

ОТЗЫВ официального оппонента
о диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Бровкина Вадима Вадимовича
на тему «О разрешимости второй краевой задачи для
 p -лапласиана на римановых многообразиях»
по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и
математическая физика

В диссертации В.В. Бровкина изучаются решения дифференциального уравнения

$$\Delta_p u = f \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

удовлетворяющие второму краевому условию

$$|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = h \quad (2)$$

и условию конечности интеграла Дирихле

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dV < \infty.$$

где

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad p > 1,$$

– оператор p -Лапласа, Ω – липшицева область на римановом многообразии M с краем (возможно пустым), а f и h – обобщенные функции из $\mathcal{D}'(M)$ такие, что $\operatorname{supp} f \subset \bar{\Omega}$ и $\operatorname{supp} h \subset \partial \Omega$.

Интерес к дифференциальным уравнениям на римановых многообразиях восходит к работам L. Cheng, D. Sullivan и S.T. Yau, в которых исследовались свойства гармонических функций. В нашей стране и, в частности, в Московском университете дифференциальными уравнениями на римановых многообразиях занимались ученики В.А. Кондратьева и Е.М. Ландиса.

Решения задачи (1), (2), изучению которых посвящена диссертация, понимаются в обобщенном смысле. Именно, функция $u \in W_{p,loc}^1(\Omega)$ называется решением задачи (1), (2), если

$$-\int_M |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dV = (f - h, \varphi)$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ такой, что $\text{supp } \varphi \subset \Omega$, где dV – элемент объема многообразия M .

При этом в случае $\partial\Omega = \emptyset$, что возможно, если $\Omega = M$ и $\partial M = \emptyset$, условие (2) предполагается выполненным автоматически. В этом случае также предполагается, что $h = 0$.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 123 страницы.

Во введении автор подробно останавливается на истории вопроса, даёт обоснование актуальности проведённого им исследования и приводит сводку основных результатов, полученных в диссертации.

В первой главе исследуется случай общих римановых многообразий. Результаты этой главы используются в остальных главах диссертации. Основными утверждениями главы 1 являются теоремы 1.1–1.6, в которых приведены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1), (2). В теоремах 1.1, 1.3 и 1.5 рассматривается случай гиперболических областей, а в теоремах 1.2, 1.4 и 1.6 – параболических.

Отдельно исследован случай, когда носитель функционала $F = f - h$ – компактное множество. В этом случае критерий разрешимости задачи (1), (2) выглядит особенно изящно (теоремы 1.1, 1.2 и следствия 1.1, 1.2).

Большое внимание в первой главе диссертации уделяется неравенствам Харди, которые используются в различных утверждениях главы 1 и вытекающих из них следствиях в главах 2 и 3. Приводятся точные достаточные условия справедливости этих неравенств на римановых многообразиях.

Во второй главе исследуется важный частый случай римановых многооб-

разий с модельными концами. К этим многообразиям, в частности, относятся поверхности вращения и внешние области в \mathbb{R}^n .

Основными результатами главы 2 являются теоремы 2.1–2.4, содержащие необходимые и достаточные условия существования решений задачи (1), (2) на многообразиях с модельными концами. Отдельно исследованы случаи модельных концов гиперболического и параболического типов.

В третьей главе рассматривается вторая краевая задача для p -лапласиана в областях, полученных вращением в \mathbb{R}^n липшицевой кривой. Опираясь на результаты главы 1, автор приводит необходимые и достаточные условия существования решения этой задачи.

Диссертация написана понятным языком. Результаты диссертации являются интересными и новыми. Они могут найти применение в теории дифференциальных уравнений с частными производными, а также в дифференциальной геометрии и ее приложениях.

Диссертация содержит большое количество примеров, демонстрирующих применение результатов диссертации к римановым многообразиям конкретного вида.

Все полученные в диссертации результаты сформулированы в виде теорем и обоснованы подробными доказательствами. Результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 4 — в научных изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ. Автореферат соответствует требованиям и правильно отражает содержание диссертации. Результаты исследований докладывались на международных научных конференциях и научных семинарах.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуж-

дении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Таким образом, соискатель Бровкин Вадим Вадимович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,

профессор кафедры «Физико-математическое образование и информационные технологии» ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Алхутов Юрий Александрович

«26» марта 2026 г.

Контактные данные:

тел.: +7 (960) 727-50-81, e-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:

01.01.02 – Дифференциальные уравнения.

Адрес места работы:

600024, г. Владимир, пр. Строителей 11, корпус 7, ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» (ВлГУ), Педагогический институт, кафедра «Физико-математическое образование и информационные технологии»
тел.: +7 (904) 039-39-08, e-mail: yevseeva@vlsu.ru

Подпись сотрудника ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» Алхутова Ю.А. удостоверяю: