

ОТЗЫВ
официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Корчагина Никиты Павловича
на тему: «Сложность проблемы сюръективного
гомоморфизма для циклов»
по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и
дискретная математика

Актуальность проблемы диссертации. Диссертационная работа посвящена определению сложности задачи о существовании сюръективного гомоморфизма произвольного графа на заданный граф то есть наличия отображения множества вершин из произвольного графа G в множество вершин заранее заданного графа H , сохраняющего смежность, обозначаемой $\text{Surj-Hom}(H)$. В качестве целевых графов рассматриваются неориентированные и различного рода ориентированные циклы, содержащие петлю в каждой вершине. Наличие петли здесь является обязательным условием ввиду того, что отношение смежности вершин на H должно быть рефлексивным. Первые результаты анализа сложности описанной задачи относятся к концу XX века, но полная ее классификация в настоящее время неизвестна. Задача относится к области теории графов и математической кибернетики и может иметь применения при изучении вопросов кластеризации и иных областей искусственного интеллекта и обработки больших данных.

Ввиду того, что отношение смежности вершин графа есть не что иное, как бинарное отношение, задачу поиска сюръективного гомоморфизма можно сформулировать в терминах известной массовой задачи – сюръективной задачи удовлетворения ограничениям, которую обозначают как SCSP (иногда такие задачи называют задачами обобщенной выполнимости). Задача SCSP тесно связана с рядом других задач и активно изучается в настоящее время.

На данный момент не существует полной классификации сложности не только задачи SCSP, но и задачи о сюръективном гомоморфизме. Наиболее известным инструментом анализа этой задачи является инструмент анализа полиморфизмов – функций, сохраняющих набор отношений. Существует общепринятая гипотеза, согласно которой если все сюръективные полиморфизмы отношения существенно зависят ровно от одной переменной, то задача SCSP для этого отношения является NP-полной. Одной из первых работ в этом направлении была работа Т. Шефера, в которой аппарат полиморфизмов использовался для анализа сложности задачи выполнимости в булевом случае. Дальнейшие результаты в этом направлении были получены П. Джевонсом, А.А. Булатовым и др.

В диссертационной работе разбирается сложность задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на рефлексивные циклы — графы, которые получаются из неориентированных циклов путём добавления ориентации некоторым рёбрам, и в которых каждая вершина содержит петлю. На текущий момент сложность задачи для подобных графов определена только для циклов длины 3, неориентированного цикла длины 4 и в случае, когда каждое ребро цикла ориентировано ровно в одну сторону. Большая часть работы посвящена формулировке новых алгебраических инструментов для анализа сложности SCSP. Введённые инструменты используются для определения сложности рассматриваемой задачи для всех циклов, кроме пяти описанных автором случаев с 4, 5 и 6 вершинами. Таким образом, результаты диссертационной работы являются актуальными и значимыми.

Общая характеристика работы. Диссертация изложена на 118 страницах, состоит из введения, четырёх глав и заключения. Список литературы включает 49 наименований.

Введение посвящено истории и актуальности задачи, основным положениям диссертационной работы. Обосновываются актуальность, практическая и теоретическая значимость работы.

Первая глава посвящена ключевым понятиям, используемым в работе. В ней приводятся определения из области теории графов, сложности вычислений. Вводится основной математический аппарат, с помощью которого решается поставленная в диссертации задача: полиморфизмы отношений, минорные условия, многоосновные отношения.

Во **второй главе** автор описывает новые алгебраические инструменты анализа сложности задачи SCSP и рассматривает различные свойства отношений и их полиморфизмов. Первым введенным понятием является понятие сюръективного интерпретирования n -местных отношений, определяющее «реализуемость» одного отношения другим. Важным результатом в этом плане является теорема 2.1 о полиномиальной сводимости задач SCSP в случае сюръективного интерпретирования. Данная теорема позволяет в дальнейшем строить доказательства NP-полноты для задач указанного вида и является, по сути, ключевым методом доказательства ряда последующих результатов.

Следующим обсуждаемым понятием является понятие наследования сюръективности полиморфизмами отношения. Данное свойство полиморфизмов означает, что в каждом наборе трёхместных полиморфизмов некоторого отношения R на множестве A , совпадающем на диагонали и принимающем все значения из A , найдется сюръективная функция. Изучен ряд свойств данного понятия, на основе которых доказана теорема об NP-полноте задачи SCSP(Γ), где Γ – набор отношений, обладающих свойством наследования сюръективности. Сформулирован аналогичный результат для набора многоосновных отношений.

Третья глава посвящена изучению свойств рефлексивных циклов, их отношений смежности и полиморфизмов. При анализе полиморфизмов автор эффективно использует переход к анализу декартовой степени исходного графа и рассмотрению путей в нем. Рассматриваются как отношения смежности в неориентированном случае, так и в ориентированном и смешанном случаях.

Основным результатом главы является новое оригинальное доказательство теоремы о том, что все сюръективные полиморфизмы отношения смежности рефлексивного цикла более, чем из трёх вершин, являются существенно унарными (то есть существенно зависят ровно от одной переменной), основанное на топологических свойствах графов (теорема 3.1). Этот факт был ранее доказан в работе Ларивьер и др. Вместе с тем, самостоятельное и оригинальное доказательство этого факта, используется далее при доказательстве основного результата диссертации в четвертой главе и обеспечивает полноту изложения результатов диссертации.

Четвёртая глава посвящена доказательству основного результата о сложности задачи $\text{Surj-Hom}(C)$ для рефлексивных циклов C . Доказательство существенно опирается на результаты главы 2 о свойствах сюръективного интерпретирования и наследования сюръективности и главы 3 о существенной унарности полиморфизмов. Разбирается ряд типов рефлексивных циклов, для каждого из которых доказаны необходимые факты. В конце главы приведены открытые случаи данной задачи (циклы на 4, 5 и 6 вершинах частного вида), для которых нельзя применить разработанный математический аппарат ввиду отсутствия свойства наследования сюръективности.

В **заключении** подводятся итоги работы, ещё раз формулируются основные результаты.

Степень обоснованности положений, выносимых на защиту, научных выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность и новизна: диссертация носит преимущественно теоретический характер. Достоверность представленных в диссертации результатов подкрепляется строгостью математических доказательств. Результаты исследования являются новыми и опубликованы в рецензируемых научных журналах, представлены на международных и всероссийских конференциях. Работа выполнена на высоком уровне, текст диссертации хорошо проработан.

Замечания по диссертационной работе.

1. Во введении следовало бы полнее осветить практическую значимость рассматриваемой задачи.
2. В первой главе работы автор вводит понятие полиморфизма, ссылаясь на работы П. Джевонса. Следует отметить, что понятия, аналогичные понятию полиморфизма были введены еще в работах А.И. Мальцева, в которых изучалась задача определения базисов замкнутых классов Поста и была построена теория Галуа для классов Поста. Наиболее систематизированное изложение данных вопросов приведено в монографии С.С. Марченкова «Замкнутые классы булевых функций».
3. Введенное в первой главе понятие минорного условия, по сути, представляет собой описание частного вида теории первого порядка, а решение минорного условия есть интерпретация данной теории. Данные понятия освещались ещё в работах А.И. Мальцева и А. Тарского. Таким образом введенное понятие является достаточно известным, о чем автор не указал.
4. В третьей главе автором получен ряд результатов о том, что сюръективные полиморфизмы рефлексивных циклов обладают свойством существенной унарности. Это означает, что, по сути, эти полиморфизмы являются автоморфизмами соответствующих графов, а значит можно описать соответствующие группы автоморфизмов, которые хорошо описываются для рефлексивных циклов. В частности, для неориентированного цикла (лемма 3.9) данная группа является известной группой диэдра, а при наличии ориентации будут получаться ее подгруппы.
5. При доказательстве леммы 4.9 автор фактически заново проводит доказательство теоремы 2.1, хотя можно было бы только доказать соответствующее сюръективное интерпретирование отношений.

6. Число опечаток в работе незначительно, но присутствуют различные стилистические погрешности:

- автор перед написанием обозначения математического объекта не указывает, что за объект имеется в виду: с.5, 5 строка, пропущены слова «задачи» Ном, «граф» Н, с. 6, 14 строка, с.7, 4 и 5 строки и т.д. по всему тексту;
- говоря о сложности задач автор неоднократно употребляет термин «полиномиальное время», хотя правильнее писать «полиномиальная сложность»: с. 6, последняя строка, с. 25, 24 строка и т.д.;
- в определении 1.9. не указано, что в качестве компоненты связности рассматривается максимальное подмножество вершин графа, попарно соединенных неориентированными путями;
- на с. 18, в начале п. 1.4 не согласован падеж;
- на с. 76 в формулировке леммы 4.7. должно быть «строго ориентированный цикл» вместо «строго ориентированный граф»;
- название п. 2.2.1 «Сведение» является слишком кратким не полностью отражает его содержание
- в п. 4 списка литературы авторы указаны не полностью: «Д.Д.» вместо «Д. Джонсон».

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют общего положительного впечатления о диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным п.п. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой

степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Корчагин Никита Павлович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук,
Сотрудник АО
Институт точной механики и
вычислительной техники имени
С.А. Лебедева Российской академии наук
ТАРАСОВ Алексей Вячеславович

Контактные данные:

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:
2.3.6. Методы и системы защиты информации, информационная
безопасность

Адрес места работы:

119991, г. Москва, Ленинский проспект, д.51,
АО Институт точной механики и вычислительной техники имени С.А.
Лебедева Российской академии наук

Подпись сотрудника АО
Институт точной механики и
вычислительной техники имени
С.А. Лебедева Российской академии наук
А.В. Тарасова удостоверяю: