omega_m$. Накачка оптических мод производится в резонансе.

Можно показать, что оптомеханические системы на рис. 2.1 и 2.2 описываются похожими гамильтонианами — см. вывод гамильтониана для схемы на рис. 2.1 в Приложении А и выражение (2.4) ниже. Преимущества схемы на рис. 2.2 включают:

1. Зеркала M_1 и M_2 не нужны для настройки схемы. Нужно только подобрать положение зеркала M так, чтобы интерферометр стал непрозрачным. Волны из левого и нижнего портов отражаются без смешивания, если на зеркало не действует внешняя сила.
2. Зеркала M_1 , M_2 определяют частоты мод $\omega_{\pm}$. Сдвигая, например, зеркало M_1 , можно подстроить разность собственных частот для фазового синхронизма $\omega_+ - \omega_- = \omega_m$.
3. Выходы обеих мод разнесены в пространстве, что позволяет измерять сигнал в каждом выходе независимо.

Предложенный нами метод измерения похож на метод, предложенный в [25; 57], в котором для преодоления СКП использовалось невырожденное параметрическое усиление для получения связи между двумя оптическими модами. Разница состоит в том, что в данном случае нелинейное взаимодействие между оптическими модами получается посредством пондеромоторной нелинейности

подвижного зеркала. Так же в данной схеме используется два оптических выхода, а не один, как в [25; 57].

2.1.2 Гамильтониан оптомеханической системы

Рассмотрим схему на рис. 2.2. Будем считать, что показатели затухания оптических мод равны и связаны с шириной резонансной кривой на полувывсоте, равной 2γ . Показатель затухания механического осциллятора мал по сравнению с показателем затухания оптических мод: $\gamma_m \ll \gamma$. Будем считать, что выполняются условия режима разрешенной боковой полосы и фазового синхронизма

$$\gamma_m \ll \gamma \ll \omega_m, \quad \omega_+ - \omega_- = \omega_m \quad (2.2)$$

Резонансные кривые на рис. 2.2 иллюстрируют эти условия.

Для простоты будем так же считать, что выполняются условия

$$L_1 \simeq L_2, \quad L_1, L_2 \gg \ell_1, \ell_2. \quad (2.3)$$

Для проведения измерений с помощью данной системы, необходимо подавить классические резонансные колебания механического осциллятора. Это можно сделать при использовании четырех, а не двух оптических мод, с ортогональными поляризациями и правильно подобранной мощности накачки. Так же это можно сделать при помощи цепи обратной связи. Для простоты будем рассматривать упрощенный гамильтониан с двумя оптическими модами, предполагая, что классические колебания подавлены. Полный анализ четырехмодовой схемы приведен в Приложении В.

Обобщенный гамильтониан, описывающий систему, можно записать в виде

$$H = H_0 + H_{\text{int}} + H_T + H_\gamma + H_{T,m} + H_{\gamma_m}, \quad (2.4a)$$

$$H_0 = \hbar\omega_+ c_+^\dagger c_+ + \hbar\omega_- c_-^\dagger c_- + \hbar\omega_m d^\dagger d, \quad (2.4b)$$

$$H_{\text{int}} = \frac{\hbar}{i} \left(\eta c_+^\dagger c_- d - \eta^* c_+ c_-^\dagger d^\dagger \right). \quad (2.4b)$$

H_{int} — это гамильтониан межмодового взаимодействия, d и $c_\pm$ — это операторы уничтожения моды механического осциллятора и оптических мод. Координату

x механического осциллятора можно представить в виде

$$x = x_0 (d + d^\dagger), \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}. \quad (2.5)$$

Постоянная оптомеханической связи η равна

$$|\eta| \simeq \frac{x_0}{L} \omega_0, \quad L \simeq L_1, L_2, \quad \omega_0 \simeq \omega_\pm. \quad (2.6)$$

Гамильтонианы H_T и H_γ описывают внешнюю среду и связь оптических мод с ней посредством показателя затухания γ . Аналогично, гамильтонианы $H_{T,m}$ и H_{γ_m} описывают внешнюю среду и связь моды механического осциллятора с ней посредством показателя затухания γ_m .

Предполагая, что флуктуации оптических полей малы, можно выделить средние значения амплитуд и флуктуации

$$c_\pm = (C_\pm + \hat{c}_\pm) e^{-i\omega_\pm t}, \quad (2.7a)$$

$$a_\pm = (A_\pm + \hat{a}_\pm) e^{-i\omega_\pm t}, \quad (2.7b)$$

$$b_\pm = (B_\pm + \hat{b}_\pm) e^{-i\omega_\pm t}. \quad (2.7b)$$

$A_\pm$, $B_\pm$ и $C_\pm$ обозначают средние значения амплитуд соответствующих оптических полей, $a_\pm$, $b_\pm$ и $c_\pm$ представляют собой малые флуктуации полей, $|A_\pm|^2 \gg \langle a_\pm^\dagger a_\pm \rangle$, $|B_\pm|^2 \gg \langle b_\pm^\dagger b_\pm \rangle$, $|C_\pm|^2 \gg \langle c_\pm^\dagger c_\pm \rangle$.

Амплитуды накачки и выходного поля нормированы на падающую $P_{\pm in} = \hbar\omega_\pm |A_\pm|^2$ и выходную $P_{\pm out} = \hbar\omega_\pm |B_\pm|^2$ мощности. Амплитуда поля внутри резонатора нормирована на запасенную в нем энергию $E_\pm = \hbar\omega_\pm |C_\pm|^2$.

Падающие волны находятся в когерентном состоянии и их флуктуации $\hat{a}_\pm$ описываются следующими коммутационными и корреляционными соотношениями

$$[\hat{a}_\pm(t), \hat{a}_\pm^\dagger(t')] = \delta(t - t'), \quad (2.8a)$$

$$\langle \hat{a}_\pm(t) \hat{a}_\pm^\dagger(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (2.8b)$$

Введем Фурье-образы этих операторов

$$\hat{a}_\pm(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_\pm(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (2.9)$$

Аналогично вводятся Фурье-образы других операторов. Используя выражения (2.8а) и (2.8б) можно получить коммутационные и корреляционные соотношения для Фурье-амплитуд входных флуктуаций

$$\left[a_{\pm}(\Omega), a_{\pm}^{\dagger}(\Omega') \right] = 2\pi \delta(\Omega - \Omega'), \quad (2.10а)$$

$$\left\langle a_{\pm}(\Omega) a_{\pm}^{\dagger}(\Omega') \right\rangle = 2\pi \delta(\Omega - \Omega') \quad (2.10б)$$

Так же введем Фурье-амплитуду сигнальной резонансной силы $F_S(t)$, действующей в течение времени τ :

$$F_S(t) = F_{s0} \cos(\omega_m t + \psi_f) = \quad (2.11)$$

$$= F_s(t) e^{-i\omega_m t} + F_s^*(t) e^{i\omega_m t}, \quad -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2},$$

$$f_s(\Omega) = \frac{F_s(\Omega)}{\sqrt{2\hbar\omega_m m}}, \quad f_{s0} = \frac{F_{s0}(\Omega)}{\sqrt{2\hbar\omega_m m}} = 2f_s. \quad (2.12)$$

$F_s(\Omega)$ — это Фурье-амплитуда медленной комплексной амплитуды $F_s(t)$. В общем случае $F_s(\Omega) \neq F_s^*(-\Omega)$.

Операторы теплового механического шума описываются выражениями

$$\left[q(\Omega), q^{\dagger}(\Omega') \right] = 2\pi \delta(\Omega - \Omega'), \quad (2.13а)$$

$$\left\langle q(\Omega) q^{\dagger}(\Omega') \right\rangle = (2n_T + 1) 2\pi \delta(\Omega - \Omega'), \quad (2.13б)$$

$$n_T = \frac{1}{e^{\hbar\omega_m/k_B T} - 1}. \quad (2.13в)$$

Здесь T — это температура окружающей среды.

Важно отметить, что оптические моды имеют различную зависимость (2.17а, 2.17б) от операторов механического осциллятора. Оператор уничтожения d воздействует на c_+ , а оператор рождения $d^{\dagger}$ воздействует на c_- . Эта особенность параметрического взаимодействия играет важную для процесса измерения, описание которого приведено ниже.

2.1.3 Решение уравнений Ланжевена

С помощью гамильтониана можно записать уравнения движения полей внутри резонатора

$$\dot{c}_+ + \gamma c_+ + \eta c_- d = \sqrt{2\gamma} a_+, \quad (2.14a)$$

$$\dot{c}_- + \gamma c_- - \eta c_+ d^\dagger = \sqrt{2\gamma} a_-, \quad (2.14б)$$

которые необходимо дополнить входными-выходными соотношениями.

$$b_\pm = -a_\pm + \sqrt{2\gamma} c_\pm \quad (2.14в)$$

Гамильтонов формализм позволяет получить выражения для средних амплитуд полей

$$\gamma C_+ + \eta C_- D = \sqrt{2\gamma} A_+, \quad (2.15a)$$

$$\gamma C_- - \eta^* C_+ D^* = \sqrt{2\gamma} A_-, \quad (2.15б)$$

$$\gamma_m D = \eta^* C_+ C_-^*, \quad (2.15в)$$

$$\gamma_m D^* = \eta C_+^* C_- \quad (2.15г)$$

Введя параметр $\nu = |\eta|^2 / \gamma \gamma_m$, получим

$$C_+ \left(1 + \frac{2\nu |A_-|^2}{\gamma (1 - \nu |C_+|^2)^2} \right) = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} A_+, \quad (2.16a)$$

$$C_- \left(1 - \frac{2\nu |A_+|^2}{\gamma (1 + \nu |C_-|^2)^2} \right) = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} A_-. \quad (2.16б)$$

Пондеромоторная нелинейность ограничивает амплитуды C_+ , C_- . Классическая резонансная пондеромоторная сила возбуждает колебания механического осциллятора с амплитудой D , которая может быть большой. Эти колебания классические и могут быть подавлены при помощи регулярной силы, подобранной с учетом известных амплитуд оптических полей. Кроме того, можно использовать две ортогональные поляризации для уменьшения резонансного возбуждения механического осциллятора (см. детали в Приложении В). В дальнейшем рассмотрении будем считать эти колебания подавленными, считая $D = 0$ и $C_\pm = \sqrt{2/\gamma} A_\pm$.

Используя выражения (2.14а, 2.14б) можно записать уравнения Ланжевена для Фурье-амплитуд флуктуаций оптических полей и малых колебаний механического резонатора

$$(\gamma - i\Omega)c_+(\Omega) + \eta C_- d(\Omega) = \sqrt{2\gamma}a_+(\Omega), \quad (2.17а)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_-(\Omega) - \eta^* C_+ d^\dagger(-\Omega) = \sqrt{2\gamma}a_-(\Omega), \quad (2.17б)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d(\Omega) - \eta^* \left(C_-^* c_+(\Omega) + C_+ c_-^\dagger(-\Omega) \right) = \sqrt{2\gamma_m}q(\Omega) + if_s(\Omega) \quad (2.17в)$$

$$b_\pm(\Omega) = -a_\pm(\Omega) + \sqrt{2\gamma}c_\pm(\Omega), \quad (2.17г)$$

где $b_\pm$ — это Фурье-амплитуды флуктуаций выходных полей.

Не ограничивая общности, будем считать, что фазы подобраны так, что

$$C_+ = C_+^* = C_- = C_-^* = C, \quad \eta = \eta^* \quad (2.18)$$

Введя квадратурные амплитуды

$$a_{\pm a} = \frac{a_\pm(\Omega) + a_\pm^\dagger(-\Omega)}{\sqrt{2}}, \quad (2.19а)$$

$$a_{\pm \phi} = \frac{a_\pm(\Omega) - a_\pm^\dagger(-\Omega)}{i\sqrt{2}}. \quad (2.19б)$$

и используя (2.17), получим

$$(\gamma - i\Omega)c_{+a} + \eta C d_a = \sqrt{2\gamma}a_{+a}, \quad (2.20а)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{+\phi} + \eta C d_\phi = \sqrt{2\gamma}a_{+\phi}, \quad (2.20б)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{-a} - \eta C d_a = \sqrt{2\gamma}a_{-a}, \quad (2.20в)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{-\phi} + \eta C d_\phi = \sqrt{2\gamma}a_{-\phi}, \quad (2.20г)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_a - \eta C (c_{+a} + c_{-a}) = \sqrt{2\gamma_m}q_a - f_{s\phi}, \quad (2.20д)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_\phi - \eta C (c_{+\phi} - c_{-\phi}) = \sqrt{2\gamma_m}q_\phi + f_{sa}. \quad (2.20е)$$

С одной стороны, сумма амплитудных квадратур $c_{+a} + c_{-a}$ не несет информации о движении механического осциллятора (отсутствуют члены, пропорциональные d_a или d_ϕ). С другой стороны он отвечает за ОФВ в (2.20д). Аналогично, разность фазовых квадратур $c_{+\phi} - c_{-\phi}$ не несет информации о движении механического осциллятора, но отвечает за ОФВ в (2.20е). Эта особенность позволяет нам исключить ОФВ при детектировании сигнала.

Подчеркнем, что в схеме на рис. 2.2 каждую из квадратур можно измерить независимо в отдельном пространственном и частотном канале. После

измерения результаты можно подвергнуть обработке. Например, можно по отдельности измерить амплитудные квадратуры b_{+a} , b_{-a} и взять их численную комбинацию. Также можно по отдельности измерить фазовые квадратуры $b_{+\phi}$, $b_{-\phi}$ и взять их численную комбинацию. Однако и амплитудную $b_{\pm a}$ и фазовую $b_{\pm\phi}$ квадратуру в одно и то же время измерять нельзя.

Введя комбинации

$$g_{a\pm} = \frac{c_{+a} \pm c_{-a}}{\sqrt{2}}, \quad g_{\phi\pm} = \frac{c_{+\phi} \pm c_{-\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (2.21a)$$

$$\alpha_{a\pm} = \frac{a_{+a} \pm a_{-a}}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_{\phi\pm} = \frac{a_{+\phi} \pm a_{-\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (2.21б)$$

$$\beta_{a\pm} = \frac{b_{+a} \pm b_{-a}}{\sqrt{2}}, \quad \beta_{\phi\pm} = \frac{b_{+\phi} \pm b_{-\phi}}{\sqrt{2}} \quad (2.21в)$$

и переписав (2.20) с помощью

$$(\gamma - i\Omega)g_{a+} = \sqrt{2}\gamma\alpha_{a+}, \quad (2.22a)$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{a-} + \sqrt{2}\eta C d_a = \sqrt{2}\gamma\alpha_{a-}, \quad (2.22б)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_a - \sqrt{2}\eta C g_{a+} = \sqrt{2}\gamma_m q_a - f_{s\phi}, \quad (2.22в)$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{\phi+} + \sqrt{2}\eta C d_\phi = \sqrt{2}\gamma\alpha_{\phi+}, \quad (2.22г)$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{\phi-} = \sqrt{2}\gamma\alpha_{\phi-}, \quad (2.22д)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_\phi - \sqrt{2}\eta C g_{\phi-} = \sqrt{2}\gamma_m q_\phi + f_{sa}, \quad (2.22е)$$

получим, что уравнения (2.22а, 2.22б, 2.22в) и (2.22г, 2.22д, 2.22е) не связаны между собой. В дальнейшем будем рассматривать случай измерения амплитудных квадратур.

2.2 Метод измерения с исключением ОФВ

2.2.1 Анализ предельной чувствительности

Удобно представить решение уравнений (2.22а, 2.22б, 2.22в) в виде

$$\beta_{a+} = \xi \alpha_{a+}, \quad \xi \equiv \frac{\gamma + i\Omega}{\gamma - i\Omega}, \quad \mathcal{K} \equiv \frac{4\gamma \eta^2 C^2}{\gamma^2 + \Omega^2}, \quad (2.23a)$$

$$\beta_{a-} = \xi \left(\alpha_{a-} - \frac{\mathcal{K} \alpha_{a+}}{\gamma_m - i\Omega} \right) - \frac{\sqrt{\xi \mathcal{K}}}{\gamma_m - i\Omega} \left(\sqrt{2\gamma_m} q_a - f_{s\phi} \right). \quad (2.23б)$$

Как и ожидалось, ОФВ в выражении (2.23б) пропорционально нормированной мощности накачки $\mathcal{K}$. Однако, его можно исключить с помощью пост-обработки. Можно измерить и β_{a+} , и β_{a-} одновременно и вычесть β_{a+} из β_{a-} , чтобы полностью избавиться от ОФВ. Это значит, что мы можем измерить комбинацию

$$\beta_a^{\text{comb}} = \beta_{a-} + \xi \frac{\mathcal{K} \alpha_{a+}}{\gamma_m - i\Omega} = \xi \alpha_{a-} - \frac{\sqrt{\xi \mathcal{K}}}{\gamma_m - i\Omega} \left(\sqrt{2\gamma_m} q_a - f_{s\phi} \right), \quad (2.24)$$

которая полностью свободна от ОФВ.

Запишем условие детектирования силы с помощью односторонней спектральной плотности мощности шумов $S_f(\Omega)$, пересчитанной к сигнальной силе (2.11). Потребовав, чтобы отношение сигнал-шум превосходило единицу, получим

$$f_{s0} \geq \sqrt{S_f(\Omega) \cdot \frac{\Delta\Omega}{2\pi}}, \quad (2.25)$$

где $\Delta\Omega \simeq 2\pi/\tau$. Используя выражения (2.10б, 2.13б), в случае измерения только β_{-a} (2.23б) мы получим

$$S_f(\Omega) = 2\gamma_m(2n_T + 1) + \frac{(\gamma_m^2 + \Omega^2)}{|\mathcal{K}|} + |\mathcal{K}| \geq 2\gamma_m(2n_T + 1) + S_{SQL,f}, \quad (2.26)$$

$$S_{SQL,f} = 2\sqrt{\gamma_m^2 + \Omega^2}. \quad (2.27)$$

Чувствительность ограничена СКП,

При измерении комбинации β_a^{comb} (2.24) чувствительность не ограничена СКП.

$$S_f(\Omega) = 2\gamma_m(2n_T + 1) + \frac{(\gamma_m^2 + \Omega^2)}{|\mathcal{K}|} \quad (2.28)$$

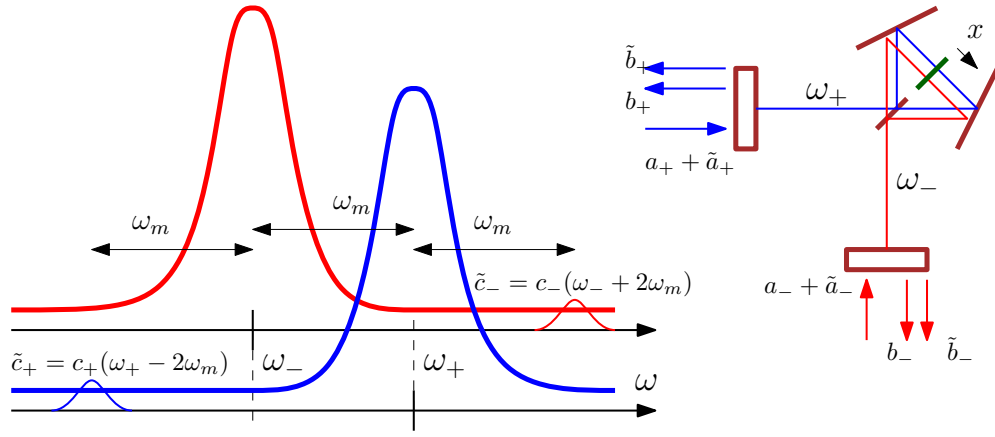


Рисунок 2.3 — Спектральные составляющие $\tilde{c}_{\pm} = c_{\pm}(\omega_{\pm} \mp 2\omega_m)$ вносят вклад в ОФВ, действующее на механический осциллятор. Мы предполагаем, что можно независимо измерять волны $b_{\pm}$ и $\tilde{b}_{\pm}$ при помощи узкополосного фильтра.

Первое слагаемое описывает тепловой шум, а второе — дробовой шум фотонов. Дробовой шум падает с ростом мощности накачки. Слагаемое, описывающее ОФВ отсутствует.

Следует отметить, что тепловой шум присутствует в любой оптомеханической схеме. Он может значительно превосходить ошибку измерения, связанную с измерительным прибором. Однако, правильная процедура измерения позволяет подавить его и исключить начальную квантовую неопределенность механической системы. Главным требованием является малое время измерения, которое должно быть намного меньше, чем время звона механической системы [23; 38]. Это возможно, если ширина полосы измерения превосходит ширину полосы механической моды. Чувствительность узкополосного измерения обычно ограничена тепловым шумом.

2.2.2 Анализ влияния паразитных спектральных составляющих

ОФВ, действующее на механический осциллятор, пропорционально перекрестному члену произведения оптических мод $(c_-c_+^{\dagger} + c_-^{\dagger}c_+)$. Это значит, что флуктуации с Фурье-амплитудами $\tilde{c}_-(\Omega) = c_-(\omega_- + 2\omega_m + \Omega)$ и $\tilde{c}_+(\Omega) = c_+(\omega_+ - 2\omega_m + \Omega)$ (см. рис. 2.3) вносят вклад в флуктуирующую силу давления света. Мы пренебрегли этими паразитными спектральными составляющими,

потому что их величина мала. Рассмотрим их вклад и найдем, как они ограничивают чувствительность предложенной измерительной схемы.

Паразитные боковые полосы вносят дополнительные члены в выражения для измеряемых комбинаций квадратур. (2.24) будет равно

$$\beta_a^{\text{comb}} = \xi \left(\alpha_{a-} + \frac{\mathcal{K}\tilde{g}_{a+}}{(\gamma_m - i\Omega)} \cdot \frac{(\gamma - i\Omega)}{\sqrt{2\gamma}} - \frac{\sqrt{\xi\mathcal{K}}}{\gamma_m - i\Omega} \left(\sqrt{2\gamma_m}q_a - f_{s\phi} \right) \right), \quad (2.29)$$

где шумовое слагаемое $\tilde{g}_{a+}$, определенное выражением (С.8), при условии (2.2) примерно равно

$$\tilde{g}_{a+} \simeq \frac{\sqrt{\gamma}}{2\omega_m} (\tilde{a}_{+\phi} - \tilde{a}_{-\phi}). \quad (2.30)$$

См. детали в Приложении С.

ОФВ, вносимое паразитными составляющими, ограничивает чувствительность измерения. Уточненное выражение для спектральной плотности мощности равно

$$S_f(\Omega) = 2\gamma_m(2n_T + 1) + \frac{(\gamma_m^2 + \Omega^2)}{|\mathcal{K}|} + \frac{|\mathcal{K}|(\gamma^2 + \Omega^2)}{4\omega_m^2} \geq \quad (2.31a)$$

$$\geq 2\gamma_m(2n_T + 1) + \frac{\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2}}{2\omega_m} S_{SQL,f} \quad (2.31b)$$

Хоть при условии (2.2) чувствительность может быть лучше, чем СКП, она становится ограниченной, когда мощность накачки достигает оптимального значения, которое можно найти из выражения (2.31б)

$$|\mathcal{K}_{opt}|^2 = 4\omega_m^2 \frac{\gamma_m^2 + \Omega^2}{\gamma^2 + \Omega^2} \gg |\mathcal{K}_{SQL}|^2, \quad (2.32)$$

где $\mathcal{K}_{SQL}$ соответствует мощности накачки, требуемой для достижения СКП.

Влияние паразитных составляющих можно уменьшить, если измерять $\tilde{b}_-(\Omega) = b_-(\omega_- + 2\omega_m + \Omega)$ вместе с $\tilde{b}_+(\Omega) = b_+(\omega_- - 2\omega_m + \Omega)$ независимо от остальных спектральных составляющих выходного света. Такое измерение можно провести при помощи узкополосных оптических фильтров.

Схема такого измерения продемонстрирована на рис. 2.3. Измерение правильно подобранных квадратур $\tilde{b}_{\pm}$ позволяет частично вычесть паразитное ОФВ, вносимое слагаемым, пропорциональным $\tilde{g}_{a+}$ в (2.29). Коэффициент подавления $R \simeq \Omega/2\omega_m \ll 1$ (см. детали в Приложении С.2).

Это значит, что в случае $\gamma_m = 0$ и условиях (2.2) выражение (2.31б) примет вид

$$S_f(\Omega) = \frac{\Omega^2}{|\mathcal{K}|} + \frac{|\mathcal{K}|\gamma^2\Omega^2}{16\omega_m^4} \geq \frac{\gamma|\Omega|}{2\omega_m^2} S_{SQL,f}. \quad (2.33)$$

Чувствительность (2.33) лучше, чем чувствительность (2.31б) в случае не подавленных паразитных составляющих.

2.3 Выводы

Преобразователи, основанные на схемах на рис. 2.1 и рис. 2.2, переводят информацию о квадратуре механического осциллятора в оптические квадратуры двух независимых полей, которые можно измерить независимо. Они дают новую возможность для исключения ОФВ с помощью пост обработки.

Одно из главных свойств предложенного процесса измерения состоит в использовании двухчастотной накачки и независимой регистрации сигнала в двух каналах. Оно позволяет отдельно измерить ОФВ и полностью исключить его из результатов измерения в широкой полосе частот.

Одноканальное измерение оптической квадратуры является общим свойством многих экспериментальных схем детектирования силы с подавлением ОФВ. Они основаны на использовании оптической жесткости [13; 80], параметрического усиления в побочном резонаторе [25; 57] и неклассических состояний света [22; 81–86]. В этих схемах используется только один выход.

В предложенной схеме происходит измерение или суммы и разности амплитудных квадратур (2.24), или суммы и разности фазовых квадратур двух оптических мод. Возможно обобщение на измерение суммы и разности произвольных квадратур. Эта схема измерения позволяет исключить ОФВ в широкой полосе частот.

Для экспериментальной реализации предложенного процесса измерения необходимо знать точные значения параметров системы. Методы определения этих параметров были предложены в [13]. Для демонстрации ожидаемой чувствительности предложенной системы мы построили графики спектральной плотности мощности шума (рис. 2.4) при реалистичных параметрах системы, перечисленных в табл. 1. Значения этих параметров основаны на оценках и

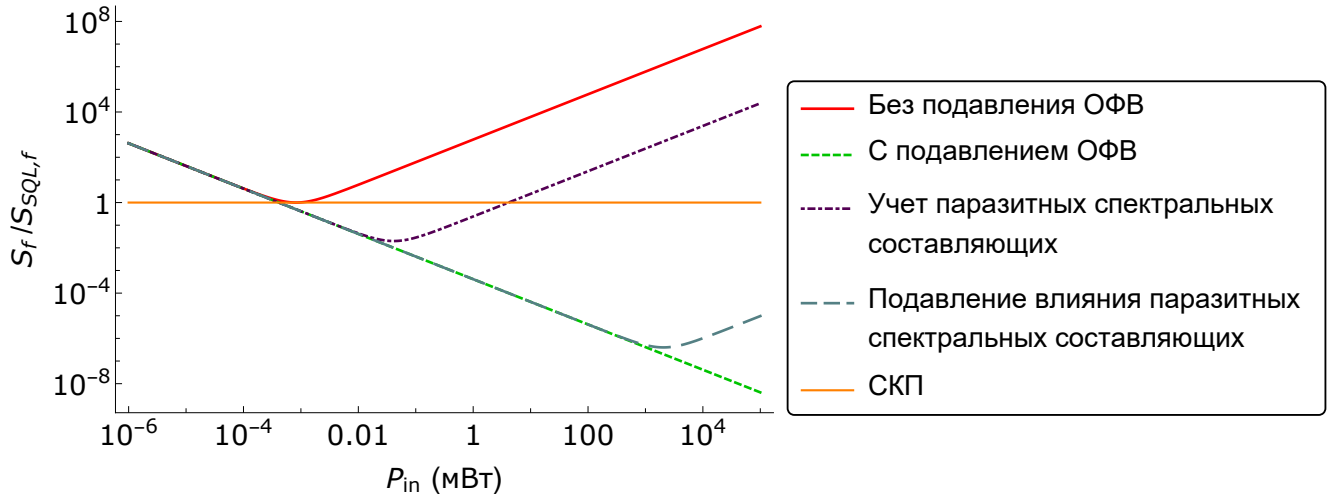


Рисунок 2.4 — Зависимость спектральной плотности мощности шума S от падающей мощности P_{in} . Измерение β_{-a} (красная линия) (2.26) не позволяет преодолеть СКП (горизонтальная линия) (2.27). Измерение комбинации β_a^{comb} (зеленый пунктир) (2.28) позволяет исключить ОФВ и преодолеть СКП. При учете паразитных спектральных составляющих все еще можно преодолеть СКП (фиолетовый штрих-пунктир) (2.31б), но соответствующая спектральная плотность мощности растет при повышении мощности. Подавление вклада паразитных гармоник (синяя линия) (2.33) повышает чувствительность, но не дает полностью исключить ОФВ. Графики построены при $\Omega/2\pi = 100$ Гц и параметрах, взятых из табл. 1 кроме $\gamma_m = 0$.

предположениях данных в [11; 13]. Эти графики построены для идеального случая $\gamma_m = 0$, $n_T = 0$, соответствующего присутствию только квантового шума и отсутствию теплового. Кристаллический напряженный кремний подает большие надежды, потому что осцилляторы сделанные из него обладают высокой добротностью $Q > 10^{10}$ [44], что в 10 раз выше, чем для осцилляторов сделанных из Si_3N_4 .

Мы предложили фильтрацию выходных полей для подавления ОФВ, связанного с паразитными спектральными составляющими. Экспериментальная реализация этой фильтрации не проста, но возможна в принципе.

Таблица 1 — Предложенные оптомеханические параметры

	Параметр	Величина	Ед. изм.
Частота осциллятора	$\omega_m/2\pi$	2.5	МГц
Показатель затухания осциллятора	$\gamma_m/2\pi$	100	Гц
Масса осциллятора	m	10	нг
Длина резонатора	L	40	см
Частота резонатора	$\omega_0/2\pi$	300	ТГц
Показатель затухания резонатора	$\gamma/2\pi$	0.1	МГц

Глава 3. Широкополосное многомерное вариационное измерение

Анализ двухмодовой оптомеханической системы, рассмотренной в предыдущем разделе, показывает, что для ее работы необходима дополнительная стабилизация механического осциллятора с помощью ортогональной накачки или внешней классической силы. Так же на ее чувствительность негативно влияют паразитные спектральные составляющие.

В данном разделе проведен анализ чувствительности трехмодовой оптомеханической системы с исключением ОФВ для детектирования резонансной силы. Показано, что она свободна от недостатков двухмодовой схемы при сохранении возможности широкополосного исключения ОФВ.

Данная глава основана на результатах, представленных в статье [A2].

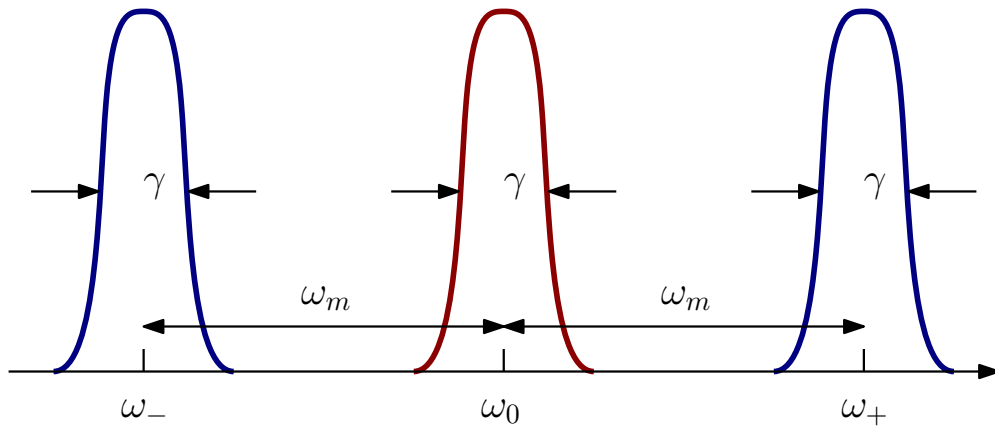


Рисунок 3.1 — Структура оптических мод в системе для детектирования резонансной силы. Три эквидистантные оптические моды взаимодействуют с механическим осциллятором. Разность между их частотами равна частоте механического осциллятора ω_m . Показатель затухания равен γ для всех трех мод, $\gamma \ll \omega_m$. Центральная мода с частотой ω_0 резонансно накачивается светом в когерентном состоянии.

3.1 Описание физической системы

Рассмотрим три оптические моды с частотами ω_- , ω_0 , ω_+ , разность которых равна собственной частоте механического осциллятора ω_m , как показано на рис. 3.1. Резонансная накачка происходит на частоте средней моды с частотой ω_0 , моды $\omega_{\pm}$ не накачиваются. Механический осциллятор связан с оптическими модами. Параметрическое взаимодействие между оптической накачкой и механическим осциллятором порождает фотоны в боковых оптических модах $\omega_{\pm}$, которые детектируются независимо.

Предположим, что показатели затухания оптических мод одинаковы и связаны с шириной резонансной линии на полувысоте, равной 2γ . Показатель затухания механического осциллятора γ_m мал по сравнению с показателем затухания оптических мод. Так же будем считать, что выполнены условия работы в режиме разрешенной боковой полосы и фазового синхронизма

$$\gamma_m \ll \gamma \ll \omega_m, \quad \omega_0 - \omega_- = \omega_+ - \omega_0 = \omega_m \quad (3.1)$$

Сосредоточимся на теоретическом описании этой схемы. Возможные варианты для ее реализации предложены в разделе 3.3.3.

3.1.1 Гамильтониан оптомеханической системы

Гамильтониан, описывающий систему, можно представить в общем виде

$$H = H_0 + H_{\text{int}} + H_s + H_T + H_{\gamma} + H_{T,m} + H_{\gamma_m},$$

$$H_0 = \hbar\omega_+ \hat{c}_+^{\dagger} \hat{c}_+ + \hbar\omega_0 \hat{c}_0^{\dagger} \hat{c}_0 + \hbar\omega_- \hat{c}_-^{\dagger} \hat{c}_- + \hbar\omega_m \hat{d}^{\dagger} \hat{d}, \quad (3.2a)$$

$$H_{\text{int}} = \frac{\hbar}{i} \left(\eta \left[\hat{c}_0^{\dagger} \hat{c}_- + \hat{c}_+^{\dagger} \hat{c}_0 \right] \hat{d} - \eta^* \left[\hat{c}_0 \hat{c}_-^{\dagger} + \hat{c}_+ \hat{c}_0^{\dagger} \right] \hat{d}^{\dagger} \right), \quad (3.2b)$$

$$\hat{H}_s = -F_s x_0 \left(\hat{d} + \hat{d}^{\dagger} \right). \quad (3.2b)$$

Здесь $\hat{d}$ — это оператор уничтожения механического осциллятора, $\hat{c}_{0,\pm}$ — это операторы уничтожения соответствующих оптических мод. Оператор координаты

механического осциллятора x можно представить в виде

$$x = x_0 \left(\hat{d} + \hat{d}^\dagger \right), \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}. \quad (3.3)$$

Часть гамильтониана H_{int} описывает взаимодействие между механической и оптическими модами с постоянной взаимодействия η . H_s описывает воздействие классической сигнальной силы F_s на механический осциллятор. Гамильтонианы H_T и H_γ описывают внешнюю среду и связь оптических мод с ней посредством показателя затухания γ . Мы пренебрегаем внутренними потерями в оптических модах и принимаем во внимание только затухание, связанное со связью. Аналогично, гамильтонианы $H_{T,m}$ и H_{γ_m} описывают внешнюю среду и связь моды механического осциллятора с ней посредством показателя затухания γ_m .

Обозначим нормализованные амплитуды входных и выходных оптических полей как $\hat{a}_{\pm,0}$ и $\hat{b}_{\pm,0}$. Введя медленные амплитуды

$$\hat{c}_0 \rightarrow \hat{c}_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad \hat{c}_\pm \rightarrow \hat{c}_\pm e^{-i\omega_\pm t}, \quad \hat{d} \rightarrow \hat{d} e^{-i\omega_m t}, \quad (3.4)$$

можно получить уравнения Ланжевена для полей внутри резонатора

$$\dot{\hat{c}}_0 + \gamma \hat{c}_0 = \eta^* \hat{c}_+ \hat{d}^\dagger - \eta \hat{c}_- \hat{d} + \sqrt{2\gamma} \hat{a}_0, \quad (3.5a)$$

$$\dot{\hat{c}}_- + \gamma \hat{c}_- = \eta^* \hat{c}_0 \hat{d}^\dagger + \sqrt{2\gamma} \hat{a}_-, \quad (3.5б)$$

$$\dot{\hat{c}}_+ + \gamma \hat{c}_+ = -\eta \hat{c}_0 \hat{d} + \sqrt{2\gamma} \hat{a}_+, \quad (3.5в)$$

$$\dot{\hat{d}} + \gamma_m \hat{d} = \eta^* (\hat{c}_0 \hat{c}_-^\dagger + \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_+) + \sqrt{2\gamma_m} \hat{q} + f_s. \quad (3.5г)$$

Здесь $\hat{q}$ — это оператор уничтожения флуктуаций, действующих на механический осциллятор, f_s — это сигнальная сила нормированная с учетом выражения (3.19).

Уравнения движения (3.5) необходимо дополнить входными-выходными соотношениями

$$\hat{b}_\pm = -\hat{a}_\pm + \sqrt{2\gamma} \hat{c}_\pm. \quad (3.6)$$

Удобно разделить амплитуду поля $\hat{c}_0$ с частотой ω_0 на ее среднее значение C_0 и малые флуктуации $\tilde{c}_0$

$$\hat{c}_0 = C_0 e^{-i\omega_0 t} + \tilde{c}_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad (3.7)$$

Похожие выражения можно записать для боковых оптических мод с частотами $\omega_{\pm}$ и для моды механического осциллятора с частотой ω_m . Амплитуды накачки и выходного поля нормированы на падающую $P_{in} = \hbar\omega|A|^2$ и выходную $P_{out} = \hbar\omega|B|^2$ мощности. Амплитуда поля внутри резонатора нормирована на запасенную в нем энергию $E = \hbar\omega|C|^2$.

Считая, что накачка происходит только на частоте ω_0 , можно получить уравнения движения (3.5) для средних амплитуд в нулевом приближении

$$\gamma C_0 = \eta^* C_+ D^* - \eta C_- D + \sqrt{2\gamma} A_0, \quad (3.8a)$$

$$\gamma C_- = \eta^* C_0 D^*, \quad (3.8б)$$

$$\gamma C_+ = -\eta C_0 D, \quad (3.8в)$$

$$\gamma_m D = \eta^* (C C_-^* + C^* C_+). \quad (3.8г)$$

Эта система имеет стационарное решение

$$C_0 = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} A_0, \quad C_- = C_+ = 0, \quad D = 0. \quad (3.9)$$

Чтобы получить условия устойчивости этого решения, подставим решение (3.9) в уравнения движения (3.5)

$$\dot{\tilde{c}}_0 + \gamma \tilde{c}_0 = 0, \quad (3.10a)$$

$$\dot{\hat{c}}_- + \gamma \hat{c}_- = \eta^* C_0 \hat{d}^*, \quad (3.10б)$$

$$\dot{\hat{c}}_+ + \gamma \hat{c}_+ = -\eta C_0 \hat{d}, \quad (3.10в)$$

$$\dot{\hat{d}} + \gamma_m \hat{d} = \eta^* (\hat{c}_-^* C_0 + \hat{c}_+ C_0^*). \quad (3.10г)$$

Первое уравнение (3.10a) отделяется от трех остальных. Подставив $\hat{c}_+ = c_+ e^{\lambda t}$, $\hat{c}_- = c_- e^{\lambda t}$, $\hat{d} = d e^{\lambda t}$, получим

$$\begin{aligned} (\lambda + \gamma) c_-^* + 0 c_+ - \eta C_0^* d &= 0, \\ 0 c_-^* + (\lambda + \gamma) c_+ + \eta C_0 d &= 0, \\ -\eta^* C_0 c_-^* - \eta^* C_0^* c_+ - (\lambda + \gamma_m) d &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Решив характеристическое уравнение $\Delta = 0$, где Δ — определитель матрицы линейных уравнений (3.11), получим $\lambda_{1,2} = -\gamma < 0$, $\lambda_3 = -\gamma_m < 0$, следовательно стационарное решение (3.9) устойчиво.

Подставив решение (3.9) в уравнения движения (3.5), получим

$$\dot{\tilde{c}}_0 + \gamma \tilde{c}_0 = \sqrt{2\gamma} \hat{a}_0, \quad (3.12a)$$

$$\dot{\hat{c}}_+ + \gamma \hat{c}_+ + \eta C_0 \hat{d} = \sqrt{2\gamma} \hat{a}_+, \quad (3.12б)$$

$$\dot{\hat{c}}_- + \gamma \hat{c}_- - \eta^* C_0^* \hat{d}^\dagger = \sqrt{2\gamma} \hat{a}_-, \quad (3.12в)$$

$$\dot{\hat{d}} + \gamma_m \hat{d} - \eta^* \left[C_0 \hat{c}_-^\dagger + \hat{c}_+ C_0^* \right] = \sqrt{2\gamma_m} \hat{q} + f_s \quad (3.12г)$$

Мы видим, что флуктуации на частоте ω_0 не влияют на поля на частотах $\omega_\pm$ и что первое выражение (3.12a) отделяется от трех остальных, поэтому его можно опустить из дальнейшего рассмотрения.

Не ограничивая общности, будем считать, что средние амплитуды полей и постоянная оптомеханического взаимодействия являются действительными

$$C_0 = C_0^*, \quad A_0 = A_0^*, \quad \eta = \eta^* \quad (3.13)$$

Считая, что падающие поля находятся в когерентном состоянии, операторы $\hat{a}_\pm$ можно описать следующими коммутационными и корреляционными соотношениями.

$$\left[\hat{a}_\pm(t), \hat{a}_\pm^\dagger(t') \right] = \delta(t - t'), \quad (3.14a)$$

$$\left\langle \hat{a}_\pm(t) \hat{a}_\pm^\dagger(t') \right\rangle = \delta(t - t'), \quad (3.14б)$$

Фурье-образы этих операторов равны

$$\hat{a}_\pm(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_\pm(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}. \quad (3.15)$$

Аналогичные выражения можно записать для других операторов. Используя (3.14a, 3.14б) можно получить коммутационные и корреляционные соотношения для Фурье-амплитуд операторов входных флуктуаций

$$\left[a_\pm(\Omega), a_\pm^\dagger(\Omega') \right] = 2\pi \delta(\Omega - \Omega'), \quad (3.16a)$$

$$\left\langle a_\pm(\Omega) a_\pm^\dagger(\Omega') \right\rangle = 2\pi \delta(\Omega - \Omega'). \quad (3.16б)$$

3.1.2 Решение уравнений Ланжевена

Используя (3.12), можно найти Фурье-амплитуды механического осциллятора d и оптических полей внутри резонатора $c_{\pm}$

$$(\gamma - i\Omega)c_+(\Omega) + \eta C_0 d(\Omega) = \sqrt{2\gamma}a_+(\Omega), \quad (3.17a)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_-(\Omega) - \eta C_0 d^\dagger(-\Omega) = \sqrt{2\gamma}a_-(\Omega), \quad (3.17б)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d(\Omega) - \eta C_0 (c_+(\Omega) + c_-^\dagger(-\Omega)) = \sqrt{2\gamma_m}q(\Omega) + f_s(\Omega) \quad (3.17в)$$

$$b_{\pm}(\Omega) = -a_{\pm}(\Omega) + \sqrt{2\gamma}c_{\pm}(\Omega), \quad (3.17г)$$

Будем считать, что сигнальная сила имеет форму резонансного цуга длительности τ

$$F_s(t) = F_{s0} \sin(\omega_m t + \psi_f) = \quad (3.18)$$

$$= i(F_s(t)e^{-i\omega_m t} - F_s^*(t)e^{i\omega_m t}), \quad -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2},$$

$$f_s(\Omega) = \frac{F_s(\Omega)}{\sqrt{2\hbar\omega_m m}}, \quad f_{s0}(\Omega) = \frac{F_{s0}(\Omega)}{\sqrt{2\hbar\omega_m m}} = 2f_s(\Omega), \quad (3.19)$$

где $F_s(\Omega) \neq F_s^*(-\Omega)$ — это Фурье-амплитуда $F_s(t)$.

Фурье-амплитуды тепловых флуктуаций $\hat{q}$ подчиняются коммутационным и корреляционным соотношениям

$$[q(\Omega), q^\dagger(\Omega')] = 2\pi \delta(\Omega - \Omega'), \quad (3.20a)$$

$$\langle q(\Omega) q^\dagger(\Omega') \rangle = 2\pi (2n_T + 1) \delta(\Omega - \Omega'), \quad (3.20б)$$

$$n_T = \frac{1}{e^{\hbar\omega_m/k_B T} - 1}, \quad (3.20в)$$

где T — это температура окружающей среды.

Введя фазовые и амплитудные квадратуры

$$a_{\pm a} = \frac{a_{\pm}(\Omega) + a_{\pm}^\dagger(-\Omega)}{\sqrt{2}}, \quad (3.21a)$$

$$a_{\pm \phi} = \frac{a_{\pm}(\Omega) - a_{\pm}^\dagger(-\Omega)}{i\sqrt{2}}, \quad (3.21б)$$

(квадратуры остальных операторов вводятся аналогично) и используя выражения (3.17), получим

$$(\gamma - i\Omega)c_{+a} + \eta C_0 d_a = \sqrt{2\gamma} a_{+a}, \quad (3.22a)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{+\phi} + \eta C_0 d_\phi = \sqrt{2\gamma} a_{+\phi}, \quad (3.22б)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{-a} - \eta C_0 d_a = \sqrt{2\gamma} a_{-a}, \quad (3.22в)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{-\phi} + \eta C_0 d_\phi = \sqrt{2\gamma} a_{-\phi}, \quad (3.22г)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_a - \eta C_0 (c_{+a} + c_{-a}) = \sqrt{2\gamma_m} q_a + f_{sa}, \quad (3.22д)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_\phi - \eta C_0 (c_{+\phi} - c_{-\phi}) = \sqrt{2\gamma_m} q_\phi + f_{s\phi}. \quad (3.22е)$$

Обратим внимание, что сумма $c_{+a} + c_{-a}$ не несет информации о движении механического осциллятора (в ней отсутствует слагаемое, пропорциональное d_a), но создает ОФВ в (3.22д).

Удобно ввести суммы и разности квадратур

$$g_{a\pm} = \frac{c_{+a} \pm c_{-a}}{\sqrt{2}}, \quad g_{\phi\pm} = \frac{c_{+\phi} \pm c_{-\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (3.23a)$$

$$\alpha_{a\pm} = \frac{a_{+a} \pm a_{-a}}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_{\phi\pm} = \frac{a_{+\phi} \pm a_{-\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (3.23б)$$

$$\beta_{a\pm} = \frac{b_{+a} \pm b_{-a}}{\sqrt{2}}, \quad \beta_{\phi\pm} = \frac{b_{+\phi} \pm b_{-\phi}}{\sqrt{2}} \quad (3.23в)$$

и переписать выражения (3.22) с помощью этих обозначений

$$(\gamma - i\Omega)g_{a+} = \sqrt{2\gamma}\alpha_{a+}, \quad (3.24a)$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{a-} + \sqrt{2\eta}C_0 d_a = \sqrt{2\gamma}\alpha_{a-}, \quad (3.24б)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_a - \sqrt{2\eta}C_0 g_{a+} = \sqrt{2\gamma_m} q_a + f_{sa}, \quad (3.24в)$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{\phi+} + \sqrt{2\eta}C_0 d_\phi = \sqrt{2\gamma}\alpha_{\phi+}, \quad (3.24г)$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{\phi-} = \sqrt{2\gamma}\alpha_{\phi-}, \quad (3.24д)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_\phi - \sqrt{2\eta}C_0 g_{\phi-} = \sqrt{2\gamma_m} q_\phi + f_{s\phi}. \quad (3.24е)$$

Выражения с комбинациями амплитудных квадратур (3.24а, 3.24б, 3.24в) и фазовых квадратур (3.24г, 3.24д, 3.24е) отделяются друг от друга. Будем рассматривать только случай с измерением амплитудных квадратур.

3.2 Метод измерения с исключением ОФВ

3.2.1 Анализ предельной чувствительности

Подставив решение выражений для комбинаций выходных квадратур (3.24а, 3.24б, 3.24в) в выходные соотношения (3.17г),

$$\beta_{a+} = \xi \alpha_{a+}, \quad \xi = \frac{\gamma + i\Omega}{\gamma - i\Omega}, \quad (3.25а)$$

$$\beta_{a-} = \xi \left(\alpha_{a-} - \frac{\mathcal{K} \alpha_{a+}}{\gamma_m - i\Omega} \right) - \frac{\sqrt{\xi \mathcal{K}}}{\gamma_m - i\Omega} \left(\sqrt{2\gamma_m} q_a + f_{sa} \right), \quad (3.25б)$$

$$\mathcal{K} \equiv \frac{4\gamma \eta^2 C_0^2}{\gamma^2 + \Omega^2} \quad (3.25в)$$

Как и ожидалось, слагаемое, описывающее ОФВ в выражении (3.25б), пропорционально нормированной мощности накачки $\mathcal{K}$. Однако, при постобработке это слагаемое может быть исключено. Измерив β_{+a} и β_{-a} одновременно, можно вычесть β_{+a} из β_{-a} чтобы полностью исключить ОФВ. Это значит, что можно измерить комбинацию

$$\beta_{a-}^{\text{comb}} = \beta_{a-} + \frac{\mathcal{K} \beta_{a+}}{\gamma_m - i\Omega} = \xi \alpha_{a-} - \frac{\sqrt{\xi \mathcal{K}}}{\gamma_m - i\Omega} \left(\sqrt{2\gamma_m} q_a + f_{sa} \right) \quad (3.26)$$

свободную от ОФВ. При этом необходимо отдельно измерять выходные моды $b_{\pm}$ (3.6) на частотах $\omega_{\pm}$, как показано на рис. 3.2.

Проанализируем чувствительность измерения. Условие детектирования сигнальной силы (3.18) можно получить с помощью спектральной плотности мощности $S_f(\Omega)$. Предполагая, что предел детектирования определяется отношением сигнал-шум

$$f_{s0} \geq \sqrt{S_f(\Omega) \frac{\Delta\Omega}{2\pi}}, \quad (3.27)$$

где $\Delta\Omega \simeq 2\pi/\tau$.

Используя (3.16б, 3.20б), получим, что в случае измерения только β_{a-} (3.25б) спектральная плотность мощности шума равна

$$S_f(\Omega) = 2\gamma_m(2n_T + 1) + \frac{\gamma_m^2 + \Omega^2}{\mathcal{K}} + \mathcal{K} \geq 2\gamma_m(2n_T + 1) + S_{SQL,f}, \quad (3.28)$$

$$S_{SQL,f} = 2\sqrt{\gamma_m^2 + \Omega^2}. \quad (3.29)$$

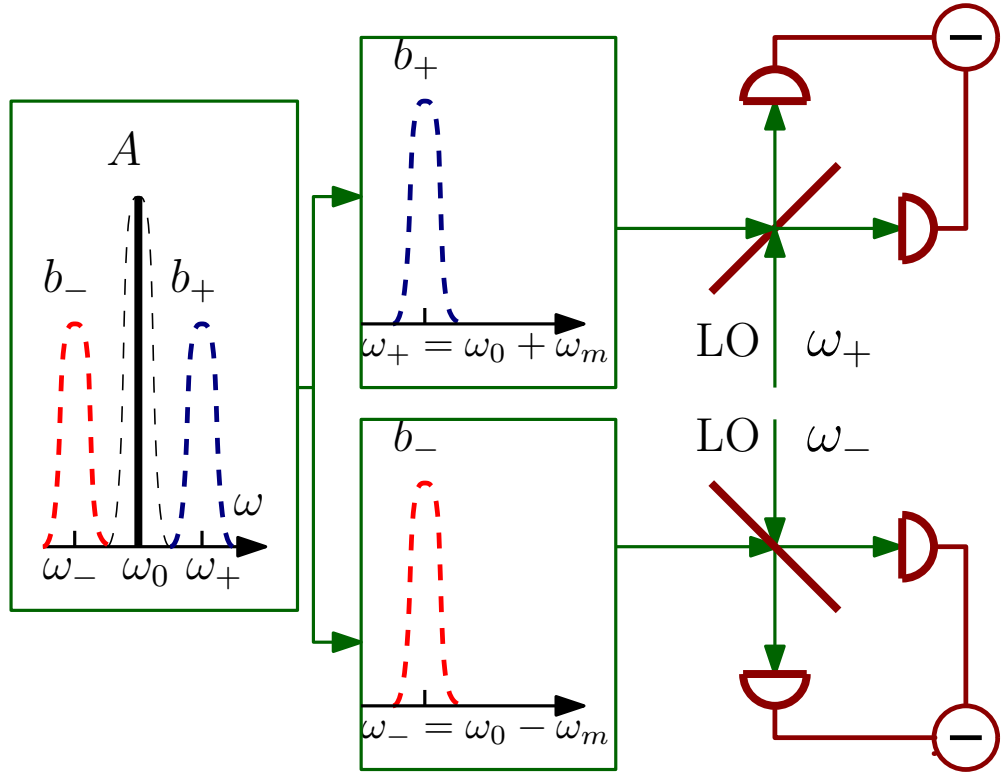


Рисунок 3.2 — Схема, описывающий основной принцип измерения. Квадратуры выходных мод $b_{\pm}$ измеряются независимо с помощью двух гомодинных детекторов с соответствующими опорными генераторами с частотами $\omega_{\pm}$. Сигнал получается при обработке линейной комбинации измерений.

Чувствительность ограничена СКП. При измерении линейной комбинации β_{a-}^{comb} (3.26) чувствительность не ограничена СКП

$$S_f(\Omega) = 2\gamma_m(2n_T + 1) + \frac{\gamma_m^2 + \Omega^2}{\mathcal{K}}. \quad (3.30)$$

Первое слагаемое описывает тепловой шум, а второе отвечает за квантовый шум измерения (дробовой шум), который уменьшается с ростом мощности накачки. Слагаемое, отвечающее на ОФВ полностью исключено.

Тепловой шум маскирует сигналы в любой схеме оптомеханического детектирования. Если он поступает в систему по одному каналу, в то же время, а его спектр перекрывается с сигнальным, то его нельзя отделить от самого сигнала. Погрешность измерения, связанная с тепловым шумом, может превышать погрешность, связанную с самой измерительной системой. Можно снизить воздействие теплового шума при малом времени опроса τ , которое должно быть много меньше времени звона механической системы, то есть $\gamma_m \tau \ll 1$ [23;

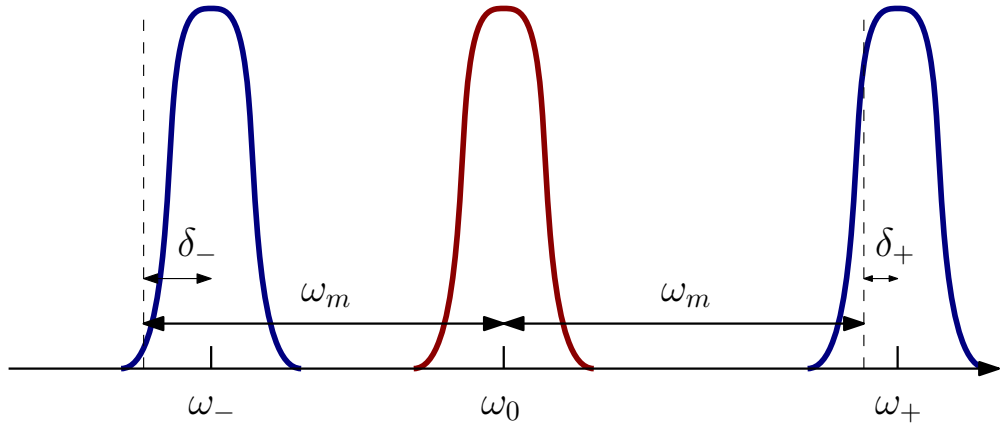


Рисунок 3.3 — Более общий случай не эквидистантного оптического триплета.

38]. Это возможно, если ширина полосы измерения превышает ширину механической моды. Чувствительность узкополосного измерения резонансных сил обычно ограничена тепловым шумом.

3.2.2 Анализ влияния расстройки оптических мод

Анализ чувствительности, проведенный в разделе 3.1.2, был сделан в приближении эквидистантных оптических мод с разностью частот равной частоте механического осциллятора (3.1). Проведем анализ системы, для которой условия фазового синхронизма не выполняются. Пусть частота левой гармоники отличается от идеальной на произвольную величину δ_- , а частота правой гармоники отличается от идеальной на произвольную величину δ_+ , как показано на рис. 3.3.

$$\omega_0 - \omega_- = \omega_m - \delta_-, \quad \omega_+ - \omega_0 = \omega_m + \delta_+. \quad (3.31)$$

Отстройкой частоты накачки δ_0 от резонансной частоты ω_0 и отстройкой частоты сигнала δ_f от частоты механического осциллятора ω_m можно пренебречь. Накачка может быть привязана к моде резонатора, а частоту механического осциллятора можно подобрать равной частоте сигнала.

Уравнения Ланжевена примут вид

$$\dot{\hat{c}}_0 + \gamma \hat{c}_0 = \eta^* \hat{c}_+ \hat{d}^\dagger - \eta \hat{c}_- \hat{d} + \sqrt{2\gamma} \hat{a}_0, \quad (3.32a)$$

$$\dot{\hat{c}}_- + (\gamma - i\delta_-) \hat{c}_- = \eta^* \hat{c}_0 \hat{d}^\dagger + \sqrt{2\gamma} \hat{a}_-, \quad (3.32б)$$

$$\dot{\hat{c}}_+ + (\gamma - i\delta_+) \hat{c}_+ = -\eta \hat{c}_0 \hat{d} + \sqrt{2\gamma} \hat{a}_+, \quad (3.32в)$$

$$\dot{\hat{d}} + \gamma_m \hat{d} = \eta^* (\hat{c}_0 \hat{c}_-^\dagger + \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_+) + \sqrt{2\gamma_m} \hat{q} + f_s. \quad (3.32г)$$

Будем считать расстройки малыми по сравнению с ширинами оптических мод $\delta_\pm \ll \gamma$.

Средние амплитуды механической и оптических мод равны

$$C_0 = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} A_0, \quad C_- = C_+ = D = 0. \quad (3.33)$$

Это решение устойчиво, так как действительные части корней характеристического уравнения отрицательны $\text{Re} \lambda_{1,2} = -\gamma < 0$, $\lambda_3 = -\gamma_m$.

Аналогично случаю без расстроек (3.13), будем считать, что средние амплитуды и постоянная оптомеханической связи являются действительными. Подставив средние амплитуды в выражения (3.32), получим уравнения движения Фурье-амплитуд оптических гармоник и механического осциллятора

$$(\gamma - i\delta_- - i\Omega) c_- = \eta C_0 d^\dagger + \sqrt{2\gamma} a_-, \quad (3.34a)$$

$$(\gamma - i\delta_+ - i\Omega) c_+ = -\eta C_0 d + \sqrt{2\gamma} a_+, \quad (3.34б)$$

$$(\gamma_m - i\Omega) d = \eta C_0 (c_-^\dagger + c_+) + \sqrt{2\gamma_m} q + f_s. \quad (3.34в)$$

Введя квадратуры так же, как в (3.21), получим выражения для квадратур. Они обозначены штрихами, чтобы отличить их от выражений без расстроек

(3.22)

$$c'_{+a} = \frac{(-\eta C_0 d_a + \sqrt{2\gamma} a_{+a})(\gamma - i\Omega)}{(\gamma - i\Omega)^2 + \delta_+^2} - \frac{\delta_+(-\eta C_0 d_\phi + \sqrt{2\gamma} a_{+\phi})}{(\gamma - i\Omega)^2 + \delta_+^2}, \quad (3.35a)$$

$$c'_{-a} = \frac{(\eta C_0 d_a + \sqrt{2\gamma} a_{-a})(\gamma - i\Omega)}{(\gamma - i\Omega)^2 + \delta_-^2} - \frac{\delta_-(-\eta C_0 d_\phi + \sqrt{2\gamma} a_{-\phi})}{(\gamma - i\Omega)^2 + \delta_-^2}, \quad (3.35б)$$

$$c'_{+\phi} = \frac{(-\eta C_0 d_\phi + \sqrt{2\gamma} a_{+\phi})(\gamma - i\Omega)}{(\gamma - i\Omega)^2 + \delta_+^2} + \frac{\delta_+(-\eta C_0 d_a + \sqrt{2\gamma} a_{+a})}{(\gamma - i\Omega)^2 + \delta_+^2}, \quad (3.35в)$$

$$c'_{-\phi} = \frac{(-\eta C_0 d_\phi + \sqrt{2\gamma} a_{-\phi})(\gamma - i\Omega)}{(\gamma - i\Omega)^2 + \delta_-^2} + \frac{\delta_-(-\eta C_0 d_a + \sqrt{2\gamma} a_{-a})}{(\gamma - i\Omega)^2 + \delta_-^2}, \quad (3.35г)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_a - \eta C_0(c_{+a} + c_{-a}) = \sqrt{2\gamma_m} q_a + f_{sa}, \quad (3.35д)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_\phi - \eta C_0(c_{+\phi} - c_{-\phi}) = \sqrt{2\gamma_m} q_\phi + f_{s\phi}. \quad (3.35е)$$

“Новые” квадратуры (3.35) могут быть выражены как линейные комбинации “старых”. Сохранив только линейные по $\delta_\pm$ члены в выражениях (3.35), получим

$$c'_{+a} = c_{+a} - \frac{\delta_+}{\gamma - i\Omega} c_{+\phi}, \quad (3.36a)$$

$$c'_{-a} = c_{-a} - \frac{\delta_-}{\gamma - i\Omega} c_{-\phi}, \quad (3.36б)$$

$$c'_{+\phi} = c_{+\phi} + \frac{\delta_+}{\gamma - i\Omega} c_{+a}, \quad (3.36в)$$

$$c'_{-\phi} = c_{-\phi} + \frac{\delta_-}{\gamma - i\Omega} c_{-a}, \quad (3.36г)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_a - \eta C_0(c_{+a} + c_{-a}) = \sqrt{2\gamma_m} q_a + f_{sa}, \quad (3.36д)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_\phi - \eta C_0(c_{+\phi} - c_{-\phi}) = \sqrt{2\gamma_m} q_\phi + f_{s\phi}. \quad (3.36е)$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести симметричную и антисимметричную расстройку

$$\Delta = \frac{\delta_+ + \delta_-}{2}, \quad \delta = \frac{\delta_+ - \delta_-}{2}. \quad (3.37)$$

Введем суммы и разности квадратур так же, как в (3.23а), и оставим только члены первого порядка малости по $\delta_\pm$. Обозначим комбинации “новых” квадратур штрихами и выразим их через комбинации “старых” квадратур (3.23а)

$$g'_{a+} = g_{a+} - \frac{\delta}{\gamma - i\Omega} g_{\phi-} - \frac{\Delta}{\gamma - i\Omega} g_{\phi+}, \quad (3.38a)$$

$$g'_{a-} = g_{a-} - \frac{\Delta}{\gamma - i\Omega} g_{\phi-} - \frac{\delta}{\gamma - i\Omega} g_{\phi+}, \quad (3.38б)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_a = \sqrt{2}\eta C_0 g_{a+} + \sqrt{2\gamma_m} q_a + f_a, \quad (3.38в)$$

$$g'_{\phi-} = g_{\phi-} + \frac{\delta}{\gamma - i\Omega} g_{a+} + \frac{\Delta}{\gamma - i\Omega} g_{a-}, \quad (3.38г)$$

$$g'_{\phi+} = g_{\phi+} + \frac{\Delta}{\gamma - i\Omega} g_{a+} + \frac{\delta}{\gamma - i\Omega} g_{a-}, \quad (3.38д)$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_\phi = \sqrt{2}\eta C_0 g_{\phi-} + \sqrt{2\gamma_m} q_\phi + f_\phi. \quad (3.38е)$$

Сумму и разность выходных квадратур можно получить с помощью входных-выходных соотношений (3.6)

$$\beta'_{a+} = \beta_{a+} - \frac{\delta\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega} g_{\phi-} - \frac{\Delta\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega} g_{\phi+}, \quad (3.39a)$$

$$\beta'_{a-} = \beta_{a-} - \frac{\Delta\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega} g_{\phi-} - \frac{\delta\sqrt{2\gamma}}{\gamma - i\Omega} g_{\phi+}, \quad (3.39б)$$

При измерении комбинации квадратур, аналогичной (3.26), можно исключить главный вклад в ОФВ, так же, как и в случае без расстроек. Однако, невозможно исключить слагаемые, пропорциональные δ и Δ .

$$\begin{aligned} \beta_a^{comb'} = & \frac{\mathcal{K}}{\gamma_m - i\Omega} \beta'_{+a} + \beta'_{-a} \approx \xi \alpha_{-a} - \frac{\sqrt{\xi\mathcal{K}}}{\gamma_m - i\Omega} \left(\sqrt{2\gamma_m} q_a + f_{sa} \right) - \\ & - \frac{\mathcal{K}}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)} \left[\delta - \frac{\Delta\xi\mathcal{K}}{(\gamma_m - i\Omega)} \right] \alpha_{\phi-} - \\ & - \frac{2\gamma\Delta\mathcal{K}}{(\gamma - i\Omega)^2(\gamma_m - i\Omega)} \alpha_{\phi+} - \frac{\sqrt{\xi\mathcal{K}}\Delta\mathcal{K}}{(\gamma - i\Omega)(\gamma_m - i\Omega)^2} \left(\sqrt{2\gamma_m} q_\phi + f_{s\phi} \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

В этом случае оптимальным будет измерение следующей комбинации квадратур сигнала

$$f_s = \frac{f_{s,a} + DK f_{s,\phi}}{\sqrt{1 + |DK|^2}}, \quad (3.41)$$

где

$$D = \frac{\Delta}{(\gamma - i\Omega)(\gamma_m - i\Omega)}. \quad (3.42)$$

Спектральная плотность мощности шума, рассчитанная из (3.40), равна

$$S(\Omega) = 2\gamma_m(n_T + 1) + \frac{\gamma_m^2 + \Omega^2}{\mathcal{K}(1 + |D|^2\mathcal{K}^2)} + \frac{\mathcal{K} \left[|\delta - \xi\mathcal{K}D(\gamma - i\Omega)|^2 + 4\gamma^2|D|^2(\gamma_m^2 + \Omega^2) \right]}{(\gamma^2 + \Omega^2)(1 + |D|^2\mathcal{K}^2)}. \quad (3.43)$$

Для упрощения следует рассмотреть три интервала мощности накачки. Для достаточно слабой накачки

$$\mathcal{K}|D| \ll \left| \frac{\delta}{\gamma - i\Omega} \right| \quad \text{или} \quad \mathcal{K} \ll \mathcal{K}_{crit1} = \frac{\sqrt{\gamma_m^2 + \Omega^2}|\delta|}{|\Delta|} \quad (3.44)$$

можно пренебречь членами $\xi\mathcal{K}D(\gamma - i\Omega)$ из числителя и $|D|^2\mathcal{K}$ из знаменателя выражения для спектральной плотности мощности (3.43). Тогда оно примет вид

$$S(\Omega) = 2\gamma_m(n_T + 1) + \frac{\gamma_m^2 + \Omega^2}{\mathcal{K}} + \mathcal{K} \left(\frac{\delta^2}{\gamma^2 + \Omega^2} + \frac{4\gamma^2\Delta^2}{(\gamma^2 + \Omega^2)^2} \right) \quad (3.45)$$

Последнее слагаемое описывает остаточное ОФВ из-за расстройки частоты.

Оптимальный параметр накачки $\mathcal{K}_{opt}$, при котором достигается минимум спектральной плотности мощности шума (3.45), равен

$$\mathcal{K}_{opt} = \frac{\sqrt{\gamma_m^2 + \Omega^2}(\gamma^2 + \Omega^2)}{\sqrt{\delta^2(\gamma^2 + \Omega^2) + 4\gamma^2\Delta^2}}. \quad (3.46)$$

Сравнивая $\mathcal{K}_{opt}$ с $\mathcal{K}_{crit1}$, мы видим, что для выполнения условий (3.44) отстройки должны удовлетворять дополнительному условию

$$\gamma^2\Delta^2 \ll \delta^2(\delta^2 + 4\Delta^2). \quad (3.47)$$

При $|\Delta| \geq |\delta|$ это условие невыполнимо, в связи с изначальным предположением $|\delta| < \gamma$. Поэтому в выражении (3.45) можно опустить член, связанный с ОФВ, и записать

$$S(\Omega) = 2\gamma_m(n_T + 1) + \frac{\gamma_m^2 + \Omega^2}{\mathcal{K}}, \quad (3.48)$$

которое достигает минимума

$$S(\Omega) = 2\gamma_m(n_T + 1) + S_{SQL,f} \frac{|\Delta|}{2|\delta|}. \quad (3.49)$$

при $\mathcal{K} \approx \mathcal{K}_{crit1}$.

В обратном случае $|\Delta| \ll |\delta|$, получим,

$$S(\Omega) = 2\gamma_m(n_T + 1) + S_{SQL,f} \frac{|\delta|}{\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2}}. \quad (3.50)$$

В случае промежуточной мощности накачки

$$\mathcal{K}_{crit2} = \frac{\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2} \sqrt{\gamma_m^2 + \Omega^2}}{\Delta} \gg \mathcal{K} \gg \mathcal{K}_{crit1} \quad (3.51)$$

можно опустить член δ из числителя и $|D|^2 \mathcal{K}$ из знаменателя последнего слагаемого выражения для спектральной плотности мощности (3.43). Тогда оно примет вид

$$S(\Omega) = 2\gamma_m(n_T + 1) + \frac{\gamma_m^2 + \Omega^2}{\mathcal{K}} + \mathcal{K}^3 |D|^2. \quad (3.52)$$

Оптимальный параметр накачки $\mathcal{K}_{opt}$, при котором достигается минимум спектральной плотности мощности шума (3.52), равен

$$\mathcal{K}_{opt} = \frac{(\gamma_m^2 + \Omega^2)^{1/2} (\gamma^2 + \Omega^2)^{1/4}}{3^{1/4} |\Delta|^{1/2}}. \quad (3.53)$$

Сравнивая $\mathcal{K}_{opt}$ с $\mathcal{K}_{crit1}$ и $\mathcal{K}_{crit2}$, мы видим, что для выполнения условий (3.51) отстройки должны удовлетворять дополнительному условию

$$1 \gg |\Delta|/\gamma \gg \delta^2/\gamma^2, \quad (3.54)$$

которое вполне выполнимо. В этом случае минимум спектральной плотности мощности равен

$$S_{min} = 2\gamma_m(n_T + 1) + \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt[4]{3}} \frac{\Delta^{1/2}}{(\gamma^2 + \Omega^2)^{1/4}} S_{SQL,f}. \quad (3.55)$$

Наконец, при высокой мощности накачки

$$\mathcal{K}|D| \gg 1, \quad \text{or } \mathcal{K} \gg \mathcal{K}_{crit2}. \quad (3.56)$$

можно пренебречь членом δ в числителе и 1 в знаменателе последнего слагаемого выражения для спектральной плотности мощности (3.43). Тогда оно примет вид

$$S(\Omega) = 2\gamma_m(n_T + 1) + \mathcal{K} + \frac{4\gamma^2(\gamma_m^2 + \Omega^2)}{\mathcal{K}(\gamma^2 + \Omega^2)}. \quad (3.57)$$

Оптимальный параметр накачки $\mathcal{K}_{opt}$, при котором достигается минимум спектральной плотности мощности шума (3.57), равен

$$\mathcal{K}_{opt} = \sqrt{\frac{4\gamma^2(\gamma_m^2 + \Omega^2)}{(\gamma^2 + \Omega^2)}}. \quad (3.58)$$

Сравнивая $\mathcal{K}_{opt}$ с $\mathcal{K}_{crit2}$, мы видим, что для выполнения условий (3.56) отстройки должны удовлетворять дополнительному условию $1 \ll (2\Delta)/\gamma$, которое противоречит нашему предположению, что $\Delta \ll \gamma$. Следовательно, в данном случае будет доминировать ОФВ и выражение для спектральной плотности мощности (3.57) примет вид

$$S(\Omega) \simeq 2\gamma_m(n_T + 1) + \mathcal{K}. \quad (3.59)$$

Оно достигает минимум при $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{crit2}$, а ее минимум связан с СКП (3.29) следующим образом

$$S(\Omega) = 2\gamma_m(n_T + 1) + \mathcal{K}_{crit2} = 2\gamma_m(n_T + 1) + S_{SQL,f} \frac{\sqrt{\gamma^2 + \Omega^2}}{2\Delta}. \quad (3.60a)$$

Сравнивая результаты (3.49, 3.50, 3.55, 3.60) можно видеть, что в случае $|\Delta| \gg |\delta|$ оптимальным является режим промежуточной мощности накачки, а в противоположном случае, $|\Delta| \ll |\delta|$, оптимальным будет предел слабой накачки.

3.3 Особенности оптомеханической системы

В данном разделе мы рассмотрим фундаментальные свойства предложенной оптомеханической системы, которые ведут к исключению ОФВ.

3.3.1 Когерентная оптомеханическая связь

Примером системы с когерентной оптомеханической связью является кольцевой резонатор с частично отражающим зеркалом [11]. Зеркало снимает

вырождение между модами, распространяющимися по и против часовой стрелки, и создает новые симметричную и антисимметричную собственные моды с узлом и пучностью на входном зеркале. Смещение x этого зеркала сдвигает точку узла и пучности на x , что можно рассматривать как вращение базисных векторов, описывающих собственные моды, без изменения собственных частот.

Чтобы показать, что в рассматриваемой нами оптомеханической системе тоже реализуется когерентная связь, перепишем ее гамильтониан в матричной форме

$$H = \hbar (\hat{c}_0 \ \hat{c}_+ \ \hat{c}_-)^{\dagger} \begin{pmatrix} \omega_0 & i\eta^* \hat{d}^{\dagger} & -i\eta \hat{d} \\ -i\eta \hat{d} & \omega_+ & 0 \\ i\eta^* \hat{d}^{\dagger} & 0 & \omega_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_0 \\ \hat{c}_+ \\ \hat{c}_- \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Рассматривая оператор механической моды $\hat{d}$ как параметр, диагонализировав матрицу и найдем собственные частоты оптических мод

$$(\omega_0 - \lambda)(\omega_+ - \lambda)(\omega_- - \lambda) - 2|\eta d|^2(\omega - \lambda) = 0 \quad (3.62a)$$

$$(\omega_0 - \lambda) ((\omega_{\lambda})^2 - \omega_m^2 - 2|\eta d|^2) = 0, \quad (3.62б)$$

$$\lambda_1 = \omega_0, \quad (3.62в)$$

$$\lambda_{2,3} = \omega \pm \sqrt{\omega_m^2 + 2|\eta d|^2} \approx \omega \pm \omega_m = \omega_{\pm} \quad (3.62г)$$

В линейном приближении собственные частоты $\lambda_{1,2,3}$ не зависят от механической степени свободы d . Нормированные собственные моды $\hat{c}_{1,2,3}$, соответствующие собственным частотам $\lambda_{1,2,3}$, можно выразить через парциальные

$$\hat{c}_1 = \begin{pmatrix} 1, \frac{i\eta d}{\omega_m}, \frac{i\eta^* d^*}{\omega_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_0 \\ \hat{c}_+ \\ \hat{c}_- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1, \frac{i\eta d}{\omega_m}, \frac{i\eta^* d^*}{\omega_m} \end{pmatrix}, \quad (3.63a)$$

$$\hat{c}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i\eta^* d^*}{\omega_m}, 1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_0 \\ \hat{c}_+ \\ \hat{c}_- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{i\eta^* d^*}{\omega_m}, 1, 0 \end{pmatrix}, \quad (3.63б)$$

$$\hat{c}_3 = \begin{pmatrix} \frac{i\eta d}{\omega_m}, 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_0 \\ \hat{c}_+ \\ \hat{c}_- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{i\eta d}{\omega_m}, 0, 1 \end{pmatrix}. \quad (3.63в)$$

Это выражение можно объяснить в терминах когерентной связи. При $d = 0$ (механический осциллятор покоится в положении равновесия) собственные

моды преобразуются в изначальные оптические моды $\hat{c}_1 \rightarrow \hat{c}$, $\hat{c}_2 \rightarrow \hat{c}_+$, $\hat{c}_3 \rightarrow \hat{c}_-$, что позволяет нам использовать их для анализа.

Параметры $\mathbf{v}_{1,2,3}$ — это векторные коэффициенты распределения амплитуд. В линейном приближении они являются ортонормированными $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \delta_{ij} + O(d^2)$. Таким образом, связь между оптическими и механическими модами не меняет длины базисных векторов, а только поворачивает их.

3.3.2 Подсистемы, свободные от квантовой механики

Один из известных методов измерения с исключением ОФВ — когерентное вычитание квантового шума — основан на наличии в измерительной системе набора КНИ-наблюдаемых — подсистемы, свободной от квантовой механики (ПСКМ) [25]. Механический осциллятор ω , на который действует сигнальная сила, связан с оптическим резонатором с частотой Ω . Этот оптический резонатор связан с побочным резонатором с частотой $\Omega - \omega$, который играет роль отрицательной массы (NM). В представлении взаимодействия гамильтониан этой системы имеет вид

$$V_{NM} = \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2 q'^2}{2} - \frac{p'^2}{2m}. \quad (3.64)$$

Наблюдаемые, которые соответствуют реальной физической системе — это $\{q, p\}$ (координата и импульс механического осциллятора) и $\{q', p'\}$ (квадратуры побочного оптического резонатора). При этом КНИ-наблюдаемыми являются их комбинации

$$q + q' = Q_{NM}, \quad \frac{p + p'}{2} = P_{NM}, \quad (3.65a)$$

$$\frac{q - q'}{2} = \Phi_{NM}, \quad p - p' = \Pi_{NM}, \quad (3.65b)$$

которые образуют две ПСКМ: $\{Q_{NM}, \Pi_{NM}\}$ и $\{\Phi_{NM}, P_{NM}\}$.

ОФВ действует на оба осциллятора, но благодаря тому, что восприимчивость осциллятора с отрицательной массой имеет обратный знак, измеряя суммарное смещение Q_{NM} можно получить информацию о сигнальной силе и исключить ОФВ [55].

Чтобы объяснить исключение ОФВ в рассматриваемой нами схеме, также выделим в ней ПСКМ. Так как измеряемыми величинами являются квадратурные амплитуды, для определения ПСКМ необходимо переписать гамильтониан с их помощью. Строгий вывод гамильтониана приведен в приложении D, в данном разделе мы представим упрощенный вывод.

Будем рассматривать закрытую систему. Для этого запишем уравнения движения квадратур (3.22), убрав затухание и накачку.

$$\dot{c}_{+a} = -\eta C_0 d_a, \quad (3.66a)$$

$$\dot{c}_{+\phi} = -\eta C_0 d_\phi, \quad (3.66б)$$

$$\dot{c}_{-a} = \eta C_0 d_a, \quad (3.66в)$$

$$\dot{c}_{-\phi} = -\eta C_0 d_\phi, \quad (3.66г)$$

$$\dot{d}_a = \eta C_0 (c_{+a} + c_{-a}), \quad (3.66д)$$

$$\dot{d}_\phi = \eta C_0 (c_{+\phi} - c_{-\phi}). \quad (3.66е)$$

Такие уравнения движения можно получить из гамильтониана

$$V = \hbar \eta C_0 (c_{+a} + c_{-a}) d_a + \hbar \eta C_0 (c_{+\phi} - c_{-\phi}) d_\phi. \quad (3.67)$$

(он совпадает с (D.7), который выведен в приложении D).

Введем комбинации квадратур

$$d_a = Q, \quad d_\phi = P, \quad (3.68a)$$

$$\frac{c_{+a} + c_{-a}}{\sqrt{2}} = \Phi_1, \quad \frac{c_{+\phi} + c_{-\phi}}{\sqrt{2}} = \Pi_1, \quad (3.68б)$$

$$\frac{c_{+a} - c_{-a}}{\sqrt{2}} = \Phi_2, \quad \frac{c_{+\phi} - c_{-\phi}}{\sqrt{2}} = \Pi_2. \quad (3.68в)$$

Операторы Q и P , а так же $\Phi_{1,2}$ и $\Pi_{1,2}$ являются кантово-сопряженными

$$[Q, P] = [\Phi_1, \Pi_1] = [\Phi_2, \Pi_2] = i. \quad (3.69)$$

Остальные коммутаторы равны нулю.

Перепишем гамильтониан в виде

$$V = \sqrt{2} \hbar |\eta C| \Phi_1 Q + \sqrt{2} \hbar |\eta C| \Pi_2 P. \quad (3.70)$$

Из него можно получить уравнения движения

$$\dot{\Pi}_1 = \sqrt{2} |\eta C| Q, \quad \dot{Q} = \sqrt{2} |\eta C| \Pi_2, \quad \dot{\Pi}_2 = 0 \quad (3.71a)$$

$$\dot{\Phi}_2 = \sqrt{2} |\eta C| P, \quad \dot{P} = -\sqrt{2} |\eta C| \Phi_1, \quad \dot{\Phi}_1 = 0, \quad (3.71б)$$

решение которых равно

$$\begin{cases} \Pi_1 = \Pi_{10} + \sqrt{2}|\eta C|Q_0t + |\eta C|^2\Pi_{20}t^2, \\ Q = Q_0 + \sqrt{2}|\eta C|\Pi_{20}t, \\ \Pi_2 = \Pi_{20}, \end{cases} \quad (3.72a)$$

$$\begin{cases} \Phi_2 = \Phi_{20} + \sqrt{2}|\eta C|P_0t - |\eta C|^2\Phi_{10}t^2, \\ P = P_0 - \sqrt{2}|\eta C|\Phi_{10}t, \\ \Phi_1 = \Phi_{10}. \end{cases} \quad (3.72б)$$

Здесь $X_0 = X(0)$ — это начальное значение каждой из переменных $X(t)$.

Каждый из операторов является КНИ-наблюдаемой. Это связано с тем, что ни один из них динамически не связан со своим квантово-сопряженным. Более того, все операторы в верхней (3.72a) (или нижней (3.72б)) системе коммутируют друг с другом, поэтому они образуют ПСКМ. Следовательно, в данной схеме присутствуют две независимых (динамически) ПСКМ: $\{\Pi_1, Q, \Pi_2\}$ и $\{\Phi_2, P, \Phi_1\}$.

Рассмотрим подсистему $\{\Pi_1, Q, \Pi_2\}$ (3.72a). В выражении для Π_1 каждый из членов имеет следующий смысл. Π_{10} соответствует дробовому шуму, $\sqrt{2}|\eta C|Q_0t$ соответствует сигналу, а $|\eta C|^2\Pi_{20}t^2$ соответствует ОФВ. Благодаря тому, что в данной схеме есть два выхода для полей c_+ и c_- , можно измерить их независимо и, взяв их сумму (Π_1) и разность (Π_2), произвести КНИ-измерение квадратуры механического осциллятора $Q = d_a$, что позволит получить информацию о сигнальной силе.

Для объяснения возникновения ПСКМ была рассмотрена закрытая опто-механическая система. Анализ открытой системы, представленный в разделе 3.1.2 находится в полном соответствии с этим рассмотрением.

Интересно сравнить данную систему с системой, основанной на осцилляторе с отрицательной массой (3.64). Предложенная нами схема широкополосного вариационного измерения имеет несколько отличительных особенностей:

1. все переменные являются КНИ-наблюдаемыми, которые отвечают параметрам реальной физической системы (Q и P — это квадратуры механического осциллятора, $\Phi_{1,2}$ и $\Pi_{1,2}$ — это квадратуры оптических мод);
2. она имеет три степени свободы (две оптических и одна механическая), тогда как в схеме [55] присутствуют только две степени свободы. Нали-

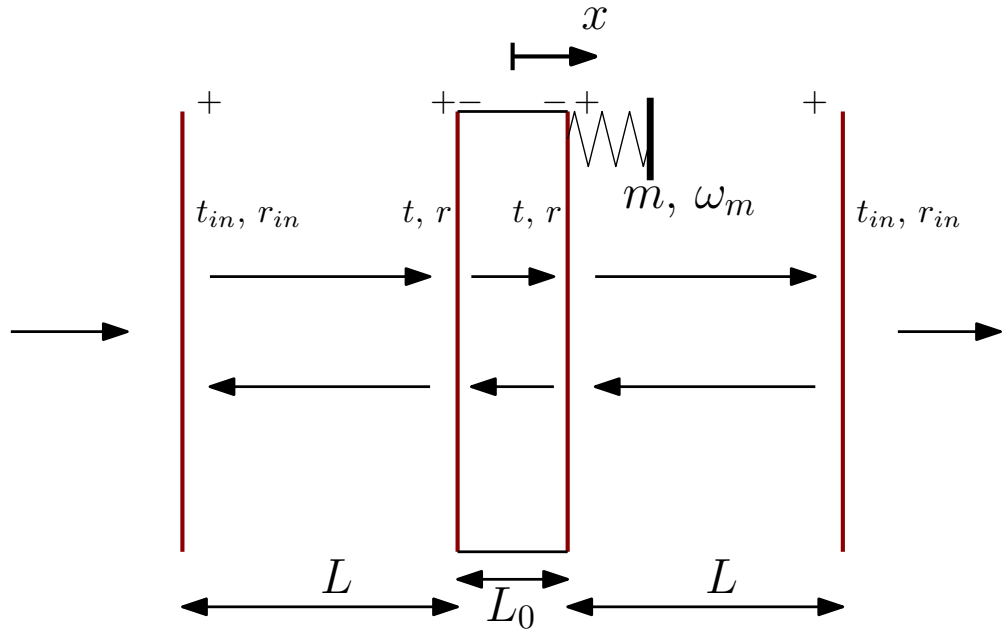


Рисунок 3.4 — Физическая реализация трехмодовой системы для широкополосного вариационного измерения.

чие трех степеней свободы позволяет независимо измерить оптические квадратуры в двух каналах и исключить ОФВ в широкой полосе;

3. переменные $\Phi_{1,2}$, $\Pi_{1,2}$ соответствуют зонду, тогда как в схеме [55] для измерения Q_{NM} необходим дополнительный зонд.

3.3.3 Модель трехмодовой оптомеханической системы

Мы рассмотрели трехмодовую схему, показанную на рис. 3.1. Одна из возможных ее физических реализаций показана на рис. 3.4. Короткий оптический резонатор длины L_0 находится в середине длинного оптического резонатора длины $2L + L_0$. Короткий оптический резонатор считается пробной массой механического осциллятора и движется целиком. Чтобы снизить массу m и повысить собственную частоту осциллятора ω_m в качестве пробной массы можно использовать тонкую мембрану с двумя отражающими покрытиями с коэффициентом пропускания t и коэффициентом отражения r .

Для работы должны быть выполнены следующие условия:

1. Длины L_0 и L должны быть подобраны так, чтобы средняя оптическая мода с частотой ω_0 была в резонансе со всеми резонаторами

$$e^{2i\omega_0 L_0/c} = e^{2i\omega_0 L/c} = 1. \quad (3.73)$$

2. Тонкая мембрана должна быть в середине длинного резонатора. Ее длина L_0 должна быть много меньше длины $2L + L_0$ длинного резонатора

$$L_0 \ll L. \quad (3.74)$$

3. Коэффициент пропускания конечных зеркал t_{in} должен быть меньше коэффициента пропускания мембраны t , чтобы сохранить структуру мод

$$t_{in} \ll t. \quad (3.75)$$

При этих условиях система будет обладать искомой трехмодовой структурой с гамильтонианом взаимодействия

$$\hat{H}_{int} = \hbar\eta \left[c_0 \left(dc_+^\dagger + d^\dagger c_-^\dagger \right) + c_0^\dagger \left(d^\dagger c_+ + dc_- \right) \right], \quad (3.76a)$$

$$\eta = \frac{\omega_0 x_0 \sqrt{L_0}}{\sqrt{L^3}}, \quad (3.76b)$$

который при замене $c_0 \rightarrow -ic_0$, $c_0^\dagger \rightarrow ic_0^\dagger$ (сдвиг фазы на $\pi/2$) приходит к виду (3.26). Детальный вывод гамильтониана представлен в приложении Е.

3.4 Выводы

Предложен принцип широкополосного вариационного измерения высокочастотного сигнала, основанного на трехмодовом *электрооптическом* преобразователе для измерения ВЧ сигнала, с накачкой на средней оптической моде.

Показано, что независимое измерение светового поля в двух выходах позволяет исключить обратное флуктуационное влияние в широкой полосе частот.

Проанализировано влияние расстройки частот на чувствительность измерения и предложены режимы работы при различных расстройках.

Показано наличие когерентной оптомеханической связи и подсистем, свободных от квантовой механики.

Предложена физическая реализация трехмодовой оптической схемы, основанная на тонкой мембране, помещенной в середину оптического резонатора.

Глава 4. Подсчет высокочастотных фотонов с помощью электрооптического преобразователя

Квантовые электрооптические преобразователи применяются для передачи и детектирования ВЧ квантовых состояний. Эти процессы основаны на эффекте преобразования ВЧ фотона в оптический фотон, что позволяет считать фотоны с точностью, ограниченной дробовым шумом ВЧ фотонов. Однако из-за технических ограничений такие приборы еще не были реализованы экспериментально.

В данном разделе приведен анализ чувствительности электрооптического преобразователя с подавлением ОФВ для детектирования ВЧ сигналов. Показано, что в отличие от других электрооптических преобразователей, наша схема позволяет генерировать несколько оптических фотонов на один фотон ВЧ сигнала. Показано, как корреляция в оптических гармониках позволяет вычесть ОФВ из измеряемого сигнала.

Данная глава основана на результатах, представленных в статье [А3].

4.1 Описание физической модели

4.1.1 Гамильтониан электрооптической системы

Рассмотрим систему, изображенную на рис. (4.1). Электрооптический кристалл с просветляющим покрытием помещен в оптический резонатор, в котором могут существовать только три оптических моды. Разность частот между соседними модами равна частоте высокочастотного сигнала, который поступает в электрооптический кристалл. Монохроматическое световое поле накачивает центральную оптическую моду. В результате электрооптического взаимодействия происходит модуляция выходного света. Модуляционные гармоники генерируются в соответствующих оптических модах резонатора. Для проведения измерения высокочастотного сигнала, поступающего на электрооптический

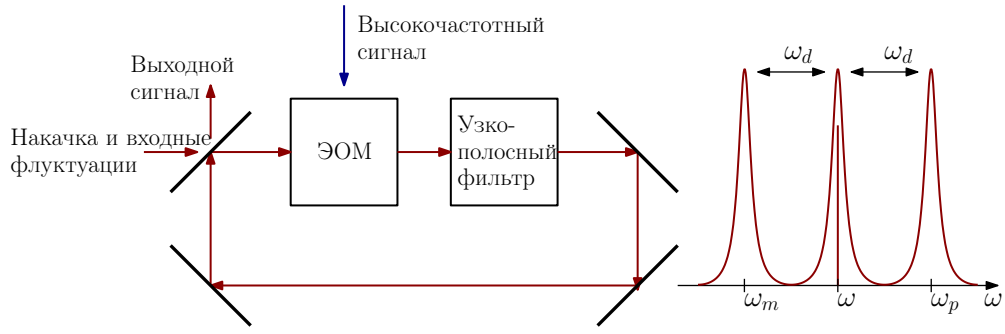


Рисунок 4.1 — Физическая модель квантового электрооптического преобразователя, основанного на фазовой модуляции. Электрооптический кристалл помещен внутрь оптического резонатора, в котором могут существовать только три оптические моды. Оптический фильтр с низкими потерями, помещенный в оптический резонатор, позволяет достичь такой структуры мод.

кристалл, независимо детектируются и анализируются модуляционные гармоники, выходящие из резонатора.

Для простоты будем предполагать, что оптические моды эквидистантны, а разность их собственных частот равна собственной частоте высокочастотного резонатора

$$\omega_p - \omega = \omega - \omega_m = \omega_d. \quad (4.1)$$

Начнем с гамильтониана системы. Рассмотрим три оптические моды: центральную, описываемую оператором уничтожения $\hat{c}$ и частотой несущей ω , стоксову, описываемую оператором уничтожения $\hat{c}_m$ и частотой несущей ω_m , и антистоксову, описываемую оператором уничтожения $\hat{c}_p$ и частотой несущей ω_p . Эти моды связаны высокочастотным полем, описываемым оператором уничтожения $\hat{d}$ и частотой несущей ω_d .

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (4.2a)$$

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{c}^\dagger\hat{c} + \hbar\omega_m\hat{c}_m^\dagger\hat{c}_m + \hbar\omega_p\hat{c}_p^\dagger\hat{c}_p + \hbar\omega_d\hat{d}^\dagger\hat{d}, \quad (4.2б)$$

$$\hat{V} = \hbar\eta(\hat{c}_m^\dagger\hat{d}^\dagger + \hat{c}_p^\dagger\hat{d})\hat{c} + \hbar\eta^*(\hat{c}_m\hat{d} + \hat{c}_p\hat{d}^\dagger)\hat{c}^\dagger. \quad (4.2в)$$

В гамильтониане взаимодействия $\hat{V}$ мы сохраняем только медленно меняющиеся члены и опускаем быстро осциллирующие (например $\hat{c}\hat{c}_m^\dagger\hat{d} \sim e^{-2i\omega_d t}$ или $\hat{c}\hat{c}_m\hat{d} \sim e^{-2i\omega t}$).

Постоянная электрооптической связи измеряется в единицах частоты и определена как [87]

$$\eta = \frac{1}{2}\omega n_c^2 r \sqrt{\frac{\hbar\omega_d}{2\epsilon_0 n_d^2 \mathcal{V}_d}} \chi, \quad (4.3)$$

где n_c и n_d — это показатели преломления оптических и высокочастотной моды, r — это электрооптический коэффициент материала, для выбранных поляризаций, $\mathcal{V}_d$ — это объем высокочастотной моды, χ — это безразмерный интеграл перекрытия между оптическими и высокочастотной модой. Для простоты будем считать, что оптические и высокочастотная моды перекрываются полностью и имеют одинаковый объем, так что $|\chi| = 1$.

Введем медленные амплитуды операторов полей c , $c_\pm$ и d

$$\hat{c} = ce^{-i\omega t}, \quad \hat{c}_{p,m} = c_{p,m}e^{-i\omega_{p,m}t}, \quad \hat{d} = de^{-i\omega_d t}. \quad (4.4)$$

Используя гамильтониан, можно получить уравнения движения полей. Следуя общим правилам формализма уравнений Ланжевена, можно дополнить их постоянными затухания и внешней накачкой

$$\dot{c} + \gamma c = -i\eta^*(c_m d + c_p d^\dagger) + \sqrt{2\gamma}a, \quad (4.5a)$$

$$\dot{c}_m + \gamma c_m = -i\eta d^\dagger c + \sqrt{2\gamma}a_m, \quad (4.5b)$$

$$\dot{c}_p + \gamma c_p = -i\eta d c + \sqrt{2\gamma}a_p, \quad (4.5b)$$

$$\dot{d} + \gamma_M d = -i\eta c_m^\dagger c - i\eta^* c_p c^\dagger + \sqrt{2\gamma_M}q + if_s, \quad (4.5g)$$

где γ и γ_M — это показатели затухания оптических и высокочастотной моды соответственно (все три оптические моды имеют одинаковый γ), a , a_p , a_m — это входные амплитуды оптических мод, q — это входные флуктуации высокочастотной моды. Для простоты будем считать, что показатели затухания определяются связью, а не затуханием света или микроволновым излучением.

Амплитуду внешнего сигнала можно представить в виде

$$f_s = e^{-i\phi_s} \sqrt{\frac{2P_d\gamma_M}{\hbar\omega_d}}, \quad (4.6)$$

где P_d — это мощность высокочастотного сигнала, а ϕ_s — это его фаза. Важно отметить, что сигнал зависит от показателя затухания γ_M , который описывает связь со входным высокочастотным излучением.

Уравнения движения необходимо дополнить соотношениями, связывающими выходное поле с полем внутри резонатора

$$b_{p,m} = -a_{p,m} + \sqrt{2\gamma}c_{p,m}. \quad (4.7)$$

4.1.2 Решение уравнений Ланжевена

Выражения для средних амплитуд полей при резонансной накачке можно записать в виде

$$\gamma C = -i\eta^*(C_m D + C_p D^*) + \sqrt{2\gamma} A, \quad (4.8a)$$

$$\gamma C_m = -i\eta D^* C, \quad (4.8б)$$

$$\gamma C_p = -i\eta D C, \quad (4.8в)$$

$$\gamma_M D = -i\eta C_m^* C - i\eta^* C_p C^*. \quad (4.8г)$$

Будем считать высокочастотный сигнал слабым ($D = 0$). В этом случае $C = A\sqrt{2/\gamma}$, и $C_m = C_p = 0$.

Покажем, что это решение устойчиво. Запишем уравнения движения, пренебрегая флуктуациями входных полей

$$\dot{c} + \gamma c = 0, \quad (4.9a)$$

$$\dot{c}_m + \gamma c_m = -i\eta d^* C, \quad (4.9б)$$

$$\dot{c}_p + \gamma c_p = -i\eta d C, \quad (4.9в)$$

$$\dot{d} + \gamma_M d = -i\eta c_m^* C - i\eta^* c_p C^*. \quad (4.9г)$$

Отделив несвязанное выражение (4.9a) от остальных, получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda + \gamma & 0 & i\eta^* C^* \\ 0 & \lambda + \gamma & i\eta C \\ i\eta C & i\eta^* C^* & \lambda + \gamma_M \end{vmatrix} = 0 \quad (4.10)$$

все корни которого отрицательные $\lambda_{1,2} = -\gamma < 0$, $\lambda_3 = -\gamma_M < 0$, что подтверждает устойчивость решения.

Выражения для Фурье-амплитуд операторов флуктуаций можно записать в виде

$$(\gamma - i\Omega)c_m^\dagger = i\eta^* d C^* + \sqrt{2\gamma} a_m^\dagger, \quad (4.11a)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_p = -i\eta d C + \sqrt{2\gamma} a_p, \quad (4.11б)$$

$$(\gamma_M - i\Omega)d = -i\eta c_m^\dagger C - i\eta^* c_p C^* + \sqrt{2\gamma_M} q + i f_s, \quad (4.11в)$$

где $c_p \equiv c_p(\Omega)$, $c_p^\dagger \equiv c_p^\dagger(-\Omega)$ и т.д. Фурье-амплитуды операторов флуктуаций подчиняются следующим коммутационным и корреляционным соотношениям

$$[a_{p,m}(\Omega), a_{p,m}^\dagger(\Omega')] = 2\pi \delta(\Omega - \Omega'), \quad (4.12a)$$

$$\langle a_{p,m}(\Omega) a_{p,m}^\dagger(\Omega') \rangle = 2\pi \delta(\Omega - \Omega') \quad (4.12б)$$

$$[q(\Omega), q^\dagger(\Omega')] = 2\pi \delta(\Omega - \Omega'), \quad (4.12в)$$

$$\langle q(\Omega) q^\dagger(\Omega') \rangle = (2n_T + 1) 2\pi \delta(\Omega - \Omega'), \quad n_T = \frac{1}{e^{\hbar\omega_d/k_B T} - 1}, \quad (4.12г)$$

где T — это температура внешней среды. Будем считать, что входные флуктуации оптических полей находятся в когерентном состоянии.

Введем квадратурные амплитуды

$$c_{pa} = \frac{c_p e^{i\phi} + c_p^\dagger e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}, \quad c_{p\phi} = \frac{c_p e^{i\phi} - c_p^\dagger e^{-i\phi}}{i\sqrt{2}}, \quad (4.13a)$$

$$c_{ma} = \frac{c_m e^{i\phi} + c_m^\dagger e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}, \quad c_{m\phi} = \frac{c_m e^{i\phi} - c_m^\dagger e^{-i\phi}}{i\sqrt{2}}, \quad (4.13б)$$

$$d_a = \frac{d + d^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad d_\phi = \frac{d - d^\dagger}{i\sqrt{2}}. \quad (4.13в)$$

Используя выражения (4.11) можно получить

$$(\gamma - i\Omega)c_{ma} = -|\eta C|d_\phi + \sqrt{2}\gamma a_{ma}, \quad (4.14a)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{m\phi} = -|\eta C|d_a + \sqrt{2}\gamma a_{m\phi}, \quad (4.14б)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{pa} = |\eta C|d_\phi + \sqrt{2}\gamma a_{pa}, \quad (4.14в)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{p\phi} = -|\eta C|d_a + \sqrt{2}\gamma a_{m\phi}, \quad (4.14г)$$

$$(\gamma_M - i\Omega)d_a = -|\eta C|c_{m\phi} + |\eta C|c_{p\phi} + \sqrt{2}\gamma_M q_a - f_\phi, \quad (4.14д)$$

$$(\gamma_M - i\Omega)d_\phi = -|\eta C|c_{ma} - |\eta C|c_{pa} + \sqrt{2}\gamma_M q_\phi + f_a, \quad (4.14е)$$

где $\eta C = |\eta C|e^{-i\phi}$.

Будем считать, что мы можем измерить выходные поля из мод c_m и c_p по-отдельности. Это предположение разумно, так как частота ВЧ сигнала может превосходить десятки ГГц и существуют фильтры с более узкой шириной полосы. Введя линейные комбинации квадратурных амплитуд

$$\alpha_{\pm a} = \frac{a_{pa} \pm a_{ma}}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_{\pm \phi} = \frac{a_{p\phi} \pm a_{m\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (4.15a)$$

$$g_{\pm a} = \frac{c_{pa} \pm c_{ma}}{\sqrt{2}}, \quad g_{\pm \phi} = \frac{c_{p\phi} \pm c_{m\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (4.15б)$$

$$\beta_{\pm a} = \frac{b_{pa} \pm b_{ma}}{\sqrt{2}}, \quad \beta_{\pm \phi} = \frac{b_{p\phi} \pm b_{m\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (4.15в)$$

можно переписать выражения (4.14) в виде

$$(\gamma - i\Omega)g_{+a} = \sqrt{2\gamma}\alpha_{+a}, \quad (4.16a)$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{-a} = \sqrt{2}|\eta C|d_\phi + \sqrt{2\gamma}\alpha_{-a}, \quad (4.16б)$$

$$(\gamma_M - i\Omega)d_\phi = -\sqrt{2}|\eta C|g_{+a} + \sqrt{2\gamma_M}q_\phi + f_a, \quad (4.16в)$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{+\phi} = -\sqrt{2}|\eta C|d_a + \sqrt{2\gamma}\alpha_{+\phi}, \quad (4.16г)$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{-\phi} = \sqrt{2\gamma}\alpha_{-\phi}, \quad (4.16д)$$

$$(\gamma_M - i\Omega)d_a = \sqrt{2}|\eta C|g_{-\phi} + \sqrt{2\gamma_M}q_a - f_\phi. \quad (4.16е)$$

Кроме того, используя выражения (4.7), можно записать линейные комбинации выходных полей

$$\beta_{+a} = -\alpha_{+a} + \sqrt{2\gamma}g_{+a} = \frac{\gamma + i\Omega}{\gamma - i\Omega}\alpha_{+a}, \quad \beta_{-a} = \frac{\gamma + i\Omega}{\gamma - i\Omega}\alpha_{-a} + \frac{2\sqrt{\gamma}|\eta C|}{\gamma - i\Omega}d_\phi, \quad (4.17a)$$

$$\beta_{-\phi} = -\alpha_{-\phi} + \sqrt{2\gamma}g_{-\phi} = \frac{\gamma + i\Omega}{\gamma - i\Omega}\alpha_{-\phi}, \quad \beta_{+\phi} = \frac{\gamma + i\Omega}{\gamma - i\Omega}\alpha_{+\phi} - \frac{2\sqrt{\gamma}|\eta C|}{\gamma - i\Omega}d_a. \quad (4.17б)$$

Введя обозначения

$$\xi = \frac{\gamma + i\Omega}{\gamma - i\Omega}, \quad \mathcal{K} = \frac{4\gamma|\eta C|^2}{\gamma^2 + \Omega^2}, \quad (4.18)$$

можно переписать выражения (4.17) в виде

$$\beta_{-a} = \xi\alpha_{-a} - \frac{\xi\mathcal{K}}{(\gamma_M - i\Omega)}\alpha_{+a} + \frac{\sqrt{\xi\mathcal{K}}}{(\gamma_M - i\Omega)}(\sqrt{2\gamma_M}q_\phi + f_a), \quad (4.19a)$$

$$\beta_{+\phi} = \xi\alpha_{+\phi} - \frac{\xi\mathcal{K}}{(\gamma_M - i\Omega)}\alpha_{-\phi} - \frac{\sqrt{\xi\mathcal{K}}}{(\gamma_M - i\Omega)}(\sqrt{2\gamma_M}q_a - f_\phi) \quad (4.19б)$$

Члены, пропорциональные $\mathcal{K}$ происходят из ОФВ.

4.2 Метод измерения с вычитанием ОФВ

Для определенности будем рассматривать измерение амплитудных квадратур. Измерение фазовых квадратур приведет к аналогичным результатам.

4.2.1 Анализ чувствительности схемы

Сумма выходных квадратур β_{+a} (4.17а) содержит только входные флуктуации α_{+a} , тогда как разность β_{-a} (4.19а) содержит и входные флуктуации α_{-a} и член, пропорциональный ВЧ фазовой квадратуре d_ϕ . В свою очередь, d_ϕ (4.16в) зависит от ОФВ α_{+a} . Следовательно пост обработка независимых измерений β_{+a} и β_{-a} дает возможность полного вычитания ОФВ. Для этого необходимо выбрать следующую комбинацию

$$\beta_a = \frac{\mathcal{K}}{(\gamma_M - i\Omega)}\beta_{+a} + \beta_{-a} = \xi\alpha_{-a} + \frac{\sqrt{\xi\mathcal{K}}}{(\gamma_M - i\Omega)}(\sqrt{2\gamma_M}q_\phi + f_a) \quad (4.20)$$

СКП в данной схеме появится при измерении одной комбинации β_{-a} (4.19а). В этом случае спектральная плотность мощности шумов будет равна

$$S_n(\Omega) = 2\gamma_M(2n_T + 1) + \frac{(\gamma_M^2 + \Omega^2)}{\mathcal{K}} + \mathcal{K} \geq 2\gamma_M(2n_T + 1) + S_{SQL}, \quad (4.21)$$

$$S_{SQL} = 2\sqrt{\gamma_M^2 + \Omega^2}, \quad \mathcal{K}_{SQL} = \sqrt{\gamma_M^2 + \Omega^2}. \quad (4.22)$$

Чувствительность ограничена СКП. Первое слагаемое $2\gamma_M(2n_T + 1)$ соответствует тепловому пределу (4.33), обсуждаемому ниже. Следует отметить, что даже в случае нулевой температуры ($n_T = 0$) мы не можем обнулить коэффициент затухания $\gamma_M = 0$ для полного подавления тепловых флуктуаций и переопределения СКП. γ_M служит в качестве связи между ВЧ сигналом и электрооптическим кристаллом (4.6).

Переписав выражение (4.20) в виде

$$\beta_a = \frac{\sqrt{\xi\mathcal{K}}}{\gamma_M - i\Omega} \left(\frac{\gamma_M + i\Omega}{\sqrt{\xi\mathcal{K}}} \alpha_{-a} + \sqrt{2\gamma_M}q_\phi + f_a \right), \quad (4.23)$$

получим квантовые шумы, приведенные к амплитуде ВЧ сигнала. В этом случае спектральная плотность мощности шумов будет равна

$$S_n(\Omega) = 2\gamma_M(2n_T + 1) + \frac{\gamma_M^2 + \Omega^2}{\mathcal{K}} \quad (4.24)$$

Мы полагаем одностороннюю спектральную плотность мощности флуктуаций α_{a-} равной 1. Спектральные плотности мощности продемонстрированы на рис. 4.2 и рис. 4.3.

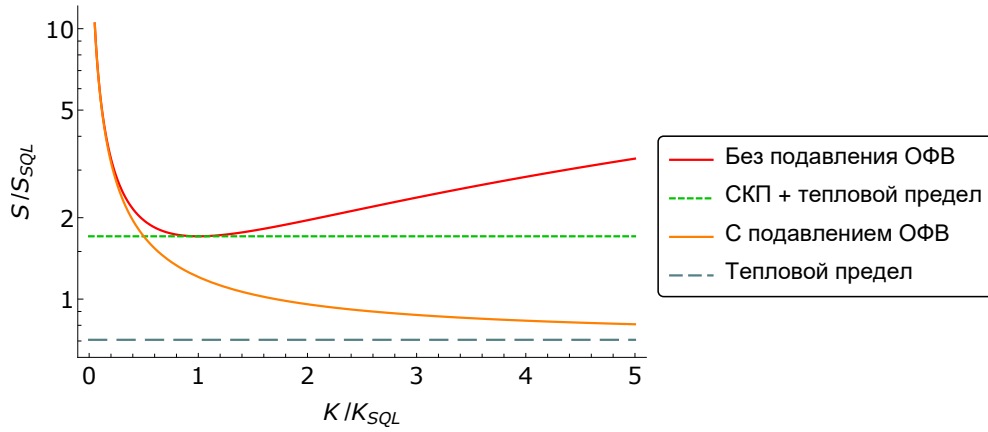


Рисунок 4.2 — Спектральная плотность мощности шумов S как функция безразмерной мощности накачки $\mathcal{K}$. Измерение β_{-a} (4.21) (красная линия) не позволяет преодолеть СКП и тепловой пределы (4.22) (зеленый пунктир). Измерение комбинации β_a (4.24) (оранжевая линия) позволяет вычесть ОФВ и преодолеть СКП, но чувствительность ограничена тепловым пределом (4.33) (синий пунктир). Графики построены при $\Omega/2\pi = \gamma_M/2\pi = 1$ МГц и $n_T = 0$.

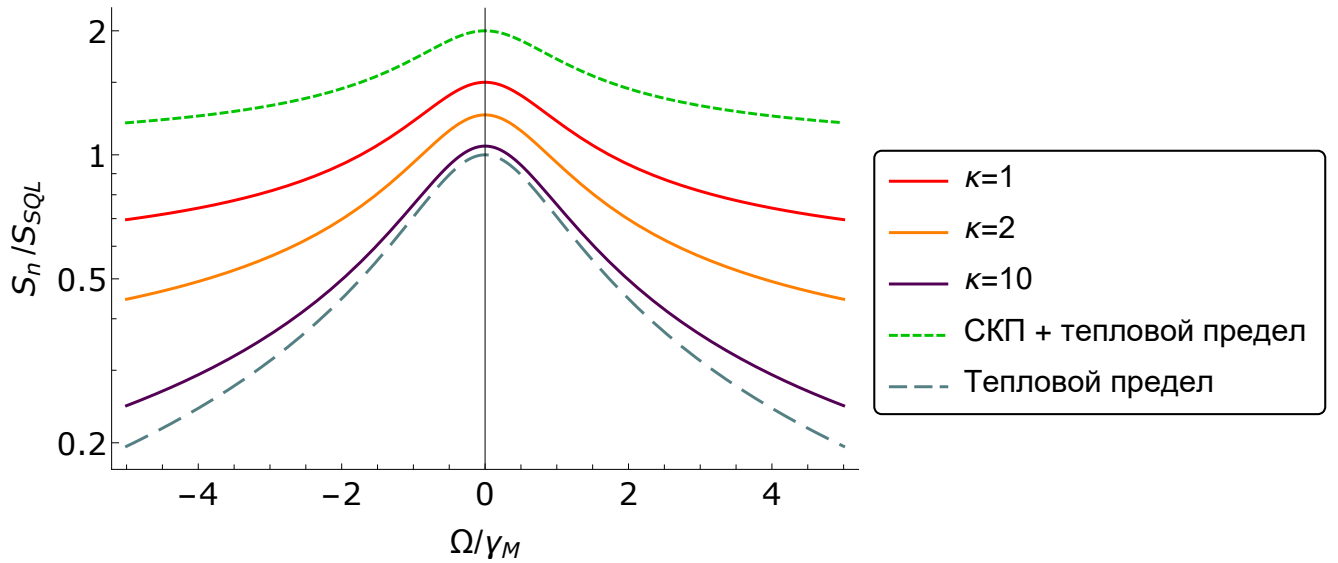


Рисунок 4.3 — Спектральная плотность мощности шумов S как функция частоты Ω при различных безразмерных мощностях накачки $\kappa = \mathcal{K}/\mathcal{K}_{SQL}$. Измерение комбинации β_a (4.24) (красная, оранжевая и фиолетовая линии) позволяет вычесть ОФВ и преодолеть СКП (4.22) (зеленый пунктир) при $\kappa > 0.5$, но чувствительность ограничена тепловым пределом (4.33) (синий пунктир).

Графики построены при $\gamma_M/2\pi = 1$ МГц и $n_T = 0$.

Пусть сила, определенная выражением (4.6) соответствует резонансной силе, действующей на ВЧ осциллятор в течение времени τ : $f = f_{s0}e^{-i\omega_d t} + f_{s0}^*e^{i\omega_d t}$, $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$. В случае $\omega_M \tau \gg 1$ условие обнаружения сигнала примет вид

$$f_{s0} \geq \sqrt{S_n(\Omega) \frac{\Delta\Omega}{2\pi}}, \quad \Delta\Omega \simeq \frac{2\pi}{\tau} \quad (4.25)$$

Оно показывает, что предложенный метод измерения приводит к возможности широкополосного измерения сигнала с чувствительностью выше, чем СКП. Отметим, что внешний сигнал определен так, что f_{s0} — это обобщенная сила, действующая на ВЧ осциллятор. Её можно пересчитать в мощность ВЧ сигнала или число фотонов в сигнале с помощью выражения (4.6).

Однако, следует заметить, что в случае нулевой температуры ($n_T = 0$) и резонансного сигнала ($\Omega = 0$) СКП (4.22) совпадает с тепловым пределом (4.33). Не смотря на то, что можно преодолеть СКП при измерении других спектральных составляющих сигнала, на резонансной частоте его можно лишь достичь, как это видно на рис. 4.3.

В нашем рассмотрении мы предполагали, что тепловые флуктуации сопутствуют сигналу и рассматривали эти флуктуации, как часть шума. В общем случае это не так. Шум, сопутствующий сигналу, можно рассматривать как сигнал. Фотонный преобразователь не вносит существенный тепловой шум, если затухание определяется связью. В этом случае чувствительность не ограничена тепловыми шумами, и этот метод дает повышение чувствительности измерения, по сравнению с СКП. Графики соответствующих спектральных плотностей мощности показаны на рис. 4.4. Ширина полосы измерения равна

$$\Delta\Omega = 2\gamma_M \sqrt{4\kappa^2 - 1} \approx 4\kappa\gamma_M. \quad (4.26)$$

Следует отметить, что она растет с увеличением мощности накачки.

ОФВ полностью исключено из выходной комбинации β_a . Это следствие независимого измерения коррелирующих полей c_m и c_p .

Вместо измерения β_a , можно измерять β_ϕ или комбинацию произвольных квадратур

$$b_{+\varphi} = b_{+a} \cos \varphi + b_{+\phi} \sin \varphi, \quad (4.27a)$$

$$b_{-\varphi} = b_{-a} \cos \varphi - b_{-\phi} \sin \varphi. \quad (4.27b)$$

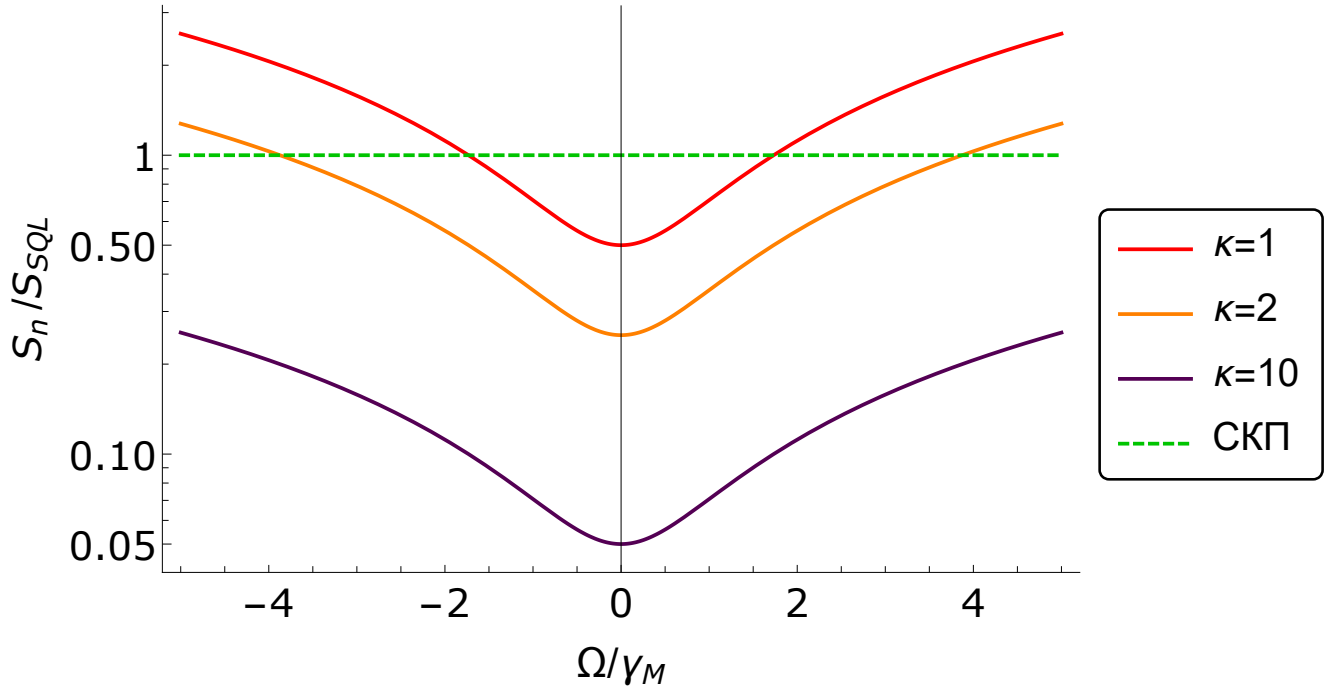


Рисунок 4.4 — Спектральная плотность мощности шумов S как функция частоты Ω при различных безразмерных мощностях накачки $\kappa = \mathcal{K}/\mathcal{K}_{SQL}$ в случае, когда тепловой шум считается частью сигнала. Мы сравниваем спектральные плотности мощности с СКП (зеленый пунктир), чтобы показать, что измерение комбинации β_a (4.24) (красная, оранжевая и фиолетовая линии) позволяет преодолеть СКП в полосе частот (4.26). Графики построены при $\gamma_M = 0$.

Сумма этих квадратур несет информацию только об ОФВ, а разность содержит и сигнальный член и член, пропорциональный ОФВ ($\varphi = 0$ соответствует измерению β_a , а $\varphi = \pi/2$ соответствует измерению β_ϕ .) Вне зависимости от выбора угла φ чувствительность определяется выражением (4.25).

4.2.2 Сравнение с системой с одной антистоксовой модой

Интересно заметить, что предложенная система позволяет получить высокую чувствительность измерения, вследствие генерации множества оптических фотонов на один ВЧ фотон. Для достаточно сильного ВЧ сигнала среднее число фотонов в оптической моде равняется

$$|B_{p,m}|^2 = \frac{\mathcal{K}}{2\gamma} \frac{P_d}{\hbar\omega_d\gamma_M} \approx \frac{\mathcal{K}}{4\gamma} |D|^2, \quad (4.28)$$

где $|D|^2$ — это среднее число ВЧ фотонов, попадающих в резонатор за время звона, а $|B_{p,m}|^2$ — это среднее число оптических фотонов, покидающих резонатор за то же время. При $\mathcal{K}/(4\gamma) > 1$ мы приходим к выводу, что один ВЧ фотон может генерировать более одного оптического фотона. Это причина высокой чувствительности измерения при использовании двух выходных каналов.

Это отличается от поведения преобразователя без стоксовой моды [27]. В таком приемнике ВЧ фотон преобразуется в единичный оптический фотон.

Предположим, что мода c_m отсутствует. Тогда в частотном представлении мы получим

$$(\gamma - i\Omega)c_p + i\eta C d = \sqrt{2\gamma}a_p, \quad (4.29a)$$

$$i\eta^* C^* c_p + (\gamma_M - i\Omega)d = \sqrt{2\gamma_M}q + if_s, \quad (4.29b)$$

что приводит к решению

$$c_p = \frac{(\gamma_M - i\Omega)\sqrt{2\gamma}a_p - i\eta C (\sqrt{2\gamma_M}q + if_s)}{(\gamma - i\Omega)(\gamma_M - i\Omega) + |\eta|^2|C|^2}. \quad (4.30)$$

Выходную амплитуду можно найти, используя (4.7)

$$b_p = -a_p + \sqrt{2\gamma}c_p = \frac{[(\gamma_M - i\Omega)(\gamma + i\Omega) - |\eta C|^2] a_p}{(\gamma - i\Omega)(\gamma_M - i\Omega) + |\eta C|^2} + \frac{-i\eta C \sqrt{2\gamma} (\sqrt{2\gamma_M}q + if_s)}{(\gamma - i\Omega)(\gamma_M - i\Omega) + |\eta C|^2} \quad (4.31)$$

С увеличением мощности накачки ($|C|^2$) величина сигнального члена не увеличивается, а так же существует оптимальная накачка, при которой ОФВ мало.

Проанализируем частный случай, при котором показатель затухания ВЧ моды намного меньше показателя затухания оптической моды ($\gamma_M \ll \gamma$). Оптимальная мощность накачки соответствует

$$\gamma_M = \frac{|\eta C|^2}{\gamma}. \quad (4.32)$$

В этом случае можно опустить вклад дробового шума, описываемого выражением (4.31), а условие обнаружения (4.25) задается спектральной плотностью мощности шумов

$$S_n = 2\gamma_M (2n_T + 1) \quad (4.33)$$

Это значит, что чувствительность измерения с одной антистоксовой модой задается только тепловыми ВЧ флуктуациями. Оптические флуктуации практически не влияют на шум измерения. Для достижения схожих условий в

случае, рассмотренном в данной работе, необходима достаточно высокая мощность накачки ($\mathcal{K} \gg 1$).

Мощность сигнала в случае с только антистоксовой модой ограничена мощностью входящего ВЧ сигнала и равна $P_d(\omega/\omega_d)$. В нашем случае мощность каждой моды равна $P_d(\omega/\omega_d)(\mathcal{K}/4\gamma)$.

Таблица 2 — Оценка величин системы, основанной на ниобате лития.

	Набор 1	Набор 2	Ед. изм.
ω_c	10^{15}	10^{15}	рад/с
Q_c	10^8	10^9	
V_c	10^{-10}	10^{-11}	м ³
ϵ_c	4.6	4.6	
ω_d	10^7	$6.3 \cdot 10^{10}$	рад/с
Q_d	10^3	10^5	
V_d	10^{-11}	10^{-11}	м ³
ϵ_d	26	26	
P_{in}	10^{-3}	10^{-5}	Вт
r	$3 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-11}$	рад/с
η	7.2	200	рад/с
$\mathcal{K}$	$1.5 \cdot 10^5$	$0.98 \cdot 10^9$	рад/с
$\mathcal{K}/4\gamma$	$7.8 \cdot 10^{-3}$	490	

В таблице 2 представлены оценки величин реалистичного и оптимистичного фотонного преобразователя. Для оптимистичного набора величин $\mathcal{K}/4\gamma \gg 1$. Для оценки были рассмотрены нелинейные свойства ниобата лития, однако, электрооптическая нелинейность ниобата стронция бария ($\text{Sr}_{0.75}\text{Ba}_{0.25}\text{Nb}_2\text{O}_6$) примерно на порядок выше, чем у LiNbO_3 , а добротность приближается к 10^8 [88—91]. В работе [92] была заявлена добротность 10^9 для резонатора из LiNbO_3 .

4.2.3 Влияние внутренних потерь

Мы рассмотрели случай связи ВЧ резонатора с внешней средой без потерь. Строго говоря, это неверно, так как любой реальный резонатор обладает внутренним поглощением, которое ведет к поступлению теплового шума. Скорость процесса пропорциональна отношению поглощения и коэффициента связи и может быть достаточно малой для высокочастотных резонаторов.

Проведем простой анализ чувствительности в присутствии потерь. Оптические и ВЧ потери можно смоделировать, добавив дополнительные входные и выходные порты в резонаторы, через которые в них поступают нулевые флуктуации. Выберем коэффициенты пропускания этих портов так, что соответствующие показатели затухания равны $\gamma_O = \varepsilon_O^2 \gamma$ и $\gamma_{RF} = \varepsilon_{RF}^2 \gamma_M$, где ε_O — это коэффициент потерь в оптических модах (равный для всех мод), а ε_{RF} — коэффициент потерь в ВЧ моде. Так же введем новые операторы флуктуаций $e_{p,m,d}$ для $c_{p,m}$ мод оптического поля и ВЧ моды d , связанные с соответствующими показателями затухания. Пренебрегая квадратичными членами по ε_O и ε_{RF} , мы получим новый набор уравнений Ланжевена и входные-выходные соотношения.

$$(\gamma - i\Omega)c_p = i\eta C c_d + \sqrt{2\gamma}a_p + \sqrt{2\gamma_O}e_p, \quad (4.34a)$$

$$(\gamma - i\Omega)c_m = i\eta C c_d^\dagger + \sqrt{2\gamma}a_m + \sqrt{2\gamma_O}e_m, \quad (4.34б)$$

$$(\gamma_M - i\Omega)c_d = i\eta C(c_p + c_m^\dagger) + \sqrt{2\gamma_M}q + if_s + \sqrt{2\gamma_{RF}}e_d, \quad (4.34в)$$

$$b_{p,m} = -a_{p,m} + \sqrt{2\gamma}c_{p,m} + \sqrt{2\gamma}\sqrt{2\gamma_O}\tau_{RT}e_{p,m}. \quad (4.34г)$$

Здесь τ_{RT} — это время полного прохода фотона в резонаторе.

Введем квадратурные амплитуды аналогично (4.13)

$$e_{pa} = \frac{e_p e^{i\phi} + e_p^\dagger e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}, \quad e_{p\phi} = \frac{e_p e^{i\phi} - e_p^\dagger e^{-i\phi}}{i\sqrt{2}}, \quad (4.35a)$$

$$e_{ma} = \frac{e_m e^{i\phi} + e_m^\dagger e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}, \quad e_{m\phi} = \frac{e_m e^{i\phi} - e_m^\dagger e^{-i\phi}}{i\sqrt{2}}, \quad (4.35б)$$

$$e_{da} = \frac{e_d + e_d^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad e_{d\phi} = \frac{e_d - e_d^\dagger}{i\sqrt{2}}. \quad (4.35в)$$

В добавок к комбинациям (4.15), определим комбинации квадратур новых флуктуаций

$$\lambda_{\pm a} = \frac{e_{pa} \pm e_{ma}}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_{\pm \phi} = \frac{e_{p\phi} \pm e_{m\phi}}{\sqrt{2}}. \quad (4.36)$$

Повторяя вычисления, аналогичные проделанным для системы без потерь, можно прийти к заключению, что оптимальным является измерение следующей комбинации выходных квадратур

$$\begin{aligned} \beta_a &= \frac{4\gamma|\eta C|^2}{(\gamma_M - i\Omega)(\gamma^2 + \Omega^2)}\beta_{+a} + \beta_{-a} = \frac{\mathcal{K}}{\gamma_M - i\Omega}\beta_{+a} + \beta_{-a} = \\ &= \frac{\mathcal{K}\sqrt{\gamma_O}}{(\gamma_M - i\Omega)}(2\gamma\tau_{RT} + 1)\lambda_{+a} + \frac{\sqrt{\xi\mathcal{K}}}{(\gamma_M - i\Omega)}(\sqrt{2\gamma_M}q_\phi + \sqrt{2\gamma_{RF}}e_{d\phi}) + \end{aligned} \quad (4.37a)$$

$$\begin{aligned} &+ \xi\alpha_{-a} + 2\sqrt{\gamma\gamma_O} \left[\tau_{RT} + \frac{1}{\gamma - i\Omega} \right] \lambda_{-a} + \frac{\sqrt{\xi\mathcal{K}}}{(\gamma_M - i\Omega)}f_a \approx \\ &\approx \frac{\mathcal{K}\sqrt{\gamma_O}}{(\gamma_M - i\Omega)}\lambda_{+a} + \frac{\sqrt{\xi\mathcal{K}}}{(\gamma_M - i\Omega)}\sqrt{2\gamma_M}q_\phi + \xi\alpha_{-a} + \frac{\sqrt{\xi\mathcal{K}}}{(\gamma_M - i\Omega)}f_a. \end{aligned} \quad (4.37b)$$

Оператор, измеряемый в системе с потерями (4.37), такой же, как и в системе без потерь (4.23). Дополнительный член, связанный с флуктуациями из-за потерь, не позволяет вычесть ОФВ полностью. Спектральная плотность мощности шума равна

$$S = \varepsilon_O^2 \mathcal{K}(2n_O + 1) + \frac{(\gamma_M^2 + \Omega^2)}{\mathcal{K}} + 2\gamma_M(2n_T + 1) \quad (4.38)$$

Минимальная спектральная плотность мощности шума равна

$$S_{min} = 2\gamma_M(2n_T + 1) + \varepsilon_O\sqrt{(2n_O + 1)}S_{SQL} \quad (4.39)$$

и достигается при условии

$$\mathcal{K}_{opt} = \frac{\mathcal{K}_{SQL}}{2\varepsilon_O\sqrt{(2n_O + 1)}}. \quad (4.40)$$

Здесь $n_O = 1/(\exp[(\hbar\omega)/(k_B T_O)] - 1)$, T_O — это температура электрооптического кристалла.

Следует отметить, что в данном выводе мы пренебрегли членами, пропорциональными τ_{RT} , так как $\tau_{RT} \ll 1/\gamma$. Так же можно пренебречь членами, пропорциональными $e_{d\phi}$ и λ_{-a} , так как они в ε раз меньше, чем члены пропорциональные q_ϕ и α_{-a} , соответственно.

4.3 Выводы

Предложен принцип широкополосного вариационного измерения высокочастотного сигнала, основанного на трехмодовом *электрооптическом* преобразователе для измерения ВЧ сигнала, с накачкой на средней оптической моде.

Показано, что независимое измерение светового поля в двух выходах позволяет исключить обратное флуктуационное влияние в широкой полосе частот.

Продemonстрирована возможность измерения теплового шума с точностью выше СКП.

Продemonстрировано, что в первом порядке малости чувствительность измерения ограничивают только оптические, а не электрические потери в электрооптическом кристалле.

Глава 5. Расщепление поляризованных мод в резонаторах Фабри-Перо

Для эффективной работы электрооптических и оптомеханических преобразователей необходимо точное соблюдение условий фазового синхронизма. Одним из возможным способов является использование мод высших порядков в астигматических резонаторах. Подбирая радиусы кривизны зеркал резонатора и номер моды, можно подстроить частоты оптических мод для выполнения условий синхронизма.

В данном разделе приведен расчет расщепления мод высших порядков в астигматических резонаторах с использованием метода работы силы давления света при адиабатически медленной деформации поверхности зеркала. Для решения этой задачи были построены многомерные моды Эрмита-Гаусса и вычислены компоненты тензора напряжений Максвелла, с помощью которого вычислена сила давления света на зеркало резонатора. Расщепление было вычислено при помощи адиабатической теоремы и закона сохранения энергии. Проведено сравнение рассчитанных величин с полученными ранее теоретическими и экспериментальными результатами.

5.1 Сила давления света

5.1.1 Построение многомерных мод Эрмита-Гаусса

Рассмотрим резонатор Фабри-Перо длины L с двумя сферическими зеркалами (Рис. 5.1). Расчет многомерных мод будет проведен с помощью метода последовательных приближений. В качестве нулевого приближения выберем решение скалярного уравнения Гельмгольца в параксиальном приближении

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (5.1)$$

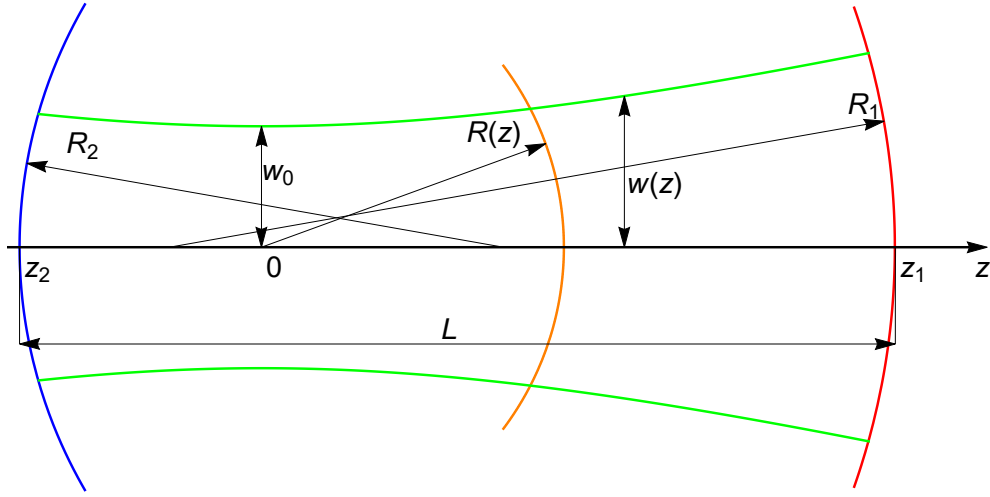


Рисунок 5.1 — Резонатор Фабри-Перо со сферическими зеркалами. Синяя и красная кривые — это два сферических зеркала с радиусами кривизны R_1 и R_2 соответственно. Зеленая кривая показывает размер пятна светового луча $w(z)$, оранжевая кривая — это радиус кривизны волнового фронта $R(z)$. Ноль оптической оси z расположен в перетяжке, зеркала находятся в точках с координатами z_1 и z_2 соответственно. Длина резонатора L .

где $k = \omega/c$ — это волновой вектор, ω — это частота света. Оно дает волновое решение для светового поля в виде мод Эрмита-Гаусса

$$\psi_{mn}(\mathbf{r}) = \frac{w_0}{w(z)} \frac{H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right)}{\sqrt{2^{m+n}m!n!}} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}, \quad (5.2a)$$

$$u_{mn}(\mathbf{r}) = A\psi_{mn}(\mathbf{r}) e^{i\left[kz + k\frac{x^2+y^2}{2R(z)} - (1+m+n)\zeta(z)\right]}. \quad (5.2b)$$

где A — это амплитуда поля, $H_i(\xi)$ — это многочлен Эрмита i -того порядка,

$$w_0^2 = \frac{2z_0}{k}, \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \quad (5.3)$$

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right), \quad \zeta(z) = \arctan(z/z_0).$$

w_0 — это поперечный размер перетяжки, $R(z)$ — это радиус кривизны волнового фронта, $\zeta(z)$ — это фаза Гюи. При $z = z_1$ и $z = z_2$ $R(z)$ равен радиусу кривизны зеркала, это условие позволяет получить длину Рэлея z_0 . Все перечисленные величины продемонстрированы на рис. 5.1.

Решение (5.2) является скалярным и не учитывает поляризацию света. Для получения векторного решения необходимо рассмотреть уравнения Максвелла в вакууме

$$[\nabla \times \mathbf{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.4a)$$

$$[\nabla \times \mathbf{B}] = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (5.4б)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (5.4в)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0. \quad (5.4г)$$

с граничным условием на поверхности зеркал $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = 0|_{M_{1,2}}$, где $\mathbf{n}$ — это нормаль к зеркалу.

Решение для стоячих волн электромагнитного поля, поляризованного вдоль оси x , которое удовлетворяет уравнениям Максвелла с точностью до членов порядка $1/(kw_0)^2$ [65] — это

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{1}{4k^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \right) \text{Im } u_{mn}(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \text{Im } u_{mn}(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{k} \frac{\partial \text{Re } u_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x} \end{pmatrix}^T \cos \omega t, \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \text{Re } u_{mn}(\mathbf{r}) \\ \left(1 + \frac{1}{4k^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \right) \text{Re } u_{mn}(\mathbf{r}) \\ -\frac{1}{k} \frac{\partial \text{Im } u_{mn}(\mathbf{r})}{\partial y} \end{pmatrix}^T \sin \omega t. \quad (5.5б)$$

Все остальные члены дают вклад не больше $1/(kw_0)^3$, поэтому ими можно пренебречь.

Величина энергии, запасенной в резонаторе, равна

$$U = \int_V \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2}{8\pi} dV, \quad (5.6)$$

где V — это объем резонатора. Рассчитав компоненты электромагнитного поля и взяв интегралы, получим

$$U = U_{scal} + U_{pol}, \quad U_{scal} = A^2 \frac{w_0^2 L}{32}, \quad (5.7a)$$

$$U_{pol} = \frac{1}{(kw_0)^2} (m + n + 1) U_{scal}. \quad (5.7b)$$

Эту величину можно разделить на две части: U_{scal} , которая дает величину энергии, совпадающую с величиной из скалярной задачи, и поправки U_{pol} , которая меньше в $(kw_0)^2$ раз и связана с поляризацией света. Нужно отметить, что несмотря на связь с поляризацией, она не зависит от направления поляризации. См. Приложение F для деталей вывода.

Для применения метода последовательных приближений поправка к энергии U_{pol} должна быть меньше основной величины U_{scal} . Это приводит к ограничению на номер моды

$$(m + n + 1) \ll (kw_0)^2. \quad (5.8)$$

В оптическом диапазоне частот это условие выполнено с запасом [79; 93].

5.1.2 Построение тензора напряжений Максвелла

Тензор напряжений Максвелла

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j + \mathbf{B}_i \mathbf{B}_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) \right) \quad (5.9)$$

используется для определения силы, действующей на пробное тело в электромагнитном поле [94]. Эта сила равна

$$d\mathbf{F}_i = (\nabla_j \cdot \sigma_{ij}) dV = (\sigma_{ij} \cdot \mathbf{n}_j) dS, \quad (5.10a)$$

где dV — это элемент объема тела, $\mathbf{n}$ — это внешняя нормаль к элементу поверхности dS . Сила давления света равна нормальной составляющей силы

$$dF_n = -((\sigma_{ij} \cdot \mathbf{n}_j) \cdot \mathbf{n}_i) dS. \quad (5.10b)$$

В случае резонатора Фабри-Перо поверхностью тела является поверхность зеркал. Без ограничения общности будем рассматривать правое зеркало с $z = z_1$

на рис. 5.1. Мы опускаем индекс из обозначений радиуса кривизны зеркала и размера светового пятна на зеркале, чтобы сделать выражения менее громоздкими и повысить читаемость

$$R(z_1) = R_1 \Rightarrow R, \quad w(z_1) \Rightarrow w. \quad (5.11)$$

Внешняя нормаль к зеркалу равна

$$\mathbf{n} = - \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R^2} \right) + O((1/(kw_0)^3)). \quad (5.12)$$

Для оценки компонентов нормали можно провести следующие рассуждения. Главный вклад вносит часть рядом с центром пятна светового луча, поэтому $x \sim y \sim w_0$. В параболическом приближении радиус кривизны зеркала примерно равен длине Рэлея $R \sim z_0 \sim kw_0^2$. Компоненты нормали зеркала (5.12) имеют разные порядки величины: $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y \sim 1/(kw_0)$, а $(\mathbf{n}_z - 1) \sim 1/(kw_0)^2$. Поэтому для сохранения точности необходимо оставить члены

- с точностью до $1/(kw_0)^0$ для $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$;
- с точностью до $1/(kw_0)^1$ для σ_{xz}, σ_{yz} ;
- с точностью до $1/(kw_0)^2$ для σ_{zz} .

Для получения тензора напряжений Максвелла необходимо рассчитать компоненты электромагнитного поля, поляризованного вдоль оси x (5.5), на поверхности зеркала. Они равны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = A \begin{pmatrix} O((1/(kw_0)^2)) \\ O((1/(kw_0)^2)) \\ \frac{2}{kw} (\sqrt{2}m\psi_{m-1,n}(\mathbf{r}) - \frac{x}{w}\psi_{mn}(\mathbf{r})) \end{pmatrix}^T \cos \omega t, \quad (5.13a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = A \begin{pmatrix} O((1/(kw_0)^2)) \\ 1 + \frac{(k^2w^4 - 4R^2)(x^2 - y^2) + 4R^2w^2(m-n)}{4k^2R^2w^4} \\ -\frac{y}{R} \end{pmatrix}^T \psi_{mn}(\mathbf{r}) \sin \omega t. \quad (5.13b)$$

Компоненты $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$ и $\mathbf{B}_x$ не равны в точности нулю, но они не дадут достаточный вклад в тензор напряжений Максвелла, поэтому ими можно пренебречь. Компонентой $\mathbf{B}_y$ нельзя пренебречь по двум причинам:

1. На поверхности зеркала магнитная стоячая волна имеет пучность. Поэтому ее основная часть (1 в скобках выражения (5.13b)) не обращается в нуль.

Наоборот, электрическая стоячая волна имеет узел на поверхности зеркала. Поэтому для $\mathbf{E}_x$ на поверхности зеркала остается только поправка порядка $O((1/(kw_0)^2))$.

2. Второе слагаемое $\mathbf{B}_y$ имеет порядок $O((1/(kw_0)^2))$, но им нельзя пренебречь в отличие от $\mathbf{E}_x$, $\mathbf{E}_y$ и $\mathbf{B}_x$. Вместе с основной частью $\mathbf{B}_y$ оно дает необходимый вклад порядка $O((1/(kw_0)^2))$ в компоненту тензора σ_{zz} .

Нас не интересуют быстрые осцилляции зеркала на оптической частоте 2ω , поэтому при вычислении тензора напряжений Максвелла можно заменить быстро осциллирующие члены $\cos^2 \omega t$, $\sin^2 \omega t \rightarrow \frac{1}{2}$ их средним по времени.

Прямое вычисление компонентов тензора дает

$$\sigma_{ij} = \frac{-A^2}{16\pi} \begin{pmatrix} \psi_{mn}^2(\mathbf{r}) & 0 & 0 \\ 0 & -\psi_{mn}^2(\mathbf{r}) & \frac{2y}{R}\psi_{mn}^2(\mathbf{r}) \\ 0 & \frac{2y}{R}\psi_{mn}^2(\mathbf{r}) & \sigma_{zz}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

где $\sigma_{zz}(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{2y^2}{R^2}\right) \psi_{mn}^2(\mathbf{r}) + \sigma_F(\mathbf{r})$, $\sigma_F(\mathbf{r}) = \sigma_F^a(\mathbf{r}) + \sigma_F^s(\mathbf{r})$ и

$$\sigma_F^a(\mathbf{r}) = \frac{2}{(kw)^2} \left[\frac{2(y^2 - x^2)}{w^2} \psi_{mn}^2(\mathbf{r}) + (m - n) \psi_{mn}^2(\mathbf{r}) + \right. \\ \left. + m \psi_{m-1,n}(\mathbf{r}) \psi_{m+1,n}(\mathbf{r}) - n \psi_{m,n-1}(\mathbf{r}) \psi_{m,n+1}(\mathbf{r}) \right], \quad (5.15a)$$

$$\sigma_F^s(\mathbf{r}) = \frac{2}{(kw)^2} [m \psi_{m-1,n}(\mathbf{r}) \psi_{m+1,n}(\mathbf{r}) + n \psi_{m,n-1}(\mathbf{r}) \psi_{m,n+1}(\mathbf{r})] + \\ + \frac{(k^2 w^4 - 4R^2)(x^2 + y^2)}{2k^2 R^2 w^4} \psi_{mn}^2(\mathbf{r}). \quad (5.15b)$$

Выражения (5.14) и (5.15) представляют компоненты тензора напряжений Максвелла для света, поляризованного вдоль оси x (5.5). Индексы a и s в (5.15a) и (5.15b) значат "асимметричный" и "симметричный". Далее будет показано, что сила, происходящая из $\sigma_F^a(\mathbf{r})$ зависит от направления поляризации и является асимметричной, в то время, как сила, происходящая из $\sigma_F^s(\mathbf{r})$ не зависит от направления поляризации и является симметричной.

5.1.3 Расчет силы давления света

После подстановки компонентов тензора напряжений Максвелла (5.14) и нормали к поверхности зеркала (5.12) в выражение (5.10б), мы получим силу давления света, действующую на зеркало.

$$dF_n(\mathbf{r}) = dF_{scal}(\mathbf{r}) + dF_{pol}(\mathbf{r}), \quad (5.16a)$$

$$dF_{scal}(\mathbf{r}) = \frac{A^2}{16\pi} \psi_{mn}^2(\mathbf{r}) dS, \quad (5.16б)$$

$$dF_{pol}(\mathbf{r}) = \frac{A^2}{16\pi} \sigma_F(\mathbf{r}) dS. \quad (5.16в)$$

Она состоит из двух частей. Первая часть $dF_{scal}(\mathbf{r})$ не зависит от поляризации света и описывает регулярную составляющую силы давления света. Вторая часть $dF_{pol}(\mathbf{r})$ меньше в $(kw_0)^2$ раз и зависит от поляризации света. В отличие от поправки к энергии (5.7б), которая не зависит от направления поляризации, зависящая от поляризации часть силы давления света имеет и симметричный и асимметричный вклады

$$dF_{pol}(\mathbf{r}) = dF_{pol}^a(\mathbf{r}) + dF_{pol}^s(\mathbf{r}), \quad (5.17a)$$

$$dF_{pol}^a(\mathbf{r}) = \frac{A^2}{16\pi} \sigma_F^a(\mathbf{r}) dS, \quad (5.17б)$$

$$dF_{pol}^s(\mathbf{r}) = \frac{A^2}{16\pi} \sigma_F^s(\mathbf{r}) dS. \quad (5.17в)$$

Этот результат получен для света, поляризованного вдоль оси x (5.5). Силу давления света, поляризованного ортогонально, можно найти с помощью того же метода, если начать с выражений для света, поляризованного вдоль оси y , похожих на (5.5). Проще будет ввести формальную замену $x \rightarrow y$, $y \rightarrow -x$, $m \leftrightarrow n$ (она соответствует системе координат, повернутой на 90°) в (5.17). $dF_{pol}^s(\mathbf{r})$ симметричная и не меняется, а $dF_{pol}^a(\mathbf{r})$ асимметричная и меняет знак.

Таким образом, только асимметричная часть силы давления света $dF_{pol}^a(\mathbf{r})$ (Рис. 5.2) отвечает за расщепление частот ортогонально поляризованных мод, и мы будем рассматривать только ее вклад.

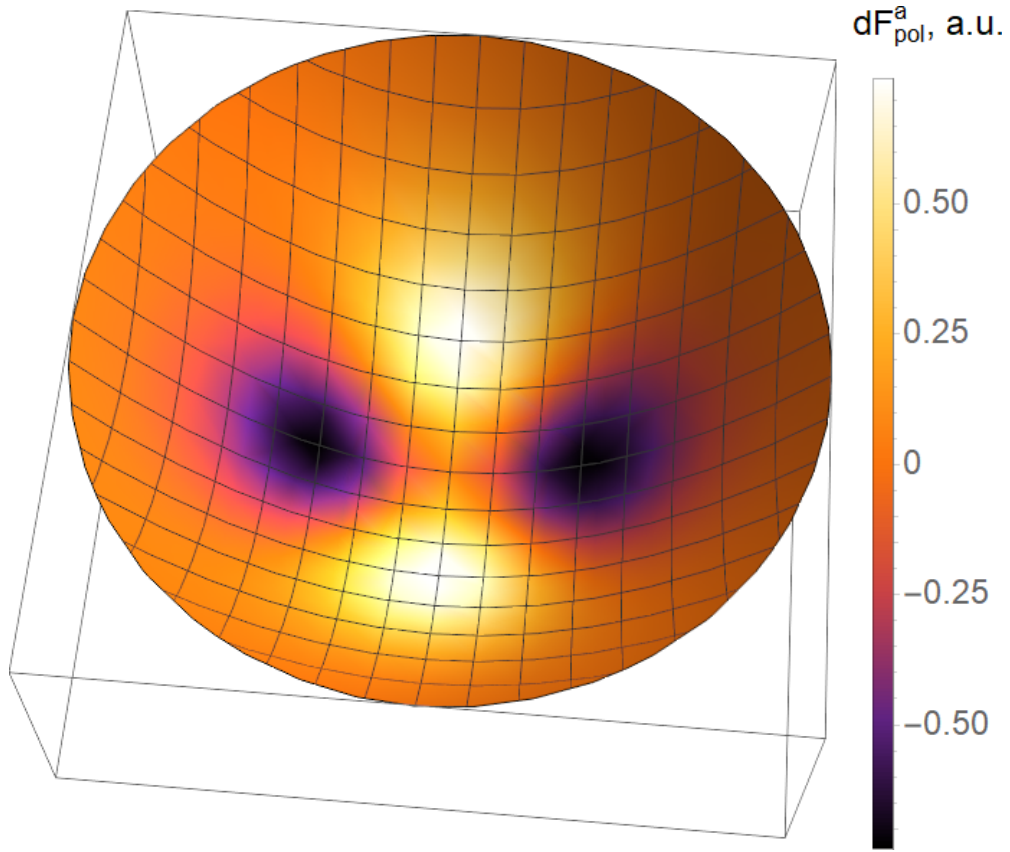


Рисунок 5.2 — Асимметрия силы давления света $dF_{pol}^a(\mathbf{r})$ поляризованной фундаментальной моды $\psi_{00}(\mathbf{r})$ в перпендикулярных направлениях на поверхности сферического зеркала.

5.2 Сдвиг частоты, вызванный деформацией зеркала

Будем описывать деформацию поверхности зеркала с помощью смещения $\Delta s(\mathbf{r})$ двух поверхностей зеркала в каждой точке поверхности (см рис. 5.3). В параболическом приближении (5.12) мы не можем различить эллипсоидальную форму и форму эллиптического параболоида. Будем называть зеркало “эллиптическим”, потому что линиями уровня его поверхности являются эллипсы [73].

Сдвиг частот, вызванный деформацией зеркала, можно найти при помощи адиабатического инварианта $\frac{U}{\omega} = \text{const}$ [95]. Вместе с законом сохранения

энергии, $\Delta U + \Delta W = 0$, где

$$\Delta W = \Delta W_{scal} + \Delta W_{pol}, \quad (5.18a)$$

$$\Delta W_{scal} = \int_M \Delta s(\mathbf{r}) dF_{scal}(\mathbf{r}), \quad (5.18б)$$

$$\Delta W_{pol} = \int_M \Delta s(\mathbf{r}) dF_{pol}^a(\mathbf{r}) \quad (5.18в)$$

представляет собой работы силы давления света $dF_n(\mathbf{r})$ при адиабатически медленной деформации, адиабатический инвариант дает величину сдвига частоты

$$\Delta\omega = -\omega \frac{\Delta W}{U}. \quad (5.19)$$

Аналогично введенным величинам для энергии и силы, мы можем выделить две составляющие в величине сдвига. Величина

$$\Delta\omega_{scal} = -\omega \frac{\Delta W_{scal}}{U_{scal}} \quad (5.20a)$$

является главной частью сдвига частоты и не связана с поляризацией света. Она отвечает за расщепление мод высших порядков с одинаковым индексом моды $m + n$.

$$\Delta\omega_{pol} = -\omega \frac{\Delta W_{pol}}{U_{scal}} \quad (5.20б)$$

зависит от поляризации и отвечает за расщепление ортогонально поляризованных мод.

При условии (5.8) вклад поправки к энергии (5.7б) в $(kw_0)^2$ раз меньше и им можно пренебречь.

5.2.1 Сдвиг частот между значительно отличающимися состояниями

Выражение для величины сдвига (5.19) (или составляющих ее частей (5.20)) справедливо лишь для малых смещений $\Delta s(\mathbf{r})$, при которых можно пренебречь перераспределением поля внутри резонатора. Эта формула должна быть обобщена на случай значительно отличающихся состояний.

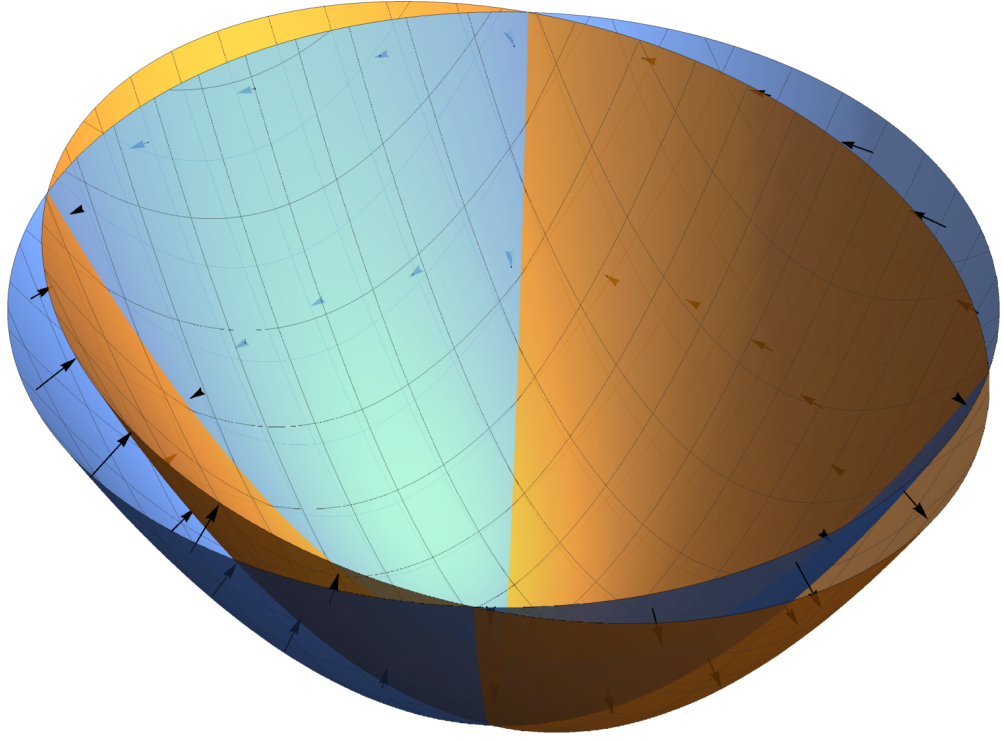


Рисунок 5.3 — Пример деформации сферического зеркала (синее) в эллиптическое (оранжевое). Изначально оно имело радиус кривизны R . После деформации оно стало эллиптическим с радиусами кривизны $R_x \neq R$, $R_y \neq R$. Черные стрелки показывают смещение поверхности зеркала $\Delta s(\mathbf{r})$. Они перпендикулярны поверхности сферического зеркала.

Смещение $\Delta s(\mathbf{r})$ зависит от разности Δp некоего параметра p такого, как радиус кривизны зеркала R или длина резонатора L . После расчета работы (5.18) и подстановки ее в выражение для сдвига частот (5.19), это выражение примет общую форму

$$\Delta\omega = f(p)\Delta p, \quad (5.21)$$

где $f(p)$ — это некая формула, рассматриваемого параметра. Необходимо представить величины длины Рэлея z_0 и размера перетяжки луча w_0 в терминах параметра p . Они являются постоянными для данного резонатора, но при деформации резонатора они изменятся. Это соответствует перераспределению поля внутри резонатора.

Разность Δp можно считать малой, и в пределе $\Delta p \rightarrow 0$ со сдвигом частот (5.21) можно обращаться как с дифференциалом. Интегрирование по p даст ве-

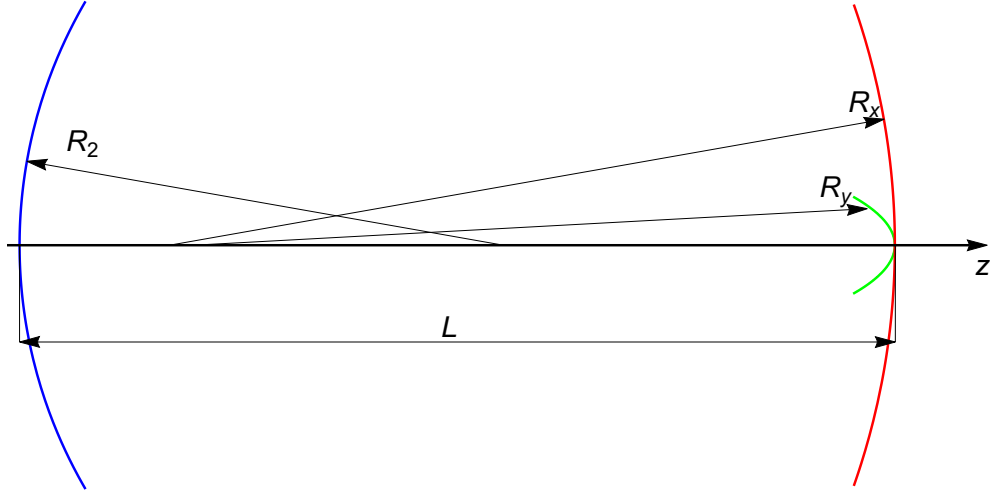


Рисунок 5.4 — Астигматический резонатор Фабри-Перо. Правое зеркало эллиптическое и имеет различные радиусы кривизны R_x и R_y . Левое зеркало сферическое с радиусом кривизны R_2 . Длина резонатора L .

личину сдвига частот между двумя значительно различающимися состояниями

$$\delta\omega = \omega(p) - \omega(p_0) = \int_{p_0}^p f(p) dp. \quad (5.22)$$

Применение этого метода по отношению к резонаторам со сферическими и эллиптическими зеркалами будет показано в следующем разделе.

5.3 Расщепление поляризованных мод высших порядков

Как и в разделе 5.1, начнем с резонатора с двумя сферическими зеркалами. Правое зеркало с радиусом кривизны R подвергается виртуальной деформации и принимает (в общем случае) форму эллипсоида или эллиптического параболоида с радиусами кривизны $R_x = R + \Delta R_x$, $R_y = R + \Delta R_y$. Эту деформацию можно описать смещением поверхности

$$\Delta s(\mathbf{r}) = \frac{x^2 \Delta R_x}{2R^2} + \frac{y^2 \Delta R_y}{2R^2}. \quad (5.23)$$

Левое зеркало с радиусом кривизны R_2 остается сферическим (Рис. 5.4).

В следующих подразделах мы выведем расщепление мод высших порядков и покажем, что работа силы давления света может описать известные эффекты снятия вырождения в астигматических резонаторах [73; 78].

5.3.1 Сдвиг фазы Гюи и расщепление мод высших порядков

Подставляя выражения для силы давления света (5.16б) и смещения (5.23) в выражение для работы (5.18б), получим главную часть сдвига частот (5.20а)

$$\Delta\omega_{scal} = -\frac{c}{2L} \left[\frac{\sqrt{(R_2 - L)L} \left(m + \frac{1}{2}\right)}{R_x \sqrt{(R_x - L)(R_x + R_2 - L)}} \Delta R_x + \frac{\sqrt{(R_2 - L)L} \left(n + \frac{1}{2}\right)}{R_y \sqrt{(R_y - L)(R_y + R_2 - L)}} \Delta R_y \right]. \quad (5.24)$$

В пределе $\Delta R_x \rightarrow 0$ и $\Delta R_y \rightarrow 0$ эту величину можно рассматривать как дифференциал. Интегрирование по R_x и R_y дает сдвиг частот между резонатором со сферическим зеркалом с радиусом кривизны R и эллиптическим зеркалом с радиусами R_x и R_y

$$\begin{aligned} \delta\omega_{scal} = & \frac{c}{L} (m + n + 1) \arctan \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R - L)}{L(R_2 + R - L)}} - \\ & - \frac{c}{L} \left(m + \frac{1}{2}\right) \arctan \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R_x - L)}{L(R_2 + R_x - L)}} - \\ & - \frac{c}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right) \arctan \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R_y - L)}{L(R_2 + R_y - L)}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Таким образом, регулярная часть силы давления света $dF_{scal}(\mathbf{r})$, которая не зависит от поляризации света, отвечает за сдвиг частот, связанный с фазой Гюи.

Расщепление смежных Эрмит-Гауссовых мод $(\omega_{m-1,n+1} - \omega_{m,n})$ равно

$$\delta\omega_{scal}^{mn} = \frac{c}{L} \arctan \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R_x - L)}{L(R_2 + R_x - L)}} - \frac{c}{L} \arctan \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R_y - L)}{L(R_2 + R_y - L)}}. \quad (5.26)$$

Оно совпадает с величиной, полученной из точного решения уравнения Гельмгольца в параксиальном приближении для астигматических резонаторов [78]. См. детали в Приложении G.

5.3.2 Расщепление ортогонально поляризованных мод

Подставляя выражения для асимметричной части силы давления света (5.17в) и смещения (5.23) в выражение для работы (5.18в), получим величину сдвига частот поляризованной моды высшего порядка (5.20б)

$$\Delta\omega_{pol} = -\frac{c}{kL} \left(\frac{\Delta R_y}{4R_y^2} - \frac{\Delta R_x}{4R_x^2} \right). \quad (5.27)$$

В пределе $\Delta R_x \rightarrow 0$ и $\Delta R_y \rightarrow 0$ эту величину можно рассматривать как дифференциал. Интегрирование по R_x и R_y дает сдвиг частот между резонатором со сферическим зеркалом с радиусом кривизны R и эллиптическим зеркалом с радиусами R_x и R_y

$$\delta\omega_{pol} = -\frac{c}{4kL} \frac{R_y - R_x}{R_x R_y}. \quad (5.28)$$

Асимметрия силы давления света (рис. 5.2) влечет зависимость сдвига частот от разности радиусов кривизны. В случае сферического зеркала ($R_x = R_y = R$) он обнуляется, потому что суммарная работа равна нулю.

Расщепление ортогонально поляризованных мод равно

$$\delta\omega_{pol}^{xy} = 2\delta\omega_{pol} = -\frac{c}{2kL} \frac{R_y - R_x}{R_x R_y}. \quad (5.29)$$

Для фундаментальной моды эта величина совпадает с величиной полученной *Uphoff et al.* [73]. Для мод высших порядков вклады от различных номеров мод взаимно вычитают друг друга и эта величина не зависит от номеров моды m и n , как было показано *Uphoff et al.* [73].

Этот результат справедлив при выполнении двух условий:

1. Номера моды должны быть не слишком большими (5.8) для применимости метода последовательных приближений.
2. Расщепление должно быть велико по сравнению с отброшенными членами (Н.4). Это условие было уточнено по отношению к модам высшего порядка. См. детали в Приложении Н.

Оба этих условия выполняются в оптическом диапазоне. Они не выполняются в микроволновом диапазоне [96], и этот результат теряет свою количественную силу.

5.4 Выводы

Мы предложили метод расчета расщепления в астигматических резонаторах с использованием силы давления света. Результаты совпадают с ранними теоретическими расчетами и экспериментальными измерениями, что подтверждает справедливость нашего подхода.

Метод силы давления света дает еще один способ объяснить сдвиги частот. Регулярная часть силы давления света ведет к сдвигу частот и расщеплению, связанному с фазой Гюи. Асимметричная часть силы давления света, вызванная продольной составляющей электромагнитной волны, ведет к расщеплению ортогонально поляризованных мод.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Предложен и проанализирован оригинальный принцип широкополосного вариационного измерения с накачкой на двух оптических модах, позволяющий полностью исключить обратное флуктуационное влияние и преодолеть СКП. Показано, что эта схема является неустойчивой и предложен механизм стабилизации с помощью ортогонально поляризованной накачки. Рассчитано влияние шума на паразитных частотах на чувствительность этого измерения и разработан способ частичного подавления этого шума.
2. Предложен оригинальный принцип многомерного широкополосного вариационного измерения резонансной силы, основанного на трехмодовом оптомеханическом датчике с накачкой на средней оптической моде. Продемонстрирована устойчивость данной системы. Показано, что независимое измерение светового поля в двух выходах позволяет полностью исключить обратное флуктуационное влияние в широкой полосе частот и преодолеть СКП.
Продемонстрировано наличие в данной оптомеханической схеме подсистем, “свободных от квантовой механики”, обсуждающихся в научной литературе.
3. Предложен принцип широкополосного вариационного измерения высокочастотного сигнала, основанного на трехмодовом *электрооптическом* преобразователе для измерения радиоизлучения, с накачкой на средней оптической моде. Показано, что независимое измерение светового поля в двух выходах позволяет исключить обратное флуктуационное влияние в широкой полосе частот. Продемонстрирована возможность измерения теплового шума с точностью выше СКП. Обнаружено, что в первом порядке малости чувствительность измерения ограничивают только оптические, а не электрические потери в электрооптическом кристалле.
4. Предложен оригинальный метод вычисления расщепления ортогонально поляризованных мод высших порядков в резонаторе Фабри-Перо с зеркалами в форме эллиптических параболоидов, основанный на адия-

батическом инварианте и расчете тензора Максвелла. Этот метод дает два известных результата: моды с одинаковым индексом отличаются по частоте из-за различий в фазе Гюи. Моды с одинаковым номером, но ортогонально поляризованные, имеют разную частоту из-за различий в волновом фронте.

В заключение автор выражает благодарность научному руководителю Вятчанину С. П. за поддержку, помощь и научное руководство. Также автор благодарит Мацко А. Б. за полезные дискуссии по теме научного исследования.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации, в которых отражены основные результаты диссертации в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационных советах МГУ по специальности 1.3.2. Приборы и методы экспериментальной физики

- A1. S. P. Vyatchanin, A. I. Nazmiev, A. B. Matsko. Broadband dichromatic variational measurement // Physical Review A. — 2021. — Vol. 104. — P. 023519. — Импакт-фактор 2.9 (JIF). Авт. вклад 0.6 п.л. из 1.6 п.л. — DOI: 10.1103/PhysRevA.104.023519.
- A2. S. P. Vyatchanin, A. I. Nazmiev, A. B. Matsko. Broadband coherent multidimensional variational measurement // Physical Review A. — 2022. — Vol. 106. — P. 053711. — Импакт-фактор 2.9 (JIF). Авт. вклад 0.8 п.л. из 2.0 п.л. — DOI: 10.1103/PhysRevA.106.053711.
- A3. A. I. Nazmiev, A. B. Matsko, S. P. Vyatchanin. Back action evading electro-optical transducer // Journal of The Optical Society of America B. — 2022. — Vol. 39. — P. 1103–1110. — Импакт-фактор 1.8 (JIF). Авт. вклад 0.3 п.л. из 0.9 п.л. — DOI: 10.1364/JOSAB.449388.

Список литературы

1. B. P. Abbott et al. Prospects for Localization of Gravitational Wave Transients by the Advanced LIGO and Advanced Virgo Observatories // Living Reviews in Relativity. — 2020. — Vol. 23. — P. 3.
2. J. Aasi et al. Advanced LIGO // Classical and Quantum Gravity. — 2015. — Vol. 32. — P. 074001.
3. F. Asernese et al. Advanced Virgo: a 2nd generation interferometric gravitational wave detector // Classical and Quantum Gravity. — 2015. — Vol. 32. — P. 024001.
4. K. L. Dooley et al. GEO 600 and the GEO-HF upgrade program: successes and challenges // Classical and Quantum Gravity. — 2016. — Vol. 33. — P. 075009.
5. Y. Aso et al. Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector // Physical Review D. — 2013. — Vol. 88, issue 4. — P. 043007.
6. M. Wu et al. Dissipative and Dispersive Optomechanics in a Nanocavity Torque Sensor // Physical Review X. — 2014. — Vol. 4, issue 2. — P. 021052.
7. P. H. Kim et al. Approaching the standard quantum limit of mechanical torque sensing // Nature Communications. — 2016. — Vol. 7. — P. 13165.
8. J. Ahn et al. Ultrasensitive torque detection with an optically levitated nanorotor // Nature Nanotechnology. — 2020. — Vol. 15. — P. 89—93.
9. S. Forstner et al. Cavity Optomechanical Magnetometer // Physical Review Letters. — 2012. — Vol. 108, issue 12. — P. 120801.
10. B.-B. Li et al. Quantum enhanced optomechanical magnetometry // Optica. — 2018. — Vol. 5. — P. 850.
11. X. Li et al. Coherent coupling completing an unambiguous optomechanical classification framework // Physical Review A. — 2019. — Vol. 100, issue 5. — P. 053855.
12. A. Militararu et al. Ponderomotive Squeezing of Light by a Levitated Nanoparticle in Free Space // Physical Review Letters. — 2022. — Vol. 129, issue 5. — P. 053602.

13. J. Cripe et al. Quantum Backaction Cancellation in the Audio Band // Physical Review X. — 2020. — Vol. 10, no. 3. — P. 031065.
14. C. Wipf et al. Route to ponderomotive entanglement of light via optically trapped mirrors // New Journal of Physics. — 2008. — Vol. 10, no. 9. — P. 095017.
15. S. Dwyer et al. Gravitational wave detector with cosmological reach // Physical Review D. — 2015. — Vol. 91. — P. 082001.
16. B. P. Abbott et al. Exploring the Sensitivity of Next Generation Gravitational Wave Detectors. — 2016.
17. M. E. Zucker, S. E. Whitcomb. Measurement of Optical Path Fluctuations due to Residual Gas in the LIGO 40 Meter Interferometer // Proceedings of the Seventh Marcel Grossman Meeting on recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation, and relativistic field theories / ed. by R. T. Jantzen, G. Mac Keiser, R. Ruffini. — 1996. — P. 1434.
18. T. Hong et al. Brownian thermal noise in multilayer coated mirrors // Physical Review D. — 2013. — Vol. 87. — P. 082001.
19. L. Buchmann et al. Complex Squeezing and Force Measurement Beyond the Standard Quantum Limit // Physical Review Letters. — 2016. — Vol. 117. — P. 030801.
20. D. Mason et al. Continuous force and displacement measurement below the standard quantum limit // Nature Physics. — 2019. — Vol. 15, no. 8. — P. 745—749.
21. T. Cullen et al. Surpassing the Standard Quantum Limit Using an Optical Spring // Physical Review Letters. — 2024. — Vol. 133, issue 11. — P. 113602.
22. H. Yu et al. Quantum correlations between light and the kilogram-mass mirrors of LIGO // Nature. — 2020. — Vol. 583, no. 7814. — P. 43—47.
23. V. B. Braginsky. Classical and quantum limits on the detection of weak disturbances of a macroscopic oscillator // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 1968. — Vol. 26. — P. 831—834.

24. S. Vyatchanin, A. Matsko. On sensitivity limitations of a dichromatic optical detection of a classical mechanical force // Journal of Optical Society of America B. — 2018. — Vol. 35. — P. 1970—1978.
25. M. Tsang, C. Caves. Coherent Quantum-Noise Cancellation for Optomechanical Sensors // Physical Review Letters. — 2010. — Vol. 105. — P. 123601.
26. J. A. Armstrong et al. Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric // Physical Review. — 1962. — Vol. 127, issue 6. — P. 1918—1939.
27. A. B. Matsko, D. V. Strekalov, N. Yu. Sensitivity of terahertz photonic receivers // Physical Review A. — 2008. — Vol. 77. — P. 043812.
28. G. Santamaría-Botello et al. Sensitivity and noise in THz electro-optic upconversion radiometers // Scientific Reports. — 2020. — Vol. 10, no. 1. — P. 9403.
29. R. D. Martin et al. Video rate passive millimeter-wave imager utilizing optical upconversion with improved size, weight, and power // Passive and Active Millimeter-Wave Imaging XVIII. Vol. 9462 / ed. by D. A. Wikner, A. R. Luukanen. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2015. — P. 946209.
30. D. Strekalov et al. W-Band Photonic Receiver for Compact Cloud Radars // Sensors. — 2022. — Vol. 22, no. 3.
31. R. Ahmed et al. 94GHZ RF-Photonics Receiver for Compact Spaceborne Radars // IGARSS 2022 - 2022 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium. — 2022. — P. 7115—7118.
32. D. V. Strekalov et al. Microwave whispering-gallery resonator for efficient optical up-conversion // Physical Review A. — 2009. — Vol. 80, issue 3. — P. 033810.
33. G. Schunk et al. Interfacing transitions of different alkali atoms and telecom bands using one narrowband photon pair source // Optica. — 2015. — Vol. 2, no. 9. — P. 773—778.
34. A. Rueda et al. Efficient microwave to optical photon conversion: an electro-optical realization // Optica. — 2016. — Vol. 3, no. 6. — P. 597—604.
35. Д. Клаудер, Э. Сударшан. Основы квантовой оптики. — М. : Мир, 1970.

36. П. В. Елютин, В. Д. Кривченков. Квантовая механика (с задачами). — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001.
37. A. Forbes. Structured Light from Lasers // Laser & Photonics Reviews. — 2019. — Vol. 13, no. 11. — P. 1900140.
38. V.B. Braginsky, F.Ya. Khalili. Quantum Measurement / ed. by K.S. Thorne. — Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
39. S. P. Vyatchanin, A. B. Matsko. Quantum limit on force measurement // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 1993. — Vol. 77. — P. 218.
40. S. Vyatchanin, E. Zubova. Quantum variation measurement of force // Physics Letters A. — 1995. — Vol. 201. — P. 269—274.
41. С.П. Вятчанин, А.Б. Мацко. Квантовое вариационное измерение силы и компенсация нелинейного обратного влияния // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1996. — Т. 109, вып. 6. — С. 109.
42. S. L. Danilishin, F. Y. Khalili. Quantum measurement theory in gravitational-wave detectors // Living Reviews in Relativity. — 2012. — Vol. 15:5.
43. H. J. Kimble et al. Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into QND interferometers by modifying input and/or output optics // Physical Review D. — 2001. — Vol. 65. — P. 022002.
44. A. Beccari et al. Strained crystalline nanomechanical resonators with quality factors above 10 billion // Nature Physics. — 2022. — Vol. 18, no. 4. — P. 436—441.
45. S. A. Fedorov et al. Generalized dissipation dilution in strained mechanical resonators // Physical Review B. — 2019. — Vol. 99, issue 5. — P. 054107.
46. R. X. Adhikari et al. A cryogenic silicon interferometer for gravitational-wave detection // Classical and Quantum Gravity. — 2020. — Vol. 37, no. 16. — P. 165003.
47. W. G. Unruh. Quantum nondemolition and gravity-wave detection // Physical Review D. — 1979. — Vol. 19, issue 10. — P. 2888—2896.
48. C. M. Caves et al. On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. I. Issues of principle // Reviews of Modern Physics. — 1980. — Vol. 52, issue 2. — P. 341—392.

49. A. Peres. Quantum limited detectors for weak classical signals // Physical Review D. — 1989. — Vol. 39, issue 10. — P. 2943—2950.
50. K. Thorne et al. Quantum Nondemolition Measurements of Harmonic Oscillators // Physical Review Letters. — 1978. — Vol. 40, issue 11. — P. 667—671.
51. G. Vasilakis et al. Generation of a squeezed state of an oscillator by stroboscopic back-action-evading measurement // Nature Physics. — 2015. — Vol. 11, no. 5. — P. 389—392.
52. A. Clerk, F. Marquardt, K. Jacobs. Back-action evasion and squeezing of a mechanical resonator using a cavity detector // New Journal of Physics. — 2008. — Vol. 10. — P. 095010.
53. В. Б. Брагинский, Ю. И. Воронцов, Ф. Я. Халили. Оптимальные квантовые измерения в детекторах гравитационного излучения // Письма в ЖЭТФ. — 1978. — Т. 27, вып. 5. — С. 296.
54. V. B. Braginsky, Y. I. Vorontsov, K. S. Thorne. Quantum Nondemolition Measurements // Science. — 1980. — Vol. 209, no. 4456. — P. 547—557.
55. M. Tsang, C. Caves. Evading Quantum Mechanics: Engineering a Classical Subsystem within a Quantum Environment // Physical Review X. — 2012. — Vol. 2. — P. 031016.
56. C. B. Møller et al. Quantum back-action-evading measurement of motion in a negative mass reference frame // Nature. — 2017. — Vol. 547, no. 7662. — P. 191—195.
57. M. H. Wimmer et al. Coherent cancellation of backaction noise in optomechanical force measurements // Physical Review A. — 2014. — Vol. 89. — P. 053836.
58. G. D. Boyd, J. P. Gordon. Confocal Multimode Resonator for Millimeter Through Optical Wavelength Masers // Bell System Technical Journal. — 1961. — Vol. 40, no. 2. — P. 489—508.
59. G. D. Boyd, H. Kogelnik. Generalized Confocal Resonator Theory // Bell System Technical Journal. — 1962. — Vol. 41, no. 4. — P. 1347—1369.
60. A. G. Fox, T. Li. Resonant modes in a maser interferometer // The Bell System Technical Journal. — 1961. — Vol. 40, no. 2. — P. 453—488.

61. H. Kogelnik, T. Li. Laser Beams and Resonators // Applied Optics. — 1966. — Vol. 5, no. 10. — P. 1550.
62. U. Levy, Y. Silberberg, N. Davidson. Mathematics of vectorial Gaussian beams // Advances in Optics and Photonics. — 2019. — Vol. 11, no. 4. — P. 828.
63. R. Simon, E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda. Gaussian–Maxwell beams // Journal of the Optical Society of America A. — 1986. — Vol. 3, no. 4. — P. 536.
64. M. Fernandez-Guasti, J. Hernández. Helicity and Spin of Linearly Polarized Hermite-Gaussian Modes // Advances in Mathematical Physics. — 2019. — Vol. 2019. — P. 2080451.
65. W. L. Erikson, S. Singh. Polarization properties of Maxwell-Gaussian laser beams // Physical Review E. — 1994. — Vol. 49, no. 6. — P. 5778—5786.
66. V. A. Makarov, I. A. Perezhogin. Nonuniform transverse distribution of the light intensity and polarisation upon sum-frequency generation from the surface of an isotropic gyrotropic medium in the case of normal incidence of light // Quantum Electronics. — 2009. — Vol. 39, no. 7. — P. 627—633.
67. T. Kuga et al. Novel Optical Trap of Atoms with a Doughnut Beam // Physical Review Letters. — 1997. — Vol. 78, no. 25. — P. 4713—4716.
68. H. Wang et al. Towards optimal single-photon sources from polarized microcavities // Nature Photonics. — 2019. — Vol. 13, no. 11. — P. 770—775.
69. C. Hnatovsky et al. Revealing Local Field Structure of Focused Ultrashort Pulses // Physical Review Letters. — 2011. — Vol. 106, no. 12.
70. Q. Zhan. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications // Advances in Optics and Photonics. — 2009. — Vol. 1, no. 1. — P. 1.
71. T. Fadeyeva et al. Vector erf-Gaussian beams: fractional optical vortices and asymmetric TE and TM modes // Optics Letters. — 2012. — Vol. 37, no. 9. — P. 1397.
72. L. W. Davis. Vector electromagnetic modes of an optical resonator // Physical Review A. — 1984. — Vol. 30, no. 6. — P. 3092—3096.

73. M. Uphoff et al. Frequency splitting of polarization eigenmodes in microscopic Fabry–Perot cavities // *New Journal of Physics*. — 2015. — Vol. 17, no. 1. — P. 013053.
74. S. Garcia et al. Dual-wavelength fiber Fabry–Perot cavities with engineered birefringence // *Optics Express*. — 2018. — Vol. 26, no. 17. — P. 22249.
75. D. Hanna. Astigmatic Gaussian beams produced by axially asymmetric laser cavities // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. — 1969. — Vol. 5, no. 10. — P. 483—488.
76. J. A. Arnaud, H. Kogelnik. Gaussian Light Beams with General Astigmatism // *Applied Optics*. — 1969. — Vol. 8, no. 8. — P. 1687.
77. M. Durand, Y. Wang, J. Lawall. Accurate Gouy phase measurement in an astigmatic optical cavity // *Applied Physics B*. — 2012. — Vol. 108, no. 4. — P. 749—753.
78. A. J. Kollár et al. An adjustable-length cavity and Bose–Einstein condensate apparatus for multimode cavity QED // *New Journal of Physics*. — 2015. — Vol. 17, no. 4. — P. 043012.
79. J. Kim et al. Prescribed nondegenerate high-order modes in an axial-asymmetric high-finesse Fabry–Perot microcavity // *Optics Letters*. — 2012. — Vol. 37, no. 9. — P. 1457—1459.
80. F. Y. Khalili. Frequency-dependent rigidity in large-scale interferometric gravitational-wave detectors // *Physics Letters A*. — 2001. — Vol. 288. — P. 251—256.
81. The LIGO Scientific collaboration. A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit // *Nature Physics*. — 2011. — Vol. 73. — P. 962—965.
82. LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration. Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light // *Nature Photonics*. — 2013. — Vol. 7. — P. 613—619.
83. V. Tse et al. Quantum-Enhanced Advanced LIGO Detectors in the Era of Gravitational-Wave Astronomy // *Physical Review Letters*. — 2019. — Vol. 123. — P. 231107.

84. F. Asernese et al. Increasing the Astrophysical Reach of the Advanced Virgo Detector via the Application of Squeezed Vacuum States of Light // *Physical Review Letters*. — 2019. — Vol. 123. — P. 231108.
85. M. Yap, J. Cripe, G. Mansell, et al. Broadband reduction of quantum radiation pressure noise via squeezed light injection // *Nature Photonics*. — 2020. — Vol. 14. — P. 19—23.
86. J. Cripe, N. Aggarwal, R. Lanza, et al. Measurement of quantum back action in the audio band at room temperature // *Nature*. — 2019. — Vol. 568. — P. 364—367.
87. A. B. Matsko et al. RF photonic receiver front-end based on crystalline whispering gallery mode resonators // *2009 IEEE Radar Conference*. — 2009. — P. 1—6.
88. P. V. Lenzo, E. G. Spencer, A. A. Ballman. Electro-optic coefficients of ferroelectric strontium barium niobate // *Applied Physics Letters*. — 1967. — Vol. 11, no. 1. — P. 23—24.
89. V. V. Voronov et al. Photoinduced light scattering in cerium-doped barium strontium niobate crystals // *Soviet Journal of Quantum Electronics*. — 1980. — Vol. 10, no. 11. — P. 1346.
90. M. Wesner et al. Photorefractive steady state solitons up to telecommunication wavelengths in planar SBN waveguides // *Optics Communications*. — 2001. — Vol. 188, no. 1. — P. 69—76.
91. A. A. Savchenkov et al. RF-induced change of optical refractive index in strontium barium niobate // *Laser Resonators, Microresonators, and Beam Control XV*. Vol. 8600 / ed. by A. V. Kudryashov et al. — International Society for Optics, Photonics. SPIE, 2013. — 86000O.
92. V. Ilchenko et al. Electro-optical applications of high-Q crystalline WGM resonators // *Int. Journal of Modern Physics*. — 2010.
93. G. J. Hornig et al. Monolithic elliptical dome Fabry–Perot microcavities exhibiting large birefringence // *Journal of the Optical Society of America B*. — 2022. — Vol. 39, no. 3. — P. 884.
94. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. — М. : Наука, 1967. — С. 460.
95. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. — М. : Наука, 1973. — С. 208.

96. S. Kuhr et al. Ultrahigh finesse Fabry-Pérot superconducting resonator // Applied Physics Letters. — 2007. — Vol. 90, no. 16.
97. Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs, and mathematical tables / ed. by M. Abramowitz, I. Stegun. — US Government printing office, 1964.

Приложение А

Вывод гамильтониана кольцевого резонатора

Выведем гамильтониан кольцевого резонатора на рис. 2.1 и покажем, что он похож на гамильтониан (2.4).

Рассмотрим моды, распространяющиеся по и против часовой стрелки, с амплитудами c_1 , c_2 , связанные друг с другом посредством малого коэффициента связи κ (2.1), считая, что его фаза $\phi = \phi_0 + 2kx$. Запишем гамильтониан оптомеханической системы

$$H = H_0 + H_{\text{int}} + H_m, \quad (\text{A.1a})$$

$$H_0 = \hbar\omega \left(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2 \right), \quad H_m = \hbar\omega_m d^\dagger d, \quad (\text{A.1б})$$

$$H_{\text{int}} = \frac{\hbar}{i} \left(\kappa c_1^\dagger c_2 - \kappa^* c_1 c_2^\dagger \right). \quad (\text{A.1в})$$

Введем собственные моды c_p , c_m резонатора

$$\kappa_0 = |\kappa_0| e^{i\phi}, \quad \phi = \phi_0 + 2kx, \quad (\text{A.2a})$$

$$c_{p,m} = \frac{c_1 \pm i c_2 e^{2i\phi_0}}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.2б})$$

и выразим оптическую часть гамильтониана (A.1) (без H_m):

$$H_{\text{opt}} = \hbar\omega \left(c_p^\dagger c_p + c_m^\dagger c_m \right) + \quad (\text{A.3a})$$

$$+ \hbar|\kappa| \left[\left(c_m^\dagger c_m - c_p^\dagger c_p \right) \cos 2kx + i \left(c_m^\dagger c_p - c_p^\dagger c_m \right) \sin 2kx \right] \approx$$

$$\approx \hbar(\omega - |\kappa|) c_p^\dagger c_p + \hbar(\omega + |\kappa|) c_m^\dagger c_m - \frac{\hbar|\kappa|}{i} \left[c_p^\dagger c_m - c_m^\dagger c_p \right] 2kx \quad (\text{A.3б})$$

Здесь k — это волновой вектор, x — это смещение зеркала M , мы предполагаем, что $kx \ll 1$.

Используя обозначение (2.5) и приближение вращающегося поля, гамильтониан (A.3) может быть приведен к виду (2.4).

Приложение В

Подавление резонансного пондеромоторного возбуждения

Рассмотрим возможность подавления резонансного возбуждения механических колебаний в системе (2.4).

Предположим, что существуют оптические моды c_+ , e_+ с ортогональными поляризациями и одинаковым оптическим путем. Собственная частота этих мод равна ω_+ . Аналогично, моды c_- , e_- ортогонально поляризованы и имеют одинаковую частоту ω_- . Тогда гамильтониан (2.4) примет вид

$$H = \tilde{H}_0 + \tilde{H}_{\text{int}} + \tilde{H}_\gamma, \quad (\text{B.1a})$$

$$\tilde{H}_0 = \hbar\omega_+ c_+^\dagger c_+ + \hbar\omega_- c_-^\dagger c_- + \hbar\omega_+ e_+^\dagger e_+ + \hbar\omega_- e_-^\dagger e_- + \hbar\omega_m d^\dagger d, \quad (\text{B.1б})$$

$$\tilde{H}_{\text{int}} = \frac{\hbar}{i} \left(\eta c_+^\dagger c_- d - \eta^* c_+ c_-^\dagger d^\dagger \right) + \frac{\hbar}{i} \left(\eta_e e_+^\dagger e_- d - \eta_e^* e_+ e_-^\dagger d^\dagger \right) \quad (\text{B.1в})$$

Из этого гамильтониана можно вывести уравнения движения полей

$$\dot{c}_+ + \gamma c_+ + \eta c_- d = \sqrt{2\gamma} a_+, \quad (\text{B.2a})$$

$$\dot{c}_- + \gamma c_- - \eta^* c_+ d^\dagger = \sqrt{2\gamma} a_-, \quad (\text{B.2б})$$

$$\dot{e}_+ + \gamma e_+ + \eta_e e_- d = \sqrt{2\gamma} a_+^e, \quad (\text{B.2в})$$

$$\dot{e}_- + \gamma e_- - \eta_e^* e_+ d^\dagger = \sqrt{2\gamma} a_-^e, \quad (\text{B.2г})$$

$$\dot{d} + \gamma_m d = \eta^* c_+ c_-^\dagger + \eta_e^* e_+ e_-^\dagger + \sqrt{2\gamma_m} q + i f_s \quad (\text{B.2д})$$

и входные-выходные соотношения

$$b_\pm = -a_\pm + \sqrt{2\gamma} c_\pm, b_\pm^e = -a_\pm^e + \sqrt{2\gamma} e_\pm. \quad (\text{B.3a})$$

Здесь $a_\pm$ и $b_\pm$ — это входные и выходные поля для мод $c_\pm$, $a_\pm^e$ и $b_\pm^e$ — это входные и выходные поля для мод $e_\pm$.

Выражения для средних амплитуд следуют из выражения (B.2)

$$\gamma C_+ + \eta C_- D = \sqrt{2\gamma} A_+, \quad (\text{B.4a})$$

$$\gamma C_- - \eta^* C_+ D^* = \sqrt{2\gamma} A_-, \quad (\text{B.4б})$$

$$\gamma E_+ + \eta_e E_- D = \sqrt{2\gamma} A_+^e, \quad (\text{B.4в})$$

$$\gamma E_- - \eta_e^* E_+ D^* = \sqrt{2\gamma} A_-^e, \quad (\text{B.4г})$$

$$\gamma_m D = \eta^* C_+ C_-^* + \eta_e^* E_+ E_-^*. \quad (\text{B.4д})$$

Рассмотрим случай равных постоянных оптомеханической связи $\eta = \eta_e$.
Для простоты положим

$$\eta = \eta^* = \eta_e = \eta_e^*, \quad (\text{B.5a})$$

$$C_+ = C_- = C = C^*. \quad (\text{B.5б})$$

Для подавления колебаний механического осциллятора (B.4д) необходимо подобрать фазу накачки мод $e_{\pm}$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$E_+ = E_-^* = -iC \text{ (или } iC). \quad (\text{B.6})$$

Тогда мы получим следующие выражения для флуктуаций полей

$$(\gamma - i\Omega)c_+ + \eta C d = \sqrt{2\gamma}a_+, \quad (\text{B.7a})$$

$$(\gamma - i\Omega)c_- - \eta C d^\dagger = \sqrt{2\gamma}a_-, \quad (\text{B.7б})$$

$$(\gamma - i\Omega)e_+ + i\eta C d = \sqrt{2\gamma}a_+^e, \quad (\text{B.7в})$$

$$(\gamma - i\Omega)e_- + i\eta C d^\dagger = \sqrt{2\gamma}a_-^e, \quad (\text{B.7г})$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d = \eta C(c_+ + c_-^\dagger) - i\eta C(e_+ + e_-^\dagger). \quad (\text{B.7д})$$

Введя квадратурные амплитуды аналогично (2.19), получим

$$(\gamma - i\Omega)c_{+a} + \eta C d_a = \sqrt{2\gamma}a_{+a}, \quad (\text{B.8a})$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{+\phi} + \eta C d_\phi = \sqrt{2\gamma}a_{+\phi}, \quad (\text{B.8б})$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{-a} - \eta C d_a = \sqrt{2\gamma}a_{-a}, \quad (\text{B.8в})$$

$$(\gamma - i\Omega)c_{-\phi} + \eta C d_\phi = \sqrt{2\gamma}a_{-\phi}, \quad (\text{B.8г})$$

$$(\gamma - i\Omega)e_{+a} - \eta C d_\phi = \sqrt{2\gamma}a_{+a}^e, \quad (\text{B.8д})$$

$$(\gamma - i\Omega)e_{+\phi} + \eta C d_a = \sqrt{2\gamma}a_{+\phi}^e, \quad (\text{B.8е})$$

$$(\gamma - i\Omega)e_{-a} - \eta C d_\phi = \sqrt{2\gamma}a_{-a}^e, \quad (\text{B.8ж})$$

$$(\gamma - i\Omega)e_{-\phi} + \eta C d_a = \sqrt{2\gamma}a_{-\phi}^e, \quad (\text{B.8и})$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_a - \eta C(c_{+a} + c_{-a} + e_{+\phi} - e_{-\phi}) = \quad (\text{B.8к})$$

$$= \sqrt{2\gamma_m}q_a - f_{s\phi}, \quad (\text{B.8л})$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_\phi - \eta C(c_{+\phi} - c_{-\phi} - e_{+a} - e_{-a}) = \quad (\text{B.8м})$$

$$= \sqrt{2\gamma_m}q_\phi + f_{sa}. \quad (\text{B.8н})$$

Запишем комбинации этих квадратур, аналогичные (2.21а), (2.21б), (2.21в)

$$\epsilon_{a\pm} = \frac{e_{+a} \pm e_{-a}}{\sqrt{2}}, \quad \epsilon_{\phi\pm} = \frac{e_{+\phi} \pm e_{-\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.9a})$$

$$\alpha_{a\pm}^e = \frac{a_{+a}^e \pm a_{-a}^e}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_{\phi\pm}^e = \frac{a_{+\phi}^e \pm a_{-\phi}^e}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.9б})$$

$$\beta_{a\pm}^e = \frac{b_{+a}^e \pm b_{-a}^e}{\sqrt{2}}, \quad \beta_{\phi\pm}^e = \frac{b_{+\phi}^e \pm b_{-\phi}^e}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.9в})$$

и перепишем (В.8), используя эти комбинации.

$$(\gamma - i\Omega)g_{a+} = \sqrt{2}\gamma\alpha_{a+}, \quad (\text{B.10а})$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{a-} + \sqrt{2}\eta C d_a = \sqrt{2}\gamma\alpha_{a-}, \quad (\text{B.10б})$$

$$(\gamma - i\Omega)\epsilon_{\phi+} + \sqrt{2}\eta C d_a = \sqrt{2}\gamma\alpha_{\phi+}^e, \quad (\text{B.10в})$$

$$(\gamma - i\Omega)\epsilon_{\phi-} = \sqrt{2}\gamma\alpha_{\phi-}^e \quad (\text{B.10г})$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_a - \sqrt{2}\eta C (g_{a+} + \epsilon_{\phi-}) = \sqrt{2}\gamma_m q_a - f_{s\phi}, \quad (\text{B.10д})$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{\phi+} + \sqrt{2}\eta C d_\phi = \sqrt{2}\gamma\alpha_{\phi+}, \quad (\text{B.10е})$$

$$(\gamma - i\Omega)g_{\phi-} = \sqrt{2}\gamma\alpha_{\phi-}, \quad (\text{B.10ж})$$

$$(\gamma - i\Omega)\epsilon_{a+} = \sqrt{2}\gamma\alpha_{a+}^e, \quad (\text{B.10и})$$

$$(\gamma - i\Omega)\epsilon_{a-} - \sqrt{2}\eta C d_\phi = \sqrt{2}\gamma\alpha_{a-}^e, \quad (\text{B.10к})$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_\phi - \sqrt{2}\eta C (g_{\phi-} - \epsilon_{a+}) = \sqrt{2}\gamma_m q_\phi + f_{sa}. \quad (\text{B.10л})$$

Таким образом, из анализа выражения (В.10д) следует, что, чтобы полностью исключить ОФВ от мод s и e , нужно измерять следующую комбинацию квадратур

$$\beta_{a-}^{comb} = \beta_{a-} + \frac{\mathcal{K}}{\gamma_m - i\Omega} (\beta_{+a} + \beta_{\phi-}^e). \quad (\text{B.11а})$$

Или (В.10л)

$$\beta_{\phi+}^{comb} = \beta_{\phi+} + \frac{\mathcal{K}}{\gamma_m - i\Omega} (\beta_{\phi-} - \beta_{a+}^e). \quad (\text{B.11б})$$

Другую возможность подавить ОФВ можно получить при малой постоянной оптомеханической связи η_e ($\eta_e \ll \eta$). Ее можно достичь при покрытии зеркала M на рис. 2.2. Большая накачка $E_{\pm}$ может скомпенсировать регулярную силу, действующую на осциллятор (В.4д), без внесения шума ОФВ.

Приложение С

Влияние паразитных спектральных составляющих на чувствительность

Проанализируем влияние паразитных спектральных составляющих на чувствительность. Для этого уравнения движения, построенных с помощью гамильтониана (2.4)), заменим $c_{\pm} \Rightarrow C_{\pm} + c_{\pm} + \tilde{c}_{\pm}$, где $C_{\pm}$ отвечает за среднюю амплитуду полей, а $c_{\pm} + \tilde{c}_{\pm}$ отвечает за флуктуации. Учет членов $c_{\pm}$ был проведен в основной работе. Новые члены $\tilde{c}_{\pm}$ отвечают за паразитные спектральные составляющие. Не смотря на то, что они не являются резонансными, они присутствуют в связанных модах.

Флуктуации в модах “+” и “−” не коррелируют друг с другом. Также спектральные составляющие $c_{\pm}$ и $\tilde{c}_{\pm}$ не коррелируют, так как сосредоточены вокруг разных частот.

В приближении вращающегося поля выведем дополнительные слагаемые, отвечающие за воздействие паразитных составляющих на механический осциллятор (2.17в),

$$(\gamma_m - i\Omega)d(\Omega) = \eta \left[C_+ c_-^{\dagger}(-\Omega) + C_-^* c_+(\Omega) \right] - \quad (\text{C.1a})$$

$$- \eta \left[C_+^* \tilde{c}_-(\Omega) - C_- \tilde{c}_+^{\dagger}(-\Omega) \right] + \quad (\text{C.1б})$$

$$+ \sqrt{2\gamma_m} q(\Omega) + i f_s(\Omega), \quad (\text{C.1в})$$

где члены (C.1б) описывают вклад паразитных составляющих.

Операторы $c_{\pm}$ подчиняются уравнениям движения (2.17). Уравнения движения операторов паразитных составляющих равны

$$\tilde{c}_+(\Omega)(\gamma + i2\omega_m - i\Omega) = \sqrt{2\gamma} \tilde{a}_+(\Omega) - \quad (\text{C.2a})$$

$$- \eta C_- d^{\dagger}(-\Omega), \quad \tilde{a}_+(\Omega) = a_+(-2\omega_m + \Omega), \quad (\text{C.2б})$$

$$\tilde{c}_-(\Omega)(\gamma - 2i\omega_m - i\Omega) = \sqrt{2\gamma} \tilde{a}_-(\Omega) + \quad (\text{C.2в})$$

$$+ \eta C_+ d(\Omega), \quad \tilde{a}_-(\Omega) = a_- (2\omega_m + \Omega). \quad (\text{C.2г})$$

Выходные амплитуды паразитных спектральных составляющих равны

$$\tilde{b}_+(\Omega) = \frac{\gamma - 2i\omega_m + i\Omega}{\gamma + 2i\omega_m - i\Omega} \tilde{a}_+(\Omega) - \frac{\sqrt{2\gamma} \eta C_- d^\dagger(-\Omega)}{\gamma + 2i\omega_m - i\Omega}, \quad (\text{C.3a})$$

$$\tilde{b}_-(\Omega) = \frac{\gamma + 2i\omega_m + i\Omega}{\gamma - 2i\omega_m - i\Omega} \tilde{a}_-(\Omega) + \frac{\sqrt{2\gamma} \eta C_+ d(\Omega)}{\gamma - 2i\omega_m - i\Omega}, \quad (\text{C.3б})$$

С.1 Квадратуры

Рассмотрим случай резонансной накачки (2.18). Введем квадратуры паразитных спектральных составляющих и запишем квадратуры механического осциллятора (С.1)

$$\tilde{c}_{a\pm} = \frac{\tilde{c}_\pm(\Omega) + \tilde{c}_\pm^\dagger(-\Omega)}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{c}_{\phi\pm} = \frac{\tilde{c}_\pm(\Omega) - \tilde{c}_\pm^\dagger(-\Omega)}{i\sqrt{2}}. \quad (\text{C.4a})$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_a = \eta C [c_{a-} + c_{a+}] - \quad (\text{C.4б})$$

$$- \eta C [\tilde{c}_{a-} - \tilde{c}_{a+}] + \sqrt{2\gamma_m} q_a - f_{\phi s}, \quad (\text{C.4в})$$

$$(\gamma_m - i\Omega)d_\phi = \eta C [-c_{\phi-} + c_{\phi+}] - \quad (\text{C.4г})$$

$$- \eta C [\tilde{c}_{\phi-} + \tilde{c}_{\phi+}] + \sqrt{2\gamma_m} q_\phi + f_{as}. \quad (\text{C.4д})$$

Подставив (С.4) в (2.17а, 2.17б), получим выражения для амплитудных квадратур поля внутри резонатора

$$c_{+a} = \frac{\sqrt{2\gamma} a_{a+}}{\gamma - i\Omega} - \frac{\eta^2 C^2 [c_{a-} + c_{a+} - \tilde{c}_{a-} - \tilde{c}_{a+}]}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)} - \quad (\text{C.5a})$$

$$- \eta C \frac{\sqrt{2\gamma_m} q_a - f_{\phi s}}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)},$$

$$c_{-a} = \frac{\sqrt{2\gamma} a_{a-}}{\gamma - i\Omega} + \frac{\eta^2 C^2 [c_{a-} + c_{a+} - \tilde{c}_{a-} - \tilde{c}_{a+}]}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)} - \quad (\text{C.5б})$$

$$+ \eta C \frac{\sqrt{2\gamma_m} q_a - f_{\phi s}}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)}$$

и для фазовых квадратур

$$c_{+\phi} = \frac{\sqrt{2\gamma}a_{\phi+}}{\gamma - i\Omega} - \frac{\eta^2 C^2 [-c_{\phi-} + c_{\phi+} - \tilde{c}_{\phi-} + \tilde{c}_{\phi+}]}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)} - \eta C \frac{\sqrt{2\gamma_m}q_{\phi} + f_{as}}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)}, \quad (C.5B)$$

$$c_{-\phi} = \frac{\sqrt{2\gamma}a_{\phi-}}{\gamma - i\Omega} - \frac{\eta^2 C^2 [-c_{\phi-} + c_{\phi+} - \tilde{c}_{\phi-} + \tilde{c}_{\phi+}]}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)} - \eta C \frac{\sqrt{2\gamma_m}q_{\phi} + f_{as}}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)}. \quad (C.5Г)$$

Введем сумму и разность квадратур паразитных составляющих, аналогично комбинациям (2.21а, 2.21б, 2.21в)

$$\tilde{g}_{a\pm} = \frac{\tilde{c}_{+a} \pm \tilde{c}_{-a}}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{g}_{\phi\pm} = \frac{\tilde{c}_{+\phi} \pm \tilde{c}_{-\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (C.6a)$$

$$\tilde{\alpha}_{a\pm} = \frac{\tilde{a}_{+a} \pm \tilde{a}_{-a}}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{\alpha}_{\phi\pm} = \frac{\tilde{a}_{+\phi} \pm \tilde{a}_{-\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (C.6б)$$

$$\tilde{\beta}_{a\pm} = \frac{\tilde{b}_{+a} \pm \tilde{b}_{-a}}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{\beta}_{\phi\pm} = \frac{\tilde{b}_{+\phi} \pm \tilde{b}_{-\phi}}{\sqrt{2}} \quad (C.6в)$$

и получим выражения для сумм и разностей квадратур

$$g_{a+} = \frac{\sqrt{2\gamma}\alpha_{a+}}{\gamma - i\Omega}, \quad (C.7a)$$

$$g_{a-} = \frac{\sqrt{2\gamma}\alpha_{a-}}{\gamma - i\Omega} - \frac{2\eta^2 C^2 [g_{a+} - \tilde{g}_{a+}]}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)} - \sqrt{2}\eta C \frac{\sqrt{2\gamma_m}q_a - f_{\phi s}}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)}, \quad (C.7б)$$

$$g_{\phi-} = \frac{\sqrt{2\gamma}\alpha_{\phi-}}{\gamma - i\Omega}, \quad (C.7в)$$

$$g_{\phi+} = \frac{\sqrt{2\gamma}\alpha_{\phi+}}{\gamma - i\Omega} - \frac{2\eta^2 C^2 [g_{\phi-} + \tilde{g}_{\phi-}]}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)} - \sqrt{2}\eta C \frac{\sqrt{2\gamma_m}q_{\phi} + f_{as}}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)}. \quad (C.7Г)$$

Расчитаем сумму и разность квадратур паразитных спектральных составляющих (C.2)

$$\tilde{g}_{a+} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{2} \left(\frac{\tilde{a}_{+}(\Omega) + \tilde{a}_{-}^{\dagger}(-\Omega)}{(\gamma + 2i\omega_m - i\Omega)} + \frac{\tilde{a}_{+}^{\dagger}(-\Omega) + \tilde{a}_{-}(\Omega)}{(\gamma - 2i\omega_m - i\Omega)} \right), \quad (C.8a)$$

$$\tilde{g}_{\phi-} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{i2} \left(\frac{\tilde{a}_{+}(\Omega) + \tilde{a}_{-}^{\dagger}(-\Omega)}{(\gamma + 2i\omega_m - i\Omega)} - \frac{\tilde{a}_{+}^{\dagger}(-\Omega) + \tilde{a}_{-}(\Omega)}{(\gamma - 2i\omega_m - i\Omega)} \right). \quad (C.8б)$$

Они не несут информацию о движении механического осциллятора.

С помощью выражений (2.17г) найдем суммы и разности выходных квадратур

$$\beta_{a-} = \frac{\gamma + i\Omega}{\gamma - i\Omega} \alpha_{a-} - \sqrt{2\gamma} \frac{2\eta^2 C^2 [g_{a+} - \tilde{g}_{a+}]}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)} - 2\sqrt{\gamma} \eta C \frac{\sqrt{2\gamma_m} q_a - f_{\phi s}}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)}, \quad (\text{C.9a})$$

$$\beta_{a+} = \frac{\gamma + i\Omega}{\gamma - i\Omega} \alpha_{a+}, \quad (\text{C.9б})$$

$$\beta_{\phi+} = \frac{\gamma + i\Omega}{\gamma - i\Omega} \alpha_{\phi+} - \sqrt{2\gamma} \frac{2\eta^2 C^2 [g_{\phi-} + \tilde{g}_{\phi-}]}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)} - 2\sqrt{\gamma} \eta C \frac{\sqrt{2\gamma_m} q_\phi + f_{as}}{(\gamma_m - i\Omega)(\gamma - i\Omega)}, \quad (\text{C.9в})$$

$$g_{\phi-} = \frac{\gamma + i\Omega}{\gamma - i\Omega} \alpha_{\phi-}. \quad (\text{C.9г})$$

В итоге приходим к выражению (2.29) для измеряемой комбинации квадратур. Можно полностью исключить главный член ОФВ (α_{a+}). В этом случае чувствительность ограничивает вклад паразитных спектральных составляющих в ОФВ ($\sim \tilde{g}_{a+}$). Рассмотрим, как можно снизить их вклад.

С.2 Подавление остаточного ОФВ

Используя (С.8), получим

$$\tilde{\beta}_{a+} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\gamma - 2i\omega_m + i\Omega}{\gamma + 2i\omega_m - i\Omega} \cdot (\tilde{a}_+(\Omega) + \tilde{a}_-^\dagger(-\Omega)) \right. \quad (\text{C.10a})$$

$$\left. + \frac{\gamma + 2i\omega_m + i\Omega}{\gamma - 2i\omega_m - i\Omega} \cdot (\tilde{a}_+^\dagger(-\Omega) + \tilde{a}_-(\Omega)) \right\}, \quad (\text{C.10б})$$

$$\tilde{\beta}_{\phi-} = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\gamma - 2i\omega_m + i\Omega}{\gamma + 2i\omega_m - i\Omega} (\tilde{a}_+(\Omega) + \tilde{a}_-^\dagger(-\Omega)) \right. \quad (\text{C.10в})$$

$$\left. - \frac{\gamma + 2i\omega_m - i\Omega}{\gamma - 2i\omega_m + i\Omega} \cdot (\tilde{a}_+^\dagger(-\Omega) + \tilde{a}_-(\Omega)) \right\}. \quad (\text{C.10г})$$

Для того чтобы скомпенсировать члены с волной, необходимо измерять комбинации квадратур, определяемые фазами $\varphi_{\pm}$

$$\tilde{b}_{+\varphi} = \frac{\tilde{b}_+(\Omega)e^{i\varphi_+} + \tilde{b}_+^\dagger(-\Omega)e^{-i\varphi_+}}{\sqrt{2}}, \quad (\text{C.11a})$$

$$\tilde{b}_{-\varphi} = \frac{\tilde{b}_-(\Omega)e^{i\varphi_-} + \tilde{b}_-^\dagger(-\Omega)e^{-i\varphi_-}}{\sqrt{2}}. \quad (\text{C.11б})$$

Чтобы подавить паразитные слагаемые, необходимо определить фазы следующим образом

$$\varphi_+ = -\varphi_- = \varphi \quad \Rightarrow \quad (\text{C.11в})$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{b}_{+\varphi} + \tilde{b}_{-\varphi}}{\sqrt{2}} &= \frac{\gamma - i2\omega_m + i\Omega}{2(\gamma + i2\omega_m - i\Omega)} \left(\tilde{a}_+(\Omega) + \tilde{a}_-^\dagger(-\Omega) \right) e^{i\varphi} \\ &+ \frac{\gamma + i2\omega_m + i\Omega}{2(\gamma - i2\omega_m - i\Omega)} \left(\tilde{a}_-(\Omega) + \tilde{a}_+^\dagger(-\Omega) \right) e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

Получим приблизительное выражение для φ

$$(\gamma - i2\omega_m + i\Omega)e^{i\varphi} \simeq \text{const}, \quad (\text{C.11г})$$

$$\Rightarrow e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{\gamma + 2i\omega_m}{\gamma - 2i\omega_m}} \quad (\text{C.11д})$$

Проводя вычисления, аналогичные проведенным в основной работе, можно получить, что вклад паразитных спектральных составляющих можно уменьшить в $R \simeq \Omega/2\omega_m$ раз (при справедливости условий (2.2)). После вычитания вместо выражения (2.29) мы получим

$$\begin{aligned} \beta_{a-} &= \frac{\xi\sqrt{\mathcal{K}}}{(\gamma_m - i\Omega)} \left\{ \frac{(\gamma_m - i\Omega)}{\sqrt{\mathcal{K}}} \alpha_{a-} - \sqrt{\mathcal{K}} \alpha_{a+} \right. \\ &+ \left. \sqrt{\mathcal{K}} \frac{(\gamma - i\Omega)}{\sqrt{2\gamma}} \tilde{g}_{a+} R - \sqrt{\xi^{-1}} \left[\sqrt{2\gamma_m} q_a - f_{\phi s} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Первый член, пропорциональный α_{a-} , описывает дробовой шум фотонов. Член, пропорциональный α_{a+} , описывает ОФВ, которое можно исключить из сигнала. Член, пропорциональный $\tilde{g}_{a+}$, описывает ОФВ, связанное с паразитными спектральными составляющими. Оно подавлено в R раз. Оптимизация вклада, связанного с этим членом, определяет чувствительность, которая может быть лучше, чем СКП.

Приложение D

Гамильтониан взаимодействия представленный через квадратуры

Запишем гамильтониан взаимодействия механической и оптических мод в закрытом резонаторе. Будем предполагать, что все операторы зависят от времени

$$H_0 = \hbar\omega\hat{c}^\dagger\hat{c} + \hbar\omega_-\hat{c}_-^\dagger\hat{c}_- + \hbar\omega_+\hat{c}_+^\dagger\hat{c}_+ + \hbar\omega_m\hat{d}^\dagger\hat{d}, \quad (\text{D.1a})$$

$$V = \hbar\eta(\hat{c}_-^\dagger\hat{d}^\dagger + \hat{c}_+^\dagger\hat{d})\hat{c} + \hbar\eta^*(\hat{c}_-\hat{d} + \hat{c}_+\hat{d}^\dagger)\hat{c}^\dagger. \quad (\text{D.1б})$$

Анализ проведенный в разделе 3.1 показал, что флуктуации моды $\hat{c}$ не влияют на систему. Подставим вместо них амплитуду среднего поля в резонаторе $\hat{c} \rightarrow C$ и опустим член в H_0 , связанный с ними.

Операторы рождения и уничтожения можно представить с помощью их квадратур

$$\hat{c}_\pm = \frac{\hat{c}_{\pm a} + i\hat{c}_{\pm\phi}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{d} = \frac{\hat{d}_a + i\hat{d}_\phi}{\sqrt{2}}, \quad (\text{D.2a})$$

$$\hat{c}_\pm^\dagger = \frac{\hat{c}_{\pm a} - i\hat{c}_{\pm\phi}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{d}^\dagger = \frac{\hat{d}_a - i\hat{d}_\phi}{\sqrt{2}}. \quad (\text{D.2б})$$

Гамильтониан примет вид

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_-}{2}(\hat{c}_{-a}^2 + \hat{c}_{-\phi}^2) + \frac{\hbar\omega_+}{2}(\hat{c}_{+a}^2 + \hat{c}_{+\phi}^2) + \frac{\hbar\omega_m}{2}(\hat{d}_a^2 + \hat{d}_\phi^2), \quad (\text{D.3a})$$

$$V = \frac{\hbar(\eta C + \eta^* C^*)}{2} \left((\hat{c}_{-a} + \hat{c}_{+a})\hat{d}_a + (\hat{c}_{+\phi} - \hat{c}_{-\phi})\hat{d}_\phi \right) + \quad (\text{D.3б})$$

$$+ \frac{i\hbar(\eta^* C^* - \eta C)}{2} \left((\hat{c}_{-\phi} + \hat{c}_{+\phi})\hat{d}_a + (\hat{c}_{-a} - \hat{c}_{+a})\hat{d}_\phi \right).$$

Предполагая, что константа оптомеханической связи является действительной $\eta = \eta^*$, и что амплитуда поля внутри резонатора тоже является действительной $C_0 = C_0^*$. Тогда $\eta C = \eta C_0 e^{-i\omega t}$, а гамильтониан примет вид

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_-}{2}(\hat{c}_{-a}^2 + \hat{c}_{-\phi}^2) + \frac{\hbar\omega_+}{2}(\hat{c}_{+a}^2 + \hat{c}_{+\phi}^2) + \frac{\hbar\omega_m}{2}(\hat{d}_a^2 + \hat{d}_\phi^2), \quad (\text{D.4a})$$

$$V = \hbar\eta C_0((\hat{c}_{+a} + \hat{c}_{-a})\cos\omega t - (\hat{c}_{+\phi} + \hat{c}_{-\phi})\sin\omega t)\hat{d}_a + \quad (\text{D.4б})$$

$$+ \hbar\eta C_0((\hat{c}_{+\phi} - \hat{c}_{-\phi})\cos\omega t + (\hat{c}_{+a} - \hat{c}_{-a})\sin\omega t)\hat{d}_\phi.$$

Гамильтониан H_0 отвечает свободной эволюции квадратур. Следует ввести медленные амплитуды

$$\hat{c}_{\pm a} = c_{\pm a} \cos \omega_{\pm} t + c_{\pm \phi} \sin \omega_{\pm} t, \quad (\text{D.5a})$$

$$\hat{c}_{\pm \phi} = c_{\pm \phi} \cos \omega_{\pm} t - c_{\pm a} \sin \omega_{\pm} t, \quad (\text{D.5б})$$

$$\hat{d}_a = d_a \cos \omega_m t + d_{\phi} \sin \omega_m t, \quad (\text{D.5в})$$

$$\hat{d}_{\phi} = d_{\phi} \cos \omega_m t - d_a \sin \omega_m t. \quad (\text{D.5г})$$

С помощью которых можно получить следующие выражения

$$\hat{c}_{\pm a} \cos \omega t - \hat{c}_{\pm \phi} \sin \omega t = c_{\pm a} \cos \omega_m t \pm c_{\pm \phi} \sin \omega_m t, \quad (\text{D.6a})$$

$$\hat{c}_{\pm \phi} \cos \omega t + \hat{c}_{\pm a} \sin \omega t = c_{\pm \phi} \cos \omega_m t \mp c_{\pm a} \sin \omega_m t. \quad (\text{D.6б})$$

Подставив их в гамильтониан взаимодействия V , получим

$$V = \hbar \eta C_0 (c_{+a} + c_{-a}) d_a + \hbar \eta C_0 (c_{+\phi} - c_{-\phi}) d_{\phi}. \quad (\text{D.7})$$

Приложение Е

Вывод гамильтониана взаимодействия для трехмодовой схемы

В этом приложении мы сделаем вывод гамильтониана взаимодействия трехмодовой схемы, основанной на резонаторе с четырьмя зеркалами, показанном на рис. Е.1. Будем считать, что конечные зеркала полностью отражающие, а две зеркала в середине частично пропускающие ($t \ll 1$). Будем предполагать, что средние зеркала образованы отражающим покрытием, нанесенным на стороны тонкой мембраны.

Покажем, что три оптические моды этого резонатора эквидистантны ($\delta k = k_+ - k_0 = k_0 - k_-$), покажем наличие в ней когерентной оптомеханической связи и приведем вывод гамильтониана взаимодействия в этой системе.

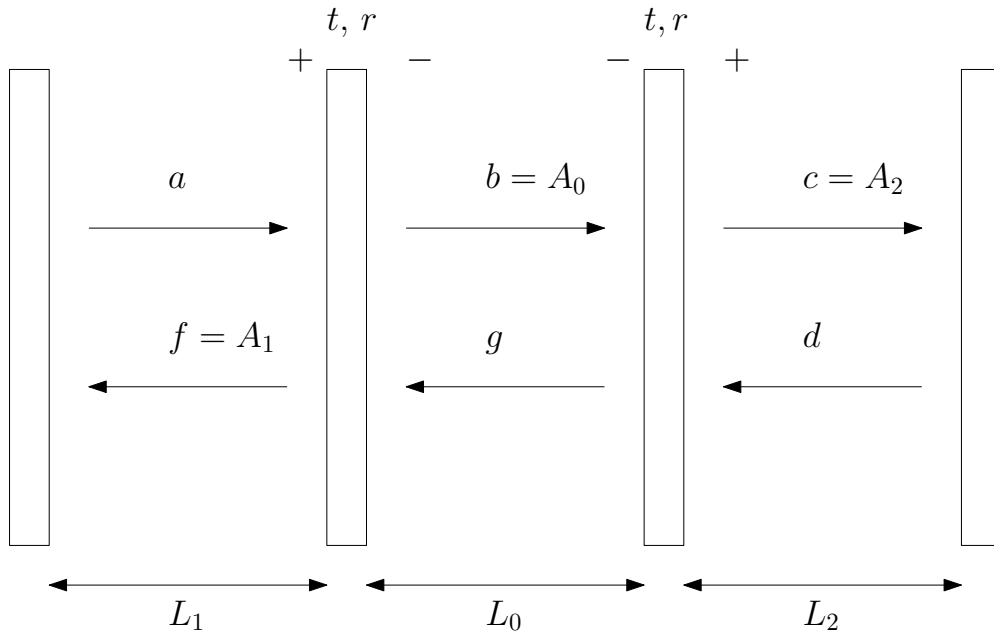


Рисунок Е.1 — Схема оптического резонатора с тремя эквидистантными модами.

Е.1 Вывод собственных частот

Амплитуды полей в разных частях резонатора задаются следующей системой уравнений

$$\begin{cases} a = f e^{2ikL_1}, \\ b = ta - rg, \\ c = tbe^{ikL_0} + rd, \\ d = ce^{2ikL_2}, \\ g = tde^{ikL_0} - rbe^{2ikL_0}, \\ f = tg + ra. \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Приравняв определитель матрицы этой системы к нулю, получим характеристическое уравнение

$$1 - e^{2ik(L_1+L_0+L_2)} - r(e^{2ikL_1} + e^{2ikL_2})(1 - e^{2ikL_0}) + r^2(e^{2ik(L_1+L_2)} - e^{2ikL_0}) = 0. \quad (\text{E.2})$$

В случае одинаковых боковых резонаторов ($L_1 = L_2 = L$) выражение (E.2) примет вид

$$e^{2ikL_0} = \left(\frac{1 - re^{2ikL}}{e^{2ikL} - r} \right)^2. \quad (\text{E.3})$$

В общем случае это уравнение нельзя решить аналитически, но в случае тонкой мембраны ($L_0 \ll L$) и резонаторов в резонансе друг с другом ($e^{2ik_0L_0} = e^{2ik_0L} = 1$) можно предположить, что боковые моды находятся не слишком далеко от центральной ($\delta kL \ll 1$) и упростить характеристическое уравнение (E.3)

$$1 + 2i\delta k L_0 \approx \left(\frac{\frac{t^2}{2} - 2i\delta k L}{\frac{t^2}{2} + 2i\delta k L} \right)^2 \quad (\text{E.4})$$

Чтобы еще сильнее упростить это выражение, предположим, что $\delta kL/t^2 \gg 1$. Тогда, разложив правую часть выражения (E.4), получим

$$1 + 2i\delta k L_0 \approx 1 - 4 \left(\frac{t^2}{4i\delta k L} \right) \Rightarrow \delta k^2 \approx \frac{t^2}{2LL_0}, \quad (\text{E.5})$$

$$k_{\pm} = k_0 \pm \frac{t}{\sqrt{2LL_0}} \Rightarrow \omega_{\pm} = \omega_0 \pm \frac{ct}{\sqrt{2LL_0}}. \quad (\text{E.6})$$

Расчет подтверждает возможность создания эквидистантного триплета в резонаторе. Так как частота механического осциллятора ω_m равна разности частот соседних оптических мод $\omega_+ - \omega_0 = \omega_0 - \omega_-$, то можно записать

$$\omega_m = c\delta k = \frac{ct}{\sqrt{2LL_0}}. \quad (\text{E.7})$$

Проверим зависимость собственных частот от положения мембраны x , чтобы подтвердить вывод проведенный в разделе 3.3.1. В общем характеристическом уравнении (E.2) положим $L_1 = L + x$ и $L_2 = L - x$ ($x \ll L$) и получим

$$1 - e^{4ikL} e^{2ikL_0} - 2re^{2ikL} (1 - e^{2ikL_0}) \cos 2kx + r^2 (e^{4ikL} - e^{2ikL_0}) = 0. \quad (\text{E.8})$$

Так как $\cos 2kx \approx 1 + 2(kx)^2$, в линейном приближении характеристическое уравнение (E.8) не зависит от положения x и принимает вид (E.4). Собственные частоты так же не зависят от положения мембраны x .

Е.2 Вывод собственных мод

Воспользуемся следующими условиями для вывода зависимости собственных мод от положения мембраны x

1. Из (E.1) можно получить выражения, с помощью которых связаны амплитуды парциальных мод в разных частях резонатора

$$\begin{aligned} tb &= (e^{2ikL_1} - r)f, \\ tb &= (1 - re^{2ikL_2})e^{-ikL_0}c. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

2. Условие малого коэффициента пропускания мембраны $t \ll 1$

$$r \approx 1 - \frac{t^2}{2}. \quad (\text{E.10})$$

3. Тонкая мембрана находится в середине длинного резонатора

$$L_1 = L + x, \quad L_2 = L - x, \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{L_0}{L}} \ll 1. \quad (\text{E.11})$$

4. Выражения для волновых векторов собственных мод (E.6) в пределе $t^2 \ll \delta k L \ll 1$

$$\begin{aligned} e^{2ik_0L_0} &= e^{2ik_0L} = 1, \\ e^{2ik_{\pm}L_0} &= 1 \pm \sqrt{2}it\sqrt{\frac{L_0}{L}} = 1 \pm \sqrt{2}i\alpha t, \\ e^{2ik_{\pm}L} &= 1 \pm \sqrt{2}it\sqrt{\frac{L}{L_0}} = 1 \pm \sqrt{2}i\alpha^{-1}t. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Подставив выражения (E.10-E.12) в (E.9) можно выразить амплитуду поля внутри мембраны и в правой части резонатора через амплитуду поля в левой части резонатора для всех мод

– k_+ :

$$A_1 = f, \quad A_0 = b = \left(\frac{\sqrt{2}i}{\alpha} - \frac{2ik_0x}{t} \right) f, \quad A_2 = \left(-1 + \frac{2\sqrt{2}\alpha k_0x}{t} \right) f. \quad (\text{E.13})$$

– k_0 :

$$A_1 = f, \quad A_0 = b = \frac{t}{2} - \frac{2ik_0x}{t} f, \quad A_2 = -\frac{2ik_0x}{t} f. \quad (\text{E.14})$$

– k_- :

$$A_1 = f, \quad A_0 = b = \left(-\frac{\sqrt{2}i}{\alpha} - \frac{2ik_0x}{t} \right) f, \quad A_2 = \left(-1 - \frac{2\sqrt{2}\alpha k_0x}{t} \right) f. \quad (\text{E.15})$$

Используя эти выражения можно получить нормированные собственные моды ($||\hat{v}_i|| = 1 + O(t^2) + O(x^2)$)

$$\begin{aligned} \hat{v}_+^T &= \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha^2 k_0 x}{t}, i, -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha^2 k_0 x}{t} \right), \\ \hat{v}_0^T &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{t}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}ik_0x}{t}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ \hat{v}_-^T &= \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha^2 k_0 x}{t}, -i, -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha^2 k_0 x}{t} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Запишем матрицу перехода V от парциальных мод A_2, A_0, A_1 к собственным модам $\hat{v}_+, \hat{v}_0, \hat{v}_-$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha^2 k_0 x}{t} & i & -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha^2 k_0 x}{t} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{2}ik_0x}{t} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha^2 k_0 x}{t} & -i & -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\alpha^2 k_0 x}{t} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.17})$$

Так как эти векторы нормированы, то $V^{-1} = V^\dagger$. Введем еще две матрицы : невозмущенную матрицу V_0 и V_x , описывающую зависимость от смещения мембраны x

$$V_0 \equiv V(x=0) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & i & -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{t}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & -i & -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.18})$$

$$V_x \equiv V - V_0 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 k_0 x}{t} & 0 & \frac{\alpha^2 k_0 x}{t} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2} i k_0 x}{t} & 0 \\ -\frac{\alpha^2 k_0 x}{t} & 0 & -\frac{\alpha^2 k_0 x}{t} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.19})$$

Пусть

$$W = \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_- \end{pmatrix}, \quad (\text{E.20})$$

$\hat{u}^T = (A_2, A_0, A_1)$ — вектор парциальных мод, $\hat{v}^T = (\hat{v}_+, \hat{v}_0, \hat{v}_-)$ — вектор собственных мод. Так же введем вектор $\hat{c}^T = \hat{v}^T(x=0)$, который является невозмущенным вектором. Они связаны следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{v} &= V \hat{u}, \\ \hat{c} &= V_0 \hat{u}. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Е.3 Гамильтониан взаимодействия

Гамильтониан можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{v}^\dagger \hbar W \hat{v} = \hat{u}^\dagger V^\dagger \hbar W V \hat{u} = \hat{u}^\dagger (V_0^\dagger + V_x^\dagger) \hbar W (V_0 + V_x) \hat{u} = \\ &= \hat{u}^\dagger V_0^\dagger (1 + V_0 V_x^\dagger) \hbar W (1 + V_x V_0^\dagger) V_0 \hat{u} = \hat{c}^\dagger (1 + V_0 V_x^\dagger) \hbar W (1 + V_x V_0^\dagger) \hat{c} \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

Перепишем гамильтониан $\hat{H}$ и отделим часть, описывающую энергию оптических мод H_0 , от гамильтониана взаимодействия $\hat{H}_{int}$

$$\hat{H} = \hbar(\hat{c}_+^\dagger, \hat{c}_0^\dagger, \hat{c}_-^\dagger) \begin{pmatrix} \omega_+ & \frac{\alpha\omega_0 x}{L} & 0 \\ \frac{\alpha\omega_0 x}{L} & \omega_0 & \frac{\alpha\omega_0 x}{L} \\ 0 & \frac{\alpha\omega_0 x}{L} & \omega_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_+ \\ \hat{c}_0 \\ \hat{c}_- \end{pmatrix} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (\text{E.23})$$

$$\hat{H}_0 \equiv \hbar\omega_+ \hat{c}_+^\dagger \hat{c}_+ + \hbar\omega_0 \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_0 + \hbar\omega_- \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_-, \quad (\text{E.24})$$

$$\hat{H}_{int} \equiv \hbar \frac{\alpha\omega_0}{L} x \left(\hat{c}_0^\dagger \hat{c}_+ + \hat{c}_+^\dagger \hat{c}_0 + \hat{c}_-^\dagger \hat{c}_0 + \hat{c}_0^\dagger \hat{c}_- \right) \quad (\text{E.25})$$

Введем медленные амплитуды

$$x = x_0 \left(de^{-i\omega_m t} + d^\dagger e^{i\omega_m t} \right), \quad (\text{E.26})$$

$$\hat{c}_0 = c_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad \hat{c}_\pm = c_\pm e^{-i\omega_\pm t} \quad (\text{E.27})$$

и опустим быстро осциллирующие члены в гамильтониане взаимодействия

$$\hat{H}_{int} = \hbar\omega_0 \frac{\alpha x_0}{L} \left[c_0 \left(dc_+^\dagger + d^\dagger c_-^\dagger \right) + c_0^\dagger \left(d^\dagger c_+ + dc_- \right) \right] \quad (\text{E.28})$$

это выражение совпадает с выражениями (3.26, 3.76) при подстановке $c_0 \rightarrow -ic_0$, $c_0^\dagger \rightarrow ic_0^\dagger$ (сдвиг фаз на $\pi/2$).

Приложение F

Расчет компонентов электромагнитного поля и величины энергии

Для расчета электрических и магнитных компонент света необходимо посчитать производные величин

$$\operatorname{Re} u_{mn}(\mathbf{r}) = A\psi_{mn}(\mathbf{r}) \cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right], \quad (\text{F.1a})$$

$$\operatorname{Im} u_{mn}(\mathbf{r}) = A\psi_{mn}(\mathbf{r}) \sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] \quad (\text{F.1б})$$

по x и y . Мы обозначили $\phi = kz - (1 + m + n)\zeta(z)$, потому что эта величина зависит только от продольной координаты z и не даст вклада в производные. Так же мы положили амплитуду поля равной $A = 1$ для упрощения формул. Мы вернем её в конце. Первые производные равны

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} u_{mn}(\mathbf{r}) = \frac{\partial \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x} \cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] - \frac{kx}{R(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right], \quad (\text{F.2a})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} u_{mn}(\mathbf{r}) = \frac{\partial \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial y} \sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] + \frac{ky}{R(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right]. \quad (\text{F.2б})$$

Вторые производные равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \operatorname{Re} u_{mn}(\mathbf{r}) = & \left(\frac{\partial^2 \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x^2} - \frac{k^2 x^2}{R^2(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \right) \cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] - \\ & - \left(2 \frac{kx}{R(z)} \frac{\partial \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{k}{R(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \right) \sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right], \end{aligned} \quad (\text{F.3a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \operatorname{Re} u_{mn}(\mathbf{r}) = & \left(\frac{\partial^2 \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial y^2} - \frac{k^2 y^2}{R^2(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \right) \cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] - \\ & - \left(2 \frac{ky}{R(z)} \frac{\partial \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{k}{R(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \right) \sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right], \end{aligned} \quad (\text{F.3б})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \operatorname{Im} u_{mn}(\mathbf{r}) = & \left(\frac{\partial^2 \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x^2} - \frac{k^2 x^2}{R^2(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \right) \sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] + \\ & + \left(\frac{2kx}{R(z)} \frac{\partial \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{k}{R(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \right) \cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right], \end{aligned} \quad (\text{F.3в})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{Im } u_{mn}(\mathbf{r}) = & \left(\frac{\partial^2 \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial y^2} - \frac{k^2 y^2}{R^2(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \right) \sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] + \\ & + \left(\frac{2ky}{R(z)} \frac{\partial \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{k}{R(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \right) \cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.3г})$$

Два полезных тождества [97] могут быть использованы для упрощения производных Эрмит-Гауссовых функций $\psi_{mn}(\mathbf{r})$. Производные многочленов Эрмита подчиняются правилу

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad (\text{F.4})$$

которое используется для дифференцирования Эрмит-Гауссовых функций. Многочлены Эрмита так же подчиняются рекуррентному соотношению

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x). \quad (\text{F.5})$$

Следует отметить, что аргумент Эрмит-Гауссовых функций отличается на множитель $\sqrt{2}/w(z)$, который необходимо учитывать.

Первая производная равна

$$\frac{\partial \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x} = \frac{w_0}{w(z)} H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} \left(\frac{\partial}{\partial x} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) - \frac{2x}{w^2(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \right) = \quad (\text{F.6a})$$

$$= \frac{w_0}{w(z)} H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} \left(\frac{2\sqrt{2}m}{w(z)} H_{m-1} \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) - \frac{2x}{w^2(z)} H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \right) = \quad (\text{F.6б})$$

$$= \frac{2\sqrt{2}m}{w(z)} \psi_{m-1,n} - \frac{2x}{w^2(z)} \psi_{mn}, \quad (\text{F.6в})$$

Применяя (F.6в) к себе, можно получить вторую производную

$$\frac{\partial^2 \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x^2} = \frac{8m(m-1)}{w^2(z)} \psi_{m-2,n} - \frac{8\sqrt{2}mx}{w^3(z)} \psi_{m-1,n} - \frac{2}{w^2(z)} \psi_{mn} \left(1 - \frac{2x^2}{w^2(z)} \right) = \quad (\text{F.6г})$$

$$= \frac{4}{w^2(z)} \left(\frac{x^2}{w^2(z)} - \frac{1}{2} - m \right) \psi_{mn}, \quad (\text{F.6д})$$

Дифференцирование по y проводится аналогично

$$\frac{\partial \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial y} = \frac{2\sqrt{2}n}{w(z)} \psi_{m,n-1} - \frac{2y}{w^2(z)} \psi_{mn}, \quad (\text{F.6е})$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{mn}(\mathbf{r})}{\partial y^2} = \frac{4}{w^2(z)} \left(\frac{y^2}{w^2(z)} - \frac{1}{2} - n \right) \psi_{mn}. \quad (\text{F.6ж})$$

Подставляя производные (F.3) и (F.6) в (5.5) можно получить компоненты электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x = & \psi_{mn} \sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] \cos \omega t \times \\ & \times \left(1 - \frac{(k^2 w^4(z) - 4R^2(z))(x^2 - y^2)}{4k^2 w^4(z) R^2(z)} - \frac{m - n}{k^2 w^2(z)} \right) + \\ & + O(1/(kw_0)^2) \cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] \cos \omega t, \end{aligned} \quad (\text{F.7a})$$

$$\mathbf{E}_y = O(1/(kw_0)^2) \cos \omega t, \quad (\text{F.7б})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z = & \left(\frac{2\sqrt{2}m}{kw(z)} \psi_{m-1,n} - \frac{2x}{kw^2(z)} \psi_{mn} \right) \cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] \cos \omega t - \\ & - \frac{x}{R(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] \cos \omega t, \end{aligned} \quad (\text{F.7в})$$

$$\mathbf{B}_x = O(1/(kw_0)^2) \sin \omega t, \quad (\text{F.7г})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_y = & \psi_{mn} \cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] \sin \omega t \times \\ & \times \left(1 + \frac{(k^2 w^4(z) - 4R^2(z))(x^2 - y^2)}{4k^2 w^4(z) R^2(z)} + \frac{m - n}{k^2 w^2(z)} \right) + \\ & + O(1/(kw_0)^2) \sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] \sin \omega t, \end{aligned} \quad (\text{F.7д})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_z = & - \left(\frac{2\sqrt{2}n}{kw(z)} \psi_{m,n-1} - \frac{2y}{kw^2(z)} \psi_{mn} \right) \sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] \sin \omega t - \\ & - \frac{y}{R(z)} \psi_{mn}(\mathbf{r}) \cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right] \sin \omega t. \end{aligned} \quad (\text{F.7е})$$

Мы пренебрегаем $\mathbf{E}_y$ и $\mathbf{B}_x$, потому что их квадраты дадут вклад в энергию порядка $O(1/(kw_0)^4)$. Мы пренебрегаем не синфазными членами в $\mathbf{E}_x$ и $\mathbf{B}_y$ (т. е. член, пропорциональный $\cos \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right]$ в $\mathbf{E}_x$, и член, пропорциональный $\sin \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right]$ в $\mathbf{B}_y$). Их квадраты тоже дадут вклад в энергию порядка $O(1/(kw_0)^4)$, а произведение с главными частями дадут быстро осциллирующие члены $\sin 2 \left[k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \phi \right]$ со средним 0.

Мы заменяем быстро осциллирующие члены $\cos^2 \omega t, \sin^2 \omega t \rightarrow \frac{1}{2}$ на их среднее по времени. Так же мы заменяем быстро осциллирующие члены $\cos^2 \left[k \frac{x^2+y^2}{2R(z)} + \phi \right], \sin^2 \left[k \frac{x^2+y^2}{2R(z)} + \phi \right] \rightarrow \frac{1}{2}$ на их среднее.

Квадраты компонентов полей равны

$$\mathbf{E}_x^2 + \mathbf{B}_y^2 = \frac{\psi_{mn}^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\psi_{mn}^2}{2}, \quad (\text{F.8a})$$

$$\mathbf{E}_z^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{2\sqrt{2}m}{kw(z)} \psi_{m-1,n} - \frac{2x}{kw^2(z)} \psi_{mn} \right)^2 + \frac{x^2}{4R^2(z)} \psi_{mn}^2(\mathbf{r}), \quad (\text{F.8б})$$

$$\mathbf{B}_z^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{2\sqrt{2}n}{kw(z)} \psi_{m,n-1} - \frac{2y}{kw^2(z)} \psi_{mn} \right)^2 + \frac{y^2}{4R^2(z)} \psi_{mn}^2(\mathbf{r}). \quad (\text{F.8в})$$

Поправки, связанные с поляризацией, в $\mathbf{E}_x^2 + \mathbf{B}_y^2$ компенсируют друг друга. Поправки, связанные с поляризацией, сохраняются только в продольных компонентах $\mathbf{E}_z^2$ и $\mathbf{B}_z^2$.

Интегралы, связанные с функциями Эрмита-Гаусса

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{mn}^2(\mathbf{r}) dx dy = \\ & = \frac{w_0^2}{w^2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} H_m^2 \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) e^{\frac{-2x^2}{w^2(z)}} dx \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{\frac{-2y^2}{w^2(z)}} dy = \frac{w_0^2}{2} \pi, \end{aligned} \quad (\text{F.9a})$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \psi_{mn}^2(\mathbf{r}) dx dy = \\ & = \frac{w_0^2}{w^2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \right]^2 e^{\frac{-2x^2}{w^2(z)}} dx \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{\frac{-2y^2}{w^2(z)}} dy = \\ & = \frac{w_0^2 w^2(z)}{4} \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi, \end{aligned} \quad (\text{F.9б})$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \psi_{m-1,n}(\mathbf{r}) \psi_{mn}(\mathbf{r}) dx dy = \\
& = \frac{w_0^2}{w^2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x H_{m-1} \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) \right] e^{\frac{-2x^2}{w^2(z)}} dx \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2 \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{\frac{-2y^2}{w^2(z)}} dy = \\
& = \frac{w_0^2 w(z)}{4\sqrt{2}} \pi.
\end{aligned} \tag{F.9в}$$

Для расчета (F.9б) и (F.9в) были использованы рекуррентное соотношение (F.5) и ортогональность многочленов Эрмита.

Интегралы по продольной координате z равны

$$\begin{aligned}
\int_{z_2}^{z_1} \frac{1}{w^2(z)} dz &= \int_{z_2}^{z_1} \frac{1}{w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)} dz = \int_{z_2/z_0}^{z_1/z_0} \frac{z_0}{w_0^2 (1 + \xi^2)} d\xi = \\
&= \frac{z_0}{w_0^2} \arctan(\xi) \Big|_{z_2/z_0}^{z_1/z_0} = \frac{z_0}{w_0^2} [\zeta(z_1) - \zeta(z_2)],
\end{aligned} \tag{F.10а}$$

$$\begin{aligned}
\int_{z_2}^{z_1} \frac{w^2(z)}{R^2(z)} dz &= \int_{z_2}^{z_1} \frac{w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)}{z^2 \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right)^2} dz = \int_{z_2/z_0}^{z_1/z_0} \frac{w_0^2 \xi^2}{z_0 (1 + \xi^2)} d\xi = \\
&= \frac{w_0^2}{z_0} [\xi - \arctan(\xi)] \Big|_{z_2/z_0}^{z_1/z_0} = \frac{w_0^2}{z_0} \left[\frac{L}{z_0} - [\zeta(z_1) - \zeta(z_2)] \right].
\end{aligned} \tag{F.10б}$$

Здесь z_1 и z_2 — это положения зеркал, $L = z_1 - z_2$ — это длина резонатора (см рис. 5.1).

Интегралы квадратов полей равны

$$\int_V (\mathbf{E}_x^2 + \mathbf{B}_y^2) dV = \int_V \frac{\psi_{mn}^2}{2} dV = \frac{w_0^2 L}{4} \pi, \tag{F.11а}$$

$$\begin{aligned}
\int_V \mathbf{E}_z^2 dV &= \int_V \frac{1}{4} \left(\frac{2\sqrt{2}m}{kw(z)} \psi_{m-1,n} - \frac{2x}{kw^2(z)} \psi_{mn} \right)^2 dV + \int_V \frac{1}{4} \frac{x^2}{R^2(z)} \psi_{mn}^2(\mathbf{r}) dV = \\
&= \int_V \frac{1}{4} \frac{4}{k^2 w^2(z)} \left(2m^2 \psi_{m-1,n}^2 - \frac{2\sqrt{2}m}{w(z)} x \psi_{m-1,n} \psi_{mn} + \frac{x^2 \psi_{mn}^2}{w^2(z)} \right) dV + \\
&+ \int_V \frac{1}{4} \frac{1}{R^2(z)} x^2 \psi_{mn}^2(\mathbf{r}) dV = \int_{z_2}^{z_1} \frac{1}{4} \left(\frac{4}{k^2 w^2(z)} + \frac{w^2(z)}{R^2(z)} \right) \left(\frac{w_0^2}{4} \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \right) dz = \\
&= \frac{w_0^2}{16} \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \left(\frac{4z_0}{k^2 w_0^2} [\zeta(z_1) - \zeta(z_2)] + \frac{w_0^2}{z_0} \left[\frac{L}{z_0} - \zeta(z_1) + \zeta(z_2) \right] \right) = \\
&= \frac{w_0^2}{4z_0^2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{w_0^2 L}{4} \pi,
\end{aligned} \tag{F.11б}$$

$$\int_V \mathbf{B}_z^2 dV = \frac{w_0^2}{4z_0^2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{w_0^2 L}{4} \pi. \tag{F.11в}$$

Подставляя эти интегралы в выражение для энергии (5.6), мы получим следующие результаты

1.

$$U_{scal} = \int_V \frac{\mathbf{E}_x^2 + \mathbf{B}_y^2}{8\pi} dV = A^2 \frac{w_0^2 L}{32} \tag{F.12}$$

часть энергии не связанная с поляризацией. Не смотря на то, что были использованы поправки к $\mathbf{E}_x$ и $\mathbf{B}_y$ связанные с поляризацией, они либо скомпенсировали друг друга, либо не дали значительного вклада. Это главная часть энергии, совпадающая с величиной, следующей из скалярной задачи (5.1).

2.

$$U_{pol} = \int_V \frac{\mathbf{E}_z^2 + \mathbf{B}_z^2}{8\pi} dV = \frac{A^2}{(kw_0)^2} (m + n + 1) \frac{w_0^2 L}{32} \tag{F.13}$$

часть энергии, связанная с поляризацией. Однако, она зависит только от индекса моды $m + n$ и не зависит от x или y . Следовательно, она не зависит от направления поляризации. Как и ожидалось, эта величина в $(kw_0)^2$ раз меньше, чем главная часть энергии.

Приложение G

Вывод сдвига фазы Гюи

Аналогично модам резонаторов со сферическими зеркалами (5.2), мы можем получить скалярные Эрмит-Гауссовы моды астигматических резонаторов

$$\psi_{mn}(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{w_{0x}}}{\sqrt{w_x(z)}} \frac{H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_x(z)}\right)}{\sqrt{2^m m!}} e^{-\frac{x^2}{2w_x^2(z)}} \frac{\sqrt{w_{0y}}}{\sqrt{w_y(z)}} \frac{H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_y(z)}\right)}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{y^2}{2w_y^2(z)}}, \quad (\text{G.1a})$$

$$u_{mn}(\mathbf{r}) = A\psi_{mn}(\mathbf{r})e^{ikz}e^{i\left[k\frac{x^2}{2R_x(z)} - \left(\frac{1}{2}+m\right)\zeta_x(z)\right]}e^{i\left[k\frac{y^2}{2R_y(z)} - \left(\frac{1}{2}+n\right)\zeta_y(z)\right]}. \quad (\text{G.16})$$

где A — это амплитуда поля, $H_i(\xi)$ — это многочлен Эрмита i -того порядка,

$$w_{0x,y}^2 = \frac{2z_{0x,y}}{k}, \quad w_{x,y}(z) = w_{0x,y}\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_{0x,y}}\right)^2}, \quad (\text{G.2})$$

$$R_{x,y}(z) = z\left(1 + \frac{z_{0x,y}^2}{z^2}\right), \quad \zeta_{x,y}(z) = \arctan(z/z_{0x,y}).$$

$w_{0x,y}$ — это размеры перетяжки в перпендикулярных направлениях, $R_{x,y}(z)$ — это радиусы кривизны волнового фронта, $\zeta_{x,y}(z)$ — это фазы Гюи. Условием для расчета длин Рэлея $z_{0x,y}$ является равенство радиуса кривизны волнового фронта $R_{x,y}(z)$ радиусам кривизны зеркал при z_1 и z_2 .

Частоты Эрмит-Гауссовых мод астигматических резонаторов равны

$$f_{qmn} = \frac{c}{2L} \left(q + \frac{m+1/2}{\pi}\theta_m + \frac{n+1/2}{\pi}\theta_n \right), \quad (\text{G.3})$$

где сдвиги фазы Гюи в перпендикулярных направлениях равны

$$\theta_m = \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_x}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right)}, \quad (\text{G.4a})$$

$$\theta_n = \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_y}\right)\left(1 - \frac{L}{R_2}\right)}. \quad (\text{G.46})$$

Мы опускаем продольный номер q , полагая его заданным, и ведем учет только поперечных индексов m и n .

Расщепление соседних мод равно

$$\omega_{m-1,n+1} - \omega_{m,n} = 2\pi(f_{m-1,n+1} - f_{m,n}) = \frac{c}{L}(\theta_n - \theta_m). \quad (\text{G.5})$$

Эта формула выглядит иначе, чем решение (5.26), полученное из адиабатической теоремы

$$\begin{aligned} \delta\omega_{scal}^{mn} = & \frac{c}{L} \arctan \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R_x - L)}{L(R_2 + R_x - L)}} - \\ & - \frac{c}{L} \arctan \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R_y - L)}{L(R_2 + R_y - L)}}. \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

При помощи следующих тригонометрических тождеств [97] можно показать эквивалентность (G.5) и (G.6)

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (\text{G.7a})$$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x. \quad (\text{G.7б})$$

Используя (G.7a), получим

$$\arctan \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R_x - L)}{L(R_2 + R_x - L)}} = \arcsin \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R_x - L)}{R_2 R_x}}. \quad (\text{G.8a})$$

Используя (G.7б), получим

$$\arcsin \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R_x - L)}{R_2 R_x}} = \frac{\pi}{2} - \arccos \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R_x - L)}{R_2 R_x}} = \frac{\pi}{2} - \theta_m. \quad (\text{G.8б})$$

Аналогично,

$$\arctan \sqrt{\frac{(R_2 - L)(R_y - L)}{L(R_2 + R_y - L)}} = \frac{\pi}{2} - \theta_n. \quad (\text{G.8в})$$

Подставляя в (G.6), получим

$$\delta\omega_{scal}^{mn} = \frac{c}{L} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_m \right) - \frac{c}{L} \left(\frac{\pi}{2} - \theta_n \right) = \frac{c}{L} (\theta_n - \theta_m), \quad (\text{G.9})$$

что совпадает с известным результатом (G.5).

Частный случай плоско-выпуклого резонатора был рассмотрен в [77]. Заменяя $R_2 \rightarrow \infty$ и проводя аналогичные тригонометрические преобразования, можно привести сдвиги фаз Гюи к такому же виду

Другой частный случай астигматического резонатора с одинаковыми зеркалами был рассмотрен в [79]. Заменяя $R_2 \rightarrow R_{x,y}$ и проводя аналогичные тригонометрические преобразования, можно привести сдвиги фаз Гюи к такому же виду

Приложение Н

Справедливость вычисления с использованием второго тождества Грина для мод высших порядков

Можно получить сдвиг частот между решением скалярной задачи E_x и решением с учетом поляризации $\tilde{E}_x$, используя второе тождество Грина [73]

$$\delta\nu \approx \frac{c}{4\pi k} \frac{\int_S \tilde{E}_x^S \vec{\nabla} E_x \cdot d\vec{S}}{\int_V E_x \tilde{E}_x dV} = -\frac{c}{4\pi k L} \frac{1}{R_x}. \quad (\text{H.1})$$

Эта формула справедлива для любой Эрмит-Гауссовой моды, но ее погрешность была оценена только для фундаментальной ТЕМ₀₀ моды. Здесь мы приводим оценку для мод высших порядков.

Величина поля на поверхности зеркала равна

$$\tilde{E}_x^S = \frac{x}{kR_x} \operatorname{Re} \left. \frac{\partial u_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x} \right|_S. \quad (\text{H.2a})$$

Поток электрического поля через поверхность зеркала равен

$$\vec{\nabla} E_x d\vec{S} = \operatorname{Im} \left(\frac{x}{R_x} \frac{\partial u_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{y}{R_y} \frac{\partial u_{mn}(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial u_{mn}(\mathbf{r})}{\partial z} \right) \quad (\text{H.2б})$$

Первые два члена выражения (H.2б) как минимум в $(kw_0)^2$ раза меньше, чем последний, и могут быть использованы для оценки погрешности. Поправка к числителю равна

$$\int_S \frac{x}{kR_x} \operatorname{Re} \frac{\partial u_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x} \operatorname{Im} \left(\frac{x}{R_x} \frac{\partial u_{mn}(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{y}{R_y} \frac{\partial u_{mn}(\mathbf{r})}{\partial y} \right) dx dy = \quad (\text{H.3a})$$

$$= \int_S \frac{x}{kR_x} \left(\frac{2\sqrt{2}m}{w_x} \psi_{m-1,n} - \frac{2x}{w_x^2} \psi_{mn} \right) k \left(\frac{x^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} \right) \psi_{mn} dx dy = \quad (\text{H.3б})$$

$$= -\frac{1}{2R_x} \left(\frac{3(2m+1)w_x^2}{8R_x^2} + \frac{(2n+1)w_y^2}{8R_y^2} \right) \sim -\frac{1}{2R_x} \frac{m+n+1}{(kw_0)^2}. \quad (\text{H.3в})$$

Аналогичные вычисления дают оценки того же порядка малости для знаменателя.

При справедливости поправки к параксиальному приближению (5.8) оценка (Н.3в) достаточно мала, чтобы ей можно было пренебречь. Из-за дополнительного множителя $m+n+1$ условие справедливости $\Delta\nu \gg \nu_{FSR}/(2\pi(kw_0)^4)$ тоже должно быть поправлено

$$\Delta\nu \gg (m+n+1) \frac{\nu_{FSR}}{2\pi(kw_0)^4}. \quad (\text{Н.4})$$