

**ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Антипова Виктора Алексеевича
на тему: «О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый актив»
по специальности 1.1.4. Теория вероятностей и математическая
статистика**

Задача оценки вероятности разорения страховой компании относится к классическим задачам математической теории риска и восходит к работе Ф. Лундберга [1] и последующим исследованиям Х. Крамера [2,3]. Здесь и далее номера литературных источников приводятся по списку литературы диссертации. В классической модели Крамера–Лундберга капитал страховой компании формируется за счет поступления страховых премий и уменьшается в результате случайных страховых выплат. Одним из центральных объектов исследования является вероятность разорения как функция начального капитала. Современное изложение основных результатов этого направления содержится, например, в монографии С. Асмуссена и Х. Альбрехера [5].

Естественным развитием классических моделей стал учет инвестиционной деятельности страховой компании. Модели, в которых доходность инвестиций описывается случайным процессом, исследовались, в частности, Дж. Полсеном и Х. Гьессингом [10], А. Фроловой, Ю. Кабановым и С. Пергаменчиковым [8], В. Калашниковым и Р. Норбергом [9], С. Пергаменчиковым и О. Цейтуни [12]. Одним из принципиальных эффектов включения рискованных инвестиций является качественное изменение асимптотического поведения вероятности разорения: экспоненциальное убывание, характерное для классической модели, может сменяться степенным. Кроме того, учет инвестиционной составляющей приводит не только к более реалистичной модели, но и к новым вероятностным и аналитическим задачам.

Дальнейшее развитие этого направления связано с использованием более общих моделей страховой деятельности и финансового рынка. В работе Ю. Кабанова и Н. Пухлякова [16] изучались гладкость вероятности разорения,

соответствующие интегро-дифференциальные уравнения и асимптотическое поведение вероятности разорения. Модели со случайно меняющимися параметрами финансового рынка рассматривались А. Элланской и Ю. Кабановым [24], а также Ю. Кабановым и С. Пергаменщиковым [25]. Это направление продолжает развиваться: например, в недавней работе И. Хэ и К. Боровкова исследована модель с рисковыми инвестициями и случайным переключением параметров инвестиционного процесса.¹

Еще более общие постановки возникают, когда динамика капитала описывается обобщенным процессом Орнштейна–Уленбека, в котором страховая и инвестиционная составляющие задаются процессами Леви. Вероятность разорения в такой модели исследовалась Ю. Кабановым и С. Пергаменщиковым [31]. Поскольку гладкость вероятности разорения в достаточно общих моделях заранее не гарантирована, естественным становится использование аппарата вязкостных решений нелокальных интегро-дифференциальных уравнений. Такой подход применялся, в частности, Т. Белкиной и Ю. Кабановым [28].

Отметим наконец задачи о вероятности разорения на конечном временном интервале. Соответствующие краевые задачи и численные методы исследовались М. Хантингом [32,33], а оценки вероятности разорения в более общей семимартингальной модели были получены Л. Востриковой и Й. Шпильманом [34]. Это направление продолжает развиваться. В частности, исследуются асимптотические свойства вероятностей разорения на конечном временном интервале в моделях со случайной инвестиционной доходностью.

2 3

¹ He Y., Borovkov K. On Ruin Probabilities in a Sparre Andersen Type Model in the Presence of Risky Investments and Random Switching // 2021–2022 MATRIX Annals. Springer, 2024. P. 413–428.

² Cheng M., Wang D.C. Uniform asymptotic estimate for the finite-time ruin probability in a risk model with stochastic investment returns // Chinese Journal of Applied Probability and Statistics. 2024. Vol. 40, No. 4. P. 558–571.

³ Zhang J., Yang Y., Xu L. Asymptotic behavior of finite-time ruin probabilities in a bidimensional compound risk model // Statistics & Probability Letters. 2026. Vol. 227. 110529.

Актуальность диссертационного исследования определяется практической значимостью учета инвестиционной деятельности при моделировании финансовой устойчивости страховой компании и возникающими при этом математическими задачами. Несмотря на длительную историю рассматриваемого круга задач, исследования, касающиеся точного асимптотического поведения вероятности разорения, ее гладкости, обоснования соответствующих интегро-дифференциальных уравнений, учета случайного изменения параметров финансового рынка и задач на конечном временном интервале в достаточно общих моделях, продолжают активно развиваться. В этом контексте тематика диссертации В.А. Антипова представляется актуальной и находится в русле современных исследований. Перейдем к анализу ее содержания.

Первая глава диссертации посвящена исследованию вероятности разорения страховой компании в модели типа Крамера–Лундберга, в которой фиксированная доля капитала инвестируется в рисковый актив, описываемый геометрическим броуновским движением, а оставшаяся часть размещается в безрисковом активе. Для вероятности неразорения формулируется краевая задача для интегро-дифференциального уравнения. Основным результатом главы является теорема 1. При условии, что параметр γ , характеризующий соотношение эффективной доходности и волатильности инвестиционной стратегии, больше единицы, функция распределения страховой выплаты непрерывна и конечен момент порядка $\gamma - 1$, доказано существование единственного классического решения указанной краевой задачи. Установлено, что это решение совпадает с вероятностью неразорения, а вероятность разорения имеет степенную асимптотику $\Psi(u) \sim Cu^{1-\gamma}$, $u \rightarrow \infty$, где u — начальный капитал компании. Результат теоремы 1 обобщает известные утверждения на случай произвольного непрерывного распределения размеров страховых выплат при моментном условии и не требует существования гладкой плотности с интегрируемыми производными.

Доказательство теоремы 1 состоит из нескольких этапов. Сначала исходное интегро-дифференциальное уравнение преобразуется в интегральное уравнение для производной $g = G'$ искомой функции G . Локальное существование и единственность положительного решения устанавливаются с помощью принципа сжимающих отображений, после чего функция g продолжается на всю положительную полуось с помощью уравнения Вольтерра. Анализ уравнения Вольтерра позволяет доказать, что перенормированная производная $u^\gamma g(u)$ имеет положительный конечный предел, откуда вытекает ее степенная асимптотика. Наконец, формула Ито и остановка в момент разорения позволяют отождествить построенное решение G с вероятностью неразорения, после чего из установленной асимптотики его производной выводится требуемая асимптотика вероятности разорения $\Psi = 1 - G$.

В заключительной части главы предложена численная процедура и приведены расчеты для экспоненциального и степенного распределений страховых выплат. Рассмотренные примеры иллюстрируют теоретическую асимптотику. В целом первая глава представляет собой завершенное исследование, объединяющее аналитические, вероятностные и вычислительные методы.

Вторая глава посвящена асимптотическому анализу вероятности разорения страховой компании, инвестирующей капитал в рисковый актив, в модели, где процесс страховых поступлений и выплат имеет скачки обоих знаков. Такой вариант модели позволяет одновременно учитывать как случайные страховые выплаты, уменьшающие резерв, так и случайные поступления, увеличивающие его. Цена рискового актива описывается геометрическим броуновским движением.

Основной результат главы сформулирован в теореме 2. Для класса распределений размеров положительных и отрицательных скачков, плотности которых удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям с

постоянными коэффициентами, устанавливается степенная асимптотика вероятности разорения. Отмечено, что рассматриваемый класс включает распределения Эрланга, смеси экспоненциальных распределений и другие распределения с дробно-рациональным преобразованием Лапласа.

Доказательство основано на сведении исходного интегро-дифференциального уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению высокого порядка. Это достигается применением к интегральным членам дифференциальных операторов, аннулирующих плотности скачков. Для исследования асимптотики при $u \rightarrow \infty$ автор переходит к производной $G = \Psi'$ и применяет преобразование Лапласа. В результате получается дифференциальное уравнение второго порядка для $\hat{G}$ с регулярной особой точкой в нуле. Метод Фробениуса и последующее применение тауберовой теоремы используются для восстановления степенной асимптотики вероятности разорения. Основной элемент новизны состоит в распространении ранее известного подхода для экспоненциально распределенных скачков на более широкий класс распределений с дробно-рациональным преобразованием Лапласа и в разработке соответствующей аналитической схемы.

Третья глава посвящена вероятности разорения в модели Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив, параметры которого модулируются марковским процессом с конечным числом состояний. Основным результатом главы является теорема 3 о достаточных условиях двукратной непрерывной дифференцируемости функций Φ_i по начальному капиталу. В отличие от первой главы, здесь функция вероятности неразорения сначала рассматривается как вероятностно заданный функционал, затем доказывается ее гладкость, и только после этого посредством формулы Ито выводится система интегро-дифференциальных уравнений.

Доказательство гладкости основано на интегральном представлении, полученном с помощью сильного марковского свойства в момент первого

страхового скачка. При этом отдельно рассматриваются малые и большие значения времени первого скачка: в первом случае используется регулярность плотности страховой выплаты, а во втором — сглаживающее действие броуновского движения. Наиболее нетривиальной частью доказательства является лемма 4, в которой с помощью замены времени и свойств гауссовских процессов устанавливается требуемая гладкость соответствующей части интегрального представления. После установления гладкости с помощью формулы Ито выводится система интегро-дифференциальных уравнений, содержащая диффузионную часть, интегральный оператор страховых скачков и генератор марковской цепи. Особенностью используемого подхода является сочетание двух различных механизмов регуляризации — броуновского сглаживания и сглаживания плотностью страховых выплат.

Четвертая глава посвящена вероятности разорения на конечном временном интервале в общей модели страховой компании с инвестициями. Капитал компании описывается линейным стохастическим уравнением, в котором независимые процессы Леви моделируют соответственно доходность инвестиций и результат страховой деятельности. Такая постановка позволяет учитывать диффузионные компоненты и скачки достаточно общего вида.

Основным результатом главы является доказательство того, что вероятность разорения является вязкостным решением соответствующего интегро-дифференциального уравнения в частных производных. Оно основано на формуле Ито для процессов со скачками, локализации и строгом марковском свойстве. Далее с помощью метода удвоения переменных и леммы Ишии доказывается принцип сравнения, из которого следует единственность непрерывного вязкостного решения при заданных граничных условиях.

Отдельно исследуется непрерывность вероятности неразорения. Для этого используются интегральные представления, полученные с помощью строгого марковского свойства в момент первого выделенного скачка;

усреднение по распределению скачка позволяет сгладить возможные разрывы монотонной функции вероятности разорения.

Таким образом, в четвертой главе рассматривается достаточно общая модель Леви и применяется аппарат вязкостных решений для нелокального интегро-дифференциального уравнения. Отдельного внимания заслуживают доказательства принципа сравнения и вероятностный подход к установлению непрерывности вероятности разорения.

Научная новизна диссертации определяется рядом новых результатов, полученных для моделей страховой компании с инвестициями в рисковый актив, а также обобщением известных результатов на более широкие классы моделей и использованием более слабых условий. В первой главе результаты о классическом решении краевой задачи и степенной асимптотике вероятности разорения распространены на произвольное непрерывное распределение страховых выплат при слабом моментном условии, без предположений о гладкости плотности. Во второй главе степенная асимптотика получена для модели с двусторонними скачками, допускающей более широкий класс распределений страховых выплат. В третьей главе для модели со случайной средой установлены достаточные условия двукратной гладкости вероятности разорения, обосновывающие вывод соответствующей системы интегро-дифференциальных уравнений. В четвертой главе для общей модели, задаваемой процессами Леви, установлены непрерывность вероятности разорения и единственность вязкостного решения соответствующего уравнения.

Обоснованность и достоверность основных результатов обеспечиваются использованием строгих методов теории вероятностей и случайных процессов, стохастического анализа, теории интегро-дифференциальных уравнений, асимптотических методов и теории вязкостных решений. Полученные результаты сопоставляются с известными частными случаями, а в первой главе дополнительно иллюстрируются численными расчетами. Результаты диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях и

прошли апробацию на конференциях и семинарах профильной тематики. Автореферат точно отражает содержание диссертации.

Следует также отметить, что в работе используется разнообразный и сложный математический аппарат. Это методы теории случайных процессов и стохастического анализа, теории интегральных и дифференциальных уравнений, асимптотического анализа, преобразования Лапласа и тауберовых теорем, а также теории вязкостных решений.

По работе имеются следующие замечания.

1. Работа написана чрезвычайно сжато, что затрудняет ее чтение. При этом опущено много нетривиальных подробностей. Например, в доказательстве леммы 2 на с. 22 для обоснования существования предела $\tilde{g}(u)$ при $u \rightarrow \infty$ делается ссылка только на поточечную сходимость $K(u, y)$ без полного анализа интегрального слагаемого в уравнении Вольтерра. Другой пример: в замечании 5 на с. 23 переход от условия $\mathbb{E}\xi^\varepsilon < \infty$ к ограниченности функции g_ε обосновывается ссылкой на повторение доказательства леммы 2 без указания промежуточных оценок.
2. На с. 27 утверждается, что приведенная схема гарантирует сходимость порядка $O(h)$. Но обоснование этого утверждения фактически не приводится.
3. На с. 36 говорится «Заметим, что в силу условия регулярности (2.3) имеем $c_1 = 0$ ». Это соответствует $\hat{G}(+0) = 0$. Но указанное условие регулярности $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) = 0$ дает $\hat{G}(+0) = \int_0^\infty \Psi'(u) du = -\Psi(+0)$. При этом, по-видимому, нет оснований предполагать, что эта величина равна нулю.
4. В формуле для h на с. 46 неявно предполагается, что плотность f продолжена нулем на отрицательную полуось. Но тогда при $f(+0) > 0$ функция h может оказаться недифференцируемой.

5. В определении вязкостного решения на с. 52–53 имеется несогласованность с внешним условием для вероятности разорения. Тестовые функции $f \in C_b^{1,2}(t, u)$ по определению удовлетворяют $f(t, v) = 0$ при $v \leq 0$. В то же время далее явно указано, что $\Psi(t, v) = 1$ при $v \leq 0, t < T$. Поэтому требование $f \geq \Psi$ на $[0, T] \times \mathbb{R}$, используемое в определении вязкостного субрешения, для такой функции Ψ невыполнимо.
6. Отмечу также несколько опечаток и неточностей.
- С. 24: вместо $W_t/t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ должно быть $W_t/t \rightarrow 0$.
 - С. 36: во втором слагаемом вместо $\hat{G}_1(s)$ должно стоять $\hat{G}_2(s)$.
 - В формулировке теоремы 3 на с. 39 говорится, что отрицательная случайная величина $\xi < 0$ имеет плотность f на $(0, \infty)$.
 - С. 66–67: дважды говорится, что функция $y \rightarrow \Phi(s, y)$ (соответственно, $v \mapsto \Phi(s, v)$) убывает. Но поскольку это вероятность неразорения, то она должна неубывать.

Указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Оно выполнено на высоком математическом уровне и содержит решение ряда задач, имеющих значение для развития теории вероятностей и стохастических процессов. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.4 — Теория вероятностей и математическая статистика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1–2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук,

на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Таким образом, соискатель Антипов Виктор Алексеевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.4 — Теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой методов оптимизации и машинного обучения
Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича
Федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования «Южный федеральный университет»

Рохлин Дмитрий Борисович

«10» сентября 2026 г.

Контактные данные:

тел.: +7(908) 503-20-72, e-mail: dbrohlin@sfedu.ru.

Специальность, по которой официальным оппонентом
защищена диссертация:

01.01.05 Теория вероятностей и математическая статистика

Адрес места работы:

344090 ЮФО, Ростовская область, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а
Южный федеральный университет, Институт математики, механики и
компьютерных наук им. И.И. Воровича,
кафедра методов оптимизации и машинного обучения, к. 209
Тел.: +7(863)297-51-14; e-mail: dbrohlin@sfedu.ru.

Подпись Д.Б. Рохлина удостоверяю: