Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи

Штерн Александр Исаакович

Вопросы теории непрерывных представлений топологических групп и их обобщений

Специальность 1.1.3 —
«Геометрия и топология»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2026

Оглавление

Стр.

Стр.

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Работа посвящена связанным между собой задачам теории представлений топологических групп и из обобщений как с точки зрения непрерывности так и с точки зрения выполнения строгого условия, что образ произведения равен произведению образов.

Одной из фундаментальных проблем теории является представимость (наличие точного представления или семейства представлений, разделяющего точки группы) топологических групп в различных классах локально выпуклых топологических векторных пространств. Важнейшими достижениями этого рода являются теорема Колмогорова 1944 года о существовании точного унитарного представления дискретной группы в гильбертовом пространстве (см. [27]), теорема Гельфанда–Райкова о существовании точного непрерывного унитарного представления локально компактной группы в гильбертовом пространстве [4], теорема Телемана о существовании точного непрерывного представления хаусдорфовой топологической группы в банаховом пространстве [205] и различные, но эквивалентные описания класса локально компактных групп, все неприводимые непрерывные унитарные представления которых конечномерны, опубликованные в 1972–73 годах (в том числе [161] и [227]). В связи с развитием теорий двойственности для различных классов топологических групп возникли вопросы о дуальной и структурной характеризации различных специальных классов локально компактных групп, в первую очередь компактных и дискретных. Этим вопросам посвящена первая глава работы.

Еще одной проблемой являются условия непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах и пространствах Фреше и их приложениям. Начиная с теоремы Банаха 1932 года [35, Теорема 1.4], утверждающей, что измеримый по Бэру гомоморфизм одной полной сепарабельной метризуемой группы в другую непрерывен, изучались условия непрерывности измеримых, борелевских и бэровских гомоморфизмов и представлений топологических групп и полугрупп (см., например, [33, 96, 130, 163, 169, 170, 176, 188]) и родственные результаты в [87]. Однако проверка условия измеримости отображения не всегда проста (соответствующий пример приведен в замечании 1 в статье [1]).

Еще одной проблемой является изучение свойств непрерывности локально ограниченных представлений и гомоморфизмов. Вопросами, которые нуждались в решении, в том числе из технических соображений, было распространение теоремы Ли о непрерывных конечномерных связных разрешимых групп на не обязательно непрерывные представления групп с условиями делимости, а также выяснение справедливости теоремы Фрейденталя–Вейля, теоремы Вейля о полной приводимости и свойств аналога ядер фон Неймана и Хохшильда для не обязательно непрерывных представлений соответствующих групп.

Другой проблемой являются структура и свойства отображений групп в группы обратимых операторов в банаховых пространствах, для которых образ единицы группы есть единичный оператор и образ произведения отличается от произведения образов равномерно мало в смысле расстояния между операторами, так называемые квазипредставления, и близкие к ним отображения, обладающие дополнительными свойствами. Вопросам теории квазипредставлений посвящены многочисленные статьи, среди которых следует выделить статью Каждана [141], в которой обсуждается существование обычного представления группы, близкого к квазипредставлению (рассуждение в статье Каждана корректно для компактных и дискретных аменабельных групп), результаты Джонсона [133], позволяющие доказать, что ограниченные сильно непрерывные квазипредставления аменабельных групп в сопряженных банаховых пространствах допускают близкое представление при достаточно малом дефекте, и недавнюю статью Гауэрса и Хатами [2], где рассматриваются вопросы теории квазипредставлений конечных групп.

Изучению подлежат аддитивные аналоги квазипредставлений и псевдопредставлений (квазихарактеры и псевдохарактеры), связанные с теорией ограниченных когомологий локально компактных групп, и специальный класс (не обязательно ограниченных) квазипредставлений аменабельных групп (т.е. групп, для которых есть левоинвариантное среднее на пространстве ограниченных непрерывных функций на группе), содержащий все конечномерные квазипредставления. При этом следующая теорема Гишарде–Вигнера по теории когомологий групп Ли оказывается полезной. Пусть G — некомпактная простая группа Ли и $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ — разложение Картана, связанное с компактной подалгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Обозначим через $\exp$ экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в G.

Теорема (Гишарде, Вигнер [110]). *Пусть v — такая бесконечно дифференцируемая функция на G со значениями в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, что ограничение v на K — нетривиальный гомеоморфизм K на одномерный тор $\mathbb{T}$, ограничение v на $\exp \mathfrak{p}$ строго положительно и K-инвариантно, и $v(k \exp p) = v(k)v(\exp p)$ для любых $k \in K$ и $p \in \mathfrak{p}$. Тогда функция*

$$f(g_1,g_2) = (2\pi)^{-1} \operatorname{Arg}(v(g_1)v(g_2)v(g_1g_2)^{-1}), \quad g_1,g_2 \in G, \quad f(e,e) = 0,$$

допускает непрерывную ветвь на $G \times G$, определяющую вещественный дифференцируемый 2-коцикл на G.

Существенными задачами становятся проверка гипотезы Мищенко о возможных значениях колебаний представлений связных групп Ли в точке, решение проблемы Каждана–Мильмана о существовании непрерывных гомоморфизмов, близких к данному (не обязательно непрерывному) гомоморфизму одной компактной группы Ли в другую, доказательство конечномерности группы вторых ограниченных когомологий связной локально компактной группы и существования близкого представления группы для (не обязательно ограниченных) квазипредставлений групп из введенного специального класса, а также установление общей структуры конечномерных квазипредставлений групп.

Еще одним вопросом теории является описание псевдопредставлений связных групп Ли, близких к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли в терминах обычных представлений, пседохарактеров на односвязных простых эрмитово симметрических группах Ли и экспонентах этих псевдохарактеров и аналогичное описание конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных локально компактных групп при условии, что ограничение этих квазипредставлений на некоторую компактную нормальную подгруппу, факторгруппа по которой является группой Ли, непрерывно.

Объект и предмет исследования

В диссертации изучаются непрерывные представления топологических групп в гильбертовых и банаховых пространствах и пространствах Фреше и их обобщения, состоящие в рассмотрении свойств класса не обязательно непрерывных локально ограниченных представлений и семейства квазигомоморфизмов групп и их квазипредставлений и псевдопредставлений, в том числе конечномерных представлений связных групп Ли и связных локально компактных групп.

Цели и задачи

Главными целями диссертации являются:

(1) характеризация локально компактных групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны, и изучение структуры некоторых подклассов класса локально компактных групп, определяемых свойствами их гомоморфизмов и представлений, в том числе — групп, вложимых в компактные группы и в аменабельные локально компактные группы с помощью не обязательно непрерывных отображений;

(2) установление связи между компактными и дискретными объектами в теории представлений топологичесих групп за пределами двойственности Понтрягина;

(3) характеризация непрерывных представлений хаусдорфовых топологических групп в слабой и сильной операторной топологии с помощью понятия колебания в точке;

(4) установление непрерывности локально ограниченного гомоморфизма между группами Ли на коммутанте группы-источника с помощью понятия группы разрывов представления;

(5) распространение теоремы Ли о непрерывных конечномерных связных разрешимых групп на не обязательно непрерывные представления групп с условиями делимости, а также распространение теоремы Фрейденталя–Вейля, теоремы Вейля о полной приводимости и свойств ядер фон Неймана

и Хохшильда для не обязательно непрерывных представлений соответствующих групп;

(6) решение проблемы Каждана–Мильмана и доказательство гипотезы Мищенко;

(7) установление общей структуры конечномерных квазипредставлений групп и описание псевдопредставлений связных групп Ли, близких к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, с помощью псевдохарактеров на связных односвязных эрмитово симметрических простых группах Ли;

(8) доказательство конечномерности группы вторых ограниченных когомологий связной локально компактной группы;

(9) доказательство существования близкого обычного представления группы для (не обязательно ограниченных) квазипредставлений групп из введенного специального класса квазипредставлений групп;

(10) описание псевдопредставлений связных групп Ли, близких к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, и всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли в терминах обычных представлений, псевдохарактеров на односвязных простых эрмитово симметрических группах Ли и экспонент этих псевдохарактеров.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты состоят в следующем:

(1) получена характеризация локально компактных групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны, и изучена структура некоторых подклассов класса локально компактных групп, определяемых свойствами их гомоморфизмов и представлений, в том числе — групп, вложимых в компактные группы и в аменабельные локально компактные группы с помощью не обязательно непрерывных отображений;

(2) установлены связи между компактными и дискретными объектами в теории представлений топологических групп за пределами двойственности Понтрягина;

(3) получена характеризация непрерывных представлений хаусдорфовых топологических групп в слабой и сильной операторной топологии с помощью понятия колебания в точке;

(4) установлена непрерывность локально ограниченного гомоморфизма между группами Ли на коммутанте группы-источника с помощью введенного автором работы понятия группы разрывов представления;

(5) теорема Ли о непрерывных конечномерных связных разрешимых групп распространена на не обязательно непрерывные представления групп Ли и групп с условиями делимости, а также теорема Фрейденталя–Вейля, теорема Вейля о полной приводимости и свойства ядер фон Неймана и Хохшильда распространены на не обязательно непрерывные представления соответствующих групп;

(6) решена проблема Каждана–Мильмана и доказана гипотеза Мищенко;

(7) установлена общая структура конечномерных квазипредставлений групп и описаны псевдопредставления связных групп Ли, близкие к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, с помощью псевдохарактеров на связных односвязных эрмитово симметрических простых группах Ли;

(8) доказана конечномерность группы вторых ограниченных когомологий связной локально компактной группы;

(9) доказано существование близкого обычного представления группы для (не обязательно ограниченных) квазипредставлений групп из введенного специального класса квазипредставлений групп;

(10) получено описание псевдопредставлений связных групп Ли, близких к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, и всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли в терминах обычных представлений, псевдохарактеров на односвязных простых эрмитово симметрических группах Ли и экспонент этих псевдохарактеров.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории представлений топологических групп, теории псевдохарактеров на группах, теории отображений близких к представлениям и математической физике.

Методология и методы исследования

Исследование основано на общей теории топологических групп и их гомоморфизмов, структурной теории локально компактных групп и нескольких теориях двойственности для топологических групп и их представлений. Использовались также введенные автором методы исследования, связанные со свойствами группы разрывов представления топологической группы и вариациями в точке представлений в банаховых пространствах и пространствах Фреше, а также с установленными автором свойствами автоматической непрерывности нетривиальных псевдохарактеров на группах Ли.

Положения, выносимые на защиту

(1) Характеризация локально компактных групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны, и структура некоторых подклассов класса локально компактных групп, определяемых свойствами их гомоморфизмов и представлений, в том числе – групп, вложимых в компактные группы и в аменабельные локально компактные группы с помощью не обязательно непрерывных отображений.

(2) Соотношение между компактными и дискретными объектами в теории представлений топологических групп за пределами двойственности Понтрягина и зависимость этой связи от условия конечномерности всех неприводимых унитарных представлений группы.

(3) Непрерывные представления хаусдорфовых топологических групп в слабой и сильной операторной топологии характеризуются с помощью понятия колебания в точке.

(4) Локально ограниченный гомоморфизм между группами Ли является непрерывным на коммутанте группы-источника.

(5) Распространение теоремы Ли о непрерывных конечномерных связных разрешимых групп на не обязательно непрерывные представления групп Ли и групп с условиями делимости, а также распространение теоремы Фрейденталя–Вейля, теоремы Вейля о полной приводимости и свойств ядер фон Неймана и Хохшильда на не обязательно непрерывные представления соответствующих групп.

(6) Проблема Каждана–Мильмана имеет положительное решение, а гипотеза Мищенко о величине колебания в точке для конечномерных представлений связных групп Ли верна.

(7) Общая структура конечномерных квазипредставлений групп допускает характеризацию с помощью обычных представлений, ограниченных квазипредставлений, ограниченных поправок и 2-квазикоцикла.

(8) Группа вторых ограниченных когомологий связной локально компактной группы конечномерна.

(9) Для (не обязательно ограниченных) квазипредставлений групп из введенного А.И.Штерном специального класса квазипредставлений аменабельных групп, содержащего все конечномерные квазипредставления группы, существует близкое обычное представление.

(10) Описание псевдопредставлений связных групп Ли, близких к данному конечномерному локально ограниченному квазипредставлению группы, и всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли в терминах обычных представлений, псевдохарактеров на односвязных простых эрмитово симметрических группах Ли и экспонент этих псевдохарактеров.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность всех результатов работы обоснована строгими математическими доказательствами.

Результаты диссертации многократно докладывались на научных семинарах, международных и всероссийских конференциях, в частности, на Ломоносовских чтениях в МГУ в 1983 году, на семинаре профессоров А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого на механико-математическом факультете МГУ в 1997 году, на семинаре профессора Э. Кирхберга в Гумбольдт-университете в Берлине в 1997 году, на семинаре профессора В. Люка в Мюнстере в 1997 году, на Международном конгрессе математиков в Берлине в 1998 году, на международной конференции по геометрии на острове Узедом в 1999 году, на "лузинском" семинаре по теории функций под руководством профессоров П. С. Ульянова и Б. С. Кашина на механико-математическом факультете МГУ в 2005 году, в Московском математическом обществе в 2007 году, на семинаре по спектральной теории профессора, действительного члена РАН В. А. Садовничего в 2009 году, на семинаре по алгебре в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН профессора, действительного члена РАН А. Н. Паршина, на семинаре профессоров А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого на механико-математическом факультете МГУ в 2010 году, на семинаре профессора О. Г. Смолянова по бесконечномерному анализу на механико-математическом факультете МГУ в 2011 году, на семинаре профессоров А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого на механико-математическом факультете МГУ в 2012 году, на Четвёртой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева "Функциональные пространства — Дифференциальные операторы — Общая топология — Проблемы математического образования" (Москва, Российский университет дружбы народов, Россия, 2013), на семинаре профессора О. Г. Смолянова по бесконечномерному анализу на механико-математическом факультете МГУ в 2013 году, на семинаре по спектральной теории профессора, действительного члена РАН В. А. Садовничего в 2014 году, на семинаре профессоров А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого на механико-математическом факультете МГУ в 2014 году, на семинаре профессора О. Г. Смолянова по бесконечномерному анализу на механико-математическом факультете МГУ в 2016 году, на Ломоносовских чтениях в МГУ в 2017 году, на Международной научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С. В. Фомина “Бесконечномерный анализ и теория управления,” (МГУ, 2018), на Международной конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными и приложениям, посвящённой памяти профессора Б. Ю. Стернина (Москва, РУДН, Россия, 2018), на 5-й Международной конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования”, посвящённой 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева (Москва, Россия, 2018), на семинаре по спектральной теории профессора, действительного члена РАН В. А. Садовничего в 2019 году, на семинаре профессора О. Г. Смолянова по бесконечномерному анализу на механико-математическом факультете МГУ в 2019 году, на Международной научной конференции “Бесконечномерный анализ и теория управления,” посвященной памяти С. В. Фомина (МГУ, 2019), на Международной научной конференции “Современные проблемы математики и механики”, посвященной 80-летию академика В. А. Садовничего (МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия, 2019), на Всероссийской конференции “Асимптотические методы в математической физике”, посвященной памяти Виктора Павловича Маслова (2024), на Международной конференции “Математика в созвездии наук” к юбилею ректора МГУ, академика Виктора Антоновича Садовничего (2024), на семинаре А. С. Мищенко, А. А. Арутюнова, И. К. Бабенко, В. М. Мануйлова, Ф. Ю. Попеленского и А. Ю. Савина по некоммутативной геометрии и топологии на механико-математическом факультете МГУ (2025), на научном семинаре кафедры высшей математики МФТИ (2025) и на научно-исследовательском семинаре КГЭУ-КФУ “Функциональный анализ и квантовые системы”, г. Казань (2025).

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Главы работы разбиты на разделы, а разделы на подразделы (параграфы). Текст диссертации изложен на 372 страницах. Нумерация утверждений, формул и замечаний сквозная в каждой главе. Номера теорем во введении соответствуют нумерации в тексте диссертации.

Основное содержание работы

Во введении кратко излагаются основные задачи, решенные в диссертации.

В первой главе “Вопросы представимости топологических групп и их приложения” используются определения и факты из теории операторов и операторных алгебр [69, 73, 75], из общей топологии [47, 80], из теории представлений групп [22, 96, 167], из гармонического анализа [114] и из теории топологических групп [78, 216].

В классе локально компактных групп естественно рассматривать в качестве двойственного объекта (вообще говоря, не удовлетворяющее даже аксиоме отделимости T_0) топологическое пространство классов унитарной эквивалентности непрерывных симметричных представлений групповой алгебры локально компактной группы в топологии Джекобсона, так называемое двойственное или дуальное пространство группы. В этом направлении получены следующие результаты. Напомним, что двойственное пространство компактной топологической группы дискретно и все ее неприводимые представления конечномерны, а двойственное пространство дискретной группы компактно (но не обязательно отделимо).

Теорема 1.1 [225]. *Локально компактная группа, двойственное пространство которой дискретно, компактна.*

Теорема 1.2 [224]. *Локально компактная группа, двойственное пространство которой компактно и все неприводимые непрерывные представления которой конечномерны, дискретна.*

Теорема 1.3 [226]. *Сепарабельная локально компактная группа, носитель регулярного представления которой дискретен, компактна.*

Примеры показывают, что без предположения конечномерности неприводимых представлений группы утверждение теоремы 1.2 неверно.

Теорема 1.5 [227]. *Пусть G — локально компактная группа. Следующие условия эквивалентны:*

1) *любое неприводимое непрерывное унитарное представление G конечномерно;*

2) *для любых неприводимых унитарных представлений* π_1, π_2 *группы* G *тензорное произведение* $\pi_1 \otimes \pi_2$ *определяет представление групповой алгебры* $L^1(G)$ *вполне непрерывными операторами*;

3) G — *проективный предел групп Ли* G_α, $\alpha \in A$, *каждая из которых содержит нормальный делитель конечного индекса* L_α, *изоморфный прямому произведению аддитивной группы конечномерного векторного пространства* V_α *и произведения компактной связной группы Ли* K_α *и центральной дискретной группы* D_α: $L_\alpha \sim (D_\alpha \cdot K_\alpha) \times V_\alpha$.

Теорема К. Мура [161] содержит другую структурную характеризацию и не содержит аналога пункта 2).

Следующая теорема дает критерий представимости хаусдорфовой топологической группы в рефлексивных банаховых пространствах.

Теорема 1.6 [231]. *Отделимая топологическая группа имеет семейство (непрерывных в слабой операторной топологии) изометрических представлений в рефлексивных банаховых пространствах, разделяющих точки группы, тогда и только тогда, когда она может быть непрерывно вложена в компактную полутопологическую полугруппу.*

Теорема 1.7 [256]. *Пусть* G — *топологическая группа. Следующие условия равносильны*:

1) *группа* G *допускает непрерывное гомоморфное вложение в локально компактную группу*;

2) *Существует разделяющее семейство* $\mathcal{F}$ *непрерывных унитарных представлений группы* G *в гильбертовых пространствах, содержащее прямые суммы и тензорные произведения представлений, входящих в семейство* $\mathcal{F}$, *причем эти операции могут быть продолжены до структуры такой симметричной коинволютивной алгебры Хопфа–фон Неймана* $\mathcal{G}$ *над алгеброй фон Неймана* M, *порожденной прямой суммой всех представлений, принадлежащих семейству* $\mathcal{F}$, *что эта алгебра Хопфа–фгон Неймана допускает структуру алгебрв Каца и внутренняя группа* G' *алгебры Хопфа–фон Неймана* $\mathcal{G}$ *содержит все ненулевые элементы* x *в* M, *удовлетворяющие условию* $\Gamma(x) = x \otimes x$, *где* Γ — *коумножение в* $\mathcal{G}$.

Теорема 1.8 [249]. *Если семейство неприводимых непрерывных унитарных представлений топологической группы разделяет точки группы* G, *то все* *неприводимые непрерывные унитарные представления топологической группы G конечномерны и их размерности равномерно ограничены тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана* $\mathrm{VN}(G)$ *группы G имеет свойство Данфорда–Петтиса, а любое непрерывное унитарное факторпредставление группы G является кратным конечномерному неприводимому представлению группы G тогда и только тогда, когда алгебра Фурье–Стилтьеса $B(G)$ группы G имеет свойство Данфорда–Петтиса или тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана* $\mathrm{VN}(G)$ *группы G является конечной алгеброй фон Неймана типа I.*

Глава 2 “Непрерывность представлений в терминах колебания в точке”, посвящена финитным условиям слабой непрерывности локально ограниченных представлений хаусдорфовых топологических групп в сопряженных банаховых пространствах и сопряженных пространствах Фреше и условиям сильной непрерывности локально ограниченных представлений хаусдорфовых топологических групп в сопряженных зубчатых банаховых пространствах и в рефлексивных пространствах Фреше.[1]

Определение. Пусть G — топологическая группа, π — ее (не обязательно сильно непрерывное) представление в нормированном пространстве E. Введем *сильную вариацию* $\epsilon(\pi;\xi;U) \geqslant 0$ *представления* π *в окрестности* U *единичного элемента* e *группы* G *на векторе* $\xi \in E$, полагая $\epsilon(\pi;\xi;U)$ равной верхней грани $\sup_{g\in U}\|\pi(g)\xi-\xi\|$, и *сильную вариацию* $\epsilon(\pi;\xi)\geqslant 0$ *представления* π *в единичном элементе* e *группы* G *на векторе* $\xi\in E$, полагая $\epsilon(\pi;\xi)$ равной нижней грани величин $\sup_{g\in U}\|\pi(g)\xi-\xi\|$ по всем окрестностям $U\subset G$ единичного элемента $e\in G$, т.е.

$$\epsilon(\pi;\xi)=\inf_{U\ni e}\epsilon(\pi;\xi;U)=\inf_{U\ni e}\sup_{g\in U}\|\pi(g)\xi-\xi\|.$$

Аналогично вводится *слабая вариация* $\omega(\pi,\xi,f)$ *представления* π *на векторе* $\xi\in E$ *и функционале* $f\in E^*$, $\|\xi\|\leqslant 1$, $\|f\|\leqslant 1$:

$$\omega(\pi,\xi,f)=\inf_{U\ni e}\sup_{g\in U}|f(\pi(g)\xi-\xi)|$$

(E^* — пространство, сопряженное к E), и *слабая* вариация* $\omega^*(\pi,\xi,f)$ *представления* π *на векторе* $\xi\in E$ *и функционале* $f\in E_*$, $\|\xi\|\leqslant 1$, $\|f\|\leqslant 1$, если

[1] Поскольку представления не предполагаются ограниченными, теорема Джонсона [130] об эквивалентности условий слабой и сильной непрерывности представлений локально компактных групп в банаховых пространствах, вообще говоря, не может быть применена в этом случае.

E — пространство, сопряженное к E_*:

$$\omega^*(\pi,\xi,f) = \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} |(\pi(g)\xi - \xi)f|.$$

Определение. Пусть G — топологическая группа, π — её (теоретико-групповое) представление в нормированном пространстве E; тогда π называется *локально ограниченным*, если существует окрестность V единичного элемента e в G и постоянная C, удовлетворяющие условию $\|\pi(g)\| \leqslant C$ для любого $g \in V$.

Определение. Пусть E — банахово пространство, сопряженное к некоторому банаховому пространству E_*, и пусть $\mathcal{L}(E)$ — пространство непрерывных линейных операторов в E. *Слабой* операторной топологией* в $\mathcal{L}(E)$ назовем топологию, определяемую семейством полунорм вида $T \mapsto |f(Tx)|$, где $T \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ и $f \in E_*$.

Определение. Банахово пространство F называется пространством, имеющим *свойство точек непрерывности*, если для любого непустого ограниченного слабо замкнутого множества $M \subset F$ существует точка в M, в которой ограничение на M тождественного отображения пространства F в слабой топологии в пространство F в сильной топологии непрерывно.

Любое рефлексивное банахово пространство, как и любое банахово пространство со свойством Радона–Никодима, имеет свойство точек непрерывности (см. [40, 41, 97]). В частности, пространство $l^1(M)$ для любого (не обязательно счетного) множества M и пространство операторов со следом в любом (не обязательно сепарабельном) гильбертовом пространстве имеют свойство точек непрерывности [57].

Теорема 2.1 [242]. *Пусть E — сопряженное банахово пространство, G — топологическая группа, и π — локально равномерно ограниченное (теоретико-групповое) представление группы G в сопряженном банаховом пространстве E слабо* непрерывными линейными операторами. Если для некоторого $q<1$ условие $\omega^*(\pi,\xi,f) \leqslant q$ выполняется для всех $\xi \in E$ и $f \in E_*$, $\|\xi\| \leqslant 1$, $\|f\| \leqslant 1$, то $\omega^*(\pi,\xi,f) = 0$, т.е. представление π непрерывно в слабой* операторной топологии. Если пространство E имеет свойство точек непрерывности, то представление π непрерывно в сильной операторной топологии.*

Это утверждение распространено в [274, 276] на (теоретико-групповые) представления хаусдорфовых топологических групп в сопряженных пространствах Фреше в слабой* операторной топологии (Теорема 22) и в рефлексивных пространствах Фреше в сильной операторной топологии (Теорема 24).

Следствие 2.1 [274, 276]. *Пусть G — связная локально компактная группа и ρ — её (сильно или слабо) непрерывное отображение в группу обратимых линейных операторов в банаховом пространстве E. Если существует такое (теоретико-групповое) представление π группы G в E, что $\|\pi(g)-\rho(g)\| \leqslant C$ для всех $g \in G$ и некоторого C, $C < 1/2$, то представление π непрерывно в той же топологии.*

Получены варианты усиления теоремы Ли о существовании одномерного подпредставления для любого непрерывного конечномерного комплексного представления связной разрешимой группы Ли для не обязательно непрерывных представлений и групп, не являющихся группами Ли и порожденных делимыми множествами.

Определение. Подмножество X группы G называется *делимым*, если для каждого $g \in X$ и каждого натурального n существует элемент $h \in X$, для которого $h^n = g$. Группа G называется делимой, если множество G делимо.

Теорема 2.13 [254]. *Пусть G — разрешимая группа, и пусть каждый коммутативный фактор в композиционном ряде группы G порожден делимым подмножеством. Пусть π — представление группы G в конечномерном комплексном линейном пространстве E. Если представление π неприводимо, то пространство представления π одномерно.*

Следствие 2.8 [254]. *Если G — связная разрешимая группа Ли, а π — (не обязательно непрерывное) представление G в конечномерном векторном пространстве E, то существует базис в E, в котором матрицы операторов представления π имеют верхнюю треугольную форму.*

Глава 3 “Условия непрерывности локально ограниченных представлений топологических групп”.

Определение. Пусть G — топологическая группа, π — ее (не обязательно непрерывный) гомоморфизм в отделимую топологическую группу H. Мы будем говорить, что π *локально относительно компактен*, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G, что замыкание множества $\pi(V)$ является компактным подмножеством топологической группы H. Мы будем говорить, что π *локально ограничен*, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G, что множество $\pi(V)$ является вполне ограниченным подмножеством топологической группы H, т.е. для любой окрестности W единичного элемента e_H в H существует конечное число сдвигов окрестности W, объединение которых покрывает множество $\pi(V)$.

Замечание. Очевидно, если группа H локально компактна, то любой локально ограниченный гомоморфизм в группу H автоматически является локально относительно компактным.

Определение. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ — направленное по убыванию семейство окрестностей единицы в отделимой топологической группе G. Для любого локально относительно компактного (не обязательно непрерывного) гомоморфизма π группы G в отделимую топологическую группу H введем обозначение $\mathrm{DG}(\pi) = \bigcap_{U\in\mathfrak{U}} \overline{\pi(U)}$. Здесь и далее черта означает замыкание в соответствующей топологии (в данном случае — в топологии группы H).

Теорема 3.1 [254]. *Пусть G — топологическая группа, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в отделимую топологическую группу H. Множество $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной подгруппой топологической группы H и компактной нормальной подгруппой в замкнутой подгруппе $\overline{\pi(G)}$ группы H. Кроме того, для любой окрестности V множества $\mathrm{DG}(\pi)$ существует окрестность единицы U такая, что $\overline{\pi(U)} \subset V$, и гомоморфизм π непрерывен тогда и только тогда, когда $\mathrm{DG}(\pi) = \{e_H\}$.*

Предложение 3.1 [273]. *Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ — направленное по убыванию семейство окрестностей единицы в топологической группе G. Для любого локально относительно компактного (не обязательно непрерывного) гомоморфизма π группы G в отделимую топологическую группу H рассмотрим направленность $\{\pi(g_U) \,|\, g_U \in U \in \mathfrak{U}_G\}$ в H. Тогда все предельные точки направленности $\{\pi(g_U)\}$ принадлежат $\mathrm{DG}(\pi)$.*

Определение [254]. Пусть G — топологическая группа, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H. Компактная нормальная подгруппа $\mathrm{DG}(\pi)$ замыкания образа группы G при гомоморфизме π называется *группой разрывов* гомоморфизма π.

В частности, группа разрывов определена для любого локально ограниченного гомоморфизма в локально компактную группу и, тем самым, и для любого локально ограниченного конечномерного представления топологической группы.

Определение. Пусть G — группа. Множество $X \subset G$ называется *делимым*, если для любого элемента $x \in X$ и любого натурального числа p существует такой элемент $y \in X$, что $y^p = x$. Группа G называется *локально делимой*, если операция возведения в любую натуральную степень p открыта в единице группы, то есть множество p-х степеней элементов, пробегающих любую окрестность единицы в G, содержит некоторую окрестность единицы в G.

Очевидно, любая группа Ли локально делима.

Лемма [254, 273]. *Пусть G — локально делимая группа, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в отделимую топологическую группу H. Тогда группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной связной подгруппой группы H.*

Лемма [254, 273]. *Пусть G — топологическая группа, G' — коммутант группы G, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в некоторую отделимую топологическую группу H. Коммутант группы разрывов гомоморфизма π содержится в группе разрывов ограничения $\pi|_{G'}$ гомоморфизма π на коммутант G' группы G. Если отображение $[\cdot,\cdot]\colon G\times G \to G' \subset G$ открыто в $(e,e) \in G\times G$, то группа разрывов ограничения $\pi|_{G'}$ гомоморфизма π на коммутант G' совпадает с коммутантом группы разрывов гомоморфизма π.*

Теоремы 3.5, 3.10, 3.21, 3.22 [254, 262, 273]. *Любой локально ограниченный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли непрерывен на коммутанте G' группы G во внутренней топологии группы G. Ограничение этого гомоморфизма на коммутант G' непрерывно в топологии, индуцированной исходной топологией группы G, тогда и только тогда, когда ограничение гомоморфизма на центр подгруппы Леви S группы G непрерывно в топологии, индуцированной исходной топологией группы G.*

Следствие 3.7 [254, 273]. *Группа разрывов каждого локально ограниченного гомоморфизма группы Ли в группу Ли коммутативна. В частности, группа разрывов любого локально ограниченного конечномерного представления группы Ли коммутативна.*

Во время одного из докладов автора по теории отображений, близких к представлениям, на семинаре А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого, А. С. Мищенко высказал гипотезу, что для конечномерных локально ограниченных представлений связных групп Ли слабая вариация представления в точке может принимать только три значеиия: 0, 2 и ∞.

Теоремы 3.19, 3.20 (Справедливость гипотезы Мищенко) [254, 254]. *Для конечномерных локально ограниченных представлений групп Ли слабая вариация представления в точке может принимать только три значения*: *0, 2 и* ∞.

Определение. Положим $\mathrm{FDG}(\pi) = \bigcap_{N\in\mathfrak{N}} \overline{\pi(N)}$. Это — замкнутая нормальная подгруппа в замыкании образа гомоморфизма π, так называемая финальная группа разрывов π. Гомоморфизм π называется *финально непрерывным*, если $\mathrm{FDG}(\pi) = \{e_H\}$.

Теорема 3.15 [245]. *Пусть G — почти связная локально компактная группа, H — связная локально компактная группа, а $\pi\colon G\to H$ — локально ограниченный гомоморфизм. Если гомоморфизм π финально непрерывен, то он непрерывен на коммутанте G_0' компоненты единицы G_0.*

Следующие теоремы усиливают теорему Фрейденталя–Вейля.

Теорема 3.23 [266]. *Пусть G — связная группа Ли, K — компактная топологическая группа, и $J\colon G\to K$ — (не обязательно непрерывное) гомоморфное вложение. Тогда группа G топологически изоморфна прямому произведению связной компактной группы Ли и (конечномерной) векторной группы.*

Теорема 3.27 [266]. *Пусть G — связная группа Ли, пусть K — компактная топологическая группа, и пусть $J\colon G\to K$ — (не обязательно непрерывный) гомоморфизм. Тогда существует прямое произведение H компактной группы Ли и векторной группы и такой гомоморфизм Θ группы H в K, что $\Theta(H)=J(G)$ как (не обязательно замкнутая) подгруппа в K.*

Теорема 3.30 [266]. *Пусть G — связная локально компактная группа, допускающая (не обязательно непрерывное) локально ограниченное гомоморфное вложение в почти связную локально компактную группу H, которая аменабельна как локально компактная группа. Тогда G также аменабельна как локально компактная группа.*

Следующая теорема — усиление теоремы Германа Вейля.

Теорема 3.32 [266]. (*Не обязательно непрерывное*) *локально ограниченное конечномерное представление связной группы Ли вполне приводимо тогда и только тогда, когда ограничение представления на радикал вполне приводимо.*

Определение. Пусть $\mathrm{urk}(G)$ — пересечение ядер непрерывных конечномерных представлений группы G (ядро Хохшильда). Определим "ядро локально ограниченных конечномерных представлений" $\mathrm{lbrk}(G)$ связной локально компактной группы G как пересечение ядер всех (не обязательно непрерывных) локально ограниченных конечномерных представлений группы G.

Определение. Пусть $vNk(G)$ — ядро фон Неймана группы G, т.е. пересечение ядер всех неприводимых конечномерных непрерывных комплексных унитарных представлений группы G, и пусть $svNk(G)$ — наименьшее ядро фон Неймана группы G (пересечение ядер всех неприводимых конечномерных (не обязательно непрерывных) комплексных унитарных представлений G).

Теорема 3.28 [258]. *Ядром фон Неймана $\mathrm{vNk}(G)$ произвольной связной локально компактной группы G с радикалом R является замкнутая нормальная подгруппа, порождённая группой H и нормальной подгруппой $[G,R]$ в G, порождённой коммутаторами вида $grg^{-1}r^{-1}$, где $g \in G$ и $r \in R$.*

Аналогичная характеризация получена в теореме 3.16 для наименьшего ядра фон Неймана $svNk(G)$ связной локально компактной группы Ли G, а также для ядра Хохшильда $\mathrm{urk}(G)$ и для пересечения ядер локально ограниченных конечномерных представлений [257].

Теорема 3.34 [257]. *Пусть G — связная локально компактная группа. Следующие условия равносильны*:

1) *семейство конечномерных локально ограниченных линейных представлений группы G разделяет точки G*;

2) $\operatorname{urk}(G)=\{e_G\}$;

3) *G является проективным пределом связных линейных групп Ли*;

4) *наибольшая некомпактная* (*аналитическая*) *полупростая подгруппа Ли S_1 в G является линейной группой Ли* (*конечно*, *это значит*, *что соответствующая группа* $\operatorname{urk}(S_1)$ *тривиальна*) *и* (*единственная*) *максимальная компактная подгруппа замыкания в G радикала* $\operatorname{rad}(G')$ *коммутанта G' группы G также тривиальна.*

Теорема 3.33 [257]. *Связная группа Ли допускает точное локально ограниченное* (*не обязательно непрерывное*) *конечномерное представление тогда и только тогда*, *когда она допускает непрерывное точное конечномерное представление*, *т.е. тогда и только тогда*, *когда она является линейной группой Ли.*

Теорема 3.42 [257]. *Пусть G — линейная группа Ли. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *каждое точное конечномерное локально ограниченное* (*не обязательно непрерывное*) *конечномерное представление G является гомеоморфизмом*;

2) *G — совершенная линейная группа Ли*;

3) *G — совершенная линейная группа Ли*, *снабженная топологией*, *индуцированной обертывающей матричной группой.*

Глава 4 “Отображения близкие к представлениям топологических групп”.

Определение. Пусть G — группа. Вещественная функция f на S называется (*вещественным*) *квазихарактером* на GS, если множество

$$\{f(st)-f(s)-f(t)\mid s,t\in G\}$$

ограничено. Вещественный квазихарактер f на G называется (*вещественным*) *псевдохарактером* на G, если $f(x^n)=nf(x)$ для всех $x\in S$ и всех $n\in\mathbb{Z}$.

Теорема 4.1 [229, 232, 254, 268]. *Пусть G — группа*, *f — вещественный квазихарактер на G.*

(a) *Для любого $g\in G$ существует предел $\varphi(g)=\varphi_f(g)=\lim_{n\to\infty}n^{-1}f(g^n)$*, *являющийся единственным псевдохарактером φ*, *для которого разность $f-\varphi$ ограничена. Если $|f(gh)-f(g)-f(h)|\leqslant C$ для всех $g,h\in G$*, *то $|f(g)-\varphi(g)|\leqslant C$ для всех $g\in G$ и $|\varphi(gh)-\varphi(g)-\varphi(h)|\leqslant 4C$ для всех $g,h\in S$.*

(b) *Если* H *— односторонне аменабельная подгруппа в* G, *то ограничение отображения* φ *на* H *есть аддитивный характер* H, *т.е.* $\varphi(gh)-\varphi(g)-\varphi(h)=$ $=0$ *для всех* $g,h\in H$. *Кроме того, величина* $\varphi(g)$, $g\in H$, *может быть определена как общее значение всех односторонних инвариантных средних на соответствующей ограниченной функции* $h\mapsto f(gh)-f(h)$, $h\in H$, *для каждого* $g\in H$.

(c) $\varphi(gh)=\varphi(hg)$ *для всех* $g,h\in G$.

(d) *Если* G *— топологическая группа и* φ *— локально ограниченный псевдохарактер на* G, *то* φ *непрерывен. В частности, если* f *— непрерывный квазихарактер на локально компактной группе* G, *то* φ *непрерывен.*

(e) *Если* G *— группа,* N *— нормальная подгруппа в* G, π *— канонический эпиморфизм* G *на* G/N *и псевдохарактер* φ *обращается в нуль на* N, *то существует такой псевдохарактер* ψ *группы* G/N, *что* $\varphi=\psi\circ\pi$. *Если* G *— локально компактная группа,* N *замкнут и* φ *непрерывен, то* ψ *непрерывен.*

Пусть $H_b^n(G)$ есть n-я группа когомологий комплекса $0\to\mathbb{R}\overset{d^0=0}{\longrightarrow}C^1(G)\overset{d^1}{\to}$ $\to C^2(G)\to\cdots$ (n-ая вещественная непрерывная ограниченная группа когомологий группы G), где $BC^n(G)$ — вещественное векторное пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций f на группе G^n, $f\colon (g_1,\ldots,g_n)\mapsto f(g_1,\ldots,g_n)\in\mathbb{R}$, $g_i\in G$, а $d^nf(g_1,\ldots,g_{n+1})=f(g_2,\ldots,g_n)+$ $+\sum_{i=1}^n(-1)^if(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{n+1})+(-1)^{n+1}f(g_1,\ldots,g_n)$.

Пусть G — группа, φ — псевдохарактер на G. Функция $\psi(g_1,g_2)=$ $=\varphi(g_1g_2)-\varphi(g_1)-\varphi(g_2)$, $g_1,g_2\in G$, определяет ограниченный 2-коцикл ψ на группе G. Как известно, коцикл ψ тривиален как ограниченный коцикл (т.е. является кограницей ограниченной цепи) тогда и только тогда, когда квазихарактер φ является ограниченным возмущением обычного аддитивного вещественного характера группы G.

Определение. Простая группа Ли называется *эрмитово симметрической*, если центр её универсальной накрывающей группы бесконечен.

Теорема 4.7 [238, 254]. *Для любой эрмитово симметрической простой группы Ли* G *любая функция* f *из теоремы Гишарде–Вигнера* [110] *ограничена на* $G\times G$.

Введем теперь псевдохарактер, непосредственно связанный с 2-коциклом Гишарде–Вигнера на эрмитово симметрической простой группе Ли.

Определение. Пусть G — связная односвязная простая группа Ли, центр которой бесконечен (и, таким образом, соответствующее симметрическое пространство является эрмитово симметрическим), и пусть K — аналитическая подгруппа группы G, отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли G. Осуществим изоморфное отождествление центра Z_K аналитической группы K с аддитивной группой поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ (например, с помощью натурального параметра на однопараметрической подгруппе, определяемой подгруппой Z_K). Рассмотрим разложение Ивасавы $G = KAN$, связанное с группой K. Пусть A — абелева, а N — нильпотентная группа в этом разложении, и пусть $g = k(g)a(g)n(g)$, $g \in G$, $k(g) \in K$, $a(g) \in A$, $n(g) \in N$ — соответствующее разложение элемента $g \in G$. Отображение $\varpi\colon g \mapsto k(g)$, $g \in G$, переводящее каждый элемент $g \in G$ в компоненту $k(g) \in K$ его разложения Ивасавы, непрерывно. Рассмотрим композицию ψ отображения $\varpi\colon g \mapsto k(g)$, $g \in G$, и непрерывной проекции π, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$. Эта композиция $\psi = \pi \circ \varpi$ определяет некоторый квазихарактер на G. Псевдохарактер θ, соответствующий этому квазихарактеру, мы называем *псевдохарактером Гишарде–Вигнера*.

Приведем здесь родственный результат из следующей главы.

Теорема 5.5 [254]. *Пусть G — связная простая группа Ли. Если G не является эрмитово симметрической группой или если центр группы G конечен, то любой псевдохарактер на G тождественно равен нулю. Если G — эрмитово симметрическая группа с бесконечным центром, то любой псевдохарактер на G кратен псевдохарактеру Гишарде–Вигнера на G. В частности, любой псевдохарактер на простой группе Ли непрерывен.*

Определение. Пусть G — связная полупростая группа Ли и пусть f — псевдохарактер на G. Поскольку при необходимости группу G можно заменить её универсальной накрывающей группой (и обозначить эту группу тем же символом G), мы вправе считать, что группа G односвязна (и, таким образом, является произведением односвязных простых групп Ли) и рассматривать псевдохарактер f как псевдохарактер (который мы снова обозначим через f) на этой односвязной группе, или, иначе говоря, как псевдохарактер на указанном выше произведении простых групп Ли. Этот псевдохарактер является суммой тривиальных продолжений его ограничений на простые факторы.

Эти ограничения либо равны нулю (например, если рассматриваемый фактор компактен или некомпактен, но не эрмитово симметричен) или являются ненулевыми кратными соответствующих псевдохарактеров Гишарде–Вигнера, продолженных на всю группу нулём, т.е. равных нулю на всех остальных простых факторах. В дальнейшем, любая линейная комбинация этих продолжений псевдохарактеров Гишарде–Вигнера на эрмитово симметрических факторах G_i группы G называется *псевдохарактером Гишарде–Вигнера* на G.

Теорема 4.12 [237–240]. *Вторая вещественная непрерывная ограниченная группа когомологий $H_b^2(G,\mathbb{R})$ почти связной локально компактной группы G конечномерна.*

Определение. Если ЛВП E метризуемо, d — некоторая метрика в E, а $\varepsilon > 0$, то отображение π называется ε-квазипредставлением относительно метрики d, если $d(\pi(g_1g_2)\xi,\pi(g_1)\pi(g_2)\xi) \leqslant \varepsilon d(\xi,0)$, $g_1,g_2 \in G$, $\xi \in E$, а число ε называется *дефектом* квазипредставления π.

Теорема 4.22 [268, 271]. *Одномерное локально ограниченное псевдопредставление π с дефектом $\varepsilon < q_0 \leqslant \sqrt{3}/5$ почти связной локально компактной группы G со связной компонентой G_0 равно экспоненте псевдохарактера на G, совпадающей с π на G_0 и на дополнительной подгруппе Д. Ли [148] D группы G тогда и только тогда, когда π тривиально на D.*

Пусть G — топологическая группа, e — единичный элемент в G, B — банахово пространство, $\mathcal{L}(B)$ — алгебра ограниченных линейных операторов в B, 1_B — единичный оператор в B. Группа G называется *устойчиво представимой* в B, если для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует число $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: если π — слабо непрерывное δ-квазипредставление группы G в B обратимыми операторами, удовлетворяющее условиям $\pi(e) = 1_B$ и $\|\pi(g)\| \leqslant C$ для всех $g \in G$, то существует такое слабо* непрерывное представление ρ группы G в B^*, что $\|\pi(g^{-1})^* - \rho(g)\| \leqslant \varepsilon$ для всех $g \in G$, т.е. отображение $g \mapsto \pi(g^{-1})^*$ является ε-возмущением обычного (слабо* непрерывного) представления группы G.

Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы Б. Джонсона о почти гомоморфизмах аменабельных банаховых алгебр [133].

Теорема 4.15 [232, 254]. *Любая аменабельная локально компактная группа устойчиво представима в любом сопряженном банаховом пространстве.*

Лемма [232, 235]. *Пусть G — группа, π — ее неограниченное квазипредставление в банаховом пространстве $E=E_\pi$.*

1) Квазипредставление π имеет хотя бы одну неограниченную орбиту.

2) Для любых $g,h\in G$ и $\xi\in E$ π-орбита вектора $(\pi(gh)-\pi(g)\pi(h))\xi$ ограничена. В частности, если все ненулевые π-орбиты неограничены, то π — обычное представление.

3) Пусть L — векторное подпространство E, образованное всеми элементами $x\in E$ такими, что орбита $O_\pi(x)=\{\pi(g)x,\ g\in G\}$ ограничена. Снабдим L нормой $\|x\|_L=\sup_{g\in G}\|\pi(g)x\|$, $x\in E$, где $\|\cdot\|=\|\cdot\|_E$. Тогда тождественное отображение $j\colon L\to E$ непрерывно и L полно относительно нормы $\|\cdot\|_L$. Векторное подпространство $L\subset E$ инвариантно относительно всех операторов $\pi(g)$, $g\in G$, и соотношения $\|\pi(g)x\|_L\leqslant\|x\|_L+\epsilon\|x\|$, $\|(\pi(k)\pi(l)-\pi(kl))x\|_L\leqslant\epsilon\|\pi(l)x\|+2\epsilon\|x\|$, $g,k,l\in G$, $x\in E$, выполняются для всех $g,k,l\in G$; в частности, $\|\pi(k)\pi(l)-\pi(kl)\|_L\leqslant 3\epsilon$ для всех $k,l\in G$.

4) Пусть ρ — квазипредставление группы G, являющееся ограниченным возмущением квазипредставления π, т.е. отображение $\rho-\pi\colon G\to\mathcal{L}(E)$ имеет ограниченный образ. Тогда образ оператора $\rho(g)-\pi(g)$ содержится в подпространстве $L\subset E$ для любого $g\in G$. В частности, если все ненулевые π-орбиты в E неограничены (и π — обычное представление, см. утверждение 2)), то π жестко в том смысле, что если ограниченное возмущение ρ квазипредставления π является квазипредставлением, то ρ совпадает с π.

Определение. Пусть G — группа, а π — ε-квазипредставление группы G в банаховом пространстве E. Отображение π называется *ε-псевдопредставлением*, если для всех $g\in G$ и всех $n\in\mathbb{Z}$ существует такой линейный оператор $A(n,g)$ в $L(E^*)$, что $\|A(n,g)-\mathbf{1}_{E^*}\|\leqslant\varepsilon$, $\pi(g^n)^*=A(n,g)(\pi(g)^*)^nA(n,g)^{-1}$, $g\in G$, $n\in\mathbb{Z}$, где $\|\cdot\|$ — операторная норма в $L(E^*)$, а $\mathbf{1}_{E^*}$ — единичный оператор в E^*. Псевдопредставление называется *чистым*, если его ограничение на каждую циклическую подгруппу является обычным представлением этой подгруппы.

Теоремы 4.19, 4.24 [232, 254, 267]. *Пусть G — группа, а π — квазипредставление группы G в конечномерном векторном пространстве $E=E_\pi$. Пусть E^* — пространство, сопряжённое к E. Пусть L — множество векторов $\xi\in E$, орбита которых $\{\pi(g)\xi\mid g\in G\}$ ограничена в E; пусть M — множество функционалов $f\in E^*$, орбита которых $\{\pi(g)^*f\mid g\in G\}$ ограничена в E^*; тогда L*

и аннулятор $M^{\perp}$ — π*-инвариантные векторные подпространства в* E*. Рассмотрим возрастающий набор подпространств* $\{0\}$, $L\cap M^{\perp}$, $M^{\perp}$, $L+M^{\perp}$, $E=E_T$ *и запишем матрицу* $t(g)$ *оператора* $\pi(g)$, $g\in G$, *в блочной форме, отвечающей разложению пространства* E *в прямую сумму подпространств* $L\cap M^{\perp}$, $M^{\perp}\setminus(L\cap M^{\perp})$, $L\setminus(L\cap M^{\perp})$, *и* $E\setminus(L+M^{\perp})$, *где символ "*$\setminus$*" означает взятие дополнительного подпространства*:

$$t(g)=\begin{pmatrix}\alpha(g) & \varphi(g) & \sigma(g) & \tau(g)\\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g)\\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g)\\ 0 & 0 & 0 & \delta(g)\end{pmatrix}, \qquad g\in G.$$

(*Здесь* $t_{23}(g)=0$, *так как* L *инвариантно относительно* T.)

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *отображения* α, δ, γ, σ *и* χ *ограничены*;

2) *матричнозначные отображения* π_1 *и* π_2, *определяемые равенствами*

$$\pi_1(g)=\begin{pmatrix}\alpha(g) & \varphi(g)\\ 0 & \beta(g)\end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \pi_2(g)=\begin{pmatrix}\beta(g) & \rho(g)\\ 0 & \delta(g)\end{pmatrix}$$

являются представлениями группы G;

3) *отображение* τ *является квазикоциклом относительно представлений* π_1 *и* π_2, *т.е. отображение* $(g,h)\mapsto\tau(gh)-\alpha(g)\tau(h)-\varphi(g)\rho(h)-\tau(g)\delta(h)$, $g,h\in G$, *ограничено.*

Все конечномерные квазипредставления почти ограничены.

Определение. Квазипредставление π группы G с дефектом ε называется *почти ограниченным*, если существует такое $C>0$, что

$$\|\pi(ghk)-\pi(g)\pi(h)\pi(k)\|\leqslant C\varepsilon$$

для всех $g,h,k\in G$.

Теорема 4.27 [263, 264]. *Пусть* π — *почти ограниченное квазипредставление (не обязательно ограниченное) аменабельной группы* G *в сопряженном банаховом пространстве* E *с дефектом* δ *и постоянной* C*. Если дефект* δ *достаточно мал, то существует обычное представление группы* G, *близкое к* π, *расстояние которого до* π *в смысле нормы оператора — равномерная бесконечно малая при* $\delta\to 0$.

Глава 5 “Конечномерные квазипредставления связных групп Ли”.

Следующая теорема дает полное решение проблемы Каждана–Мильмана.

Теорема 5.2 [253, 254]. *Пусть G — связная полупростая компактная группа Ли. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого конечномерного ограниченного δ-квазипредставления π группы G существует непрерывное представление S (в том же векторном пространстве), равномерно ε-близкое к π.*

Теорема 5.10 [254, 267]. *Пусть G — связная односвязная группа Ли, а π — квазипредставление группы G с достаточно малым дефектом в конечномерном векторном пространстве E. По теореме Леви–Мальцева, группу G можно представить в виде полупрямого произведения односвязного радикала R группы G и подгруппы Леви S. Пусть E^* — пространство, сопряжённое к E. Рассмотрим возрастающий набор подпространств $\{0\}$, $L\cap M^{\perp}$, $M^{\perp}$, $L+M^{\perp}$, E из теоремы об общем виде конечномерных квазипредставлений, и запишем матрицу $t(g)$ оператора $\pi(g)$, $g\in G$, в соответствующей блочной форме, где символ “$A\setminus B$” для векторных подпространств B и A, $B\subset A$, означает переход к подпространству в A, дополнительному к B:*

$$t(g)=\begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \qquad g\in G.$$

Нули в матрицах означают соответствующие нулевые операторы; кроме того, справедливы следующие утверждения.

(i) *Ограниченные представления α и δ эквивалентны прямым суммам произведений G-центральных унитарных характеров группы R (G-центральность означает, что эти характеры инвариантны относительно внутренних автоморфизмов группы G) на непрерывные неприводимые унитарные представления компактных факторгрупп группы S. Отображения φ и ρ удовлетворяют условиям $\varphi(sr)=\alpha(s)\varphi(r)$ и $\rho(rs)=\varphi(r)\delta(s)$ для любых $s\in S$ и $r\in R$ и, таким образом, при данных α и δ, определяются своими ограничениями на радикал R.*

(ii) *Если группа G (от S) имеет нетривиальную эрмитово симметрическую факторгруппу, то отображение γ является шевелением прямой суммы Γ*

(обычных) произведений некоторых непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной факторгруппы W группы G, некоторого одномерного псевдопредставления Гишарде–Вигнера (т.е. отображения вида $g \to \exp(ir\theta(g))$, $g \in G$, для некоторого $r \in \mathbb{R}$, где θ — псевдохарактер Гишарде–Вигнера на G), и некоторых G-центральных унитарных характеров группы R. Если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических факторгрупп, то отображение γ является шевелением прямой суммы (обычных) произведений некоторых непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной факторгруппы группы G и некоторых G-центральных унитарных характеров группы R, и в этом случае мы обозначим аппроксимирующее представление тем же символом Γ.

(iii) *Если группа S имеет нетривиальную эрмитово симметрическую факторгруппу и если $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, где каждая из групп S_i проста, то отображение τ является шевелением некоторого отображения $\varpi\colon G \to \to \mathcal{L}(E \setminus (L+M^{\perp}), L \cap M^{\perp})$ вида*

$$\varpi(rs) = \alpha(r)\sum_{i=1}^{n}\theta_i(s)A_i + \varpi(r)\delta(s), \qquad r \in R, \quad s \in S,$$

где $A_i \in \mathcal{L}(E \setminus (L+M^{\perp}), L \cap M^{\perp})$ — такие линейные операторы, что пересечение их ядер в подпространстве $E \setminus (L+M^{\perp})$ тривиально, $\cap_{i=1}^{n} \ker A_i = = \{0\} \subset E \setminus (L+M^{\perp})$, а каждая функция θ_i является продолжением псевдохарактера Гишарде–Вигнера на G_i (если он есть) на всю группу G (прямое произведение конечного числа простых односвязных групп Ли G_i) нулём на все простые сомножители, отличные от G_i. В частности, если группа S — простая односвязная эрмитово симметрических группа, то $\varpi(g) = \theta(g)A$, $g \in G$, где θ псевдохарактер Гишарде–Вигнера на G, а A — некоторый линейный изоморфизм $A \in \mathcal{L}(E \setminus (L+M^{\perp}), L \cap M^{\perp})$. Если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических факторгрупп, то отображение τ является шевелением некоторого отображения $\varpi\colon G \to \mathcal{L}(E \setminus (L+M^{\perp}), L \cap M^{\perp})$ (которое мы, таким образом, также обозначим символом ϖ) вида $\varpi(rs) = \varpi(r)\delta(s)$, $r \in R$, $s \in S$, где ограничение отображения τ на R является шевелением $\alpha|_R$-$\delta|_R$-коцикла ϖ, т.е. $\varpi(r_1 r_2) = \alpha(r_1)\varpi(r_2) + \varpi(r_1)\delta(r_2)$, $r_1, r_2 \in R$, и, кроме того, норма разности $\varpi(s^{-1}rs) - \delta(s^{-1})\varpi(r)\delta(s)$ равномерно мала для $s \in S$ и $r \in R$.

(iv) *Величина возмущений (в равномерной норме на группе G), упомянутых в пунктах* (ii) *и* (iii)*, определяется нормой ограниченного отображения γ,* *величиной отображений* σ *и* χ *в той же норме и дефектом исходного квазипредставления* π *и, при данной оценке норм* γ, σ *и* χ, *сколь угодно мала при достаточно малом дефекте квазипредставления* π.

(v) *Отображение*

$$\Theta(g)=\begin{pmatrix}\alpha(g) & \varphi(g) & 0 & \varpi(g)\\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g)\\ 0 & 0 & \Gamma(g) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta(g)\end{pmatrix}, \qquad g\in G,$$

аппроксимирующее квазипредставление π, *является чистым псевдопредставлением группы* G, *и отображение* Θ *непрерывно тогда и только тогда, когда оно локально ограничено.*

Эта теорема распространена с необходимыми изменениями на случай финально непрерывных конечномерных квазипредставлений связной локально компактной группы G (ограничение которых на некоторую компактную нормальную подгруппу, факторгруппа группы G по которой является группой Ли, непрерывно).

Глава 1. Вопросы представимости топологических групп

1.1. Двойственность компактных и дискретных объектов за пределами двойственности Понтрягина

1.1.1. Формулировки теорем о связи между топологиями локально компактной группы и ее двойственного пространства

Пусть G — локально компактная группа, $\hat{G}$ — ее двойственное пространство (см. ниже, п. 1.1.2). Известно (см., например, [72]), что $\hat{G}$ дискретно, если G компактна, и $\hat{G}$ компактно[1], если G дискретна. Покажем, что в терминах двойственного пространства можно получить некоторые критерии компактности и дискретности локально компактной группы [224, 225].

Теорема 1.1. *Пусть G — локально компактная топологическая группа с дискретным двойственным пространством. Тогда G компактна.*

Теорема 1.2. *Пусть G — локально компактная топологическая группа. Пусть ее двойственное пространство $\hat{G}$ компактно*[1] *и все представления $\pi \in \hat{G}$ конечномерны. Тогда G — дискретная группа типа I*[2].

Следствие 1.1. *Пусть G — локально компактная группа*,

а) *G компактна тогда и только тогда, когда $\hat{G}$ дискретно*,

б) *G — дискретная группа типа* 1 *тогда и только тогда, когда $\hat{G}$ компактно и все представления $\pi \in \hat{G}$ конечномерны.*

Как показывают примеры (см. п. 1.1.3), локально компактная группа с компактным двойственным пространством может быть недискретной. Но теоремы 1.1 и 1.2 означают, что некоторый аналог двойственности Понтрягина

[1]Не обязательно отделимо.

[2]Напомним, что группа G называется *группой типа* I, если для любого унитарного представления ρ этой группы в гильбертовом пространстве H_ρ слабо замкнутая алгебра операторов в H_ρ, порожденная операторами $\rho(g)$, $g \in G$, $*$-изоморфна некоторой слабо замкнутой алгебре операторов $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве H, коммутант которой коммутативен.

между компактными и дискретными коммутативными[3] группами имеет место и в случае некоммутативных групп.

В п. 1.1.2 напоминаются некоторые определения и доказываются теоремы 1.1 и 1.2. Пункт 1.1.3 содержит некоторые примеры.

1.1.2. Определения и доказательства

Пусть G — локально компактная группа, π — унитарное представление G в гильбертовом пространстве H_π. Функцию на G вида $g \to (\pi(g)\xi,\xi)$, где $\xi \in H_\pi$, будем называть *диагональным элементом* представления π. Введем в множество $\hat{G}$ классов унитарной эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы G операцию замыкания (см. [8, 10, 72, 90]). Пусть $\rho \in \hat{G}$, $S \subset \hat{G}$; будем говорить, что ρ принадлежит замыканию S, если любой диагональный элемент представления ρ есть равномерный предел на любом компакте в G выпуклых комбинаций диагональных элементов представлений $\pi \in S$. Эта операция превращает $\hat{G}$ в топологическое пространство, которое мы будем также обозначать через $\hat{G}$. Это топологическое пространство называется *двойственным* (или *дуальным*) пространством группы G.

Пусть ν — унитарное представление группы G. *Носителем представления* ν называется такое наименьшее замкнутое множество $S \subset \hat{G}$, что любой диагональный элемент представления ν есть равномерный предел, на любом компакте, выпуклых комбинаций диагональных элементов представлений $\pi \in S$.

Пусть N — замкнутая нормальная подгруппа в G, τ — каноническое отображение $G \to G/N$. Каждому унитарному представлению π группы G/N сопоставим унитарное представление $\hat{\tau}$ группы G, тривиальное на N, определяемое формулой $\hat{\tau}(\pi)(g) = \pi(\tau(g))$. Из определения $\hat{G}$ следует, что $\hat{\tau}\colon \widehat{G/N} \to \hat{G}$ есть гомеоморфизм $\widehat{G/N}$ на замкнутое подмножество в $\hat{G}$. В этом разделе “представление” означает “унитарное представление”.

Лемма 1.3 сводит доказательство теоремы 1.1 для случая вполне несвязных групп к теореме 1.1 для сепарабельных групп. Леммы 1.4–1.6 показывают, что достаточно проверить теорему 1.1 для сепарабельных вполне несвязных групп. Эта проверка проводится в лемме 1.7.

[3] Двойственное пространство $\hat{G}$ не имеет естественной групповой структуры, если G некоммутативна.

Лемма 1.1. *Пусть G — локально компактная группа, ρ — представление G, S — носитель ρ, π — изолированная точка $\hat{G}$, $\pi \in S$. Если алгебра $\pi(\mathscr{L}(G))$ сепарабельна в смысле нормы оператора, то ρ содержит π прямым слагаемым*[4].

Доказательство. Пусть $A = C^*(G)$ — C^*-алгебра группы G, I — такой замкнутый двусторонний идеал A, что $\{\pi\} = \hat{I}$[5] (см. [72, пп. 13.9.1 и 3.2.2]). Тогда $\rho|_I$ — ненулевое представление I (если $\rho|_I = 0$, то $I \subset \operatorname{Ker} \rho$, т.е. $I \subset \operatorname{Ker} \pi$, что невозможно). Заметим, что $\hat{I}$ состоит из единственного представления. Следовательно, $\pi|_I$ — точное представление I, т.е. I — сепарабельная C^*-алгебра с одноэлементным $\hat{I}$, т.е. алгебра компактных операторов [21]. Пусть $K \neq (0)$ — существенное подпространство $\rho|_I$ (ортогональное дополнение нулевого подпространства). Тогда $K = \sum_\alpha \oplus H_\alpha$, где каждое H_α инвариантно относительно $\rho|_I$, и подпредставление $\rho|_I$, определяемое H_α, эквивалентно $\pi|_I$. Тогда (см. [72, 2.11.2]) каждое H_α инвариантно относительно ρ, и подпредставление ρ, определяемое H_α, эквивалентно π. Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.2. *Пусть G — локально компактная вполне несвязная группа, обладающая свойством T (см. [8]). Тогда G счетна в бесконечности.*

Доказательство. Пусть H — открытая компактная подгруппа в G (см. [24, теорема 16]). Выберем компакт $K \subset G$ и число $\varepsilon > 0$ так, чтобы окрестность единичной положительно определенной функции, определяемая K и ε, не пересекалась с замкнутой выпуклой оболочкой положительно определенных функций, связанных с неединичными представлениями из $\hat{G}$. Пусть H_1 — открытая подгруппа в G, порожденная $K \cup H$, и пусть ρ — представление группы G, индуцированное единичным представлением группы H_1. Сужение ρ на H_1 содержит единичное представление H_1, т.е. существует положительно определенная функция на G, связанная с ρ и равная единице на $H_1 \supset K$. Тогда единичное представление G содержится в носителе ρ, т.е., по лемме 1.1, ρ содержит единичное представление прямым слагаемым. Следовательно, индекс H_1 в G конечен, т.е. G порождена компактной окрестностью единицы (конечным набором смежных классов по H). $\square$

---

[4] Утверждение вместе с доказательством справедливо для любой C^*-алгебры. Возможно, что эта лемма известна; найти ее в литературе не удалось.

[5] Если A — C^*-алгебра, то $\hat{A}$ — множество классов эквивалентности неприводимых представлений A, снабженное оболочечно-ядерной топологией (см. [72]).

Лемма 1.3. *Пусть G — локально компактная вполне несвязная группа, обладающая свойством T. В любой окрестности единичного элемента G содержится компактная нормальная подгруппа, факторгруппа по которой удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Пусть V — окрестность единицы в G, H — открытая компактная подгруппа, содержащаяся в V. По лемме 1.2, пространство G/H не более чем счетно. Пусть g_i, $i = 1,2,\ldots,$ — представители попарно различных классов gH. Положим $N = \bigcap_i g_i H g_i^{-1}$. Очевидно, $N = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$, т.е. N — нормальная подгруппа в G (и в H). Пусть X — дополнение до H прообраза открытого множества U в G/H. Тогда X компактно, и так как $X \cap (\bigcap_i g_i H g_i^{-1}) = \varnothing$, то $X \cap (\bigcap_{i=1}^n g_i H g_i^{-1}) = \varnothing$ для некоторого n. Следовательно, открытый образ W_n множества $\bigcap_{i=1}^n g_i H g_i^{-1}$ содержится в U, т.е. единичный элемент G/N имеет счетную базу окрестностей, образованную открытыми подгруппами W_n. Поэтому объединение множеств смежных классов по W_n есть база открытых множеств в G/N, и каждое множество смежных классов счетно по лемме 1.2. $\square$

Определение 1.1. Назовем *Q-группой* такую сепарабельную локально компактную группу G, что $\hat{G}$ не более чем счетно и G обладает свойством T.

Очевидно, что свойство быть Q-группой наследуется любой факторгруппой. Сепарабельная локально компактная группа G с дискретным двойственным пространством есть Q-группа (так как $\hat{G}$ имеет счетную базу открытых множеств; см. [72, п. 3.3.4]).

Лемма 1.4. *Пусть G — Q-группа, N — замкнутая подгруппа G конечного индекса. Тогда N — Q-группа.*

Доказательство. Заметим, что Q-группа есть группа типа 1 (это следует из [74]). Пусть π — неприводимое унитарное представление N, U^π — индуцированное им унитарное представление G. Так как $\hat{G}$ счетно, то разложение U^π в прямой интеграл неприводимых представлений сводится к разложению в прямую сумму: $U^\pi = \bigoplus_i \rho_i$. Рассмотрим сужение U^π на N. Так как N открыта в G, то $U^\pi|_N$ содержит π прямым слагаемым [91], поэтому одно из сужений $\rho_i|_N$ содержит π прямым слагаемым. Так как множество прямых слагаемых $\rho_i|_N$ не более чем счетно, то $\hat{N}$ не более чем счетно. N обладает свойством T согласно [8]. $\square$

Лемма 1.5. *Дискретная Q-группа конечна.*

Доказательство. Дискретная группа типа 1 содержит коммутативную нормальную подгруппу N конечного индекса [207]. По лемме 1.4 N есть Q-группа, т.е. $\hat{N}$ — коммутативная группа с изолированной точкой. Поэтому $\hat{N}$ — дискретная группа, т.е. N компактна. Следовательно, N конечна и G конечна. $\square$

Лемма 1.6. *Пусть G — проективно-лиева* (см. [6]) *Q-группа. Тогда G компактна.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы для групп Ли. Пусть G_0 — компонента единицы G. Тогда G_0 — открытая нормальная подгруппа в G и G/G_0 — дискретная Q-группа, т.е. G/G_0 конечна по лемме 1.5. По лемме 1.4, G_0 есть Q-группа. Связная группа Ли G_0 содержит разрешимую нормальную подгруппу R, факторгруппа по которой $T = G_0/R$ — полупростая группа Ли [58]. Но T есть Q-группа, а множество классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений некомпактной полупростой группы Ли несчетно (см., например, [43]). Поэтому T компактна. Тогда носитель регулярного представления G_0 совпадает с $\hat{G}_0$ (см. [72, п. 18.3.9]). Так как единичное представление изолировано в $\hat{G}_0$, то оно входит в регулярное представление прямым слагаемым [72, п. 8.6.8]. Поэтому $\mu(G_0)$ конечна, т.е. G_0 компактна, т.е. G компактна. $\square$

Лемма 1.7. *Пусть локально компактная сепарабельная группа G содержит открытую компактную подгруппу K, и пусть существует унитарное представление π группы G с дискретным носителем, определяющее точное представление $\mathscr{L}^1(G)$. Тогда G компактна.*

Доказательство. Если π_0 лежит в носителе S представления π, то π_0 — замкнутая точка $\hat{G}$. Тогда π_0 — представление $\mathscr{L}^1(G)$ компактными операторами [74]. Так как K открыта, то можно считать $\mathscr{L}^1(K)$ подалгеброй $\mathscr{L}^1(G)$, поэтому для любого характера χ группы K оператор $\int_K \overline{\chi(k)}\pi_0(k)\,d\mu(k)$ $(\mu(K) = 1)$ компактен, т.е. неприводимые представления K входят в сужение $\pi_0|_K$ с конечной кратностью. Пусть $Y \subset \mathscr{L}^1(G)$ — инволютивная алгебра K-сферических функций на G, т.е. таких функций $f(g) \in \mathscr{L}^1(G)$, что $\iint_{K\times K} f(k_1 g k_2)\,d\mu(k_1)\,d\mu(k_2) = f(g)$ почти всюду на G. Для $\rho \in S$ обозначим через ρ_Y представление инволютивной банаховой алгебры Y в подпространстве H_{ρ_Y} K-инвариантных векторов пространства представления ρ ($\rho = 0$ тогда и только тогда, когда $H_{\rho_y} = (0)$). Обозначим через F множество представлений $\rho \in S$ таких, что $\rho_Y \neq 0$. Так как π определяет точное представление $\mathscr{L}^1(G)$, то $\bigoplus_{\rho\in S} \rho$ определяет точное представление $\mathscr{L}^1(G)$, поэтому $\bigoplus_{\rho\in S} \rho_Y$ (и $\bigoplus_{\rho\in F} \rho_Y$) определяет точное представление Y.

Найдем соответствие между матричными элементами представлений ρ и ρ_Y. Рассмотрим двусторонние классы KxK, $x \in G$; они открыты вместе с K, т.е. множество этих классов не более чем счетно: $Z_1 = K$, Z_1, Z_3, ... Нормируем меру Хаара на G так, чтобы $\mu(K) = 1$. Пусть n_i — число классов вида yK, $y \in G$, в классе Z_i. Пусть f_i — характеристическая функция Z_i; ξ_1, ξ_2 — векторы из H_{ρ_Y}. Тогда функция $(\rho(G)\xi_1,\xi_2)$ двусторонне инвариантна относительно K, и $(\rho_Y(f-I)\xi_1,\xi_2) = \int_G f_i(g)(\rho(g)\xi_1,\xi_2)\,d\mu(g) = n_i(\rho(g)\xi_1,\xi_2)$, где $g \in Z_i$. Отсюда следует, что отображение $\rho \to \rho_Y$ инъективно на F. Непосредственно проверяется, что ρ_Y неприводимы, множество $F_1 = \{\rho_Y,\ \rho \in F\}$ замкнуто в $\hat{Y}$ и отображение $\rho \to \rho_Y$ есть гомеоморфизм F на F_1. Следовательно, $\hat{Y}$ содержит замкнутое дискретное подмножество F_1. Так как Y имеет единичный элемент (характеристическую функцию K), то $\hat{Y}$ — компактное пространство (см. [72, п. 3.1.8]), т.е. F_1 конечно. Так как ρ_y конечномерны и $\bigoplus_{F_1} \rho_Y$ — точное представление Y, то Y конечномерна, т.е. число классов Z_i конечно и G компактна. □

Доказательство теоремы 1.1. Пусть G_0 — компонента единицы G. Тогда $H = G/G_0$ — вполне несвязная группа с дискретным двойственным пространством. Пусть N — такая компактная нормальная погруппа H, что $M = H/N$ — сепарабельная группа (см. лемму 1.3) с дискретным $\hat{M}$. Пусть M_0 — компонента единицы M. Тогда M/M_0 — сепарабельная вполне несвязная группа с дискретным двойственным пространством, компактная по лемме 1.7. Тогда M — проективно-лиева [6] группа, компактная по лемме 1.6, т.е. H компактна и G — проективно-лиева группа. Пусть N_1 — такая компактная нормальная подгруппа G, что G/N_1 — группа Ли. Тогда G/N_1 компактна по лемме 1.6, т.е. G компактна. □

Лемма 1.8. *Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 1.2. Тогда в G существует система компактных окрестностей*[6] *единичного элемента, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов.*

[6] Не обязательно открытых множеств, содержащих открытую окрестность единицы.

Доказательство. Пусть G — локально компактная группа, все непрерывные неприводимые унитарные представления которой конечномерны. Тогда прямую сумму этих представлений можно рассматривать как непрерывное вложение в компактную группу, являющуюся произведением унитарных групп в конечномерных пространствах представлений.

Пусть K — эта компактная группа и π — полученное вложение группы G в K. Пусть U — окрестность единичного элемента в G с компактным замыканием $\overline{U}$. Тогда $\pi(\overline{U})$ — компакт, и π, как непрерывное вложение, гомеоморфно отображает $\overline{U}$ на $\pi(\overline{U})$. В частности, $\pi(U)$ открыто в $\pi(G)$. Следовательно, в K есть такая окрестность единицы V, что $V \cap \pi(G) = \pi(U)$. В компактной группе K существует такая окрестность единицы W, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов группы K, что $W \subset V$. Рассмотрим полный прообраз O пересечения $W \cap \pi(G)$ в G. Это — окрестность единичного элемента в G, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов группы G. Поскольку π — вложение, то O содержится в U и является окрестностью единичного элемента в G, инвариантной относительно внутренних автоморфизмов группы G. Таким образом, любая окрестность единичного элемента в G содержит окрестность единичного элемента, инвариантную относительно внутренних автоморфизмов группы G. Лемма доказана. □

Лемма 1.9. *Пусть G — локально компактная группа, имеющая достаточно много факторпредставлений конечного типа; тогда G унимодулярна.*

Доказательство. Пусть $\Delta\colon G \to \mathbb{R}^*$ — модуль G. Пусть элемент $k \in G$ удовлетворяет условию $\Delta(k) \neq 1$. По предыдущей лемме, в G существует фундаментальная система окрестностей W единичного элемента e, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов, в том чисде определяемых элементами k и k^{-1}, что невозможно, так как для окрестностей W с компактным замыканием одно из множеств kWk^{-1} и $k^{-1}Wk$ имеет левоинвариантную меру Хаара, превосходящую меру W, и потому не может совпадать с W. Это завершает доказательство. □

Лемма 1.10 посвящена доказательству теоремы 1.2 в дополнительном предположении, что G вполне несвязна.

Лемма 1.10. *Пусть G — вполне несвязная локально компактная группа, удовлетворяющая условиям теоремы 1.2. Тогда G дискретна.*

Доказательство. Рассмотрим фильтр компактных открытых подгрупп U группы G. Пусть χ_U — характеристическая функция U, $\mu(U)$ — мера Хаара U. Тогда $f_U = [\mu(U)]^{-1}\chi_U$ — аппроксимативная единица в $\mathscr{L}^1(G)$, т.е., в частности, $\pi(f_U) \to 1_\pi$ сильно для любого $\pi \in \hat{G}$. Так как функция $\pi \to \|\pi(f_U)\|$ полунепрерывна снизу на $\hat{G}$ (см. [72, п. 3.3.2]) и $\hat{G}$ компактно, то найдется такая открытая подгруппа U_0, что $\|\pi(f_{U_0})\| \geqslant \varepsilon > 0$ на $\hat{G}$, т.е. для любого $\pi \in \hat{G}$ представление $\pi|_{U_0}$ содержит единичное представление U_0. Пусть V — компактная окрестность единичного элемента, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов и лежащая в U_0 (см. лемму 1.9). Тогда $N = \bigcap_{g\in G} gU_0g^{-1}$ — нормальная подгруппа G, содержащая V, т.е. N — открытая компактная нормальная подгруппа. Так как $N \subset U_0$, то для любого $\pi \in \hat{G}$ представление $\pi|_N$ содержит единичное представление N. Тогда $\pi|_N$ есть кратное единичного представления N, т.е. $\pi(N) = 1_\pi$ для всех $\pi \in \hat{G}$, $n \in N$, и так как N открыт, то G дискретна. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 1.2. Группа G — типа 1, так как все ее неприводимые унитарные представления конечномерны [72, п. 5.5.2]. Пусть G_0 — компонента единицы G. Тогда G/G_0 — вполне несвязная группа, удовлетворяющая условиям теоремы 1.2, т.е. G/G_0 дискретна по лемме 1.10. Так как G_0 связна, а все неприводимые унитарные представления G конечномерны, то группа G_0 имеет достаточно много конечномерных представлений, и, по теореме Фрейденталя–Вейля, G_0 есть прямое произведение связной компактной группы K и аддитивной группы конечномерного векторного пространства V. Рассмотрим действие дискретной группы G/G_0 на $\hat{G}_0 = \hat{K} \times \hat{V}$. Очевидно, что все орбиты G/G_0 в $\hat{G}_0$ конечны: с помощью бесконечной орбиты $\mathscr{O}$ и единичного представления стационарной подгруппы некоторой точки $x \in \mathscr{O}$ можно по обычному правилу [154] построить бесконечномерное неприводимое представление G.

Группа K инвариантна относительно G, так как K состоит из тех и только тех элементов $a \in G$, для которых замыкание множества степеней $\{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ компактно, а это свойство сохраняется при всех автоморфизмах. Следовательно, $\hat{V} = K^\perp$ инвариантно относительно G. Каждое преобразование T_g векторного пространства $\hat{V}$ с помощью элемента $g \in G$, действующее по правилу $(T_g(\chi))(v) = \chi(g^{-1}vg)$, $v \in V$, непрерывно и аддитивно, поэтому линейно. Пусть $\dim V > 0$. Рассмотрим базис в $\hat{V}$: $e_1, \ldots, e_n$. Стационарная подгруппа G_i каждого вектора e_i — конечного индекса в G (так как орбита конечна), т.е. $\tilde{G}=\bigcap_{i=1}^{n}G_i$ — нормальная подгруппа конечнго индекса, и представление $g\to T_g$ можно считать представлением конечной факторгруппы группы G. Поэтому $g\to T_g$ можно считать унитарным. Тогда T_g-орбиты в V лежат на сферах, т.е. есть последовательность орбит, не имеющая предельных точек в пространстве орбит, и, следовательно, есть последовательность неприводимых представлений π_n группы G, сужения которых на V не имеют предельной точки. Ввиду непрерывности операции сужения [89], π_n не имеют предельной точки в пространстве $\hat{G}$, что противоречит условию.

Следовательно, $V=\{0\}$ и $G_0=K$. G-орбиты в $\hat{K}$ конечны и попарно не пересекаются. Если связная группа K не единична, то $\hat{K}$ бесконечна, т.е. $\hat{K}$ бесконечно и состоит из изолированных точек, т.е. содержит не менее чем счетное множество изолированных орбит, и соответствующее множество неприводимых представлений G не имеет предельных точек. Поэтому $K=\{e\}$, т.е. $G=G/G_0$, и G дискретна. Теорема доказана. $\square$

Напомним, что любая дискретная группа имеет компактное двойственное пространство [72], и любая дискретная группа типа 1 имеет только конечномерные неприводимые представления [207]. Поэтому теорема 1.2 характеризует дискретные группы типа 1.

1.1.3. Примеры

а) Мы покажем ниже, что в классе сепарабельных локально компактных групп теорема 1.1 может быть усилена, а именно, если G — сепарабельная локально компактная группа с дискретным носителем регулярного представления, то G компактна. Но существуют некомпактные сеперабельные локально компактные группы со счетным двойственным пространством, каждая точка которого замкнута, а регулярное представление разлагается в прямую сумму неприводимых представлений π_n, каждое из которых является изолированной точкой в $\hat{G}$. Примером такой группы является группа матриц

$$\mathfrak{G}=\left\{\begin{pmatrix} u & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ u\in U_k,\ \xi\in k\right\},$$

где k — локально компактное несвязное недискретное поле, U_k — группа единиц поля k. Покажем это. Найдем неприводимые представления $\mathfrak{G}$. Пусть $\hat{N}$ — группа характеров коммутативной нормальной подгруппы $N=\{g\in\mathfrak{G},\ g_{11}=1\}$. Так как аддитивная группа k самодуальна, то $\hat{N}$ можно отождествить с k. Тогда орбиты группы $K=\{g\in\mathfrak{G},\ g_{12}=0\}$ в $\hat{N}$ имеют вид $\mathcal{O}_\infty=\{0\}$ или $\mathcal{O}_n=\{p^n\cdot U_k\}$ для некоторого целого n, где p — образующий элемент идеала нормирования поля k. При этом в случае $\mathcal{O}_n$ стационарная подгруппа в K любого элемента $\chi\in\mathcal{O}_n$ тривиальна, а в случае $\mathcal{O}_\infty$ совпадает с K, поэтому представления $\mathfrak{G}$ либо индуцированы некоторым элементом $\mathcal{O}_n$, либо являются представлениями компактной факторгруппы $\mathfrak{G}/N\approx K$. Поэтому $\hat{\mathfrak{G}}$ не более чем счетно. Полный прообраз в $\hat{N}$ любого представления $\pi\in\hat{\mathfrak{G}}$, нетривиального на N, есть открыто-замкнутое множество $\mathcal{O}_n$; так как операция индуцирования непрерывна [90], то π есть изолированная точка в $\hat{\mathfrak{G}}$. Так как одномерные представления замкнуты, то все точки $\hat{\mathfrak{G}}$ замкнуты. Наконец, регулярное представление $\mathfrak{G}$ есть представление, индуцированное регулярным представлением N и вследствие формулы $U^{\int\pi_\lambda\,d\mu(\lambda)}=\int U^{\pi_\lambda}\,d\mu(\lambda)$ (см. [154]) регулярное представление разлагается в прямую сумму $\bigoplus_n\int_{\mathcal{O}_n}U^\chi\,d\chi$, где $d\chi$ — мера Хаара на $\hat{N}$. Так как для $\chi\in\mathcal{O}_n$ все U^χ попарно эквивалентны, то $\int_{\mathcal{O}_n}U^\chi\,d\chi$ эквивалентно кратному U^{χ_0} для некоторого $\chi_0\in\mathcal{O}_n$, что и требовалось доказать.

б) Приведем примеры недискретных групп типа 1 с компактным двойственным пространством. Положим

$$G_1=\left\{\begin{pmatrix}2^n & z\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ z\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{Z}\right\},\quad G_2=\left\{\begin{pmatrix}p^n & \xi\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \xi\in k,\ n\in\mathbb{Z}\right\},$$

где p — образующий элемент идеала нормирования в локально компактном несвязном недискретном поле k. Покажем, что $\hat{G}_1$ и $\hat{G}_2$ компактны. Найдем представления G_i, $i=1{,}2$, по схеме [154]. Пусть N_i — нормальная подгруппа в G_i, выделяемая условием $g_{11}=1$. Тогда $\hat{N}_i\approx N_i\approx k$ (где $k=\mathbb{C}$ для G_1). Пусть K_i — дополнительная подгруппа в G_i, выделяемая условием $g_{12}=0$. Тогда орбиты K_i в N_i имеют вид $\{p^n\xi,\ \xi\in k\}$ (где $p=2$ для G_1), т.е. для $\xi\neq0$ стационарная подгруппа ξ в K_i единична, а для $\xi=0$ совпадает с K_i. Очевидно, что в замыкании любой орбиты в $\hat{N}_i$ содержится нулевая орбита. Из непрерывности операции индуцирования [90] следует, что в замыкании любого представления $\pi\in\hat{G}_i$, нетривиального на N_i, содержатся все представления $\rho\in\hat{G}_i$, тривиальные на N_i. Так как $\hat{K}_i\approx\mathbb{Z}$ компактно, то отсюда непосредственно следует компактность $\hat{G}_i$. Очевидно, что $\hat{G}_i$ — T_0-пространетво, т.е. G_i —

группа типа 1. Таким образом, существуют примеры (комплексных) групп Ли типа 1 и вполне несвязных недискретных групп типа 1 с компактным двойственным пространством.

1.2. Сепарабельные локально компактные группы с дискретным носителем регулярного представления

Покажем, что в сепарабельном случае теорема 1.1 может быть усилена [226].

Теорема 1.3. *Пусть G — сепарабельная локально компактная группа с дискретным носителем*[7] *регулярного представления. Тогда G компактна.*

Доказательство. Пусть G_0 — компонента единицы группы G. Тогда G/G_0 вполне несвязна. Согласно [24, теорема 16] G/G_0 содержит компактную открытую подгруппу $\tilde{H}$. Пусть H — полный прообраз $\tilde{H}$ в G. Тогда H — открытая подгруппа в G и $H/G_0 \approx \tilde{H}$. Пусть λ_G, Λ_H — регулярные представления групп G и H соответственно, $\hat{G}_r$, $\hat{H}_r$ — носители этих представлений.

1. *$\hat{H}_r$ не более чем счетно*. Пусть $\rho \in \hat{H}_r$. Представление U^ρ группы G, индуцированное представлением ρ группы H, имеет носитель, содержащийся в носителе регулярного представления группы G (ввиду непрерывности операции индуцирования, см. [90]). Так как носитель $\hat{G}_r$ регулярного представления G дискретен по предположению, то, согласно [72, п. 8.6.8], представление U^ρ разлагается в прямую сумму представлений, кратных неприводимым представлениям $\pi \in \hat{G}_r$. С другой стороны, согласно [154], сужение $U^\rho|_H$ разлагается в счетную прямую сумму представлений группы H, каждое из которых индуцировано сужением представления ρ^x группы $x^{-1}Hx$ на $H \cap x^{-1}Hx$ (ρ^x действует по формуле: $\rho^x(h) = \rho(xhx^{-1})$, $h \in x^{-1}Hx$) для некоторого $x \in G$. Но $H \cap x^{-1}Hx$ открыта для любого $x \in G$, т.е. $H \cap x^{-1}Hx \supset G$. Так как H/G_0 компактна, то индекс $H \cap x^{-1}Hx$ в H и в $x^{-1}Hx$ конечен. Тогда (см. [154]) сужение неприводимого представления ρ^* на $H \cap x^{-1}Hx$ разлагается в конечную

[7]Напомним, что носителем представления π называется наименьшее замкнутое множество R в двойственном пространстве такое, что любой диагональный элемент π является равномерным пределом на любом компакте выпуклых комбинаций диагональных элементов представлений $\rho \in R$.

прямую сумму неприводимых представлений μ_i группы $H \cap x^{-1}Hx$, и представление группы H, индуцированное каждым μ_i, разлагается в конечную прямую сумму неприводимых представлений группы H. Отсюда следует, что каждое из представлений π группы G, участвующих в разложении представлений U^ρ, $\rho \in \hat{H}_r$, содержится в $\hat{G}_r$ и имеет сужение на подгруппу H, разложимое в прямую сумму неприводимых представлений H. Напомним теперь, что ввиду сепарабельности G все представления $\pi \in \hat{G}$ действуют в сепарабельных пространствах и $\hat{G}$ (тем более $\hat{G}_r$) удовлетворяет второй аксиоме счетности (см. [72]). Следовательно, $\hat{G}_r$ не более чем счетно. Ввиду непрерывности операции сужения представлений на подгруппу (см. [89]), сужение каждого из представлений $\pi \in \hat{G}_r$ на H имеет носитель, содержащийся в $\hat{H}_r$, поэтому множество представлений $v \in \hat{H}_r$, входящих прямым слагаемым в разложение сужениия $\pi|_H$ для какого-либо $\pi \in \hat{G}_r$, не более чем счетно. Но H открыта, поэтому $U^\rho|_H$ содержит ρ прямым слагаемым [91]. Следовательно, любое $\rho \in \hat{H}_r$ входит прямым слагаемым в сужение $\pi|_H$ для некоторого $\pi \in \hat{G}_r$. Утверждение 1 доказано.

Так как G_0 есть компонента единицы H и $H/G_0 \approx \tilde{H}$ компактна, то H проективно-лиева [6]. Пусть N — компактная нормальная подгруппа в H, фактор-группа по которой является группой Ли.

2. *$\hat{L}_r$ не более чем счетно*. Так как N компактна, то единичное представление группы N лежит в носителе регулярного представления. Следовательно, по [90], представление группы H, индуцированное единичным представлением N, имеет носитель, содержащийся в $\hat{H}_r$. Отождествим представления группы H/N с представлениями H, тривиальными на N. Тогда, как легко проверить, можно рассматривать $\hat{L}$ как замкнутое подмножество $\hat{H}$, а представление группы H, индуцированное единичным представлением группы N, отождествляется с регулярным представлением $L = H/N$. Следовательно, $\hat{L}_r \subset \hat{H}_r$, поэтому $\hat{L}_r$ не более чем счетно. Утверждение 2 доказано.

Пусть L_0 — компонента единицы L. Так как L_0 открыта в L, то ее полный прообраз H_0 в H также открыт. Но $H_0 \supset G_0$, поэтому образ H_0 в H/G_0 открыт. Так как H/G_0 компактна, то индекс H_0/G_0 в H/G_0 конечен, т.е. индекс L_0 в L конечен.

3. $(\widehat{L_0})$ *не более чем счетно*. Из непрерывности операций сужения и индуцирования [89, 90] получаем, что (ввиду конечности L/L_0, см. [154]) любое представление $\rho \in (\widehat{L_0})_r$ индуцирует представление U^ρ группы L, являющееся

конечной прямой суммой неприводимых представлений $\pi \in \hat{L}_r$; сужение каждого из этих $\pi \in \hat{L}_r$ на подгруппу L_0 есть конечная прямая сумма представлений $v \in (\widehat{L_0})_r$. Наконец, $U^\rho|_{L_0}$ содержит ρ прямым слагаемым. Следовательно, $(\widehat{L_0})_r$ не более чем счетно и утверждение 3 доказано.

L_0 — связная группа Ли. Согласно теореме Леви–Мальцева [58], L_0 содержит такую замкнутую разрешимую подгруппу R, что $T = L_0/R$ — полупростая группа Ли.

4. *$\hat{T}_r$ не более чем счетно.* Так как единичное представление группы R содержится в носителе регулярного представления [72, п. 18.3.9], то достаточно повторить рассуждение в 2.

5. *T компактна.* Утверждение сразу следует из описания неприводимых унитарных представлений некомпактной полупростой группы Ли класса 0 относительно максимальной компактной подгруппы и меры Планшереля на множестве таких представлений (см. напр. [43], [5]): $\hat{T}_r$ в некомпактном случае имеет мощность континуума.

6. $\widehat{L_0} = (\widehat{L_0})_r$. Следует из 5 и [72, п. 18.3.9].

Напомним, что H_0 — полный прообраз L_0 в H — открыт. Таким образом, H_0 — открыто-замкнутая подгруппа G, образ которой в G/G_0 компактен.

7. $\widehat{H_0} = (\widehat{H_0})_r$, $L_0 = H_0/N$, где N компактен. Пусть τ — каноническое отображение H_0 на L_0. Если $F(s^*)$ — непрерывная финитная функция на H_0/N такая, что $|(F * F^*)(s^*) - 1| < \varepsilon$ на компактном множестве $C \subset H_0/N$, то, полагая $f(s) = F(\tau(s))$, $s \in H_0$, получаем непрерывную финитную функцию на H_0 такую, что $|(f * f^*)(s) - 1| < \varepsilon$ на $\tau^{-1}(C)$. Тогда утверждение 7 следует из [72, п. 18.3.6].

8. $\widehat{G_0} = (\widehat{G_0})_r$. Так как G_0 — замкнутая подгруппа (и даже нормальная) в H_0 и единичное представление группы H_0 содержится в носителе регулярного представления, то, ввиду непрерывности операции сужения, единичное представление G_0 содержится в носителе сужения регулярного представления H_0 на G_0. Но это сужение кратно регулярному представлению группы G_0, т.е. его носитель есть $(\widehat{G_0})_r$. Поэтому $(\widehat{G_0})_r$ содержит единичное представление G_0, т.е. $(\widehat{G_0})_r = \widehat{G_0}$ [72, п. 18.3.6].

9. *G/G_0 компактна.* Согласно 8, единичное представление группы G_0 лежит в носителе регулярного представления группы G_0. Повторяя рассуждения в 2, получаем, что носитель регулярного представления группы G/G_0

может быть отождествлен с замкнутым подмножеством носителя $\widehat{G_r}$ регулярного представления группы G. Так как регулярное представление группы G/G_0 определяет точное представление алгебры $L^1(G/G_0)$, а $(\widehat{G/G_0})_r$ дискретен как подмножество $\widehat{G_r}$, то группа G/G_0 компактна по лемме 1.7. Утверждение 9 доказано.

Мы можем считать теперь, что группа H (см. начало доказательства теоремы 1.3) совпадает с группой G. Тогда $L = G/N$ — группа Ли с дискретным носителем регулярного представления.

10. $(\widehat{L_0})_r$ *дискретно*. Воспользуемся рассуждением в 3. Так как каждое представление $\rho \in \hat{L}_r$ содержится прямым слагаемым лишь в конечном числе представлений U^π, $\pi \in (\widehat{L_0})_r$, — пусть $U^{\pi_1}, \ldots, U^{\pi_n}$ — то множество $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ открыто в $(\widehat{L_0})_r$ (если бы одна из точек π_i лежала в замыкании дополнения этого множества до $(\widehat{L_0})_r$, то U^{π_i} разлагалось бы по представлениям, не содержащим ρ, что невозможно). Так как L_0 открыто в L, то мера Хаара на L индуцирует меру Хаара на L_0. Отождествим $L^1(L_0)$ с замкнутой подалгеброй $L^1(L)$. Пусть $\rho \in \hat{L}_r$. Тогда ρ изолирована в $\hat{L}_r$, поэтому замкнута. Тогда $\rho(f)$ компактен для любой $f \in L^1(L)$ (см. [72, 74]), т.е. и для любой $f \in L^1(L_0)$. Так как сужение компактного оператора компактно, то $\pi(f)$ компактны для всех $f \in L^1(L_0)$ и всех π, входящих в разложение сужения $\rho|_{L_0}$. Поэтому все $\{\pi_1\}, \ldots, \{\pi_n\}$ замкнуты, а так как $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ открыто, то и все $\{\pi_i\}$ открыты. Утверждение 10 доказано.

Напомним, что $\widehat{L_0}(\widehat{L_0})_r$ ввиду 6. Так как единичное представление изолировано в $\hat{L}_0$ по 10 и входит в разложение регулярного представления по 6, то единичное представление входит прямым слагаемым в разложение регулярного представления. Следовательно, мера всей группы L_0 конечна и L_0 компактна. Тогда L компактна и (ввиду компактности N) группа G компактна. Теорема 1.3 доказана. $\square$

Пример группы $\mathscr{G}$ унимодулярных аффинных преобразований $\mathfrak{p}$-адической прямой, т.е. преобразований $t \to ut + s$, где $t, s \in Q_\mathfrak{p}$, $u \in U_\mathfrak{p}$ (группе единиц поля $Q_\mathfrak{p}$), показывает, что существуют некомпактные группы со счетным двойственным пространством, каждая точка которого замкнута, а регулярное представление группы $\mathscr{G}$ разлагается в прямую сумму представлений, каждое из которых изолировано в $\hat{\mathscr{G}}$.

1.3. Дополнительные сведения о группах с компактным двойственным пространством

Теорема 1.4. *Пусть G — локально компактная группа. Следующие условия равносильны.*

а) *G — дискретная группа типа I;*

б) *$\hat{G}$ компактно*[8]*, и размерности всех неприводимых унитарных представлений группы G ограничены*: $\dim\pi \leqslant N < +\infty$ *для всех* $\pi \in \hat{G}$.

Доказательство теоремы использует теорему Э. Тома [207] и лемму 1.9: пусть G — локально компактная группа, имеющая достаточно много фактор-представлений конечного типа; тогда G унимодулярна. В частности, группа, представимая в компактную группу, унимодулярна.

Доказательство теоремы 1.4. Пусть выполнено условие б). Согласно лемме 1.9, G унимодулярна. Рассмотрим формулу Планшереля для G (см. [71]):

$$\int_G |f(g)|^2\, dg = \int_{\hat{G}} \mathrm{Tr}(\pi(f)\pi(f)^*)\, d\hat{\mu}(\pi), \tag{1.1}$$

справедливую для любой $f \in L^1(G)\cap L^2(G)$. Применим эту формулу к функции $f(g) = [\mu(U)]^{-1}\chi_U$, где U — окрестность единицы с компактным замыканием, $\mu(U)$ — мера Хаара открытого множества U, χ_U — характеристическая функция U. Имеем $\|f\|_{L'(G)} = 1$, поэтому $\|\pi(f)\| \leqslant 1$; $\pi(f)\pi(f)^* \geqslant 0$ и $\|\pi(f)\pi(f)^*\} \leqslant 1$. Так как $\dim\pi \leqslant N$, то $\mathrm{Tr}(\pi(f)\pi(f)^*) \leqslant N$ на $\hat{G}$, а так как $\hat{\mu}$ конечна для компактных подмножеств $\hat{G}$, то $\hat{\mu}(\hat{G}) < +\infty$ и интеграл в правой части (1.1) не превосходит $N\cdot\hat{\mu}(\hat{G}) < +\infty$. Но интеграл слева в (1.1) равен $[\mu(U)]^{-1}$, так что мера непустых открытых подмножеств G ограничена снизу положительным числом, т.е. G дискретна. Так как все неприводимые представления $L^1(G)$ конечномерны, то G — CCR-группа; следовательно, группа типа 1. □

Обратное утверждение следует из теорем 4 и 5 в [207] и компактности спектра C^*-алгебр с единицей.

В некоторых случаях требование $\dim\pi \leqslant N < +\infty$ можно опустить. Например, если G компактна, то $\hat{G}$ дискретно (см., например, [72]), т.е. если G — компактная группа и $\hat{G}$ компактно, то $\hat{G}$ конечно, т.е. G конечна (и дискретна). Справедливо также следующее утверждение.

[8] Но не обязательно отделимо.

Лемма 1.11. *Связная локально компактная сепарабельная группа G с компактным двойственным пространством единична.*

Доказательство. Очевидно, что компактность $\hat{G}$ наследуется любой фактор-группой группы G (так как $(G/N)\hat{}$ гомеоморфно замкнутому подмножеству $\hat{G}$ для любой замкнутой нормальной подгруппы $N \subset G$). Так как связная сепарабельная локально компактная группа есть проективный предел связных групп Ли (см. [6]), то достаточно доказать, что связная группа Ли G с компактным $\hat{G}$ единична. Факторгруппа G/R по разрешимому радикалу (см. [58]) связна и полупроста, и $(G/R)\hat{}$ компактна. По предыдущему замечанию это невозможно, если $G/R \neq \{e\}$ и компактна. Если же G/R не компактна, то неприводимые представления основной серии группы G/R класса 0 относительно ее максимальной компактной подгруппы образуют подмножество в $(G/R)\hat{}$, замыкание которого не компактно (см. [43]), т.е. $(G/R)\hat{}$ не является компактным пространством. Следовательно, $G/R = \{e\}$, т.е. G разрешима. Но тогда $G \neq \{e\}$ имеет одномерную коммутативную связную фактор-группу с компактным двойственным пространством, что невозможно по теореме Понтрягина. Итак, $G = \{e\}$. $\square$

Приведем примеры групп с компактным двойственным пространством, которые не являются дискретными. Рассмотрим

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^n & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ n \in \mathbb{Z}, \ z \in \mathbb{C} \right\}, \quad G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} p^n & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ n \in \mathbb{Z}, \ t \in \mathbb{Q}_p \right\}.$$

Представления этих групп легко найти методом Макки, так как G_1 есть полупрямое произведение $\mathbb{Z}$ и коммутативной нормальной подгруппы. Из непрерывности операции индуцирования (см. [90]) следует, что замкнутое множество в $\hat{G}_i$, содержащее представление, нетривиальное на нормальной подгруппе, содержит все неприводимые унитарные представления фактор-группы (которая изоморфна $\mathbb{Z}$); изучая действие $\mathbb{Z}$ на двойственном пространстве нормальной подгруппы, получаем, что $\hat{G}_i$ — компактное пространство ($i = 1{,}2$).

Эти примеры показывают, что компактность двойственного пространства, вообще говоря, не наследуется открыто-замкнутой подгруппой.

1.4. Локально компактные группы с конечномерными неприводимыми представлениями

Как показвывают теоремы 1.1 и 1.2 и примеры, двойственность компактных и дискретных обхектов выполняется для (компактныз и дискретных) групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны, что мотивирует интерес к описанию этих групп.

Статья К. Мура [161] на эту тему вышла в 1972 году, статья автора [227] — в начале 1973 года. Характеризации в этих статьях различны.

Теорема 1.5. *Пусть G — локально компактная группа. Следующие условия эквивалентны*:

а) *любое неприводимое унитарное представление G конечномерно*;

б) *для любых неприводимых унитарных представлений π_1,π_2 группы G тензорное произведение $\pi_1\otimes\pi_2$ определяет представление групповой алгебры $\mathscr{L}^1(G)$ компактными операторами*;

в) *G — проективный предел групп Ли G_α, каждая из которых содержит нормальную подгруппу конечного индекса L_α, изоморфную прямому произведению аддитивной группы конечномерного векторного пространства V_α и произведения компактной связной группы Ли K_α и центральной дискретной группы D_α: $L_\alpha\approx(D_\alpha\times K_\alpha)\times V_\alpha$.*

Следует отметить, что, вообще говоря, тензорное произведение бесконечномерных унитарных представлений локально компактной группы может определять представление групповой алгебры компактными операторами. Простым примером является тензорное произведение двух неприводимых унитарных представлений, принадлежащих одновременно либо аналитической, либо антианалитической части дискретной серии группы $SL(2,\mathbf{R})$ (см. [26]). Таким образом, существенно, что условие б) относится ко всем неприводимым унитарным представлениям группы G.

К. Мур также получил структурную теорему для групп с конечномерными неприводимыми представлениями, а именно: неприводимые унитарные представления локально компактной группы G конечномерны тогда и только тогда, когда G есть проективный предел таких конечных расширений групп H_α, что факторгруппа H_α по её центру компактна. Теорема Мура здесь не используется; эквивалентность а) $\Leftrightarrow$ в) может рассматриваться как уточнение теоремы Мура.

Доказательство теоремы проведем по схеме в) $\Rightarrow$ а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ а) $\Rightarrow$ в).

в) $\Rightarrow$ а). Пусть выполнено условие в). Тогда любое непрерывное неприводимое унитарное представление G мало отдичается от единицного оператора на некоторой окрестности единичного элемента и поэтому равно единичному оператору на нормальной подгруппе, содержащецся в этой оерестности, причем факторгруппа по этой нормальной подгруппе является группой Ли, так что можно считать, что речь идет о представлении некоторой факторгруппы Ли G_α. Так как L_α — нормальная подгруппа конечного индекса в G_α, то сужение неприводимого унитарного представления группы G_α на L_α разлагается в конечную прямую сумму неприводимых представлений группы L_α (ср. [154]), поэтому достаточно доказать, что любое неприводимое унитарное представление ρ группы L_α конечномерно. Но $L_\alpha = (D_\alpha \cdot K_\alpha) \times V_\alpha$, поэтому ρ есть тензорное произведение характера χ группы V_α и неприводимого унитарного представления ν группы $D_\alpha \cdot K_\alpha$. Так как D_α центральна, то $\nu(d)$ — скалярный оператор для любого $d \in A_\alpha$, поэтому коммутант $\nu(D_\alpha \cdot K_\alpha)$ совпадает с коммутантом $\nu(K_\alpha)$, т.е. сужение v на K_α неприводимо и поэтому конечномерно, т.е. $\rho = \chi \otimes \nu$ конечномерно.

а) $\Rightarrow$ б). Очевидно.

б) $\Rightarrow$ а). Докажем сначала несколько вспомогательных предложений.

Напомним (см. например, [72]), что *спектром* C^*-алгебры A называется множество классов эквивалентности неприводимых $*$-представлений A, снабженное топологией-прообразом топологии Джекобсона при естественном отображении, сопоставляющем каждому представлению его ядро.

Лемма 1.12 (см. [90]). *Пусть A — C^*-алгебра, π — представление A в гильбертовом пространстве H_π. Для того чтобы $\pi(x)$ был компактным оператором для любого $x \in A$, необходимо и достаточно, чтобы π разлагалось в прямую сумму неприводимых представлений ρ_α: $\pi = \sum \oplus n_\alpha \rho_\alpha$, где все кратности n_α конечны, каждое из ρ_α есть представление A компакитными операторами и множество $\{\rho_\alpha\}$ не имеет предельных точек в спектре $\hat{A}$ C^*-алгебры A.*

Локально компактную группу, удовлетворяющую условию б), будем в этом разделе называть $\otimes$-*CCR-группой*.

Лемма 1.13. *Пусть G — $\otimes$-CCR-группа, N — замкнутая нормальная подгруппа G. Тогда G/N — $\otimes$-CCR-группа.*

Доказательство. Пусть $\hat{G}$ обозначает двойственное пространство для G, т.е. множество классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы G, снабженное естественной топологией (см., например, [72]). Пусть $\pi_1,\pi_2 \in \widehat{G/N}$; рассмотрим $\pi_1 \otimes \pi_2$. Можно считать, что $\pi_1,\pi_2 \in \hat{G}$, поэтому, в соответствии с условием и леммой 1.12, имеем $\pi_1 \otimes \pi_2 = \sum \oplus n_\alpha \rho_\alpha$, где все n_α конечны и $M = \{\rho_\alpha\}$ не имеет предельных точек в $\hat{G}$. Так как $(\pi_1 \otimes \pi_2)(N) = 1_{H_{\pi_1} \otimes H_{\pi_2}}$, то $\rho_\alpha(N) = 1_{H_{\rho_\alpha}}$, т.е. ρ_α можно считать неприводимым представлением G/N. Так как $(\widehat{G/N})$ гомеоморфно замкнутому подмножеству $\hat{G}$, то $\{\rho_\alpha\}$ не имеет предельных точек в $(\widehat{G/N})$ и все кратности конечны. Так как G — CCR-группа, то и G/N — CCR-группа (это следует из [185]), т.е. каждое ρ_α определяет компактное представление G/N. Тогда, по лемме 1.13, $\pi_1 \otimes \pi_2$ определяет компактное представление $\mathscr{L}^1(G/N)$. $\square$

Лемма 1.14. *Пусть G — вполне несвязная $\otimes$-CCR-группа. Тогда все неприводимые представления G конечномерны.*

Доказательство. Пусть $\pi \in \hat{G}$ бесконечномерно, и пусть U — открытая компактная подгруппа G (см. [24, теорема 16]). Рассмотрим сужение

$$\pi|_U = \sum_{i \in I} \oplus \rho_i, \quad \rho_i \in \hat{U}.$$

Так как ρ_i конечномерны, то I бесконечно. Пусть $\bar{\pi}$ — представление, контрагредиентное π; тогда $\bar{\pi}|_U = \sum \oplus \bar{\rho}_i$. Очевидно, $\pi \otimes \bar{\pi}|_U = \sum \oplus (\rho_i \otimes \bar{\rho}_j)$, т.е. $(\pi \otimes \bar{\pi})|_U$ содержит подпредставление $\sum \oplus (\rho_i \otimes \bar{\rho}_i)$. Но $\rho_i \otimes \bar{\rho}_i$ содержит единичное представление U прямым слагаемым, т.е. $(\pi \otimes \bar{\pi})|_U$ содержит единичное представление U бесконечнократным прямым слагаемым. Если χ_U — характеристическая функция U, то $\chi_U \in \mathscr{L}^1(G)$, но $(\pi \otimes \bar{\pi})(\chi)$ есть бесконечномерный проектор, т.е. он не компактен. Поэтому вполне несвязная $\otimes$-CCR-группа не может иметь бесконечномерных неприводимых представлений. $\square$

Напомним лемму 1.8: локально компактная группа, все неприводимые унитарные представления которой конечномерны, имеет фундаментальную систему окрестностей единичного элемента, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов.

Лемма 1.15. *Пусть G — вполне несвязная группа с конечномерными неприводимыми представлениями. Тогда G — проективный предел дискретных групп.*

Доказательство. Пусть U — компактная открытая подгруппа G; V — содержащаяся в U окрестность единичного элемента, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов (см. лемму 1.8). Тогда $N = \bigcap_{y \in G} gUg^{-1}$ — компактная нормальная подгруппа групппы G, содержащая V (т.е. открытая) и лежащая в U. □

Замечание 1.1. Дискретная факторгруппа G/N имеет только конечномерные неприводимые представления, т.е. является конечным расширением коммутативной группы [207].

Следствие 1.2. *Если G — вполне несвязная $\otimes$-CCR-группа, то G — проективный предел конечных расширений коммутативных дискретных групп.*

Лемма 1.16. *Пусть G — локально компактная группа, H — открытая подгруппа G. Тогда любое непрерывное унитарное представление ρ группы H является подпредставлением сужения некоторого представления π группы G на подгруппу H. Если ρ неприводимо, то π также можно выбрать неприводимым.*

Доказательство. Первая часть леммы хорошо известна: если ρ — представление H и U^ρ — соответствующее индуцированное представление G, то сужение $U^\rho|_H$ содержит ρ прямым слагаемым [91]. Отсюда легко следует, что $C^*(H)$ можно считать под-C^*-алгеброй $C^*(G)$, поэтому второе утверждение леммы сразу следует из [72, п. 2.10.2]. □

Лемма 1.17. *Пусть G — $\otimes$-CCR-группа, H — открытая подгруппа G. Тогда H — $\otimes$-CCR-группа.*

Доказательство. Пусть $\rho_1,\rho_2 \in \hat{H}$; $\pi_1,\pi_2 \in \hat{G}$ — такие, что ρ_i, $i = 1,2$, — подпредставление $\pi_i|_H$ (см. лемму 1.16). По условию, $(\pi_1 \otimes \pi_2)(f)$ — компактный оператор для любой $f \in \mathscr{L}^1(G)$; в частности, для любой $f \in \mathscr{L}^1(H)$ (так как можно считать меру Хаара на H сужением меры Хаара на G). Но тогда $(\pi_1|_H \otimes \pi_2|_H)(f)$ комактен, т.е. и его сужение $(\rho_1 \otimes \rho_2)(f)$ компактно. □

Лемма 1.18. *Пусть L — связная $\otimes$-CCR-группа Ли. Тогда $L=K\times V$ (прямое произведение), где K — связная компактная группа Ли, V — аддитивная группа конечномерного векторного пространства над R.*

Доказательство. Пусть R — радикал L, $T=L/R$ — полупростая фактор-группа. Пусть T некомпактна. Тогда, повторяя рассуждения [3, §§ 6, 7], видим, что некоторое подпредставление тензорного произведения двух неприводимых унитарных представлений основной серии Гельфанда–Наймарка для группы T имеет непрерывный спектр, так что не определяет компактного представления групповой алгебры (см. лемму 1.12). С другой стороны, T должна быть $\otimes$-CCR-группой по лемме 1.13. Следовательно, T — компактная группа Ли.

Пусть R_1 — коммутаторная подгруппа группы R. Так как R — нормальная подгруппа L, то и R_1 — нормальная подгруппа в L. Факторгруппа $M=L/R_1$ имеет коммутативный радикал $S=R/R_1$ и компактный полупростой фактор T. Пусть $S=W\times C$, где W — векторная группа, C — тор. Так как пространство смежных классов по W компактно, то существует такая векторная нормальная подгруппа V, что $K=M/V$ — компактная группа [124]. По теореме Ивасавы (см. [197]) группа M расщепима, т.е. M — полупрямое произведение замкнутого векторного нормальной подгруппы V и компактной подгруппы K. Покажем, что $kvk^{-1}=v$ для всех $k\in K$, $v\in V$, т.е. $M=K\times V$. Если $kvk^{-1}\not\equiv v$, то $\chi(kvk^{-1})\neq\chi(v)$ для некоторых $\chi\in\hat{V}$, $v\in K$, $k\in K$ (где $\hat{V}$ — группа характеров V), т.е. в $\hat{V}$ есть нетривиальные K-орбиты. Пусть $\mathcal{O}$ — одна из орбит максимальной размерности $v>0$ в $\hat{V}$. Так как K действует в V, т.е. и в $\hat{V}$, аналитически, то $\mathcal{O}$ — некоторое компактное многообразие в $\hat{V}$. Пусть π — неприводимое представление M, построенное по схеме Макки [154] с помощью характера $\chi\in\mathcal{O}$. Сужение π на V сосредоточено на орбите $\mathcal{O}$, причем класс мер, определяющий это сужение, задается условием: полный прообраз множеств, имеющих меру нуль на $\mathcal{O}$, имеет нулевую меру Хаара. Так как $\mathcal{O}$ компактна, то, если $\mathcal{O}$ не одноточечно, есть две точки на $\mathcal{O}$, в которых касательные к $\mathcal{O}$ пространства не параллельны. Рассмотрим теперь тензорное произведение $\pi\otimes\pi$ и сузим его на V; оно сосредоточено на $\mathcal{O}+\mathcal{O}$, т.е. на множестве размерности, не меньшей $v+1$, и из условия на меру следует, что $\pi\otimes\pi$ не представимо в виде счетной прямой суммы неприводимых представлений M. Поэтому все орбиты в $\hat{V}$ сводятся к точкам и $M=K\times V$.

Если R коммутативен, то лемма доказана. Пусть $R_1 \neq \{e\}$. Тогда коммутаторная подгруппа R_2 нормальной подгруппы R_1 есть нормальная подгруппа в L. Пусть $H = L/R_2$. Группа R_1/R_2 коммутативна; пусть $R_1/R_2 = W \times C$, где W — векторная группа, C — тор. Как мы только что видели, $L/R_1 = M = K \times V$. Подгруппа C состоит из тех и только тех элементов $a \in R_1/R_2$, для которых $\{a^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ имеет компактное замыкание; это свойство, очевидно, сохраняется при любых автоморфизмах группы R_1/R_2, т.е. C — нормальная подгруппа в H. Пусть $H_1 = H/C$; H_1 есть расширение $K \times V$ с помощью W. Пусть H_2 — полный прообраз V в H_1; W_1 — подгруппа Ли группы H_2, содержащая W. Тогда образ W_1 в $K \times V$ есть нормальная подгруппа, т.е. W_1 — нормальная подгруппа в H_1. Пусть $W \neq \{e\}$. Подгруппа H_2 некоммутативна по построению. Пусть ω — алгебра Ли группы W, $\mathfrak{b}_2$ — алгебра Ли группы H_2 и пусть $a,b \in \mathfrak{b}_2$ таковы, что $[a,b] \neq 0$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{b}_2$, порожденную ω и b. Очевидно, что $\mathfrak{B}$ — идеал в $\mathfrak{b}_2$. Если $\mathfrak{B}$ коммутативна, то соответствующая ей (замкнутая, связная, односвязная) подгруппа $B \subset H_2$ коммутативна, причем в B (т.е. и в $\hat{B}$) есть нетривиальные H_2-орбиты (так как $[a,b] \neq 0$). Если же $\mathfrak{B}$ некоммутативна, то $[b,w] \neq 0$ для некоторого $w \in \omega$, т.е. W — коммутативная подгруппа с нетривиальными H_2-орбитами (в W и в $\hat{W}$). Итак, в любом случае H_2 содержит векторную подгруппу A с нетривиальными H_2-орбитами. A — нормальная подгруппа в H_1. Если все H_2-орбиты в $\hat{A}$ компактны, то можно повторить рассуждение в доказательстве равенства $M = K \times V$ и получить противоречие. Пусть есть хоть одна некомпактная орбита $\mathcal{O}$ в $\hat{A}$; пусть $U \subset H_1$ — стационарная подгруппа некоторого характера $\chi \in \mathcal{O}$. Пусть π — представление группы U, индуцированное характером χ группы A; $\pi = \int \oplus \rho_\lambda \, d\mu(\lambda)$ — его разложение в прямой интеграл неприводимых представлений группы U. В частности, $\pi(a) = \int \oplus \rho_\lambda(a) \, d\mu(\lambda)$ для $a \in A$, но по построению индуцированного представления $\pi(a) = \chi(a)|_{H_\pi}$, т.е. для почти всех ρ_λ имеем $\rho_\lambda(a) = \chi(a)|_{H_{\rho_\lambda}}$. Поэтому существует такое неприводимое представление $\rho = \rho_{\lambda_0}$ группы U, что его сужение на A кратно χ. Рассмотрим представление σ группы H_2, индуцированное представлением ρ группы U. Оно неприводимо (см. [154]), так как стационарная подгруппа представления ρ содержится в стационарной подгруппе характера χ, т.е. совпадает с U. Рассмотрим тензорное произведение $\sigma \otimes \sigma$. Согласно теореме о тензорных произведениях в [154], представление $\sigma \otimes \sigma$ разлагается в прямой интеграл представлений π_c группы H_2 по множеству двойных классов $c = UhU$, $h \in H_2$.

Так как $\mathcal{O}$ некомпактна, то подгруппа J, порожденная U и полным прообразом K в H_2, не совпадает с H_2 (иначе все точки $\mathcal{O}$ переходили бы друг в друга под действием K). Но J — нормальная подгруппа в H_2, содержащая K, т.е. множество классов $JhJ = hJ$ континуально, и каждый из классов имеет нулевую меру Хаара; тогда и подавно множество классов UhU континуально, и каждый из этих классов имеет нулевую меру Хаара. Отсюда следует, что ненулевой оператор вида $(\sigma \otimes \sigma)(f^* * f)$, где $f \in \mathscr{L}^1(H_2)$, есть положительный самосопряженный оператор, который не может быть компактным, так как, очевидно, любой ненулевой разложимый проектор в $H_{\sigma\otimes\sigma} = \int_{\{c\}} \oplus H_c \, d\mu(c)$ бесконечномерен. Полученное противоречие показывает, что $W = \{e\}$, т.е. R_1/R_2 компактна: $R_1/R_2 = C$. Но тогда полный прообраз V в H есть прямое произведение $C \times V_1$, где V_1 — векторная группа [124], откуда следует, что H содержит такую векторную нормальную подгруппу V_2, что H есть полупрямое произведение компактной группы K_1 и векторной нормальной подгруппы V_2. Тогда, как мы видели выше для M, имеем $H = K_1 \times V_2$. Очевидно, что радикал H есть $Z_1 \times V_2$, где Z_1 — компонента единицы центра K_1, т.е. радикал группы H коммутативен, в то время как группа R/R_2 некоммутативна по построению. Поэтому $C = \{e\}$, $R_1 = \{e\}$ и $L = M$, т.е. L есть прямое произведение компактной связной группы Ли и векторной группы. □

Лемма 1.19. *$\otimes$-CCR-группа проективно-лиева, и все ее неприводимые унитарные представления конечномерны* (б) $\Rightarrow$ а)).

Доказательство. Пусть G — $\otimes$-CCR-группа, G_0 — компонента единицы группы G. По лемме 1.13, G/G_0 есть $\otimes$-CCR-группа. Пусть $\tilde{N}$ — такая компактная нормальная подгруппа группы G/G_0, что $(G/G_0)/\tilde{N}$ дискретна (см. следствие I.2). Пусть N — полный прообраз $\tilde{N}$ в G. Тогда G/N — дискретная группа (конечное расширение коммутативной группы), а N — $\otimes$-CCR-группа (по лемме 1.17) такая, что N/G_0 компактна. В частности, N — проективно-лиева группа [6]. Пусть L — (не обязательно связная) факторгруппа Ли группы N по компактной нормальной подгруппе Q, L_0 — компонента единицы L. Легко видеть, что индекс L_0 в L конечен (ср. раздел I.1.1). По лемме 1.13, L есть $\otimes$-CCR-группа; по лемме 1.17, L_0 есть $\otimes$-CCR-группа. По лемме 1.18 имеем $L_0 = K \times V$, где K — компактная связная группа Ли, V — векторная группа. Отсюда следует, что все неприводимые унитарные представления L_0 конечномерны, но тогда и все непрерывные неприводимые унитарные представления L и N также конечномерны. Каково бы ни было представление $\pi \in \hat{G}$, оно есть компактное представление $\mathscr{L}^1(G)$ $(\pi = \pi \otimes 1)$, поэтому $\pi(f)$ компактен для всех $f \in \mathscr{L}^1(G)$, т.е. и подавно для всех $f \in \mathscr{L}^1(N)$, так что $\pi|_N$ — компактное представление групповой алгебры группы G. Следовательно, по теореме Фелла, $\pi|_N = \sum \oplus n_i\rho_i$, где n_i конечны, $\rho_i \in N$. Если сумма бесконечна, то $(\pi \otimes \overline{\pi})|_N = \sum \oplus n_i n_j(\rho_i \otimes \overline{\rho_j})$ (где черта означает переход к контрагредиентному представлению) содержит подпредставление $\sum \oplus n_i^2(\rho_i \otimes \overline{\rho_i})$, так что содержит бесконечномерное подпредставление, кратное единичному; тогда представление $(\pi \otimes \bar{\pi})|_N$, а с ним и $\pi \otimes \bar{\pi}$, не может быть компактным представлением. Итак, $\pi|_N$ разлагается в конечную прямую сумму неприводимых (т.е. конечномерных по доказанному) представлений, поэтому π конечномерно, и тем самым второе утверждение леммы доказано.

Так как $L_0 = K \times V$, то существует набор неприводимых представлений группы L_0, разделяющий точки L_0. Так как индекс L_0 в L конечен и каждое неприводимое представление группы L_0 продолжается до неприводимого представления L (лемма 1.16), то есть конечный набор неприводимых представлений группы Ли L — пусть $\{\sigma_i, i \in I\}$, — разделяющий точки L. Рассмотрим прямую сумму представлений σ_i, $i \in I$, как представлене N; получаем, что ядро Q_I представления, отвечающего набору I, есть $Q_I = \bigcup_{i\in I} \operatorname{Ker}(\sigma_i)$. Продолжим каждое из σ_i до неприводимого представления π_i группы G (это возможно, поскольку, ввиду дискретности факторгруппы G/N, ограничение представления, индуцированного конечномерным неприводимым представлением группы N, на индуцирующую подгруппу N содержит индуцирующее представление прямым слагаемым). Тогда $\tilde{Q}_I = \bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker} \pi_i$ — замкнутая нормальная подгруппа в G, поэтому и $N \cap \tilde{Q}_I$ — замкнутая нормальная подгруппа в G. Но $N \cap \tilde{Q}_I = \bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker}(\pi_i|_N) = \bigcap_{i\in I} \bigcap_{k=1}^{m_i} \operatorname{Ker} \rho_k^{(i)}$, если $\pi_i = \sum_{k=1}^{m_i} \oplus n_k^{(i)} \rho_k^{(i)}$. Рассмотрим факторгруппу $G/(N \cap \tilde{Q}_I)$; она является расширением G/N с помощью $N/(N \cap \tilde{Q}_I)$. Но G/N — дискретная группа, а $N/(N \cap \tilde{Q}_I)$ есть расширение N/Q_I с помощью $Q_t/(N \cap \tilde{Q}It)$, где N/Q_I есть группа Ли (по условию), а $Q_t/(N \cap \tilde{Q}_t)$ — компактная группа (факторгруппа компактной группы Q_t), имеющая точное конечномерное представление, определяемое представлением $\sum_{i\in I} \oplus_{i\in I}(\pi_i)$, т.е. компактная группа Ли. Следовательно, $N/(N \cap \tilde{Q}_I)$ — группа Ли, а тогда и $G/(N \cap \tilde{Q}_I)$ — группа Ли. Так как $(N \cap \tilde{Q}_I) \subset \tilde{Q}_I$, а Q_I можно поместить в любую окрестность единицы выбором нормальной подгруппы Q в G/G_0 при построении L, то G проективно-лиева. $\square$

Завершение доказательства теоремы. а) $\Rightarrow$ в). Пусть все (непрерывные) неприводимые унитарные представления G конечномерны. Тогда G проективно-лиева по лемме 1.19. Пусть L — факторгруппа Ли группы G по нормальной подгркппе и L_0 — компонента единицы L. Очевидно, что неприводимые унитарные представления групп L и L_0 конечномерны. По замечанию 1, группа L/L_0 содержит коммутативную нормальную подгруппу конечного индекса; по леммам 1.17, 1.18 и 1.19 имеем $L_0 = K \times V$, где K — компактная связная группа Ли, V — векторная группа.

Так как L_0 открыта в L, то из доказательства леммы 1.19 следует, что L-орбиты всех неприводимых унитарных представлений группы L_0 конечны. Пусть $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — набор неприводимых представлений L_0, разделяющий точки L_0. Тогда есть конечный G-инвариантный набор представлений $\rho_1, \ldots, \rho_m$ группы L_0, разделяющий точки L_0. Пусть H_i — стационарная подгруппа представления ρ_i, $H = \bigcap_{i=1}^m H_i$. Тогда H — подгруппа конечного индекса в L; пусть $H_0 \subset H$ — нормальная подгруппа в L конечного индекса, L_1 — пересечение H_0 с полным прообразом коммутативной нормальной подгруппы группы L/L_0. Тогда L_1 — нормальная подгруппа конечного индекса в L, L_1/L_0 — коммутативная дискретная группа, причем L_1/L_0 сохраняет точное представление L_0; в частности, L_1/L_0 сохраняет характеры представлений ρ_i; т.е. сохраняет все элементы V и классы сопряженных элементов группы K. Таким образом, V — нормальная подгруппа в L_1; кроме того, K — тоже нормальная подгруппа в L_1 (так как: $K = \{a \in L_0 \colon \overline{\{a^n\}}$ компактно$\}$). Рассмотрим автоморфизмы K, определяемые элементами L_1. Так как сохраняются классы сопряженных элементов, то сохраняется центр K. Рассмотрим соответствующие автоморфизмы алгебры Ли $\mathfrak{k}$ группы K. Они тождественны на центре $\mathfrak{z}$, т.е. определяют автоморфизмы полупростой части $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$ алгебры $\mathfrak{k}$. Но группа внутренних автоморфизмов компактной полупростой алгебры Ли имеет конечный индекс в группе всех автоморфизмов; пусть L_2 — нормальная подгруппа в L_1 конечного индекса, элементы которой определяют внутренние автоморфизмы алгебры Ли $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$ в L_1. Тогда элементы L_2 сохраняют точки группы V и действуют на K внутренними автоморфизмами.

Пусть $D = L_2/(K \times V)$. Выберем в каждом классе смежности L_2 по $L_0 = K \times V$ по элементу и обозначим через ξ_d элемент L_2, сопоставляемый элементу $d \in D$. Умножая ξ_d на подходящий элемент $K \times V$, можем считать, что ξ_d определяет тождественный автоморфизм $K \times V$. Очевидно, множество

$D_1 = \{\xi_d, d \in D\}$ содержит произведения своих элементов и инвариантно относительно автоморфизмов, определяемых элементами $K \times V$ и элементами этого множества (ввиду коммутативности D), так что D_1 является дискретной коммутативной нормальной подгоуппой в L_2.

Рассмотрим действие группы D_1 на $L_0 = K \times V$. Это действие тождественно на K по построению. Если орбита некоторого элемента группы V под действием D_1 бесконечна, то группа L_2 имеет бесконечномерное неприводимое представление, определяемое соответстыующим индуцированием, что противоречит построению L_2. Следовательно, все орбиты D_1 в V конечны. тогда в D_1 существует подгруппа D_2 конечного индекса в D_1, для которой орбиты всех векторов некоторого базиса в V одноточечны. Поскольку аддитивная структура и нулевой элемент определяют умножение на число в вещественном векторном пространстве, мы видим, что лействие группы $D_!$ на V есть линейное представление группы D_1 и, таким образом, образ всех элементов группы D_2 при этом представлении есть единичный оператор. Повторяя для V рассуждение для K, приведенное выше, видим, что полнвй прообраз L_3 подгруппы D_2 в L_2 есть произведение $K \times V \times D_2$, причем L_3 — конечного индекса в L, что завершает доказательство. $\square$

1.5. Рефлексивная педставимость топологических групп

Напомним, что полутопологическая полугруппа —- это полугруппа, обладающая топологией, относительно которой полугрупповая операция является непрерывной по каждому из своих аргументов.

Теорема 1.6. *Топологическая группа имеет достаточно много* (*слабо непрерывных*) *изометрических представлений в рефлексивных банаховых пространствах тогда и только тогда*, *когда она может быть непрерывно вложена в компактную полутопологическую полугруппу.*

Доказательство. Часть “только тогда” очевидна, поскольку единичный шар пространства непрерывных линейных операторов в рефлексивном банаховом пространстве является компактной полутопологической полугруппой в слабой операторной топологии. Обсудим доказательство обратного утверждения.

Очевидно, достаточно доказать, что любая компактная полутопологическая полугруппа S обладает достаточным количеством изометрических представлений в рефлексивных банаховых пространствах.

Пусть A — банахова алгебра с дуальным пространством A' и бидуальным пространством A''. Для любых $h \in A'$ и $a \in A$ мы определим $ha \in A'$ формулой $\langle x, ha \rangle = \langle ax, h \rangle$, $x \in A$. Будем говорить, что непрерывный линейный функционал h на A слабо почти периодичен, если для любого ограниченного множества B в A множество $\{ha\colon a \in B\}$ является $\sigma(A', A'')$-относительно компактным.

Рассмотрим банахову алгебру $l^1(S)$; легко видеть, что для любой непрерывной функции f на S формула $x = \sum_n c_n s_n \mapsto \sum_n c_n f(s_n)$, где $s_n \in S$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $s_n \neq s_m$ для $n \neq m$, и $x \in \ell^1 = l^1(S)$ (т. е. $\|x\| = \sum_n |c_n| < \infty$), определяет непрерывный линейный функционал на $l^1(S)$, а набор этих функционалов определяет норму в $l^1(S)$ (это следует непосредственно из леммы Урысона). Введем естественное действие $l^1(S)$ на $l^1(S)^*$; в частности, на множестве $C(S)$ непрерывных функций на S это действие сводится к отображению $x \mapsto x * f$, $x \in \ell^1 = l^1(S)$, $f \in C(S)$, где $x * f = \sum_n c_n s_n * f$ и $s * f(t) = f(st)$ для $s,t \in S$ и $f \in C(S)$. Кроме того, ясно, что множество функций вида $\{x * f \mid x \in l^1,\ \|x\| \leqslant 1\}$ содержится в замкнутой выпуклой оболочке множества левых переносов $\{s * f \mid s \in S\}$, а последнее множество, очевидно, слабо компактно как непрерывный образ компактного пространства S. Следовательно, замыкание W множества $\{x * f \mid x \in l^1,\ \|x\| \leqslant 1\}$ слабо компактно (так как замкнутая выпуклая оболочка слабо компактного множества в банаховом пространстве слабо компактна), а функционал, определяемый f на l^1, слабо компактен в смысле [221].

Тогда из основного результата [221] (утверждающего, что нормированная алгебра A имеет точное изометрическое представление в некотором рефлексивном банаховом пространстве тогда и только тогда, когда слабо почти периодические функционалы единичной нормы на A составляют множество, порождающее норму) немедленно следует, что алгебра $l^1(S)$ обладает изометрическим представлением в рефлексивном банаховом пространстве, и, переходя от полугрупповой алгебры к полугруппе, мы получаем изометрическое представление π полугруппы S в том же рефлексивном банаховом пространстве. Из самой конструкции представления π в [221] (основанной на исходной конструкции рефлексивного пространства по слабо компактному множеству в банаховом пространстве [70], которая применима и здесь, чтобы построить изометрическое представление l^1, в рефлексивном банаховом пространстве, соответствущее симметричному слабо компактному множеству W, поскольку W инвариантно относительно действия l^1, а это действие отображает единичный шар l^1 в сжатия в $C(S)$) следует, что сопряженное пространство пространства представления π является замыканием (по норме) пространства ограничений непрерывных линейных функционалов $F \in C(S)^*$ на выделенное векторное подпространство $C(S)$. Так как для $\varphi \in W$ функции $s \mapsto F(s * \varphi)$, $s \in S$, являются непрерывными функциями на S, то мы немедленно получаем (переходя к пределу) непрерывность матричных элементов представления π. $\square$

1.6. Обзор теорем двойственности и критерий непрерывной вложимости гильбертово представимой топологической группы в локально компактную группу

Теоремы, содержащие информацию о группе в терминах ее представлений, традиционно называются теоремами двойственности. Исторически первой теоремой двойственности была теорема Понтрягина [179] о коммутативных локально компактных группах. За пределами этого класса вскоре появилась теорема двойственности Таннака–Крейна, предложившая нетривиальный двойственный объект для компактных (не обязательно коммутативных) топологических групп, а последующие теоремы двойственности использовали в основном бесконечномерные унитарные представления групп. Существенно, однако, что теоремы двойственности для локально компактных групп, предложенные Стайнспрингом [200], Эймаром [88], Татсуумой [204], Эрнстом [83–86], Такесаки [202], Кацем [9], Вайнерманом [210] и Эноком–Шварцем [81] (см. также [115]), связанные с бесконечномерными унитарными представлениями локально компактных групп, существенно используют средства, наличие которых специфично для локально компактных групп, а не для общих топологических групп, а именно, наличие меры Хаара (напомним, что доказанная Вейлем [216] теорема, обратная теореме Хаара, утверждает, что любая топологическая группа, снабженная “хорошей” инвариантной мерой, изоморфна подгруппе локально компактной группы), свойства регулярного представления, а также свойства инвариантного веса на алгебре Хопфа–фон Неймана, связанной с рассматриваемой локально компактной группой. И, как пишет автор в [139], при изучении этих объектов “we are still far from … a set of axioms in which we do not have to invoke the existence of Haar measure”.

Это объясняет выбор средств в полученной ниже характеризации, см. раздел 1.6.1 ниже. А именно, мы доказываем, что топологическая группа допускает непрерывное вложение в локально компактную топологическую группу тогда и только тогда, когда эта группа допускает семейство непрерывных унитарных представлений, разделяющее точки группы и определяющее симметричную алгебру Хопфа–фон Неймана, снабженную структурой алгебры Каца, внутренняя группа которой совпадает с множеством ненулевых характеров преддвойственной коммутативной банаховой алгебры этой алгебры Хопфа–фон Неймана. Необходимые предварительные сведения напоминаются в разделе 1.6.1, а характеризация гильбертово представимых топологических групп, непрерывно вдожимых в локально компактные группы, доказывается в 1.6.2 и используется в разделе 1.6.3, чтобы доказать, что одна из простейших унитарно представимых (не локально компактных) групп не допускает непрерывного вложения в локально компактную группу. Заключительные замечания высказаны в разделе 1.6.4.

1.6.1. Предварительные сведения. Алгебры Хопфа–фон Неймана и связанные с ними структуры

В этом разделе мы напоминаем основные определения и факты общей теории алгебр Хопфа–фон Неймана. Все эти определения и факты можно найти в [81, 85, 172, 211, 212].

Определение 1.2. *Алгеброй Хопфа–фон Неймана* называется пара (M,Γ), образованная алгеброй фон Неймана M и таким инъективным нормальным гомоморфизмом Γ алгебры фон Неймана M в алгебру фон Неймана $M\otimes M$, являющуюся тензорным квадратом алгебры фон Неймана M, что $\Gamma(1)=1\otimes 1$, где 1 — единичный элемент M, и $\Gamma\otimes\iota\circ\Gamma=\iota\otimes\Gamma\circ\Gamma$ (это — отображения из M в тензорный куб $M\otimes M\otimes M$), где ι означает тождественное отображение.

Определение 1.3. Пусть ζ — автоморфизм транспозиции алгебры фон Неймана $M \otimes M$, отображающий $a \otimes b$ в $b \otimes a$ для всех $a, b \in M$. Если κ — инволютивный антиавтоморфизм алгебры фон Неймана M, удовлетворяющий условию $\kappa \otimes \kappa \circ \Gamma = \zeta \circ \Gamma \circ \kappa \colon M \to M \otimes M$, то тройка (M,Γ,κ) называется *коинволютивной алгеброй Хопфа–фон Неймана*. Гомоморфизм Γ называется симметричным. если $\zeta\Gamma = \Gamma$. Если M коммутативна (соответственно Γ симметрично), то тройка (M,Γ,κ) называется абелевой (соответственно, симметричной).

Пусть M — алгебра фон Неймана и M_* — её (единственное с точностью до изометрического изоморфизма) преддвойственное пространство к M (см., например, [186]).

Определение 1.4. Пусть $\omega, \omega' \in M_*$. Формула $\omega * \omega'(x) = (\omega \otimes \omega')(\Gamma(x))$, где $x \in M$ и $\omega,\omega' \in M_*$, определяет умножение в M_*.

Это произведение коммутативно тогда и только тогда, когда отображение Γ *симметрично* (т.е. $\zeta \circ \Gamma = \Gamma$). В общем случае, пространство M_* становится инволютивной банаховой алгеброй относительно умножения $*$ и инволюции $\circ$ на M_*, определенной правилом $\omega^\circ = \omega^\dagger \circ \kappa$, где $\omega^\dagger(x) = \overline{\omega(x^*)}$ для любого $x \in M$. Доказательство всех не доказанных здесь утверждений этого пункта приведено в [81].

Пусть (M,Γ) — алгебра Хопфа–фон Неймана. Рассмотрим семейство обратимых элементов $x \in M$, удовлетворяющих условию $\Gamma(x) = x \otimes x$; мы обозначим это семейство символом $G(M, \Gamma)$. Это семейство естественно отождествляется с семейством ненулевых характеров инволютивной банаховой алгебры M_*, поскольку условие $\Gamma(x) = x \otimes x$ равносильно условию $(\omega * \omega')(x) = \omega(x)\omega'(x)$, $\omega,\omega' \in M_*$, для всех $x \in M$. Семейство $G(M,\Gamma)$ является подгруппой группы всех обратимых элементов в M. Полученная группа $G(M,\Gamma)$ называется *внутренней группой* группы (M,Γ). Если отображение Γ симметрично, то любой (ненулевой) характер коммутативной банаховой алгебры M_* представляется таким ненулевым элементом $x \in M$, что $\Gamma(x) = x \otimes x$. Так как произведение любых двух элементов в M, отвечающих характерам коммутативной банаховой алгебры M_*, снова является характером M_*, то семейство характеров коммутативной банаховой алгебры M_* естественно наделено структурой локально компактной полутопологической полугруппы с единицей. Доказательства приведены в [81].

Определение 1.5. Весом на алгебре фон Неймана M называется такое аддитивное отображение $\varphi\colon M^+ \to [0,+\infty]$, что $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in M^+$. Пусть $\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{x \in M^+, \varphi(x) < +\infty\}$ и $\mathfrak{N}_\varphi = \{x \in M, \varphi(x^*x) < +\infty\}$. Тогда $\mathfrak{N}_\varphi$ — левый идеал в $\mathfrak{M}$, а инволютивная алгебра $\mathfrak{N}_\varphi^*\mathfrak{N}_\varphi$ является линейной оболочкой $\mathfrak{M}^+$; она обозначается через $\mathfrak{M}_\varphi$, и можно расширить φ до положительной линейной формы на $\mathfrak{M}_\varphi$, которая по-прежнему обозначается символом φ. Вес φ называется точным, если $\varphi(x) = 0$ для $x \in \mathfrak{M}^+$ только при $x = 0$, полуконечным, если $\mathfrak{M}_\varphi$ ультраслабо плотно в M (конечным, если $\mathfrak{M}_\varphi = M$), и нормальным, если $\varphi(\sup_\alpha x_\alpha) = \sup_\alpha \varphi(x_\alpha)$ для всех возрастающих ограниченных направленностей $\{X_\alpha\}$ в M^+. Если φ является нормальным, то множество всех проекций p в M, таких что $\varphi(p) = 0$, имеет наибольший элемент p_0, и $q = 1 - p_0$ называется носителем φ.

Пусть φ — точный, полуконечный, нормальный вес на W^*-алгебре M. Тогда левый идеал $\mathbb{N}_\varphi$, снабженный скалярным произведением $(x,y) \to \varphi(y * x)$, $(x, y \in \mathbb{N}_\varphi$, является предгильбертовым пространством; пусть H_φ — соответствующее гильбертово пространство, а Λ_φ — каноническое вложение $\mathfrak{N}_\varphi$ в H_φ. Множество $\mathfrak{A}_\varphi = \Lambda_\varphi(\mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$, снабженное произведением T и инволюцией $^\#$, где $\Lambda_\varphi(x)T\Lambda_\varphi(y) = \Lambda_\varphi(xy)$ $(x, y \in \mathbb{N}_\varphi)$ и $\Lambda_\varphi(x)^\# = \Lambda_\varphi(x^*)$ $(x \in \mathfrak{N}_\varphi \cap \mathfrak{N}_\varphi^*)$ является такой инволютивной алгеброй, плотной в H_φ, что ее инволюция является антилинейным предзамкнутым отображением, и такой, что представление левого умножения $\mathfrak{A}_\varphi$ является невырожденным, ограниченным и инволютивным. Пусть S — замыкание $^\#$. Пусть $S = J_\varphi \Delta^{1/2}$ — полярное разложение. Тогда $\Delta^{it} M \Delta^{-it} = M$, $r \in \mathbb{R}$; пусть $\sigma_t^\varphi(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}$ $(x \in M,\ t \in \mathbb{R})$.

Пусть (M, Γ) — алгебра Хопфа-фон Неймана, а φ — точный полуконечный нормальный вес на M. Будем говорить, что φ — левоинвариантный вес относительно Γ, если он удовлетворяет условию $(i \otimes \varphi)\Gamma(x) = \varphi(x)1$ $(x \in M^+)$, где i — тождественное отображение. Тогда φ удовлетворяет более слабому условию

$$\Gamma(\mathfrak{N}_\varphi) \subset \mathfrak{N}_{i\otimes\varphi}. \tag{1.2}$$

Пусть $\mathbb{H} = (M,\Gamma,\kappa)$ — коинволютивная алгебра Хопфа-фон Неймана, а φ — точный полуконечный нормальный вес на M. Будем говорить, что φ — вес Хаара на $\mathbb{H}$, если он удовлетворяет условию (1.2) и двум следующим равенствам:

$$(i \otimes \varphi)((1 \otimes y^*)\Gamma(x)) = \kappa((i \otimes \varphi)(\Gamma(y^*)(1 \otimes X))) \qquad (x,y \in \mathfrak{N}_\varphi) \tag{1.3}$$

(левая и правая части этого уравнения имеют смысл благодаря уравнению (1.2) для φ) и

$$\kappa\sigma_t^{\varphi} = \sigma_{-t}^{\varphi}\kappa \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{1.4}$$

Если эти три условия (1.2)–(1.4) выполнены, то набор $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$ называется алгеброй Каца.

Доказательства всех утверждений этого пункта приведены в [81].

1.6.2. Характеризация гильбертово представимых топологических групп, непрерывно вдожимых в локально компактные группы

Напомним, что топологическая группа называется локально вполне ограниченной (или локально ограниченной), если существует фундаментальная система окрестностей единичного элемента в группе, образованная предкомпактными (т.е. вполне ограниченными) множествами.

Теорема 1.7. *Пусть G — топологическая группа. Следующие условия равносильны*:

(A1) *группа G допускает непрерывное гомоморфное вложение в локально компактную группу*;

(A2) *группа G допускает непрерывное гомоморфное вложение в локально ограниченную группу*;

(A3) *существует разделяющее семейство $\mathcal{F}$ непрерывных унитарных представлений группы G в гильбертовых пространствах*, *содержащее прямые суммы и тензорные произведения представлений*, *входящих в семейство $\mathcal{F}$*, *причем эти операции могут быть продолжены до структуры такой симметричной коинволютивной алгебры Хопфа–фон Неймана $\mathcal{G}$ над алгеброй фон Неймана M*, *порожденной прямой суммой всех представлений*, *принадлежащих семейству $\mathcal{F}$*, *что эта алгебра Хопфа–фон Неймана допускает структуру алгебры Каца и внутренняя группа G' алгебры Хопфа–фон Неймана $\mathcal{G}$ содержит все ненулевые элементы x в M*, *удовлетворяющие условию $\Gamma(x) = x \otimes x$*, *где Γ — коумножение в $\mathcal{G}$*.

Доказательство. Поскольку любая локально ограниченная группа допускает непрерывное вложение в локально компактную группу (в так называемое “пополнение Вейля”, см., например, [59]), то утверждение (A2) $\Rightarrow$ (A1) очевидно. Утверждение (A1) $\Rightarrow$ (A2) также очевидно, поскольку в качестве искомой локально ограниченной группы можно взять локально компактную группу, упомянутую в (A1). Утверждение (A1) $\Rightarrow$ (A3) доказано (для несколько различных семейств представлений) в [204] и [85] (современное изложение приведено в [81]). Остаётся доказать утверждение (A3) $\Rightarrow$ (A1).

Заметим сначала, что формула

$$\Gamma(\pi(g)) = \pi(g) \otimes \pi(g), \qquad g \in G, \quad \pi \in \mathcal{F}, \tag{1.5}$$

справедлива по самому определению отображения Γ (отображение Γ естественно определено как продолжение отображения, определенного операцией тензорного произведения для представлений, принадлежащих семейству $\mathcal{F}$). Эта формула означает, что любой элемент алгебры фон Неймана M, получаемый как прямая сумма элементов вида $\pi(g)$ для данного $g \in G$, где π пробегает всё семейство $\mathcal{F}$, является обратимым элементом (он унитарен как прямая сумма унитарных операторов), и, следовательно, определяет некоторый элемент внутренней группы G' соответствующей алгебры Хопфа–фон Неймана $\mathcal{G}$.

Далее, по предположению, сделанному в (A3), коумножение Γ симметрично, откуда следует, что структура инволютивной банаховой алгебры на M_* коммутативна. Таким образом, M_* становится коммутативной инволютивной банаховой алгеброй. Отсюда следует, что множество ненулевых элементов $x \in M$, удовлетворяющих условию $\Gamma(x) = x \otimes x$, можно естественным образом отождествить со спектром (пространством максимальных идеалов или пространством ненулевых комплексных гомоморфизмов) коммутативной банаховой алгебры M_*, который является локально компактным пространством именно в ультраслабой операторной топологии на алгебре фон Неймана M (причём эта топология совпадает на спектре (как на подмножестве единичного шара) со слабой* топологией на M, определённой предсопряженным пространством M_*).

Согласно основному предположению пункта (A3), все ненулевые элементы $x \in M$, удовлетворяющие условию $\Gamma(x) = x \otimes x$, принадлежат внутренней группе G' алгебры Хопфа–фон Неймана $\mathcal{G}$, и, таким образом, множество всех таких элементов совпадает с внутренней группой G'. Поэтому пространство полутопологической группы G' локально компактно. Если алебра Хопфа–фон Неймана может быть снабжена структурой алгебры Каца, то ее внутренняя группа автоматически локально компактна (см. [81]). Это завершает доказательство утверждения (A3) $\Rightarrow$ (A1). □

Замечание 1.2. Доказательство эквивалентности (A1) $\Rightarrow$ (A3) $\Longrightarrow$ (A1), приведённое выше, совершенно независимо от теоремы Вейля о вложимости в компактные группы групп с “хорошей” инвариантной мерой. Более того, в связи с наличием развитой техники в теории алгебр Хопфа–фон Неймана и связанных с ними алгебр Каца [81], эквивалентность (A1)$\Longleftrightarrow$(A3) может быть использована для доказательства теоремы Вейля, основанного на теории алгебр Хопфа–фон Неймана. А именно, из существования левоинвариантной меры на топологической группе следует возможность построить аналог регулярного представления этой группы (левыми сдвигами в пространстве L^2 по этой мере), откуда следует, прежде всего, унитарная представимость данной группы. Далее, повторяя по существу построения главы 4 в [81] для семейства непрерывных унитарных представлений группы G, содержащего этот аналог регулярного представления, можно построить по соответствующей алгебре Хопфа–фон Неймана алгебру Каца, для которой тем самым условие (A3) выполняется автоматически, и поэтому группа G непрерывно вкладывается в локально компактную группу.

1.6.3. Пример

Ключевая эквивалентность приведённой выще теоремы, эквивалентность (A1)$\Longleftrightarrow$(A3), выглядит мало перспективной практически, и трудно представить себе, что столь общее утверждение может быть эффективно использовано в доказательстве возможности или невозможности вложения унитарно представимой группы в локально компактную группу. Приведём пример, в котором эта терема оказывается продуктивной.

Пример. Пусть $U(H,\infty)$ — группа всех унитарных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H, которые являются компактными возмущениями единичного оператора. Как показано в [11] (см. также [23, 173, 191]), группа $U(H,\infty)$ принадлежит классу групп типа I. Поскольку тавтологическое представление (сопоставляющее элементу группы его самого, рассматриваемого как оператор в гильбертовом пространстве H) является очевидным образом точным, то рассматриваемая группа автоматически унитарно представима. В [11, 23, 173, 191] получено и описание всех непрерывных унитарных представлений группы G, которые оказываются прямыми суммами неприводимых представлений, а каждое неприводимое непрерывное унитарное представление группы G оказывается подпредставлением тензорного произведения тензорной степени тавтологического представления и тензорной степени представления, контрагредиентного тавтологическому (с матричными элементами, комплексно сопряжёнными матричным элементам тавтологического представления), к которым нужно добавить единичное представление (см. также [125, 177, 178]).

Оказывается, эта группа не допускает непрерывного вложения в какую бы то ни было локально компактную группу. Дело в том, что единственно возможный морфизм алгебр фон Неймана, действующий из (полной матричной) алгебры фон Неймана $\mathcal{L}(H)$, порождённой тавтологическим представлением π в H, в алгебру фон Неймана, порождённую тензорным квадратом $\pi \otimes \pi$ в гильбертовом пространстве $H \otimes H$, обязан быть непрерывен в слабой операторной топологии, и, таким образом, отображает любой унитарный оператор U на H (автоматически принадлежащий алгебре $\mathcal{L}(H)$) в $U \otimes U$. С другой стороны, слабые пределы операторов представления π могут быть ненулевыми необратимыми изометрическими операторами в любом нетривиальном представлении группы $G = U(H,\infty)$. В частности, в тавтологическом представлении, и слабый, и *сильный* предел V последовательности унитарных операторов V_n, являющихся конечномерными возмущениями единичного оператора и заданных в некотором ортонормированном базисе $\{e_i\}$ в H формулами

$$V_n e_i = e_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad V_n e_n = e_1, \qquad V_n e_i = e_i. \quad n < i,$$

является оператором одностороннего сдвига (удовлетворяющим условию $\Gamma V = V \otimes V$), и тем самым ненулевым необратимым изометрическим оператором. Более того, степени оператора V^*, сопряжённого предельному оператору V, сильно стремятся к нулю. Это последнее свойство очевидным образом наследуется контрагредиентным представлением, а также конечными тензорными степенями тавтологического представления и представления, контрагредиентного ему, и, таким образом, для любого нетривиального семейства представлений $\mathcal{F}$ существует (ненулевой) характер преддвойственной коммутативной банаховой алгебры, соответствующей алгебре Хопфа–фон Неймана (связанный с элементом этой алгебры, отвечающим оператору V), который не соответствует никакому обратимому элементу в алгебре фон Неймана этой алгебры Хопфа–фон Неймана. Тем самым нарушено условие (A3) теоремы, и поэтому не выполнено и условие (A1) теоремы, так что наша группа G не допускает непрерывного вложения в локально компактную группу.

1.6.4. Замечания

Разумеется, есть классы групп, для которых некоторые из изученных выше свойств становятся равносильными, но иногда результаты неожиданны даже для простейших классов групп. Так, если данная топологическая группа является конечным расширением коммутативной группы, то, очевидно, следующие условия равносильны:

1) группа непрерывно вложима в локально компактную группу,

2) группа непрерывно вложима в компактную группу,

3) коммутативная нормальная подгруппа конечного индекса в этой группе непрерывно вложима в локально компактную группу,

4) коммутативная нормальная подгруппа конечного индекса в этой группе непрерывно вложима в компактную группу,

5) группа имеет семейство непрерывных неприводимых унитарных представлений в гильбертовых пространствах, разделяющее точки группы,

6) коммутативная нормальная подгруппа конечного индекса в этой группе имеет семейство непрерывных унитарных характеров, разделяющее точки группы.

Но эти условия не равносильны условию унитарной представимости группы, даже если группа сама является коммутативной. Действительно, отмеченное А. С. Немировским в частном сообщении существование непрерывного унитарного представления аддитивной группы вещественного топологического пространства $L^p[0,1]$, $0<p<1$, в пространстве $L^2[0,1]$ ($L^p[0,1]\ni f\mapsto \exp(if)\in\mathcal{L}(L^2[0,1])$) (отображение в операторы умножения на функцию) показывает, что группа $L^p[0,1]$, $0<p<1$, унитарно представима, в то время как существование семейства неприводимых непрерывных унитарных представлений, разделяющего точки группы, равносильно существованию семейства непрерывных унитарных характеров, разделяющих точки группы, а нетривиальных непрерывных унитарных характеров у рассматриваемой группы нет, поскольку все они должны быть экспонентами от нетривиальных непрерывных линейных функционалов на $L^p[0,1]$, $0<p<1$, которых нет.

1.7. Гильбертово представимые топологические группы с условиями конечномерности неприводимых представлений с ограниченными размерностями и их групповые алгебры

Пусть E — банахово пространство. Говорят, что пространство E имеет *свойство Радона–Никодима*, если для любого ограниченного множества $A \subset E$ существуют его подмножества вида $\{\xi \in A \mid f(x) > \sup f(A) - \varepsilon\}$, где $f \in E^*$ и $\varepsilon > 0$, имеющие сколь угодно малый диаметр. Говорят, что пространство E имеет *свойство Крейна–Мильмана*, если любое ограниченное замкнутое выпуклое подмножество в E есть замкнутая выпуклая оболочка множества своих крайних точек. Говорят, что пространство E имеет *свойство Данфорда–Петтиса*, если $f_n(x_n) \to 0$ для любой слабо стремящейся к нулю последовательности $\{\xi_n\}$ в E и любой слабо стремящейся к нулю последовательности $\{f_n\}$ в E^*. Говорят, что пространство E имеет *свойство Асплунда*, если любое сепарабельное подпространство в E имеет сепарабельное сопряженное пространство.

Напомним также, что топологическое пространство X называется фрагментируемым, если существует метрика $d(\cdot,\cdot)$ на X такая, что для любого $\varepsilon>0$ и любого непустого множества $A\subset X$ существует непустое подмножество $B\subset A$, которое относительно открыто в A и $d-\operatorname{diam}(B)=\sup_{x',x''\in B} d(x',x'')<\varepsilon$.

Известно (см., напр., [222]), что следующие условия равносильны для любого банахова пространства E:

(B1) E имеет свойство Асплунда,

(B2) единичный шар в E^*, рассматриваемый в слабой* топологии, фрагментируем относительно метрики, определяемой нормой,

(B3) E^* имеет свойство Крейна–Мильмана,

(B4) E^* имеет свойство Радона–Никодима.

Кроме того, известно (см. [56]), что следующие условия равносильны для любой алгебры фон Неймана B:

(C1) B имеет свойство Данфорда–Петтиса,

(C2) $B = \oplus_k B_k$, где B_k — алгебра фон Неймана типа I_{n_k}, и $\sup_k n_k < \infty$.

Далее, известно (см. [44]), что следующие условия равносильны для любой алгебры фон Неймана B:

(D1) пространство B_*, преддвойственное к рассматриваемой алгебре фон Неймана B, имеет свойство Данфорда–Петтиса,

(D2) B — конечная алгебра фон Неймана типа I.

Наконец, известно (см. [55]), что следующие условия равносильны для любой алгебры фон Неймана B:

(E1) пространство B_*, преддвойственное к рассматриваемой алгебре фон Неймана B, имеет свойство Радона–Никодима,

(E2) B является прямой суммой факторов типа I.

Эти общие факты позволяют получить некоторые характеризации групп, все неприводимые непрерывные унитарные представления которых конечномерны, не предполагая локальной компактности группы (и тем самым усилить соответствующие результаты в [37, 145]). Нам понабится следующая базовая теорема.

Теорема 1.8. *Пусть G — топологическая группа, семейство неприводимых непрерывных унитарных представлений которой разделяет точки группы G, и все эти преедставление конечномерны, причем размерности этих представлений ограничены в совокупности. Тогда группа G содержит коммутативную нормальную подгруппу конечного индекса.*

Доказательство. Пусть $\widehat{G}$ — семейстно непрерывных неприводимых (конечномерных) представлений группы G. Замыкание образа группы G в любом конечномерном представлении $\pi \in \widehat{G}$ есть группа Ли, и её неприводимые непрерывные унитарные представления, начиная с тождественного, определяют все неприводимые непрерывные унитарные представления образа, их композиция с π дает неприводимые представления группы G, и все они конечномерны и их размерности ограничены в совокупности. При этом в силу непрерывности неприводимые унитарные конечномерные представления образов представлений $\pi \in \widehat{G}$ автоматически продолжаются до неприводимых представлений замыкания этих образов в замыкания образов представлений. По теореме Мура о локально компактных группах с представлениями ограниченной размерности [161] (см. также [140]), все замыкания $G_\pi = \overline{\pi(G)}$ образов $\pi(G)$ представлений $\pi \in \widehat{G}$ содержат коммутативную нормальную подгруппу $C = C_\pi$ с конечной факторгруппой $G_\pi/C_\pi = F_\pi$. Рассмотрим полный прообраз единичного элемента в C, $N_\pi = \pi^{-1}(e)$. Группа $N_1 = N_\pi$ имеет те же свойства, что и G, а именно, как подгруппа в G, она имеет семейство непрерывных неприводимых (конечномерных) унитарных представлений, разделяющее точки, и размерности всех ее неприводимых представлений конечны и ограничены в совокупности той же постоянной $n(G)$, которой ограничены размерности неприводимых непрерывных унитарных представлений группы G [128]. Поэтому, используя неприводимые представления группы N_1, видим, что либо N_1 коммутативна, либо N_1 имеет нормальную подгруппу $N_2 \subsetneq N_1$ с нетривиальной факторгруппой N_1/N_2, которая является плотной подгруппой группы Ли, все неприводимые унитарные представления которой конечномерны с размерностями $\leqslant n(G)$. Докажем, что размерности непрерывных неприводимых унитарных представлений группы N_1 не превосходят $n/2$.

Пусть m — наибольшая размерность неприводимого непрерывного унитарного представления группы N_1, и пусть ρ — такое представление. Поскольку все группы видв $G(\pi)$, $\pi \in \widehat{G}$, являются конечными расширениями коммутативных групп, то они аменабельны, и, следовательно, все неприводимые унитарные представления таких групп участвуют в разложении регулярного представления на неприводимые. Поэтому любое неприводимое унитарное представление подгруппы такой группы продолжается до неприводимого представления группы. Пусть σ — неприводимое представление группы G, ограничение которого на N_1 содержит данное неприводимое (непрерывное, унитарное) представление τ группы N_1 размерности m.

Если действие группы G на представление τ нетривиально, то не все представления вида $n \mapsto \tau(gng^{-1})$, $g \in G$, $n \in N$, унитарно эквивалентны представлению τ. Они участвуют в разложении ограничения представления σ на нормальную подгруппу N_1. Следовательно, $n \geqslant \dim(\sigma) \geqslant 2m = 2\dim(\tau)$.

Если действие группы G на представление τ тривиально, то тензорное произведение продолжения представления τ на группу G и неодномерного представления π факторгруппы G/N_1, рассматриваемого как представление группы G, очевидным образом неприводимо (нетривиальное инвариантное подпространство этого представления может быть только объединением подпространств, инвариантных относительно ограничения на N_1, а неприводимость представления π и продолжения представления τ на группу G исключает инвариантность всех подпространств, кроме нуля и пространства тензорного произведения представлений). Поэтому и в этом случае $n \geqslant \dim(\sigma) \geqslant 2m = 2\dim(\tau)$.

Отсюда сдедует, что в цепочке подгрупп N_i может быть лишь конечное число некоммутативных подгрупп. Тем самым, существует такой натуральный номер j, что подгруппа N_j коммутативна. При этом, как и для всех натуральных i, факторгруппа по N_j есть плотная подгруппа H конечного расширения коммутативной группы Ли L. Группу L можно считать связной, поскольку число ее компонент конечно, и соответствующую конечную группу можно включить в конечную группу, осуществляющую расширение.

Полный прообраз группы H в G есть расширение одной унитарно и неприводимо представимой коммутативной группы с помощью другой. Если орбиты характеров нормальной подгруппы бесконечны, то соответствующие индуцированные представления бесконечномерны, а конечными они могут быть только если они одноточечны, поскольку из естественной непрерывности действия следует, что его можно распространить на связное замыкание L лействующей группы, так что все орбиты L оказываются связными. Тем самым рассматриваемое действие оказывается тривиальным, рассматриваемое расширение конечных групп оказывается прямым произведением, и группа G оказывается конечным расширением коммутативной группы, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Теорема 1.9. *Пусть G — топологическая группа, семейство неприводимых непрерывных унитарных представлений которой разделяет точки группы G.*

Следующие условия (F1)–(F2) *равносильны*:

(F1) *все неприводимые непрерывные унитарные представления группы G конечномерны и их размерности ограничены в совокупности*;

(F2) *алгебра фон Неймана $VN(G)$ группы G имеет свойство Данфорда–Петтиса.*

Кроме того, следующие условия (G1)–(G3) *равносильны*:

(G1) *любое непрерывное унитарное фактор-представление группы G кратно конечномерному неприводимому представлению этой группы*;

(G2) *алгебра Фурье–Стилтьеса $B(G)$ группы G имеет свойство Данфорда–Петтиса*;

(G3) *алгебра фон Неймана $VN(G)$ группы G — конечная алгебра фон Неймана типа I.*

Доказательство. Если некоторое семейство неприводимых представлений алгебры фон Неймана (рассматриваемой как C^*-алгебра) разделяет точки этой алгебры фон Неймана, причем все эти представления конечномерны и их размерности ограничены в совокупности, то эта алгебра фон Неймана удовлетворяет полиномиальному тождеству и поэтому не может иметь никаких неприводимых представлений (не обязательно нормальных) размерности, превосходящей верхнюю грань размерностей данного семейства [73, § 3.6]. В частности, данная алгебра фон Неймана имеет тип I. Теперь эквивалентность (F1) $\Leftrightarrow$ (F2) следует из эквивалентности (C1) $\Leftrightarrow$ (C2).

Обсудим эквивалентность (G1) $\Leftrightarrow$ (G2) $\Leftrightarrow$ (G3). С одной стороны, из условия (G1) непосредственно следует, что в каноническом разложении алгебры фон Неймана $\mathrm{VN}(G)$ группы G нет ни непрерывных, ни чисто бесконечных слагаемых [186, п. 2.3.3], т.е. $\mathrm{VN}(G)$ — конечная алгебра фон Неймана типа I, что доказывает импликацию (G1) $\Rightarrow$ (G3), а импликация (G1) $\Rightarrow$ (G2) следует из импликации (D2) $\Rightarrow$ (D1). С другой стороны, из условия (G2) и импликации (D1) $\Rightarrow$ (D2) следует, что $\mathrm{VN}(G)$ — конечная алгебра фон Неймана типа I, и поэтому образ алгебры $\mathrm{VN}(G)$ в любом ее нормальном представлении есть конечная алгебра фон Неймана типа I, так что (G3) $\Rightarrow$ (G1). Наконец, импликация (G2) $\Rightarrow$ (G3) следует из импликации (D1) $\Rightarrow$ (D2). □

Аналогичные эквивалентности справедливы также для алгебры фон Неймана $\mathrm{VN}(\pi)$ данного представления π и для алгебры Фурье $A_\pi(G)$ этого представления.

Замечание 1.3. Пусть G — топологическая группа, семейство неприводимых унитарных представлений которой разделяет точки. Тогда следующие условия (H1)–(H2) равносильны:

(H1) группа G допускает непрерывное вложение в компактную группу, и любое непрерывное унитарное представление группы G определяется непрерывным унитарным представлением этой компактной группы;

(H2) алгебра Фурье–Стилтьеса $B(G)$ группы G одновременно имеет свойство Данфорда–Петтиса и свойство Радона–Никодима.

Действительно, согласно эквивалентностям (D1) $\Leftrightarrow$ (D2) и (E1) $\Leftrightarrow$ (E2), из (H2) следует, что алгебра фон Неймана $\mathrm{VN}(G)$ — прямая сумма конечномерных факторов типа I. Унитарная группа K этой алгебры фон Неймана компактна, и, по построению, любое непрерывное циклическое представление алгебры фон Неймана $\mathrm{VN}(G)$ (а тем самым и группы G) определяется прямым слагаемым этой прямой суммы и потому непрерывным представлением компактной унитарной группы K, что доказывает импликацию (H2) $\Rightarrow$ (H1).

Если выполнено (H1), то $B(G)$ изоморфна $B(K)$ для компактной группы K, а тогда наличие свойств Данфорда–Петтиса и Радона–Никодима следует из [145, Theorem 4.5].

Теорема 1.10. *Пусть G — топологическая группа, имеющая семейство неприводимых непрерывных унитарных представлений, разделяющее точки группы. Следующие условия равносильны*:

(I1) *все неприводимые непрерывные унитарные представления группы G конечномерны и их размерности ограничены в совокупности*;

(I2) *в семействе всех неприводимых непрерывных унитарных представлений группы G имеется подкольцо представлений, разделяющее точки группы и порожденное некоторым набором неприводимых непрерывных конечномерных проедставлений, в котором все неприводимые непрерывные унитарные представления группы G конечномерны и их размерности ограничены в совокупности*;

(I3) *группа G имеет коммутативную нормальную подгруппу конечного индекса, т.е. является конечным расширением коммутативной топологической группы, семейство непрерывных унитарных характеров которой разделяет точки группы G.*

Доказательство. Утверждение (I1) $\Rightarrow$ (I2) очевидно.

Пусть выполнено условие (I3), пусть A — коммутативная нормальная подгруппа в G, и пусть фактор-группа $G/A = K$ конечна. Тогда утверждение (I3) $\Rightarrow$ (I1) состоит из двух частей. Во первых, нужно убедиться в унитарной представимости группы G. Этот факт доказывается построением представлений группы G, индуцированных непрерывными характерами коммутативной подгруппы A (эти индуцированные представления образуют подкольцо представлений согласно очевидному варианту теоремы II.4.7 в [167]). Во вторых, нужно доказать, что размерность любого неприводимого представления группы G не превосходит индекса A в G. Это следует из теоремы Айзекса–Пассмана [128]. Предположим теперь, что выполнено условие (I2). По теореме двойственности Крейна–Таннаки (современное изложение приведено в [81]), подкольцо конечномерных представлений, упомянутое в условии (I2), определяет компактную топологическую группу K, в которую группа G вкладывается с помощью (алгебраического и топологического) гомоморфизма группы G в K, причем элементы данного подкольца представлений образуют (по той же теореме двойственности) полное семейство неприводимых унитарных представлений группы K. Следовательно, размерности всех неприводимых представлений группы K ограничены в совокупности. По упомянутой выше теореме Мура, группа K является конечным расширением коммутативной группы, или, что то же, допускает гомоморфизм на конечную группу с коммутативным ядром. Тогда те же свойства наследуются и подгруппой, являющейся образом группы G в K. Остается напомнить, что этот образ изоморфен группе G, что завершает доказательство утверждения (I3), а поэтому и теоремы 1.10. □

Замечание 1.4. Приведем еще одно условие, равносильное условиям (I1)–(I3):

(I4) группа G допускает непрерывное вложение в компактную полугруппу с раздельно непрерывным отображением, допускающую разделяющее семейство конечномерных представлений, размерности которых ограничены в совокупности.

Действительно, образ группы в компактной полугруппе операторов в конечномерном пространстве является унитарной группой относительно некоторого скалярного произведения, поэтому (I4) $\Rightarrow$ (I1), а импликация (I1) $\Rightarrow$ (I4) очевидна.

Существуют группы, не имеющие непрерывных характеров, но имеющие точное непрерывное унитарное представление. Таковы, например, аддитивные группы вещественных топологических векторных пространств L^p с $p<1$. Непрерывных характеров у них нет, что легко доказывается с помощью результата статьи [215]. С другой стороны, формула

$$f \mapsto T(f), \qquad T(f)g = \exp(if)g, \qquad f \in L^p, \quad g \in L^2,$$

определяет непрерывное представление группы (из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует, что, если $f_n \to 0$ в L^p, то из любой подпоследовательности последовательности f_n можно выделить подпоследовательность f_{n_k}, для которой последовательность операторов умножения на $\exp(if_{n_k})$ стремится к единичному оператору в слабой операторной топологии). Поэтому мы приведем вариант предыдущей теоремы.

Теорема 1.11. *Пусть G — топологическая группа, имеющая семейство непрерывных конечномерных унитарных представлений ограниченной размерности, разделяющее точки группы. Следующие условия равносильны*:

(J1) *алгебра фон Неймана группы G является алгеброй фон Неймана типа I, и степени ее однородных компонент конечны и ограничены в совокупности*;

(J2) *алгебра фон Неймана группы G удовлетворяет полиномиальному тождеству* [73, § 3.6];

(J3) *группа G имеет коммутативную нормальную подгруппу конечного индекса, т.е. является конечным расширением коммутативной топологической группы, семейство непрерывных унитарных представлений которой разделяет точки группы G.*

Доказательство Доказательство получается объединением рассуждений в доказательствах теорем 1.8 и 1.9. □

Замечание 1.5. Сильно экзотические группы являются примерами топологических групп, не имеющих непрерывныз унитарных представлений.

1.8. Непосредственные следствия

Описание групп этого класса основано на описании локально компактных групп, все неприводимые непрерывные унитарные представления которых конечномерны (раздел 1.4).

Теорема 1.12. *Пусть G — локально ограниченная топологическая группа. Следующие условия равносильны*:

(K1) *все неприводимые непрерывные унитарные представления группы G конечномерны*;

(K2) *для любых неприводимых непрерывных унитарных представлений группы G их тензорное произведение определяет представление групповой алгебры $L^1(K)$ пополнения Вейля K группы G компактными операторами*;

(K3) *любая окрестность единичного элемента группы G содержит такую замкнутую нормальную подгруппу N, что некоторая нормальная подгруппа конечного индекса в G/N изоморфна плотной подгруппе W прямого произведения аддитивной группы конечномерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ и прямого произведения связной компактной группы Ли L и центральной дискретной группы D, т.е. $G/N \approx W$, $W \subset (D \times L) \times V$, $\overline{W} = (D \times L) \times V$.*

Доказательство. Пусть G — локально ограниченная топологическая группа, удовлетворяющая условию (K1). Согласно [217], локально ограниченную группу G можно рассматривать как плотную подгруппу некоторой локально компактной группы K — так называемого *пополнения Вейля* группы G — и любое непрерывное унитарное представление группы G имеет (единственное) непрерывное продолжение до непрерывного унитарного представления группы K (в том же гильбертовом пространстве). Тем самым, K — локально компактная топологическая группа, все неприводимые непрерывные унитарные представления которой конечномерны, и, согласно теореме 1.5, условие (K1) равносильно каждому из следующих двух условий:

(K4) для любых неприводимых непрерывных унитарных представлений группы K их тензорное произведение определяет представление групповой алгебры $L^1(K)$ пополнения Вейля K группы G компактными операторами;

(K5) локально компактная группа H является проективным пределом групп Ли, каждая из которых содержит такой замкнутый нормальная подгруппа N, что некоторая нормальная подгруппа конечного индекса в H/N изоморфна прямому произведению аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ конечномерного векторного пространства и прямого произведения связной компактной группы Ли и центральной дискретной группы.

Эти утверждения очевидным образом равносильны условиям (K2) и (K3), соответственно. □

Более точный результат, чем условие (K3), можно получить в предположении, что группа G локально псевдокомпактна.

Следствие 1.3. *Пусть G — локально псевдокомпактная топологическая группа. Тогда условия* (K1), (K2) *равносильны следующему условию*:

(K6) *любая окрестность единичного элемента группы G содержит такую замкнутую нормальную подгруппу N типа G_δ, что некоторая нормальная подгруппа конечного индекса в G/N изоморфна прямому произведению аддитивной группы конечномерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ и произведения связной компактной группы Ли L и центральной дискретной группы D, т.е. $G/N \approx (D \times L) \times \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1.11, обозначим через H пополнение Вейля группы G. Как мы видели выше, локально компактная группа H является проективным пределом групп Ли, каждая из которых содержит такую замкнутую нормальную подгруппу N, что некоторая нормальная подгруппа конечного индекса в H/N изоморфна прямому произведению аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ конечномерного векторного пространства и произведения связной компактной группы Ли и центральной дискретной группы. Поскольку группы Ли метризуемы, то нормальная подгруппа M в H, фактор-группа по которому является группой Ли, есть замкнутая нормальная подгруппа типа G_δ, и поэтому $M \cap G$ — псевдокомпактная нормальная подгруппа в G. Следовательно, фактор-группа $G/(M \cap G)$ локально компактна [60]. Таким образом, эта фактор-группа полна по Дьедонне [80, п. 8.5.13]. Согласно теореме 4.7 в [187] и теоремам 2.6 и 3.1 в [61], локально компактные факторгруппы $G/(M \cap G)$ и H/M естественно изоморфны, что и приводит к уточнению в условии (K6) по сравнению с условием (K5). □

Глава 2. Условия непрерывности представлений в терминах колебания в точке

2.1. Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах

Начиная с теоремы Банаха 1932 года [35, теорема 1.4], утверждающей, что измеримый по Бэру гомоморфизм одной полной сепарабельной метризуемой группы в другую непрерывен, изучались условия сильной непрерывности измеримых, борелевских и бэровских гомоморфизмов и представлений топологических групп и полугрупп (см., например, [33, 96, 130, 162, 163, 169, 170, 176, 188] и родственные результаты в [87]). Однако условие измеримости отображения является ограничительным, и проверка этого условия не всегда проста. Например, если K — локально компактное пространство, снабженное непрерывным действием α аменабельной (см., например, [103]) локально компактной группы G, F — непрерывная функция на K, а функция f определяется как результат применения некоторого инвариантного среднего на G к непрерывной функции двух переменных на $G \times K$, заданной формулой $(g,k) \mapsto \alpha(g,k)$, $g \in G$, $k \in K$, то вопрос об измеримости функции f на K не решен даже в случае, когда K — компакт, а G — группа целых чисел (и это создает пока что не преодоленное затруднение в реализации программы А. М. Вершика, высказанной в п. 2 подстрочного примечания на с. 125 в [1] и состоящей в попытке доказать эргодическую теорему с помощью применения теоремы Фубини к продолжению функции на стоун-чеховское замыкание по переменной из G); во всяком случае, даже для компактного пространства K нельзя гарантировать измеримость f по Борелю (соответствующий пример приведен в несколько упрощенном виде в [236]), и тем более нельзя гарантировать непрерывность функции f.[1] Существенную помощь в решении проблем измеримости

[1] В этой ситуации искушение “применить” теорему Фубини или “воспользоваться” непрерывностью функции f не было преодолено в нескольких публикациях. Так, в [141] была сформулирована теорема, что если G — аменабельная локально компактная группа и ρ — сильно непрерывное отображение G в группу унитарных операторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющее условию $\|\rho(gg') - \rho(g)\rho(g')\| \leqslant \varepsilon$ для достаточно малого ε и для всех $g,g' \in G$, то существует непрерывное представление S группы G в том же пространстве, удовлетворяющее условию $\|\rho(g) - S(g)\| \leqslant 2\varepsilon$ для всех $g \in G$. Как известно, доказатель-

оказывают иногда методы теории банаховых алгебр.[2] Но сложность ситуации увеличивается при рассмотрении не обязательно ограниченных представлений некоммутативных групп; тогда, с точки зрения теории банаховых алгебр, нужно пользоваться менее изученными групповыми алгебрами с весом (на общих локально компактных группах), для которых в настоящее время нет некоторых важных инструментов, в том числе критерия аменабельности. Поэтому желательно, с одной стороны, ограничиться средствами собственно группового языка, а с другой — отказаться от сильного предположения измеримости.

В связи с этим здесь условия непрерывности изучаются на основе оценки величины сильной вариации в точке. В частности, доказывается следующий критерий непрерывности представлений локально компактных групп ограниченными линейными операторами в сопряженном банаховом пространстве.

Теорема 2.1. *Пусть G — топологическая группа, π — ее* (*теоретико-групповое*) *представление в сопряженном банаховом пространстве E слабо* непрерывными линейными операторами. Следующие условия равносильны*:

1) *представление π непрерывно в сильной* (*или, что равносильно, в слабой*) *операторной топологии*[3];

2) *существует такое число $q \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant q < 1$, что для любого единичного вектора ξ в пространстве E представления π существует такая окрестность $U = U(\xi) \subset G$ единичного элемента $e \in G$, что $\|\pi(g)\xi - \xi\| \leqslant q$ для всех $g \in U$.*

Таким образом, если сильное колебание представления локально компактной группы в сопряженном банаховом пространстве удовлетворяет неравенству в условии п. 2) теоремы 2.1, то это колебание равно нулю, и представление непрерывно.

ство этого факта в [141] содержит упомянутый выше пробел, который может быть преодолен, например, с помощью основного результата статьи Джонсона [133]. Сходный пробел имеется и в недавней работе [51] (где рассматривалась аналогичная задача в одномерном случае, в котором правильное решение давно известно [92]).

[2]Например, решение проблемы измеримости функции на локально компактной группе, ответственной за данное дифференцирование из групповой алгебры в ее сопряженное пространство, использует именно эту технику [138].

[3]Напомним, что для любой локально компактной группы сильная непрерывность ее представления в любом банаховом пространстве равносильна слабой непрерывности этого представления. Единственное доказательство этого утверждения, опубликованное в монографии на русском языке [12, гл. 3, § 1, п. 4], содержит и ошибку, и пробел. В оригинальном доказательстве де Лю и Гликсберга [149], которое авторы приписывают Миркилу, не обоснована принадлежность результата интегрирования исходному банахову пространству, а не просто его второму сопряженному. Полное доказательство приведено в [130].

Возникает естественный вопрос о возможности улучшения величины постоянной q, обеспечивающей непрерывность представления. Очевидный пример унитарного представления группы $\mathbb{R}$ сдвигами в пространстве $l^2(\mathbb{R})$ показывает, что нельзя заменить условие $q<1$ постоянной $q=\sqrt{2}$. Как мы увидим, представления локально компактных групп в конечномерных нормированных пространствах допускают улучшение общей оценки для q.

Предыдущая теорема имеет следующее очевидное следствие.

Следствие 2.1. *Пусть G — локально компактная группа, T — ее сильно непрерывное отображение в группу ограниченных ограниченно обратимых линейных операторов в сопряженном банаховом пространстве E, и пусть существует такое представление π группы G в E, что $\|\pi(g)-T(g)\|\leqslant C$ для всех $g\in G$ и некоторого C, $C<1/2$. Тогда представление π сильно непрерывно.*

Пусть $\mathbb{T}$ — одномерный тор, $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbb{N}$ — натуральный ряд, $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел. Символы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ используются также для обозначения аддитивных групп соответствующих полей.

В дальнейшем термин "топологическая группа" означает "отделимая топологическая группа".

Определение 2.1. Пусть G — топологическая группа, π — ее (теоретико-групповое) представление в нормированном пространстве E. Введем *сильную вариацию $\epsilon(\pi;\xi;U)\geqslant 0$ представления π в окрестности U единичного элемента e группы G на векторе $\xi\in E$*, полагая $\epsilon(\pi;\xi;U)$ равной верхней грани $\sup_{g\in U}\|\pi(g)\xi-\xi\|$, и *сильную вариацию $\epsilon(\pi;\xi)\geqslant 0$ представления π в единичном элементе e группы G на векторе $\xi\in E$*, полагая $\epsilon(\pi;\xi)$ равной нижней грани величин $\sup_{g\in U}\|\pi(g)\xi-\xi\|$ по всем окрестностям $U\subset G$ единичного элемента $e\in G$, т.е.

$$\epsilon(\pi;\xi)=\inf_{U\ni e}\epsilon(\pi;\xi;U)=\inf_{U\ni e}\sup_{g\in U}\|\pi(g)\xi-\xi\|.$$

Положим $\epsilon(\pi)=\sup_{\|\xi\|\leqslant 1}\epsilon(\pi;\xi)$. Аналогично вводится *слабая вариация $\omega(\pi,\xi,f)$ представления π на векторе $\xi\in E$ и функционале $f\in E^*$*, $\|\xi\|\leqslant 1$, $\|f\|\leqslant 1$:

$$\omega(\pi,\xi,f)=\inf_{U\ni e}\sup_{g\in U}|f(\pi(g)\xi-\xi)|$$

(E^* — пространство, сопряженное к E); положим

$$\omega(\pi)=\sup_{\|\xi\|\leqslant 1,\|f\|\leqslant 1}\omega(\pi;\xi,f),$$

и *слабая* вариация* $\omega^*(\pi,\xi,f)$ *представления* π *на векторе* $\xi \in E$ *и функционале* $f \in E_*$, $\|\xi\| \leqslant 1$, $\|f\| \leqslant 1$, если E — пространство, сопряженное к E_*:

$$\omega^*(\pi,\xi,f) = \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} |(\pi(g)\xi - \xi)f|.$$

Положим $\omega^*(\pi) = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1, \|f\| \leqslant 1} \omega^*(\pi;\xi,f)$.

Определение 2.2. Пусть G — топологическая группа, π — ее (теоретико-групповое) представление в нормированном пространстве E. Мы будем говорить, что π *локально равномерно ограничено*, если существует окрестность V единичного элемента e в G и постоянная C, удовлетворяющие условию $\|\pi(g)\| \leqslant C$ для любого $g \in V$.

Лемма 2.1. *Пусть G — топологическая группа, π — ее (теоретико-групповое) представление в нормированном пространстве E. Пусть $\epsilon(\pi;\xi)$, $\omega(\pi,\xi,f)$ (и $\omega^*(\pi,\xi,f)$, если E — сопряженное пространство) — вариации представления π, введенные в определении 2.1.*

1. *Если $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, то неравенство $\epsilon(\pi,\xi) \leqslant a$ выполняется для всех $\xi \in E$ тогда и только тогда, когда для любого $b > a$ и любого единичного вектора ξ в пространстве E представления π существует такая окрестность $U = U(\xi) \subset G$ единичного элемента $e \in G$, что $\|\pi(g)\xi - \xi\| < b$ для всех $g \in U$. Аналогичное описание имеет величина $\omega(\pi,\xi,f)$ и величина $\omega^*(\pi,\xi,f)$ (если она определена).*

2. *Представление π сильно (слабо, слабо*) непрерывно тогда и только тогда, когда $\varepsilon(\pi;\xi) = 0$ для всех $\xi \in E$ (соответственно $\omega(\pi;\xi,f) = 0$ для всех $\xi \in E$ и всех $f \in E^*$, $\omega^*(\pi,\xi,f) = 0$ для всех $\xi \in E$ и всех $f \in E_*$).*

3. *Для сопряженного к π представления π^* группы G в пространстве E^*, сопряженном к E, справедливо равенство $\omega^*(\pi^*;f,\xi) = \omega(\pi;\xi,f)$ для всех $\xi \in E$ и всех $f \in E^*$.*

4. *Если величина $\epsilon(\pi)$ конечна, а группа G локально компактна, то представление π локально равномерно ограничено. В частности, если группа G компактна, то представление π ограничено. Аналогичное утверждение справедливо и для характеристик ω и ω^*.*

Доказательство. Утверждение 1 непосредственно следует из определения величин $\epsilon(\pi;\xi)$, $\omega(\pi,\xi,f)$ (и $\omega^*(\pi,\xi,f)$ (см. формулы в определении 2.1), утверждение 3 — из определения величин $\omega(\pi,\xi,f)$ (и $\omega^*(\pi,\xi,f)$ в определении 2.1 и из определения сопряженного представления, а утверждение 2 — из утверждения 1.

Докажем утверждение 4 для характеристики ϵ. Пусть V — окрестность единичного элемента в группе G, имеющая компактное замыкание K, пусть θ — единичный вектор в пространстве E, и пусть V_θ — окрестность единичного элемента в группе G, удовлетворяющая условию $\|\pi(g)\theta-\theta\|\leqslant q$ для всех $g\in V_\theta$. Конечное семейство сдвигов окрестности V_θ покрывает K; пусть $K=\bigcup_{i=1}^N g_iV_\theta$. Тогда для любого $g\in V$ имеем $g=g_ig'$, $g'\in V_\theta$, и

$$\|\pi(g)\theta\|=\|\pi(g_i)\|\|\pi(g')\theta\|\leqslant\|\pi(g_i)\|(1+q),$$

где набор $\{g_i\}$ конечен. Таким образом, для любого вектора $\theta\in E$, норма которого равна единице, V-орбита вектора θ ограничена в E. Из принципа равномерной ограниченности следует, что нормы операторов $\pi(g)$, $g\in V$, ограничены в совокупности. Доказательства для характеристик ω и ω^* аналогичны. Это завершает доказательство леммы 2.1. □

Лемма 2.2. *Пусть G — локально компактная группа, G_i, $i=1,\dots,n$, — такой конечный набор метризуемых локально компактных групп, снабженных непрерывными гомоморфизмами $\varphi_i\colon G_i\to G$, что ограничение φ_V отображения φ произведения $G_1\times\dots\times G_n$ на G, определяемого формулой $\varphi(g_1,\dots,g_n)=$ $=\varphi_1(g_1)\cdots\varphi_n(g_n)$, где $g_i\in G_i$ для всех $i=1,\dots,n$, на некоторую окрестность V единичного элемента e группы $G_1\times\dots\times G_n$ является гомеоморфизмом. Пусть π — (теоретико-групповое) представление группы G в банаховом пространстве. Если представление π непрерывно в сильной (слабой, слабой*) операторной топологии на образе каждой подгруппы G_i в G, то представление π сильно (слабо, слабо*) непрерывно. В частности, если G — связная группа Ли и ее представление π непрерывно в сильной (слабой, слабой*) операторной топологии на каждой однопараметрической подгруппе группы G, то оно непрерывно в сильной (слабой, слабой*) операторной топологии.*

Доказательство. Для всех трех топологий доказательства однотипны. Приведем доказательство для сильной операторной топологии. Поскольку π — представление, то

$$\pi(\varphi_1(g_1)\cdots\varphi_n(g_n))=\pi(\varphi_1(g_1))\cdots\pi(\varphi_n(g_n))\quad\forall\, g_i\in G_i.$$

Отображение $\psi\colon G_1\times\dots\times G_n\supset V\ni(g_1,\dots,g_n)\mapsto\pi(\varphi_1(g_1))\cdots\pi(\varphi_n(g_n))$, где $g_i\in G_i$ для всех $i=1,\dots,n$, очевидным образом покоординатно непрерывно на окрестности V единичного элемента в локально компактной группе $G_1\times\cdots\times G_n$. Можно считать, что V содержит замыкание произведения $\prod_{i=1}^n V_i$ для некоторых окрестностей V_i единичных элементов в группах G_i, $i=1,\ldots,n$. Так как каждое отображение π_i группы G_i по правилу $\pi\circ\varphi_i$, $i=1,\ldots,n$, непрерывно, то π_i-образ замыкания $\overline{V_i}$ окрестности V_i является метризуемым компактом в пространстве $\mathscr{L}(E)$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве E представления π, где пространство $\mathscr{L}(E)$ снабжено сильной операторной топологией. Поскольку умножение операторов непрерывно по совокупности переменных в сильной операторной топологии на ограниченных множествах, мы видим, что сквозное отображение $G_1\times\cdots\times G_n\to G\to\mathscr{L}(E)$, определенное формулой $(g_1,\ldots,g_n)\mapsto g_1\cdots g_n\mapsto\pi(\varphi_1(g_1))\cdots\pi(\varphi_n(g_n))$, сильно непрерывно по совокупности переменных[4]. Таким образом, ввиду постулированного в условии теоремы локального гомеоморфизма, представление π группы G имеет точки сильной непрерывности. Но представление, сильно непрерывное хотя бы в одной точке, сильно непрерывно всюду.

Рассмотрим случай, когда G — связная группа Ли. Выберем базис $e_1,\ldots,e_n$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G и рассмотрим отображение конечномерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ в G, определенное формулой

$$\mathbb{R}\ni t=(t_1,\ldots,t_n)\mapsto g(t)=\exp(t_1e_1)\cdots\exp(t_ne_n)\in G.$$

Это отображение гладко и имеет в нуле единичную матицу Якоби. Поэтому оно определяет диффеоморфизм некоторой окрестности V нуля в $\mathbb{R}^n$ на окрестность U единичного элемента в G. В частности, набор однопараметрических подгрупп $G_i=\{\exp t_ie_i\,|\,t_i\in\mathbb{R}\}$ удовлетворяет условиям, предъявляемым в первой части леммы. Это завершает доказательство леммы 2.2. $\square$

Из доказательства леммы 2.2 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 2.2. *Пусть G — группа Ли, π — ее (теоретико-групповое) представление в банаховом пространстве. Если представление π непрерывно в сильной операторной топологии на каждой однопараметрической подгруппе группы G, то оно непрерывно в сильной операторной топологии.*

Следующий вспомогательный результат, лемма 2.3, является главным техническим средством в доказательстве основных результатов. Одновременно

[4]Этим прямым доказательством непрерывности отображения по совокупности переменных автор обязан А.С. Мищенко. Первоначальное доказательство использовало косвенные средства.

он проясняет связь между введенными выше понятиями и одним из самых слабых условий непрерывности представления. Нам понадобится следующая топология в пространстве непрерывных линейных операторов в пространстве представления.

Определение 2.3. Пусть E — банахово пространство, сопряженное к некоторому банахову пространству E_*, и пусть $\mathscr{L}(E)$ — пространство непрерывных линейных операторов в E. *Слабой* операторной топологией* в $\mathscr{L}(E)$ назовем топологию, определяемую семейством полунорм вида $T \mapsto |f(Tx)|$, где $T \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ и $f \in E_*$.

Поскольку, вообще говоря, пространство E_* не определяется пространством E однозначно, то слабая* операторная топология может тоже оказаться зависящей от выбора E_*. Выберем одну из них.

Лемма 2.3. *Пусть E — сопряженное к E_* банахово пространство, G — топологическая группа и π — локально равномерно ограниченное (теоретико-групповое) представление группы G в банаховом пространстве E слабо* непрерывными линейными операторами. Если $\omega^*(\pi;\xi,f) \leqslant q < 1$ для всех $\xi \in E$ и $f \in E_*$, то $\omega^*(\pi) = 0$, т.е. представление π непрерывно в слабой* операторной топологии.*

Доказательство. Мы рассмотрим пространство $\mathscr{L}(E)$ непрерывных линейных операторов в пространстве E представления π в слабой* операторной топологии. Пусть M — пересечение замыканий $\overline{\pi(V)}$ (здесь и далее черта означает замыкание множества в слабой* операторной топологии) образов $\pi(V)$ всевозможных окрестностей $V \subset G$ единичного элемента группы G. Поскольку представление π ограничено на некоторой окрестности V_0 единичного элемента, то для окрестностей $V \subset V_0$ множества $\overline{\pi(V)}$ компактны в слабой* операторной топологии как замкнутые подмножества компактных множеств.

Пусть T — некоторый элемент множества M. Докажем, что $T = 1_E$. Ввиду только что отмеченной компактности множеств $\overline{S(V)}$ равенство $M = \{1_E\}$ равносильно слабой* непрерывности представления π в e. Действительно, дополнение любой окрестности нуля W в множестве $\overline{\pi(V_0)}$ (для такой окрестности V_0, что $\overline{\pi(V_0)}$ компактно в слабой* операторной топологии) тоже компактно в слабой* операторной топологии. Если $M = \{1_E\}$, то пересечение $M \cap (\overline{\pi(V_0)} \setminus W)$ пусто, и поэтому существует конечный набор множеств вида

$\overline{\pi(V_i)}$, $i=1,\dots,N$, для которых пересечение

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{N}\overline{\pi(V_i)}\Big)\cap\big(\overline{\pi(V_0)}\setminus W\big)$$

пусто, так что $\pi(V)\subset W$ для $V=V_0\cap\big(\bigcap_{i=1}^{N}V_i\big)$.

Так как для любого единичного вектора $\xi\in E$ и любого функционала $f\in E_*$ единичной длины окрестность $U(\xi)$ участвует в построении множества M, то $|(T\xi-\xi)f|\leqslant q$ для всех единичных векторов $\xi\in E$ и функционалов $f\in E_*$ единичной длины. Таким образом, $\|T-1_E\|\leqslant q$.

Для любой окрестности V единичного элемента в G и любого натурального n существует окрестность W единичного элемента в G, удовлетворяющая условию $W^{2^n}\subset V$. Отсюда следует, что $\pi(W)^{2^n}\subset\pi(V)$, и, очевидно, $(\pi(W))^{2^n}\subset\pi(V)\subset\overline{\pi(V)}$. Пусть $n=1$. Тогда $\pi(W)\pi(W)\subset\pi(V)$ для любого α и, так как умножение раздельно непрерывно в слабой* операторной топологии, то для любого $B\in\pi(W)$ из очевидного соотношения $B\pi(W)\subset\pi(V)$ следует $B\overline{\pi(W)}\subset\overline{\pi(V)}$, откуда $\pi(W)\overline{\pi(W)}\subset\overline{\pi(V)}$. В свою очередь, это значит, что для любого $B\in\overline{\pi(W)}$ из очевидного соотношения $\pi(W)B\subset\overline{\pi(V)}$ следует $\overline{\pi(W)}B\subset\overline{\pi(V)}$, откуда $\overline{\pi(W)\pi(W)}\subset\overline{\pi(V)}$. По индукции отсюда следует, что для любой окрестности V единичного элемента в G и любого натурального n и окрестности W единичного элемента в G, удовлетворяющей условию $W^{2^n}\subset V$, имеем $(\overline{\pi(W)})^{2^n}\subset\overline{\pi(V)}$. В частности, поскольку $T\in\overline{\pi(O)}$ для любой окрестности O единичного элемента, то $T^n\in\overline{\pi(V)}$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и для всех окрестностей V единичного элемента в G, откуда следует, что $T^n\in M$. Как мы видели выше, отсюда следует, что $\|T^n-1_E\|\leqslant q$ для всех натуральных n.

Пусть E_* — пространство, к которому сопряжено E. Пусть I — некоторое инвариантное среднее на $\mathbb{N}$. Для любого $f\in E_*$ и любого $x\in E$ положим $(Ax)(f)=I_n((T^nx)(f))$ (аналогичный прием использован в существенно более общей ситуации в [230]). Мы получаем непрерывный линейный функционал на E_*, т.е. вектор $Ax\in E$, причем

$$\begin{aligned}|((A-1_E)x)(f)|&=|I_n(((T^n-1_E)x)(f))|\\&\leqslant\sup|((T^n-1_E)x)(f)|\leqslant\|T^n-1_E\|\|x\|\|f\|\leqslant q\|x\|\|f\|\end{aligned}$$

для любых $f\in E_*$ и $x\in E$. Мы получаем непрерывный линейный оператор A в E, причем $\|A-1_E\|\leqslant q<1$, так что A непрерывно обратим. Кроме того, из инвариантности среднего следует, что для любого $f \in E_*$ и любого $x \in E$ имеем $(ATx)(f) = I_n((T^{n+1}x)(f)) = I_n((T^n x)(f)) = (Ax)(f)$, т.е. $AT = A$. Умножая на A^{-1} слева, получаем, что $T = 1_E$, и поэтому представление π слабо* непрерывно в единичном элементе, а тогда и всюду на G. Это доказывает лемму 2.3. □

Теорема 2.1 немедленно следует из леммы 2.3.

Для обеспечения сильной непрерывности слабо непрерывных представлений не обязательно локально компактных групп нам понадобится понятие банахова пространства, имеющего свойство точек непрерывности, и это понятие не может считаться общеизвестным. Введем необходимое определение.

Определение 2.4. Банахово пространство F называется *пространством, имеющим свойство точек непрерывности*, если для любого непустого ограниченного слабо замкнутого множества $M \subset F$ существует точка в M, в которой ограничение на M тождественного отображения пространства F в слабой топологии в пространство F в сильной топологии непрерывно.

Любое рефлексивное банахово пространство, и вообще любое банахово пространство со свойством Радона–Никодима, имеет свойство точек непрерывности, но обратные утверждения не имеют места (см. [40, 41, 97]). Пространство $l^1(M)$ для любого (не обязательно счетного) множества M и пространство операторов со следом в любом (не обязательно сепарабельном) гильбертовом пространстве имеют свойство точек непрерывности [57].

Следующая вспомогательная теорема устанавливает достаточные условия сильной непрерывности слабо непрерывных представлений. Все технические средства, необходимые при ее доказательстве, могут быть найдены в [155], и теорема легко выводится из теоремы 2.5 в [155], использующей технику фрагментируемых множеств в банаховых пространствах, но в нужном нам виде утверждение отсутствует и в [155], и в других статьях, посвященных связи между слабой и сильной непрерывностью. Мы приводим точную формулировку и элементарное доказательство для полноты изложения.

Теорема 2.2. *Пусть G — топологическая группа, и пусть π — локально равномерно ограниченное представление группы G в банаховом пространстве E, имеющем свойство точек непрерывности. Если π слабо непрерывно (т.е. отображение $g \mapsto f(\pi(g)\xi)$, $g \in G$, непрерывно для любых $f \in E^*$ и $\xi \in E$), то представление π непрерывно в сильной операторной топологии.*

Доказательство. Пусть $\xi \in E$, пусть V — окрестность, на которой представление π равномерно ограничено, и пусть $M = \{\pi(g)\xi \mid g \in V\}$ — ξ-образ окрестности единичного элемента в G, на которой представление π равномерно ограничено (скажем, $\|\pi(g)\| \leqslant C$ для всех $g \in V$), поэтому M — непустое ограниченное подмножество в E. Поскольку по условию пространство E имеет свойство точек непрерывности, то для непустого ограниченного множества $M \subset E_*$ существует точка m в слабом замыкании $\overline{\operatorname{conv} M}$ выпуклой оболочки $\operatorname{conv} M$ множества M, в которой ограничение на M тождественного отображения пространства E в слабой топологии в пространство E в сильной топологии непрерывно. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ сильная окрестность $\{x \mid x \in \overline{\operatorname{conv} M}$ и $\|x - \mu\| < \varepsilon/2\}$ точки m в $\overline{\operatorname{conv} M}$ содержит относительную слабую окрестность, диаметр которой поэтому не превосходит ε. Полный прообраз W этой слабой окрестности непуст и открыт в группе G. Рассмотрим пересечение $V \cap W$. Образ этого открытого множества на векторе ξ имеет малый сильный диаметр. Пусть $g_0 \in V \cap M$. Множество $g_0^{-1} V \cap W$ тоже открыто в G и содержит единичный элемент $e \in G$. Диаметр образа N этого множества в M не превосходит $C\varepsilon$, так что этот диаметр сколь угодно мал вместе с ε. С другой стороны, N содержит вектор ξ. Таким образом, N содержится в шаре радиуса $C\varepsilon$ с центром в ξ и отображение $g \mapsto \pi(g)\xi$ сильно непрерывно в e. Так как ξ произволен, то π сильно непрерывно в e и, следовательно, сильно непрерывно всюду. $\square$

В частности, для любой топологической группы слабая непрерывность локально ограниченных представлений этой группы в рефлексивных банаховых пространствах (и тем более ее унитарных представлений в гильбертовых пространствах) равносильна сильной непрерывности этих представлений.

Теорема 2.3. *Пусть E — банахово пространство, G — топологическая группа и π — локально равномерно ограниченное (теоретико-групповое) представление группы G в банаховом пространстве E. Если $\omega(\pi;\xi,f) \leqslant q < 1$ для всех $\xi \in E$ и $f \in E^*$, то $\omega(\pi;\xi,f) = 0$ для всех $\xi \in E$ и $f \in E^*$, т.е. представление π непрерывно в слабой операторной топологии.*

Доказательство. Рассмотрим сопряженное к представлению π представление π^* в пространстве E^*, сопряженном к E ($\pi^*(g) = \pi(g^{-1})^*$). Поскольку π локально равномерно ограничено, то и π^* локально равномерно ограничено. Из условия $\omega(\pi) < 1$ сразу следует, что $\omega^*(\pi^*) = \omega(\pi) < 1$. По лемме 2.3

представление π^* слабо* непрерывно. Отсюда и из определения сопряженного представления следует, что π слабо непрерывно. Это доказывает теорему 2.3. $\square$

Следующий критерий непосредственно следует из предыдущей теоремы.

Следствие 2.3. *Пусть E — банахово пространство, имеющее свойство точек непрерывности. Пусть G — топологическая группа, и пусть π — локально равномерно ограниченное (теоретико-групповое) представление группы G в банаховом пространстве E. Если $\omega(\pi;\xi,f) \leqslant q < 1$ для всех $\xi \in E$ и $f \in E^*$, то $\epsilon(\pi;\xi) = 0$ для всех $\xi \in E$, т.е. представление π непрерывно в сильной операторной топологии.*

Доказательство. По теореме 2.3 представление π слабо непрерывно. Так как E — банахово пространство, имеющее свойство точек непрерывности, то применение теоремы 2.2 завершает доказательство сильной непрерывности представления π. $\square$

В частности, для любой топологической группы G и любого ее ограниченного представления π в рефлексивном банаховом пространстве (и тем более унитарного представления в гильбертовом пространстве) условие $\omega(\pi) < 1$ равносильно сильной непрерывности представления π.

Теперь мы можем доказать основной результат раздела о сильной непрерывности представлений локально компактных групп.

Следствие 2.4. *Пусть G — локально компактная группа, и пусть π — (теоретико-групповое) представление группы G в банаховом пространстве E, имеющем свойство точек непрерывности, слабо* непрерывными линейными операторами. Если выполнено хотя бы одно из двух условий:*

1. *$\epsilon(\pi;\xi) \leqslant q < 1$ для всех $\xi \in E$;*
2. *представление π локально равномерно ограничено и $\omega(\pi;\xi,f) \leqslant r < 1$ для всех $\xi \in E$ и $f \in E^*$,*

то $\epsilon(\pi,\xi) = 0$ для всех $\xi \in E$, т.е. представление π непрерывно в сильной операторной топологии.

Доказательство. В случае 2) утверждение получается применением следствия 2.3. В случае 1) нужно еще сослаться на утверждения 3) и 4) леммы 2.1. $\square$

2.2. Условия непрерывности конечномерных локально ограниченных представлений локально компактных групп

Рассмотрим теперь случай конечномерных представлений связных локально компактных групп и покажем, что в этом случае неравенство в условии теорем о непрерывности локально ограниченных представлений может быть существенно ослаблено. Сначала разберем случай связной группы Ли.

Теорема 2.4. *Пусть G — связная группа Ли, и пусть π — (теоретико-групповое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E. Если $\epsilon(\pi) < 2$, то $\epsilon(\pi) = 0$, т.е. представление π непрерывно в сильной операторной топологии.*

Поскольку для конечномерного нормированного пространства слабая и сильная операторная топология совпадают, то аналогичное утверждение справедливо для характеристики ω.

Напомним следующее определение.

Определение 2.5. Пусть G — группа, X — подмножество в G. Множество X называется *делимым*, если для любого элемента $x \in X$ и любого натурального p существует такой элемент $y \in X$, что $y^p = x$. Если $X = G$, то группа G называется делимой. Группа G называется *локально делимой*, если операция возведения в любую натуральную степень p открыта в единице группы, т.е. для любого натурального p множество p-х степеней элементов, пробегающих любую окрестность единицы в G, содержит некоторую окрестность единицы в G.

Доказательство теоремы. Согласно лемме 2.2 достаточно рассмотреть случай однопараметрической подгруппы и можно считать соответствующее ограничение представления π представлением группы $\mathbb{R}$. Рассмотрим базис $k_1, \ldots, k_n$ для коммутативного семейства $\pi(\mathbb{R})$ операторов в пространстве E, в котором матрицы представления имеют треугольную форму. Достаточно доказать непрерывность представления в каждом из корневых подпространств представления (в которых на диагонали стоят одинаковые элементы для всех $x \in \mathbb{R}$, причем в разных подпространствах эти диагональные элементы связаны с разными характерами; таким образом, конечномерное представление коммутативной группы есть прямая сумма треугольных блоков, в каждом из которых на диагонали стоит один и тот же характер). Итак, рассмотрим такое корневое подпространство, отвечающее диагональному характеру χ. Эти характеры можно считать представлениями коммутативной факторгруппы замыкания $\overline{\pi(G)}$ образа $\pi(G)$ группы G в представлении π по его коммутанту $\overline{\pi(G)}'$, и эта факторгруппа очевидно является линейной коммутативной группой Ли, компонента единицы которой имеет конечный индекс. Эта компактная группа является произведением конечномерной векторной группы и компактной коммутативной группы Ли, компонента единицы которой имеет конечный индекс. Сама группа G порождена любой окрестностью единичного элемента. Выберем делимую окрестность единицы U в G. Ее образ не может содержать элементов группы $\pi(G)$, не лежащих в компоненте единицы группы $\overline{\pi(G)}$, так как они не имеют корней степени, равной индексу компоненты. Поэтому все степени $\pi(U)$ лежат в компоненте единицы и, следовательно, группы $\pi(G)$ и $\overline{\pi(G)}$ связны. Поэтому замыкание образа характера χ связно и является замкнутой связной подгруппой одномерного тора. Из условия $\epsilon(\pi) < 2$ (как и из аналогичных условий для характеристик ω и ω^*) следует, что это замыкание образа не содержит нетривиальной дуги на единичной окружности с центром в точке -1, и поэтому это замыкание состоит только из единицы. Единичный характер непрерывен, так что непрерывность каждого характера χ доказана.

Домножим представление в соответствующем корневом подпространстве на скалярную функцию χ^{-1}. Тогда в соответствующем корневом подпространстве матрица оператора представления является верхней треугольной с единицами на главной диагонали. Если это ограничение ρ представления π разрывно, то существует такая стремящаяся к нулю последовательность x_m в $\mathbb{R}$, что $\rho(x_m)$ не стремится к 1. Ввиду ограниченности образа окрестностей с компактным замыканием можно считать, что $R(x_m) \to A$, где A — верхняя треугольная матрица с единицами на диагонали, причем, как и выше, последовательность норм $\|A^n\|$ ограничена. Отсюда непосредственно следует, что над главной диагональю верхней треугольной матрицы A нет ненулевых элементов, так что A — единичная матрица. Это доказывает непрерывность представления ρ, а поэтому и представления π, что завершает доказательство теоремы. □

Условие этой теоремы является наилучшим возможным. С помощью базиса Гамеля (в векторном пространстве $\mathbb{R}$ над полем рациональных чисел) нетрудно построить разрывный характер группы $\mathbb{R}$ (или одномерного тора), не принимающий значения -1 (ср. [114, 25.26(e)]) и тем самым удовлетворяющий строгому неравенству $|\chi(x)-1|<2$ для всех $x\in\mathbb{R}$.

Теорема 2.5. *Пусть G — локально компактная группа, и пусть π — (теоретико-групповое) представление группы G в конечномерном нормированном пространстве E. Если $\varepsilon(\pi;\xi)<\sqrt{3}$ для всех $\xi\in E$, то $\varepsilon(\pi)=0$ для всех $\xi\in E$, т.е. представление π непрерывно в сильной операторной топологии*[5].

Доказательство. Пусть G_0 — компонента единицы группы G, Q — компактная подгруппа факторгруппы G/G_0, H — полный прообраз Q в G. Очевидно, достаточно доказать непрерывность ограничения представления π на (открытую) подгруппу $H\subset G$, так что можно предполагать, что группа G в условии леммы почти связна (т.е. факторгруппа группы G по G_0 компактна), и поэтому G можно считать проективно-лиевой группой ([219], [220], [6]).

Рассмотрим некоторый базис $e_1,\dots,e_n$ в пространстве E и для любого e_i, $i=1,\dots,n$, введем соответствующую вектору e_i окрестность $U_i\subset G$ единичного элемента $e\in G$, удовлетворяющую условию $\|\pi(g)e_i-e_i\|<\sqrt{3}$ для всех $g\in U_i$. Пусть N — такая компактная подгруппа группы G, содержащаяся в $U=\bigcap_{i=1}^n U_i$, что факторгруппа G/N есть группа Ли, и пусть N_0 — компонента единицы группы N.

Напомним, что в компактной связной топологической группе G любой элемент g содержится в некоторой максимальной связной коммутативной подгруппе $K_g\subset G$, причем любые две максимальные связные коммутативные подгруппы в G сопряжены в G [32].

Рассмотрим некоторую максимальную связную коммутативную подгруппу $L\subset N_0$. Образ этой группы в представлении π ограничен по лемме 2.1, и замыкание этого образа есть ограниченная (и потому компактная) коммутативная группа матриц. Они имеют общий собственный базис $f_1,\dots,f_n$ в пространстве E. Рассмотрим соответствующую вектору f_i окрестность $V_i\subset G$ единичного элемента $e\in G$, удовлетворяющую условию $\|\pi(g)f_i-f_i\|<\sqrt{3}$ для всех $g\in V_i$. Пусть M — такая компактная подгруппа группы G, содержащаяся в $V=\bigcap_{i=1}^n V_i$, что факторгруппа G/M есть группа Ли. Пусть $R=N\cap M$, и пусть

[5] По-видимому, для связных топологических групп постоянная $\sqrt{3}$ в этой теореме может быть улучшена до 2. А. С. Мищенко предложил следовать с этой целью плану предыдущего доказательства. Непосредственный перенос рассуждения встречает затруднения, поскольку группа $\mathbb{R}$ не только делима, но и локально делима, и именно последний факт использован в доказательстве предыдущей теоремы. Доказательство удается довести до конца в случае коммутативных связных компактных групп.

R_0 — компонента единицы группы R. По построению факторгруппа G/R есть группа Ли с конечным числом компонент связности.

Любая максимальная связная коммутативная подгруппа $C \subset R_0$ нетривиальна, если R_0 нетривиальна, и является связной коммутативной подгруппой в N_0. Поэтому C сопряжена некоторой подгруппе C_1 группы L. Тогда $\pi(C_1)$ (образ группы C_1 в представлении π) есть ограниченная подгруппа в полной линейной группе пространства E, которая тем самым подобна некоторой подгруппе группы унитарных матриц $U(\dim E)$. Перейдем к соответствующей реализации. Поскольку построенный выше базис $f_1,\dots,f_n$ в пространстве E является собственным для C_1, то любой диагональный матричный элемент T_{ii} оператора $T \in \pi(C_1)$, $i = 1,\dots,n$, определяет характер группы C_1, удовлетворяющий условию $|T_{ii}(c)-1| \leqslant \sqrt{3}$ для всех $c \in C_1$. Но единичная окружность не содержит неединичных подгрупп, лежащих в части круга $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $|z-1| < \sqrt{3}$, поэтому $\pi(C_1) = \{1_E\}$. Тогда и $\pi(C) = \{1_E\}$ и, таким образом, $\pi(R_0) = \{1_E\}$. Отсюда следует, что представление π можно считать представлением факторгруппы G/R_0, которая является расширением связной группы Ли G/R с помощью компактной вполне несвязной группы R/R_0.

Рассмотрим замыкание H образа группы R в представлении π. Как и выше, ввиду ограниченности представления π на подгруппе R группа H есть (вообще говоря, несвязная) компактная группа Ли, и прообраз ее компоненты единицы H_0 в R есть подгруппа конечного индекса в R. В связной компактной группе Ли H_0 найдем максимальный тор Σ. Пусть $h_1,\dots,h_n$ — собственный базис для Σ. Рассмотрим окрестности $W_i \subset G/R_0$ единичного элемента $e \in G/R_0$, удовлетворяющие условию $\|\pi(g)h_i - h_i\| < \sqrt{3}$ для всех $g \in W_i$, и построим компактную подгруппу $Q \subset R/R_0$, содержащуюся в $W = \bigcap_{i=1}^n W_i$, для которой факторгруппа $(R/R_0)/Q$ конечна. Образ $\pi(Q)$ содержится в $\pi(R) = H$. Пусть Q_0 — подгруппа группы Q, являющаяся прообразом группы H_0 при отображении π; индекс Q_0 в Q конечен. Любой элемент группы $\pi(Q_0)$, с одной стороны, сопряжен некоторому элементу тора Σ, а с другой — диагонален в базисе $h_1,\dots,h_n$, причем $\|\pi(g)h_i - h_i\| < \sqrt{3}$ для всех $g \in Q_0$. Как и выше, отсюда следует, что образ группы Q_0 в представлении π единичен, и поэтому представление π можно считать представлением факторгруппы $(G/R_0)/Q_0$, которая является расширением связной группы Ли G/R с помощью конечной группы $(R/R_0)/Q_0$. Это сводит задачу к случаю связной группы Ли, изученному (с лучшей константой) в предыдущей теореме, и потому завершает доказательство теоремы 2.5. $\square$

2.3. Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть $\mathbb{T}$ — одномерный тор, $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbb{N}$ — натуральный ряд, $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел. Символы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ используются также для обозначения аддитивных групп соответствующих полей.

Нам нужно следующее вспомогательное утверждение для связных компактных коммутативных групп.

Теорема 2.6. *Пусть G — компактная связная коммутативная группа, в которой есть такая вполне несвязная замкнутая нормальная подгруппа N, что факторгруппа G/N — (компактная связная коммутативная) группа Ли, т.е. (конечномерный) тор. Пусть θ — такой характер группы G, что*

$$|\theta(g)-1| \leqslant q \quad \textit{для некоторого} \quad q<2 \quad \textit{и любого} \quad g\in G$$

в некоторой окрестности U_q единицы в группе G. Тогда характер θ непрерывен.

Доказательство. Пусть $T=G/N$ — тор, упомянутый в условии теоремы. Тогда группа T удовлетворяет всем условиям теоремы 8.20 в [122]. Напомним ее формулировку, что требует некоторых определений. Для любой коммутативной топологической группы G можно ввести векторное пространство $\mathfrak{L}(G)=\mathrm{Hom}(\mathbb{R},G)$ однопараметрических групп в G. Снабдим это пространство топологией равномерной сходимости на компактах, поточечным сложением и умножением на числа по правилу

$$r\cdot X(t)=X(rt) \quad \text{при} \quad X\in\mathfrak{L}(G) \quad \text{и} \quad r,t\in\mathbb{R},$$

что превращает $\mathfrak{L}(G)$ в топологическую группу векторного пространства; отображение $\exp_G\colon \mathfrak{L}(G)\to G$, определенное формулой

$$\exp_G(X)=X(1), \qquad X\in\mathfrak{L}(G),$$

называется *экспоненциальной функцией на G*.

Пусть $\pi\colon G\to G/N=T$ — каноническое отображение, где T — топологическая группа, изоморфная тору $\mathbb{T}^m$ для некоторого $m\in\mathbb{N}$. По теореме 8.20 в [122] гомоморфизм $\varphi\colon N\times\mathfrak{L}(T)\to T$, определенный правилом

$$\varphi(n,X)=n\exp X, \qquad n\in N, \quad X\in\mathfrak{L}(T), \tag{2.1}$$

непрерывен, сюръективен и открыт, а его ядро K алгебраически и топологически отображается на подмножество $\Delta = \ker(\pi \circ \exp_T)$ второго сомножителя при проекции $N \times \mathfrak{L}(T) \to \mathfrak{L}(T)$. Более того, компонента единицы $N \times \mathfrak{L}(T)$ равна $\{0\} \times \mathfrak{L}(T)$, множество $\varphi(\{0\} \times \mathfrak{L}(T))$ плотно в T, пересечение $K \cap (\{0\} \times \mathfrak{L}(T))$ имеет вид $\{0\} \times \mathfrak{K}(T)$, где $\mathfrak{K}(T) = \ker \exp_T$, и морфизм φ факторизуется через факторгруппу $N \times \mathfrak{L}(T) \to N \times (\mathfrak{L}(T)/\mathfrak{K}(T))$ с фактор-морфизмом $\Phi\colon N \times (\mathfrak{L}(T)/\mathfrak{K}(T)) \to T$, заданным формулой

$$\Phi(n, X + \mathfrak{K}(T)) = n \exp X, \qquad n \in N, \quad X \in \mathfrak{L}(T).$$

Наконец, как было показано в [122] в доказательстве теоремы 8.20, индуцированный морфизм $\mathfrak{L}(\pi)\colon \mathfrak{L}(T) \to \mathfrak{L}(T/N)$ является изоморфизмом топологических групп векторных пространств, причем экспоненциальные функции T и T/N связаны соотношением

$$\pi \circ \exp_T = \exp_{T/N} \circ \mathfrak{L}(\pi).$$

В рассматриваемом случае величина n конечна.

Рассмотрим характер θ. По теореме 2.4 характер группы Ли $\mathfrak{L}(G)$ (изоморфной $\mathbb{R}^n$), определяемый композицией $\theta \circ \exp$, непрерывен. Пусть M — компактная открытая нормальная подгруппа в N, лежащая в окрестности U_q [114, § II.7]. Тогда $\theta(M)$ — замкнутая подгруппа $\mathbb{T}$, не содержащая некоторой дуги (вблизи точки -1). Поэтому группа $\theta(M)$ конечна. Так как факторгруппа N/M конечна, то и группа $\theta(N)$ конечна. Следовательно, $\theta(N)$ — группа p-х корней из единицы для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Если $p = 1$, то θ определяется характером группы Ли G/N, и поэтому θ непрерывен. Пусть $p > 1$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $g_0 \in G$. Так как G связна, то она делима [122, следствие 8.5]. Поэтому найдется такой элемент $h_0 \in G$, что $h_0^p = g_0$. Согласно (2.1) мы можем представить h_0 в виде $h_0 = \varphi(n_0, X_0)$, т.е. как произведение $h_0 = n_0 \exp X_0$, $n_0 \in N$, $X_0 \in \mathfrak{L}(G)$. Возьмем окрестность $U(n_0)$ элемента n_0 в N и найдем такую окрестность $V(X_0)$ элемента X_0 в $\mathfrak{L}(G)$, что

$$|(\theta \circ \exp)(X) - (\theta \circ \exp)(X_0)| < \varepsilon/p.$$

Так как возведение в p-ю степень в группе G есть непрерывный гомоморфизм (поскольку G коммутативна) и притом сюръективный (поскольку G делима), то из теоремы об открытом отображении [114, 5.29] следует, что это отображение открыто. Так как множество $U(n_0) \exp(V(X_0))$ открыто по теореме 8.20 в [122], то множество $W = U(n_0)^p(\exp(V(X_0))^p)$ есть окрестность точки

$$n_0^p \exp(X_0)^p = h_0^p = g_0.$$

Если $g \in W$, то g можно представить в виде $g = n^p(\exp X)^p$ для некоторых $n \in U(n_0)$ и $X \in V(X_0)$. Поэтому

$$\theta(g) = \theta(n^p(\exp X)^p) = (\theta(n))^p(\theta(\exp X))^p.$$

Но $\theta(n)^p = 1$, поскольку порядок группы $\theta(N)$ равен p. Таким образом,

$$\theta(g) = \theta(\exp X)^p \quad \text{для любого} \quad g \in W$$

и

$$|\theta(g) - \theta(g_0)| = |\theta(\exp X)^p - \theta(\exp X_0)^p| \leqslant p|\theta(\exp X) - \theta(\exp X_0)| < \varepsilon$$

по построению, что доказывает непрерывность характера θ на G. □

Следующий вспомогательный результат также заслуживает выделения в самостоятельное утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть G — компактная связная группа и π — (теоретико-групповое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E. Пусть $\omega(\pi) < 2$, ω_0 — такое число, что $\omega(\pi) < \omega_0 < 2$, и пусть Ω — такая окрестность единичного элемента $e \in G$, что*

$$|f(\pi(g)\xi - \xi)| \leqslant \omega_0 \|f\| \, \|\xi\|, \, \omega_0 < 2, \quad \textit{для любых } g \in \Omega, \ \xi \in E, \ f \in E^*$$

(см. [242, лемма 1]). *Пусть N — такая замкнутая нормальная подгруппа в G, что $N \subset \Omega$ и факторгруппа G/N — связная группа Ли* [158]. *Тогда связная компонента N_0 группы N лежит в ядре представления π.*

Доказательство. Пусть ω_0 удовлетворяет условию $\omega(\pi) < \omega_0 < 2$. По лемме 2.1 существует такая окрестность Ω единичного элемента $e \in G$, что

$$|f(\pi(g)\xi - \xi)| \leqslant \omega_0 \|f\| \, \|\xi\|, \qquad \omega_0 < 2,$$

для любых $g \in \Omega$, $\xi \in E$, $f \in E^*$.

Согласно [158], окрестность Ω содержит такую замкнутую нормальную подгруппу N в G, что факторгруппа G/N — (связная) группа Ли. Пусть N_0 — компонента единицы в N.

Напомним, что каждый элемент g произвольной компактной связной топологической группы H содержится в некоторой максимальной компактной связной коммутативной подгруппе $K_g \subset H$, любая максимальная связная коммутативная подгруппа в H содержит центр H и любые две связные коммутативные подгруппы в G сопряжены в H [32]. Применим это утверждение к компоненте единицы N_0 группы N (связная группа N_0 замкнута в G и, следовательно, компактна) и рассмотрим максимальную связную коммутативную подгруппу $L \subset N_0$. Замыкание образа этой группы в представлении S — ограниченная (и, следовательно, компактная) коммутативная группа $Q = \overline{\pi(L)}$ операторов в конечномерном пространстве. Следовательно, группа Q имеет общий собственный базис $f_1, \dots, f_n$ в E. В этом базисе все матрицы, отвечающие операторам из $\pi(L)$, диагональны и диагональные матричные элементы определяют характеры группы L (они имеют единичный модуль); эти характеры $\chi_i \colon L \to \mathbb{T}$ определяются правилом

$$\chi_i \colon l \mapsto \pi(l)_{ii}, \qquad l \in L.$$

Из условия $N_0 \subset \Omega$ немедленно следует, что образ подгруппы N_0 под действием любого диагонального характера $\chi_i = \pi_{ii}$ не содержит некоторую дугу окружности $\mathbb{T}$ вблизи точки $-1 \in \mathbb{T}$ (размер этой дуги определяется значением разности $2 - \varepsilon > 0$). Таким образом, образ $\pi_{ii}(L)$ есть либо единичная подгруппа, либо группа q-х корней из единицы для некоторого натурального $q \geqslant 2$. Однако второй случай невозможен, потому что группа L связна по построению и, следовательно, делима [122, следствие 8.5], в то время как любой гомоморфный образ делимой группы тоже делим. Итак, π-образ L есть $\{1\}$. Так как любой элемент группы N_0 сопряжен элементу группы L, то $\pi(N_0) = \{1\}$. □

2.4. Критерий непрерывности конечномерных представлений связных компактных групп

Теперь мы можем получить критерий непрерывности конечномерных представлений связных компактных групп.

Теорема 2.7. *Пусть G — компактная связная группа и π — (теоретико-групповое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E. Если $\omega(\pi; \xi, f) \leqslant q < 2$ для всех $\xi \in E$ и $f \in E^*$, то $\epsilon(\pi; \xi) = 0$ для всех $\xi \in E$, т.е. представление π непрерывно.*

Доказательство. Примем обозначения и определения, использованные в лемме 2.4. По этой лемме имеем $\pi(N_0) = \{1\}$. Поэтому мы можем рассматривать представление π группы G как представление компактной связной факторгруппы G/N_0. Группа N/N_0 — вполне несвязная нормальная подгруппа в связной группе G/N_0. Следовательно, группа N/N_0 центральна в G/N_0.

Применим утверждение о максимальных связных коммутативных подгруппах к группе G/N. Пусть T' — максимальная связная коммутативная подгруппа G/N. Образ $\pi(T')$ ограничения представления π на подгруппу T' есть ограниченная коммутативная группа операторов в конечномерном пространстве. Следовательно, эта группа имеет общий собственный базис $x_1, \dots, x_n$ в E. В этом базисе матрицы из семейства $\pi(T')$ диагональны, и диагональные матричные элементы определяют характеры группы T', имеющие единичный модуль; эти характеры $\chi_i \colon T' \to \mathbb{T}$ определяются формулами

$$\chi_i \colon l \mapsto \pi(l)_{ii}, \qquad l \in T'.$$

По построению каждый характер вида χ_i удовлетворяет условиям теоремы 2.6 (окрестность, в которой значения характера не попадают на дугу вблизи точки -1, есть пересечение канонического образа исходной окрестности в G в группе G/N_0 с максимальной связной коммутативной подгруппой T'). Следовательно, все характеры χ_i непрерывны и ограничение представления π на T' непрерывно. Так как $T' \supset N/N_0$, то ограничение представления π на N/N_0 непрерывно. Так как N/N_0 вполне несвязна, то существует такая открытая нормальная подгруппа $M \subset N/N_0$, что $\pi(g) = I_E$ для всех $g \in M$. Тогда нормальная подгруппа $Q = \ker \pi \,|_{N/N_0}$ содержит N/N_0 и поэтому тоже открыта. Пусть P — полный прообраз Q при каноническом отображении G на G/N_0. Тогда P — открытая нормальная подгруппа в N. Рассмотрим π снова как представление группы G. Тогда $P = \ker \pi \cap N$. Следовательно, P — компактная открытая нормальная подгруппа в G. Поэтому индекс P в G конечен. Кроме того, P содержит N_0. Поэтому индекс $\ker \pi \cap N$ в N конечен. Таким образом, $G/(\ker \pi \cap N)$ — (связная) группа Ли и представление π можно рассматривать как представление этой группы Ли. Кроме того, представление π, рассматриваемое как представление группы Ли $G/(\ker \pi \cap N)$, имеет то же значение $\omega(\pi; \xi, f)$ для всех $\xi \in E$ и $f \in E^*$, так что $\omega(\pi; \xi, f) \leqslant q < 2$ для всех $\xi \in E$ и $f \in E^*$. Остается применить теорему 2.4, что завершает доказательство. □

Нам нужен аналог теоремы Ли для не обязательно непрерывных конечномерных представлений разрешимых групп.

Теорема 2.8. *Пусть G — разрешимая связная локально компактная группа и π — (теоретико-групповое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E. Если $\omega(\pi;\xi,f)\leqslant q<2$ для всех $\xi\in E$ и $f\in E^*$, то $\epsilon(\pi)=0$, т.е. представление π непрерывно.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по длине композиционного ряда разрешимой связной локально компактной группы G. Если эта длина равна единице, то группа G коммутативна. Согласно [122, теорема 7.57 (iii)] связная коммутативная локально компактная группа есть (алгебраически и топологически) прямое произведение конечномерной векторной группы V и (единственной) максимальной компактной подгруппы K. Заметим, что группа K связна как гомоморфный образ связной группы G. В этом случае утверждение теоремы 2.8 следует из теоремы 2.7, примененной к группе K, и теоремы 2.4, примененной к группе V. Таким образом, база индукции установлена.

Докажем утверждение индукционного шага. Пусть утверждение справедливо, если длина композиционного ряда разрешимой связной локально компактной группы не превосходит натурального числа n, и пусть дана разрешимая связная локально компактная группа G, длина композиционного ряда которой равна $n+1$. Пусть π — (теоретико-групповое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E, и пусть $\omega(\pi)<2$. Рассмотрим коммутаторную подгруппу C группы G, т.е. замкнутую подгруппу, порожденную коммутаторами

$$ghg^{-1}h^{-1}, \qquad g,h\in G.$$

Тогда H — разрешимая локально компактная группа, длина композиционного ряда которой равна n, и C связна как замыкание связного множества (объединения связных множеств, образованных элементами, допускающими представление в виде произведения данного числа коммутаторов; эти множества имеют общую точку (единицу группы)). Пусть ρ — ограничение представления π на подгруппу C. Очевидно, что $\omega(\rho)<2$. По предположению индукции представление ρ группы C непрерывно. Следовательно, по теореме Ли [22, теорема V.3.1] представление ρ имеет одномерное инвариантное подпространство (и тем самым общий собственный вектор $\xi \in E$):

$$T(ghg^{-1}h^{-1})\xi = \lambda(g,h)\xi, \qquad \lambda(g,h) \in \mathbb{C}, \quad g,h \in G.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\rho(ghg^{-1}h^{-1})\pi(k)\xi = \pi(k)\rho(k^{-1}ghg^{-1}h^{-1}k)\xi = \lambda(k^{-1}gk,k^{-1}hk)\pi(k)\xi,\\ g,h,k \in G,\end{gathered} \tag{2.2}$$

так что все векторы вида $\pi(k)\xi$ — собственные для ρ. Они порождают конечномерное подпространство $F \subset E$ (линейную оболочку одномерных ρ-инвариантных подпространств в E), и подпространство F имеет базис из собственных векторов представления ρ. Разумеется, множество линейно независимых векторов вида $\rho(k)\xi$, $k \in G$, конечно. Из формулы (2.1) следует, что подпространство F инвариантно относительно представления π группы G. Обозначим через π_F ограничение представления π на подпространство F. Таким образом, множество значений функции λ конечно. Отметим также, что (при фиксированных $g,h \in G$) элемент $k^{-1}ghg^{-1}h^{-1}k$ принадлежит C, поскольку имеет место равенство

$$\begin{aligned} k^{-1}ghg^{-1}h^{-1}k &= (k^{-1}gk)(k^{-1}hk)(k^{-1}g^{-1}k)(k^{-1}h^{-1}k)\\ &= (k^{-1}gk)(k^{-1}hk)(k^{-1}gk)^{-1}(k^{-1}hk)^{-1}, \end{aligned}$$

и этот элемент непрерывно зависит от $k \in G$. Кроме того, функция λ непрерывна, поскольку представление ρ непрерывно. Так как группа G связна, то функция $G \to \mathbb{C}$, определенная формулой

$$k \mapsto \lambda(k^{-1}gk,k^{-1}hk), \qquad k \in G,$$

постоянна, т.е. не зависит от $k \in G$. Следовательно, оператор $\rho(ghg^{-1}h^{-1})$ скалярен на F (где он является умножением на число $\lambda(g,h)$). Но

$$\rho(ghg^{-1}h^{-1}) = \pi_F(g)\pi_F(h)\pi_F(g^{-1})\pi_F(h^{-1}) \quad \text{для любых} \quad g,h \in G$$

и из π-инвариантности подпространства F следует, что

$$\det\rho(ghg^{-1}h^{-1}) = 1, \qquad (\lambda(g,h))^{\dim F} = 1.$$

Таким образом, множество значений функции λ конечно. Из связности группы G следует тогда, что множество значений функции λ одноэлементно. Так как число 1 заведомо входит в это множество значений, то

$$\lambda(g,h) \equiv 1 \quad \text{для всех} \quad g,h \in G.$$

Следовательно, представление ρ кратно единичному, $C \subset \ker\rho$ и можно считать, что π_T — представление факторгруппы G/C. Обозначим через $\pi_F^{G/C}$ ограничение представления π на подпространство F, рассматриваемое как представление факторгруппы G/C. Так как группа G/C коммутативна и связна, а $\omega(\pi_F^{G/C;\xi,f}) \leqslant q < 2$ для всех допустимых ξ и f по условию и по определению топологии в факторгруппе, то представление $S_F^{G/C}$ непрерывно по уже доказанному утверждению, составляющему базу индукции. Таким образом, данное представление имеет инвариантное подпространство, и ограничение на это подпространство является непрерывным представлением.

Переходя к факторпространству E/F и повторяя рассуждение, мы получим по индукции, что можно выбрать базис в пространстве представления π, в котором матрицы представления имеют блочно-треугольный вид с непрерывными диагональными блоками.

Рассмотрим пространство $\mathscr{L}(E)$ всех линейных операторов в пространстве E представления π. Пусть M — пересечение замыканий $\overline{\pi(V)}$ образов $\pi(V)$ всевозможных окрестностей $V \subset G$ единичного элемента группы G. Поскольку представление π ограничено на некоторой окрестности V_0 единичного элемента, то для любой окрестности $V \subset V_0$ множество $\overline{\pi(V)}$ компактно как замкнутое подмножество компактного множества.

Пусть T — некоторый элемент M. Равенство $M = \{1_E\}$ равносильно непрерывности представления π в e ввиду только что отмеченной компактности множеств $\overline{\pi(V)}$ в $\mathscr{L}(E)$. Действительно, дополнение любой окрестности нуля W в множестве $\overline{\pi(V_0)}$ (для такой окрестности V_0, что $\overline{\pi(V_0)}$ компактно) тоже компактно. Если $M = \{1_E\}$, то пересечение $M \cap (\overline{\pi(V_0)} \setminus W)$ пусто и поэтому существует конечный набор множеств вида $\overline{\pi(V_i)}$, $i = 1, \ldots, N$, для которых пересечение

$$\Bigl(\bigcap_{i=1}^{N} \overline{\pi(V_i)}\Bigr) \cap \bigl(\overline{\pi(V_0)} \setminus W\bigr)$$

пусто, так что

$$\pi(V) \subset W \quad \text{для} \quad V = V_0 \cap \Bigl(\bigcap_{i=1}^{N} V_i\Bigr).$$

Докажем, что $T = 1_E$. Так как для любого единичного вектора $\xi \in E$ и любого функционала $f \in E_*$ единичной длины окрестность $U(\xi)$ участвует в построении множества M, то $|f(T\xi - \xi)| \leqslant q < 2$ для всех единичных векторов $\xi \in E$ и функционалов $f \in E_*$ единичной длины. Таким образом, $\|T - 1_E\| \leqslant q < 2$.

Для любой окрестности V единичного элемента в G и любого натурального n существует окрестность W единичного элемента в G, удовлетворяющая условию $W^{2^n} \subset V$. Отсюда следует, что $\pi(W)^{2^n} \subset \pi(V)$ и, очевидно, $(\pi(W))^{2^n} \subset \pi(V) \subset \overline{\pi(V)}$. Пусть $n = 1$. Тогда $\pi(W)\pi(W) \subset \pi(V)$ и так как умножение операторов непрерывно, то $\overline{\pi(W)\pi(W)} \subset \overline{\pi(V)}$. По индукции отсюда следует, что для любой окрестности V единичного элемента в G, любого натурального n и любой окрестности W единичного элемента в G, удовлетворяющей условию $W^{2^n} \subset V$, имеем $(\overline{\pi(W)})^{2^n} \subset \overline{\pi(V)}$ в $\mathscr{L}(E)$. В частности, поскольку $T \in \overline{\pi(O)}$ для любой окрестности O единичного элемента, то $T^n \in \overline{\pi(V)}$ для всех окрестностей V единичного элемента в G, откуда следует, что $T^n \in M$. Как мы видели выше, отсюда следует, что

$$\|T^n - 1_E\| \leqslant 2 \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Напомним, что в пространстве представления π есть базис, в котором матрицы представления имеют блочно-треугольный вид с непрерывными диагональными блоками. В этом базисе оператор T имеет блочно-треугольный вид с единичными диагональными блоками. Если $T \neq 1_E$, то последовательность T^n неограничена, что противоречит неравенству (2.1). Поэтому представление π непрерывно в единичном элементе, а тогда и всюду на G. Это доказывает теорему 2.8. □

Теперь мы можем доказать основную теорему раздела.

Теорема 2.9. *Пусть G — связная локально компактная группа и σ — (теоретико-групповое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E. Если $\sup_{\xi \in E, f \in E^*} \omega(\sigma,\xi,f) < 2$, то $\sup_{\xi \in E} \epsilon(\sigma;\xi) = 0$, т.е. представление σ непрерывно.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.7, примем обозначения и определения, использованные в лемме 2.4. По этой лемме имеем $\sigma(N_0) = \{1\}$. Поэтому мы можем рассматривать представление σ группы G как представление σ' связной факторгруппы $G' = G/N_0$. Очевидно, что выполняется условие $\sup_{\xi \in E, f \in E^*} \omega(\sigma',\xi,f) < 2$. Поэтому мы перейдем к $G' = G/N_0$ и σ', не будем писать штрихи и будем считать, что $N_0 = \{e\}$. Этот переход позволяет считать, что группа N — вполне несвязная нормальная подгруппа в связной группе G, причем факторгруппа G/N есть связная группа Ли. Отсюда следует, что группа N центральна в G, а G — конечномерная группа. Рассмотрим радикал R группы G (см [175, теорема 3.7]). Тогда либо $G=R$, либо факторгруппа $\Sigma=G/R$ есть связная полупростая локально компактная группа конечной размерности [201, теорема 7.6]. Пусть $\pi\colon G\to\Sigma$ — каноническое отображение. Рассмотрим образ $\pi(Z(G))$ центра $Z(G)$ группы G в группе Σ. Так как π — эпиморфизм, то $\pi(Z(G))$ содержится в центре $Z(\Sigma)$ группы Σ. В этом случае $Z(G)\supset N$, и поэтому группа $\Sigma/Z(\Sigma)$ есть связная полупростая группа Ли без центра (прямое произведение присоединенных групп простых групп Ли).

Если сама группа Σ — группа Ли и ее центр конечен, то есть замкнутая подгруппа Q конечного индекса в $Z(G)$ (Q — полный прообраз единицы в $Z(\Sigma)$), лежащая в R.

Пусть Σ — не группа Ли или центр группы Σ бесконечен. В этом случае [201, теорема 8.3] существует последовательность

$$\pi_n\colon L_{n+1}\to L_n,\qquad n\in\mathbb{N},$$

нетривиальных конечнократных накрытий связных групп Ли, где $L_0=\Sigma/Z(\Sigma)$ (прямое произведение присоединенных групп простых групп Ли) и Σ — проективный предел семейства $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где каждая группа L_n есть гомоморфный образ универсальной накрывающей группы L_0, которая изоморфна прямому произведению универсальных накрывающих простых сомножителей группы L_0. Напомним, что для простого сомножителя в $\Sigma/Z(\Sigma)$ последовательность $\{\pi_n\}$ может существовать тогда и только тогда, когда этот сомножитель эрмитов. В этом случае центр любой группы L_n содержится в центральном торе максимальной компактной подгруппы группы L_n. Поскольку неэрмитовы прямые сомножители в $\Sigma/Z(\Sigma)$ имеют универсальные накрывающие группы с конечным центром, то центр $Z(\Sigma)$ группы Σ содержит подгруппу Z' конечного индекса (ядро факторизации группы Σ по прообразу в Σ прямого произведения всех неэрмитовых прямых сомножителей в $\Sigma/Z(\Sigma)$), лежащую в проективном пределе прямого произведения одномерных центральных торов максимальных компактных подгрупп эрмитовых сомножителей [201, 8.5 и теорема 8.6]. Тогда группа Z' лежит в проективном пределе T' этих прямых произведений. Группа T' связна и коммутативна как проективный предел торов. Ее полный прообраз R_1 в G разрешим как расширение связной коммутативной группы T' с помощью связной разрешимой группы R, и группа R_1 содержит центральную подгруппу Q конечного индекса в $Z(G)$.

Итак, в любом случае центр $Z(G)$ группы G содержит замкнутую подгруппу Q конечного индекса, принадлежащую замкнутой связной разрешимой подгруппе R_1 группы G. По теореме 2.8 ограничение представления σ группы G на подгруппу R_1 непрерывно. Следовательно, ограничение представления σ группы G на подгруппу Q непрерывно. Поскольку Q — подгруппа конечного индекса в $Z(G)$, то ограничение представления σ группы G на подгруппу $Z(G)$ непрерывно, откуда следует, что замкнутая нормальная подгруппа $\ker\sigma\cap Z(G)$ имеет конечный индекс в $Z(G)$. Таким образом, представление σ можно рассматривать как представление связной факторгруппы $G/(\ker\sigma\cap Z(G))$. Эта группа есть расширение группы Ли $G/Z(G)$ с помощью конечной группы $Z(G)/(\ker\sigma\cap Z(G))$ и потому является группой Ли. Остается применить теорему 2.4. $\square$

Приведем примеры, показывающие, в частности, что постоянная 1 в теореме 2.1 и постоянные 2 и $\sqrt{3}$ в теоремах 2.5 и 2.9 неулучшаемы.

Пример 2.1. Пусть G — недискретная локально компактная группа, Σ — представление группы G в гильбертовом пространстве $l^2(G)$ сдвигами. Тогда $\omega(\Sigma)=1$ и при этом представление Σ разрывно.

Пример 2.2. Пусть G — недискретная локально компактная группа, E — замыкание конечных линейных комбинаций характеристических функций точек в банаховом пространстве ограниченных функций на G с обычной равномерной нормой, Σ — представление группы G в E сдвигами. Тогда $\varepsilon(\Sigma)=1$ и при этом представление Σ разрывно.

Пример 2.3. Пусть $G=\mathbb{T}$, Σ — нетривиальный одномерный характер группы G, все неединичные значения которого имеют бесконечный порядок (см. например, [114, (25.26)(e)]). Тогда $\omega(\Sigma)=\varepsilon(\Sigma)=2$ и при этом представление Σ разрывно.

Пример 2.4. Пусть G — прямое произведение счетного набора групп третьего порядка, реализованных в виде корней из единицы на комплексной плоскости,

$$\mathbb{T}_3=\{1,\cos(2\pi/3)\pm\sin(2\pi/3)\};$$

занумеруем эти группы натуральными числами. Рассмотрим некоторый свободный ультрафильтр α на натуральном ряде и введем одномерный характер Σ

группы G с помощью формулы

$$\Sigma(g) = \alpha((g_n)) \quad \text{при} \quad g = (g_n) \in G,$$

где $g_n \in \mathbb{T}_3$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\omega(\Sigma) = \varepsilon(\Sigma) = 2$ и при этом представление Σ разрывно.

Проверка правильности вычисления величин $\omega(\Sigma)$ и $\varepsilon(\Sigma)$ и проверка разрывности представлений Σ в этих примерах непосредственна.

Следствие 2.5. *Пусть G — связная локально компактная группа и T — ее непрерывное отображение в группу обратимых линейных операторов в конечномерном пространстве E. Если существует такое представление Σ группы G в E, что $\|\Sigma(g) - T(g)\| \leqslant C$ для всех $g \in G$ и некоторого C, $C < 1$, то представление Σ непрерывно.*

Доказательство. В условиях следствия имеем $\omega(\Sigma) \leqslant \omega(T) + 2C$, где $\omega(T) = 0$ по условию непрерывности отображения T. Следовательно, $\omega(\Sigma) < 2$. Остается применить теорему 2.9. □

2.5. Критерий слабой непрерывности представлений топологических групп в пространствах Фреше

Как и выше (ср. [242]), где рассматривались представления топологических групп в банаховых пространствах, условия непрерывности изучаются на основе оценки величины слабой вариации в точке.

В частности, доказывается следующий критерий непрерывности представлений локально компактных групп слабо непрерывными линейными операторами в пространстве Фреше, сопряженном к некоторому локально выпуклому пространству.

Теорема 2.10. *Пусть G — топологическая группа, π — ее (теоретико-групповое) представление в сопряженном пространстве Фреше E сопряженными линейными операторами.*

Представление π непрерывно в слабой операторной топологии тогда и только тогда, когда для некоторого числа q, $0 \leqslant q < 1$, для любой окрестности V нулевого элемента в E и её поляры $\overset{\circ}{V}$ в E_* и для любого вектора*

ξ в V и любого элемента $f \in \mathring{V}$ существует такая окрестность U единичного элемента в группе G, что неравенство $|f(\pi(g)\xi - \xi)| \leqslant q$ выполняется для всех $g \in U$.

Таким образом, если слабое колебание представления локально компактной группы в сопряженном локально выпуклом пространстве удовлетворяет приведенному в теореме неравенству, то это колебание равно нулю, и представление непрерывно.

Возникает естественный вопрос о возможности улучшения величины постоянной q, обеспечивающей слабую непрерывность представления.

Очевидный пример унитарного представления группы $\mathbb{R}$ сдвигами в пространстве $l^2(\mathbb{R})$ показывает, что нельзя заменить условие $q < 1$ условием $q \leqslant \sqrt{2}$.

Как показано выше (ср. [242]), представления локально компактных групп в конечномерных нормированных пространствах допускают улучшение общей оценки для q.

Пусть $\mathbb{T}$ — одномерный тор, $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbb{N}$ — натуральный ряд, $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел. Символы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ используются также для обозначения аддитивных групп соответствующих полей.

Определение 2.6. Пусть G — топологическая группа, π — ее (не обязательно слабо непрерывное) отображение в пространство непрерывных линейных операторов в дуальном к локально выпуклому пространству E_* локально выпуклом пространстве E, так что E_* — пространство, к которому E сопряжено, то *слабой* вариацией* $\omega^*(\pi;\xi;f;U) \geqslant 0$ *отображеения π в окрестности U единичного элемента e группы G на векторе $\xi \in E$ и функционале $f \in E_*$* мы будем называть верхнюю грань $\sup_{g\in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|$, *слабой* вариацией* $\omega^*(\pi;\xi;f) \geqslant 0$ *представления π в единичном элементе e группы G на векторе $\xi \in E$ и функционале $f \in E^*$* — нижнюю грань величин $\sup_{g\in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$, т.е. $\omega^*(\pi;\xi;f) = \inf_{U\ni e} \omega^*(\pi;\xi;f;U) = \inf_{U\ni e} \sup_{g\in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|$, *слабой* вариацией* $\omega^*(\pi;V) \geqslant 0$ *отображения π в единичном элементе e группы G на окрестности V нуля в E* — верхнюю грань величин $\omega^*(\pi;\xi;f)$ по всем $\xi \in V$ и $f \in E^*$ из поляры $\mathring{V}$ окрестности V, и *слабой* вариацией* $\omega^*(\pi) \geqslant 0$ *отображения π в единичном элементе e группы G* (или, кратко, *слабой* вариацией представления π*) — верхнюю грань по всем окрестностям V нулевого элемента в E величин $\omega^*(\pi;V)$:

$$\omega^*(\pi)=\sup_V \sup_{\xi\in V,\, f\in\mathring{V}} \inf_{U\ni e}\omega^*(\pi;\xi;f;U)=\sup_V \sup_{\xi\in V,\, f\in\mathring{V}} \inf_{U\ni e} \sup_{g\in U}|f(\pi(g)\xi-\xi)|. \quad (2.4)$$

Определение 2.7. Пусть G — топологическая группа, π — ее (теоретико-групповое) представление в пространстве Фреше E.

Мы будем говорить, что π *локально равномерно ограничено*, если существует такая окрестность U_0 единичного элемента e в G, что ограничение π на U_0 есть эквинепрерывное семейство непрерывных линейных операторов в E.

Замечание 2.1. Пусть G — топологическая группа, π — ее (теоретико-групповое) представление в локально выпуклом пространстве E. Пусть E_* — пространство, к которому E двойственно.

Если операторы представления $\pi(g)$, $g\in G$, являются операторами, сопряженными операторам $\pi_*(g)$, $g\in G$, то формула

$$(\pi_*(g)f)(\xi)=f(\pi(g)\xi), \quad \text{где} \quad g\in G, \quad \xi\in E, \quad f\in E_*,$$

определяет представление π_* группы G в пространстве E_*, называемое *предсопряженным к представлению* π.

Лемма 2.5. *Пусть G — топологическая группа, π — ее локально равномерно ограниченное представление в локально выпуклом пространстве E. Пусть E — сопряженное пространство, причем операторы представления π являются сопряженными, и пусть $\omega^*(\pi)$ — слабая* вариация представления π, введенная в определении 2.6.*

1. *Если $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, то неравенство $\omega^*(\pi)\leqslant a$ выполняется тогда и только тогда, когда для любого $b>a$ и любой окрестности нуля V в пространстве E представления π существует такая окрестность $U\subset G$ единичного элемента $e\in G$, что $|f(\pi(g)\xi=\xi)|<b$ для всех f из поляры $\mathring{V}$ окрестности V, всех векторов $\xi\in V$ и всех $g\in U$.*

2. *Представление π слабо* непрерывно тогда и только тогда, когда $\omega^*(S)=0$.*

3. *Если величина $\omega^*(\pi)$ конечна, то представление π локально равномерно ограничено. В частности, если группа G компактна и $\omega^*(\pi)$ конечна, то представление π ограничено.*

Доказательство. Утверждение 1 непосредственно следует из определения величины $\omega(\pi)$ (см. формулу (2.4)), а утверждение 2 — из утверждения 1.

Докажем утверждение 3. Пусть верхняя грань по всем окрестностям V нулевого элемента в E и всем векторам $\xi \in V$ и всем функционалам $f \in E^*$ из поляры $\mathring{V}$ окрестности V от нижних граней величин $\sup_{g\in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$ конечна.

Отсюда следует, что орбита вектора ξ поглощается биполярой окрестности V и тем самым ограничена, поскольку V произвольна.

Таким образом, семейство $\{\pi(g),\ g \in U\}$ ограничено в топологии простой сходимости и потому эквинепрерывно (см. [190, Theorem 4.2]).

Замечание о компактной группе очевидно. Это завершает доказательство леммы 2.5. □

Лемма 2.6. *Пусть G — локально компактная группа, G_i, $i = 1, \dots, n$ — такой конечный набор метризуемых локально компактных групп, снабженных непрерывными гомоморфизмами $\varphi_i\colon G_i \to G$, что ограничение φ_V отображения φ произведения $G_1 \times \dots \times G_n$ на G, определяемого формулой $\varphi(g_1, \dots, g_n) = \varphi_1(g_1) \cdots \varphi_n(g_n)$, где $g_i \in G_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, на некоторую окрестность V единичного элемента e группы $G_1 \times \dots \times G_n$ является гомеоморфизмом.*

Пусть π — (теоретико-групповое) представление группы G в пространстве Фреше, сопряженном к локально выпуклому пространству.

Если представление π непрерывно в слабой операторной топологии на образе каждой подгруппы G_i в G, то представление π слабо* непрерывно.*

В частности, если G — связная группа Ли и представление π непрерывно в слабой операторной топологии на каждой однопараметрической подгруппе группы G, то оно непрерывно в слабой* операторной топологии.*

Доказательство. Поскольку π — представление, то

$$S(\varphi_1(g_1) \cdots \varphi_n(g_n)) = S(\varphi_1(g_1)) \cdots \pi(\varphi_n(g_n)) \quad \text{для любых} \quad g_i \in G_i.$$

Отображение

$$\psi\colon G_1 \times \dots \times G_n \supset V \ni (g_1, \dots, g_n) \mapsto S(\varphi_1(g_1)) \cdots \pi(\varphi_n(g_n)),$$

где $g_i \in G_i$ для всех $i = 1, \dots, n$, очевидным образом раздельно непрерывно на окрестности V единичного элемента в локально компактной группе $G_1 \times \dots \times G_n$. Можно считать, что V содержит замыкание произведения $\prod_{i=1}^n V_i$ для некоторых окрестностей V_i с компактным замыканием единичных элементов в группах G_i, $i = 1, \dots, n$. Так как каждое отображение $\pi_i\colon G_i \to \pi \circ \varphi_i$, $i = 1, \dots, n$, непрерывно, то образ W_i замыкания $\overline{V_i}$ окрестности V_i является компактом в пространстве $\mathcal{L}(E)$ непрерывных линейных операторов в локально выпуклом пространстве E представления S, где пространство $\mathcal{L}(E)$ снабжено слабой* операторной топологией. Поскольку умножение операторов раздельно непрерывно в слабой* операторной топологии на ограниченных множествах, мы видим, что сквозное отображение

$$G_1 \times \cdots \times G_n \to G \to \mathcal{L}(E),$$

определенное формулой

$$(g_1, \ldots, g_n) \mapsto g_1 \cdots g_n \mapsto \varphi_1(g_1)) \cdots S(\varphi_n(g_n),$$

раздельно непрерывно. По теореме Намиоки [168], это отображение имеет точку совместной непрерывности.

Таким образом, представление π группы G имеет точки слабой* непрерывности. Но представление, слабо непрерывное хотя бы в одной точке, слабо* непрерывно всюду.

Рассмотрим теперь случай, когда G — связная группа Ли. Выберем базис $e_1, \ldots, e_n$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G и рассмотрим отображение конечномерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ в G, определенное формулой

$$\mathbb{R} \ni t = (t_1, \ldots, t_n) \mapsto g(t) = \exp(t_1 e_1) \ldots \exp(t_n e_n) \in G.$$

Это отображение гладко и имеет в нуле единичную матрицу Якоби, и поэтому определяет диффеоморфизм некоторой окрестности V нуля в $\mathbb{R}^n$ на окрестность U единичного элемента в G. В частности, набор однопараметрических подгрупп

$$G_i = \{\exp t_i e_i \mid t_i \in \mathbb{R}\}$$

удовлетворяет условиям, указанмым в первом абзаце леммы.

Это завершает доказательство леммы 2.6. $\square$

Из доказательства леммы 2.6 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 2.6. *Пусть G — группа Ли, π — ее (теоретико-групповое) представление в пространстве Фреше, сопряженном к локально выпуклому пространству. Если представление π непрерывно в слабой* операторной топологии на каждой однопараметрической подгруппе группы G, то оно непрерывно в слабой* операторной топологии.*

Следующий вспомогательный результат, лемма 2.7, является важнейшим техническим средством в доказательстве основных результатов. Нам понадобится следующая топология в пространстве непрерывных линейных операторов в пространстве представления.

Определение 2.8. Пусть E — пространство Фреше, сопряженное к некоторому локально выпуклому пространству E_*, и пусть $\mathcal{L}(E)$ — пространство непрерывных линейных операторов в E.

Слабой операторной топологией* в $\mathcal{L}(E)$ назовем топологию, определяемую семейством полунорм вида $T \mapsto |f(Tx)|$, где $T \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ и $f \in E_*$.

Поскольку, вообще говоря, пространство E_* не определяется пространством E однозначно, то слабая* операторная топология может тоже оказаться зависящей от выбора E_*. Таким образом, введенная выше топология определяется выбором предсопряженного пространства E_*

Лемма 2.7. *Пусть E — пространство Фреше, сопряженное к локально выпуклому пространству, G — топологическая группа, и π — локально равномерно ограниченное (теоретико-групповое) представление группы G в пространстве E слабо* непрерывными линейными операторами.*

Если $\omega^*(\pi) < 1$, то $\omega^*(\pi) = 0$, и представление π непрерывно в слабой операторной топологии.*

Доказательство. Пусть M — замкнутое ограниченное (и поэтому эквинепрерывное [190, теорема III.4.2]) подмножество пространства $\mathcal{L}(E)$ в слабой* операторной топологии. Предположим, что M выпукло и содержит нулевой элемент пространства $\mathcal{L}(E)$ непрерывных линейных операторов в E; заменим M на биполяру множества $M \cup \{0\}$, если необходимо, где M замкнуто и ограничено; видим, что эта биполяра замкнута и ограничена по [190, следствие III.3.4] и выпукла (как пересечение выпуклых множеств).

Пространство операторов $\mathcal{L}(E)$ допускает естественное вложение

$$\mathcal{L}(E) \ni T \mapsto (T\xi)(\varphi), \xi \in E, \varphi \in E_*,$$

в пространство-произведение $F^{E \times E_*}$, где F — основное поле пространства E, и, таким образом, $\mathcal{L}(E)$ можно рассматривать как подмножество пространства $F^{E \times E_*}$. По самому определению слабой* операторной топологии на $\mathcal{L}(E)$ эта топология совпадает с ограничением на $\mathcal{L}(E)$ топологии-произведения на пространстве-произведении $F^{E \times E_*}$.

В $F^{E \times E_*}$, по теореме Тихонова, компактность эквивалентна условиям замкнутости и поточечной ограниченности. Таким образом, чтобы доказать, что подмножество $M\subset\mathcal{L}(E)$ компактно, достаточно показать, что множество M, являющееся равностепенно непрерывным, поточечно ограничено в $F^{E\times E_*}$ и также замкнуто в этом большем пространстве. Поскольку M равностепенно непрерывно, это немедленно влечет искомую поточечную ограниченность.

Покажем, что замыкание $\overline{M}$ множества M в $F^{E\times E_*}$ содержится в $\mathcal{L}(E)$.

Пусть $U\subset E$ — окрестность нуля, равная поляре подмножества $\mathring{U}\subset E_*$. Используя снова равностепенную непрерывность M, мы можем выбрать такую 0-окрестность $V\subset E$, что $MV\subset U$. Это означает, что для $\xi\in V$, $\varphi\in\mathring{U}$ и $T\in M$ мы имеем $(T\xi)(\varphi)\leqslant 1$, и это свойство остается справедливым для всех элементов замкнутого множества $\overline{M}$. Заключаем, что $TV\subseteq U$ выполняется для всех $T\in\overline{M}$, и, следовательно, $\overline{M}\subseteq\mathcal{L}(E)$.

Это доказывает, что замкнутые ограниченные (и, следовательно, равностепенно непрерывные) подмножества $M\subset\mathcal{L}(E)$ замкнуты также и в $F^{E\times E_*}$.

Пусть теперь M – пересечение замыканий $\overline{\pi(V)}$ π-образов $\pi(V)$ всех окрестностей V единичного элемента в группе G; здесь черта означает замыкание множества в топологии пространства $F^{E\times E_*}$.

Поскольку представление π ограничено на некоторой окрестности V_0 единичного элемента, то для окрестностей $V\subset V_0$ множества $\pi(V)$ (замкнутые в топологии пространства $F^{E\times E_*}$) компактны в топологии пространства $F^{E\times E_*}$ как замкнутые подмножества компактного множества $\pi(V_0)$. Таким образом, M — компактное множество в топологии пространства $F^{E\times E_*}$.

Пусть T — некоторый элемент множества M; докажем, что $T=1_E$. Так как для любой окрестности U нулевого элемента в E, ее поляры $\mathring{U}$ в E_*, и для любого вектора ξ в U и любого элемента $\varphi\in\mathring{V}$ выполняется неравенство

$$|(\pi(g)\xi-\xi)(\varphi)|\leqslant q<1,\qquad g\in V,$$

то неравенство

$$-q\leqslant(S\xi-\xi)(\varphi)\leqslant q$$

выполняется для всех $S\in\pi(V)$ и всех $\xi\in U$ и всех (вещественных) функционалов $\varphi\in\mathring{V}$. По определению оператора T это приводит к неравенству

$$|(T\xi-\xi)(\varphi)|\leqslant q\quad\text{для всех}\quad\xi\in U\quad\text{и всех функционалов}\quad\varphi\in\mathring{V}.$$

Для любой окрестности V единичного элемента в G и любого натурального n существует окрестность W единичного элемента в G, удовлетворяющая условию $W^{2^n} \subset V$. Отсюда следует, что $\pi(W)^{2^n} \subset \pi(V)$ и, очевидно, $(\pi(W))^{2^n} \subset \pi(V) \subset \overline{\pi(V)}$.

Пусть $n=1$. Тогда $\pi(W)\pi(W) \subset \pi(V)$ и, так как умножение раздельно непрерывно в слабой* операторной топологии на ограниченных множествах, то для любого $B \in \pi(W)$ из очевидного соотношения $B\pi(W) \subset \pi(V)$ следует, что $B\overline{\pi(W)} \subset \overline{\pi(V)}$, откуда $\pi(W)\overline{\pi(W)} \subset \overline{\pi(V)}$.

По индукции отсюда следует, что для любой окрестности V единичного элемента в G, любого натурального n и окрестности W единичного элемента в G, удовлетворяющей условию $W^{2^n} \subset V$, имеем $\{\overline{\pi(W)}\}^{2^n} \subset \overline{\pi(V)}$. В частности, поскольку $T \in \pi(V)$ для любой окрестности V единичного элемента, то $T \in \overline{\pi(W)}$, откуда следует, что $T^n \in \overline{\pi(V)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и для всех окрестностей V единичного элемента в G, и поэтому $T^n \in M$. Как мы видели выше, отсюда следует, что $|(T^n\xi - \xi)(\varphi)| \leqslant q$ для всех $\xi \in U$ и всех функционалов $\varphi \in \mathring{U}$ для любой окрестности нуля U и для всех натуральных n.

Пусть J — некоторое инвариантное среднее на $\mathbb{N}$. Для любого $\varphi \in E_*$ и любого $\xi \in E$ положим $(B\xi)(\varphi) = J((T^n\xi)(\varphi))$ (аналогичный прием использован в существенно более общей ситуации в [230])). Мы получаем непрерывный линейный функционал на E_* (элемент пространства E, поглощаемый биполярой окрестности U), т.е. вектор $B\xi \in E$, линейно зависящий от $\xi \in E$, для которого $|(B\xi - \xi)(\varphi)| \leqslant q$, $\xi \in U$, $\varphi \in \mathring{U}$.

В частности, $B\xi \neq 0$ для $\xi \neq 0$, так как $|(\xi)(\varphi)|$ как угодно близко к единице для $\xi \in U$ и $\varphi \in \mathring{V}$. Кроме того, из инвариантности среднего следует, что для любого $\varphi \in E_*$ и любого $\xi \in E$ имеем

$$(BT\xi)(\varphi) = J((T^n(T\xi))(\varphi)) = J((T^{n+1}\xi)(\varphi)) = J((T^n\xi)(\varphi)) = (B\xi)(\varphi),$$

или $B(T\xi) - B\xi = 0$ в E. Следовательно, $B(T\xi - \xi) = 0$ в E при $\xi \neq 0$ в $U \subset E$, и $T\xi - \xi = 0$ для всех $\xi \in U$, откуда следует, что T — единичный оператор в E, так как B инъективен. Поскольку пересечение замыканий в топологии пространства $F^{E \times E_*}$ множеств $\pi(V)$ для всех окрестностей V единичного элемента e в G является одноэлементным множеством, состоящим из тождественного оператора, то это утверждение справедливо и для замыканий тех же множеств в слабой* операторной топологии.

Однако равенство $M = \{1_E\}$ в слабой* операторной топологии влечет, по определению слабой* вариации представления π, что условие $\omega^*(\pi) = 0$ выполняется, и это также влечет непрерывность представления π в e в слабой* операторной топологии по части 2 леммы 2.5. Это завершает доказательство леммы. □

Следующее утверждение равносильно теореме 2.10.

Теорема 2.11. *Пусть E — пространство Фреше, сопряженное к локально выпуклому пространству, G — топологическая группа, и π — локально равномерно ограниченное (теоретико-групповое) представление группы G сопряженными операторами в пространстве E.*

Если $\omega^*(\pi) < 1$, то $\omega^*(\pi) = 0$, т.е. представление S непрерывно в слабой операторной топологии.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из леммы 2.7. □

2.6. Критерий сильной непрерывности представлений топологических групп в рефлексивных пространствах Фреше

Пусть $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbb{N}$ — натуральный ряд, $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел. Символы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ используются также для обозначения аддитивных групп соответствующих полей.

Определение 2.9. Пусть G — топологическая группа, π — ее (теоретико-групповое) представление в локально выпуклом пространстве E, и пусть E^* — пространство, сопряженное к E.

Слабой вариацией $\omega(\pi;\xi;f;U) \geqslant 0$ представления π в окрестности U единичного элемента e группы G на векторе $\xi \in E$ и функционале $f \in E^*$ в окрестности U мы будем называть верхнюю грань $\sup_{g\in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|$.

Слабой вариацией $\omega(\pi;\xi;f) \geqslant 0$ представления π в единичном элементе e группы G на векторе $\xi \in E$ и функционале $f \in E^*$ будем называть нижнюю грань величин $\sup_{g\in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$, т.е.

$$\omega(\pi;\xi;f) = \inf_{U\ni e} \omega(\pi;\xi;f;U) = \inf_{U\ni e} \sup_{g\in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|.$$

Слабой вариацией $\omega(\pi) \geqslant 0$ *представления* π *в единичном элементе* e *группы* G (или, кратко, *слабой вариацией представления* π) будем называть верхнюю грань по всем окрестностям V нулевого элемента в E и всем векторам $\xi \in V$ и всем функционалам $f \in E^*$ из поляры $\mathring{V}$ окрестности V от нижних граней величин $\sup_{g\in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$:

$$\omega(\pi) = \sup_V \sup_{\xi\in V,\, f\in\mathring{V}} \inf_{U\ni e} \omega(\pi; \xi; f; U) = \sup_V \sup_{\xi\in V,\, f\in\mathring{V}} \inf_{U\ni e} \sup_{g\in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|. \tag{2.5}$$

Определение 2.10. Пусть G — топологическая группа, π — ее (теоретико-групповое) представление в локально выпуклом пространстве E. Мы будем говорить, что π *локально равномерно ограничено*, если существует такая окрестность U_0 единичного элемента e в G, что ограничение π на U_0 есть эквинепрерывное семейство непрерывных линейных операторов в E.

Пусть G — топологическая группа, π — ее (теоретико-групповое) представление в локально выпуклом пространстве E. Пусть E^* — пространство, сопряженное к E. Напомним, что формула $(\pi^*(g)f)(\xi) = f(\pi(g)\xi)$, где $g \in G$, $\xi \in E$, $f \in E^*$, определяет представление π^* группы G в пространстве E^*, называемое *сопряженным к представлению* π.

Лемма 2.8. *Пусть* G — *топологическая группа*, π — *ее локально равномерно ограниченное представление в локально выпуклом пространстве* E. *Пусть* E^* — *сопряженное к* E *пространство, и пусть* $\omega(\pi)$ — *вариация представления* π, *введенная в определении* 2.10.

1. *Если* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, *то неравенство* $\omega(\pi) \leqslant a$ *выполняется тогда и только тогда, когда для любого* $b > a$ *и любой окрестности нуля* V *в пространстве* E *представления* π *существует такая окрестность* $U \subset G$ *единичного элемента* $e \in G$, *что* $|f(\pi(g)\xi - \xi)| < b$ *для всех* f *из поляры* $\mathring{V}$ *окрестности* V, *всех векторов* $\xi \in V$ *и всех* $g \in U$.

2. *Представление* π *слабо непрерывно тогда и только тогда, когда* $\omega(\pi) = 0$.

3. *Если величина* $\omega(\pi)$ *конечна, то представление* π *локально равномерно ограничено. В частности, если группа* G *компактна и* $\omega(\pi)$ *конечна, то представление* π *ограничено.*

Доказательство. Утверждение 1 непосредственно следует из определения величины $\omega(\pi)$ (см. формулу (2.5)), а утверждение 2 — из утверждения 1.

Докажем утверждение 3. Пусть верхняя грань по всем окрестностям V нулевого элемента в E и всем векторам $\xi \in V$ и всем функционалам $f \in E^*$ из поляры $\overset{\circ}{V}$ окрестности V от нижних граней величин $\sup_{g \in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$ конечна.

Отсюда следует, что орбита вектора ξ поглощается биполярой окрестности V и тем самым ограничена, поскольку V произвольна.

Таким образом, семейство $\{\pi(g),\, g \in U\}$ ограничено в топологии простой сходимости и потому эквинепрерывно (см. [189, теорема 4.2]).

Замечание о компактной группе очевидно. $\square$

Следствие 2.7. *Пусть G — группа Ли, π — ее (теоретико-групповое) представление в рефлексивном пространстве Фреше.*

Если представление π непрерывно в сильной операторной топологии на каждой однопараметрической подгруппе группы G, то оно непрерывно в сильной операторной топологии.

Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством леммы 2.6 с естественными минимальными изменениями.

Напомним важное определение.

Определение 2.11. Пусть E — метризуемое отделимое локально выпуклое пространство, d — расстояние в E, E' — сопряженное к E пространство. Пусть X — непустое подмножество в E.

Замкнутым слоем (соответственно *открытым слоем*) в X называется непустое подмножество в X следующего вида:

$$T = \{x \in X \colon f(x) \geqslant \alpha\} \quad (\text{соответственно } T = \{x \in X \colon f(x) > \alpha\}),$$

где $f \in E'$ и α — вещественное число.

Обозначим этот слой символом $T = T(f,\alpha,X)$ и в дальнейшем будем пользоваться только такими замкнутыми слоями, что существует $y \in X$, для которого $f(y) > \alpha$, причем $f \neq 0$.

Пусть $U = U(x,\varepsilon) = \{y \in X \colon d(x,y) < \varepsilon\}$ для $\varepsilon > 0$. Непустое множество $X \subset E$ называется *зубчатым*, если для любой окрестности нуля U в E существует такой слой $T = T(f,\alpha,X)$, что $T - T \subset U$.

Локально выпуклое метризуемое пространство E называется *зубчатым*, если любое непустое ограниченное подмножество в E является зубчатым.

Как известно, зубчатость подмножества X метризуемого локально выпуклого пространства равносильна условию, что для любой окрестности нуля U в E существует такая точка $x \in X$, что $x \notin \overline{X \setminus (x+U)}$ (см. [184, предложение 1.3]; такая точка x называется зубчатой), и любое рефлексивное пространство Фреше является зубчатым (см. [76, следствие 2.4], [184, следствие 6, (i)]).

Нам понадобится следующая топология в пространстве непрерывных линейных операторов в пространстве представления.

Определение 2.12. Пусть E — рефлексивное пространство Фреше, E' — его сопряженное пространство, и пусть $\mathcal{L}(E)$ — пространство непрерывных линейных операторов в E.

Слабой операторной топологией в $\mathcal{L}(E)$ назовем топологию, определяемую семейством полунорм вида $T \mapsto |f(Tx)|$, где $T \in \mathcal{L}(E)$, $x \in E$ и $f \in E'$.

Следующее утверждение — теорема 2.12 — является основным результатом раздела.

Теорема 2.12. *Пусть E — рефлексивное пространство Фреше, G — топологическая группа и π — локально равномерно ограниченное* (*теоретико-групповое*) *представление группы G в пространстве E непрерывными линейными операторами.*

Если $\omega(\pi) < 1$, то $\varepsilon(\pi) = 0$, т.е. представление π непрерывно в сильной операторной топологии (*топологии равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства E*).

Доказательство. Мы рассмотрим пространство $\mathcal{L}(E)$ непрерывных линейных операторов в пространстве E представления π в слабой и в сильной операторной топологии.

Пусть M — пересечение замыканий $\overline{\pi(V)}$ (здесь и далее черта означает замыкание множества в слабой операторной топологии) образов $\pi(V)$ всевозможных окрестностей $V \subset G$ единичного элемента группы G.

Поскольку представление π ограничено на некоторой окрестности V_0 единичного элемента, то для окрестностей $V \subset V_0$ множества $\overline{\pi(V)}$ компактны в слабой операторной топологии как замкнутые подмножества компактного множества $\overline{\pi(V_0)}$.

Согласно теореме 2.11 представление π непрерывно в слабой операторной топологии.

Пусть $\xi \in E$, V — окрестность единичного элемента $e \in G$, на которой представление π равномерно ограничено, и пусть $T = \{\pi(g)\xi \mid g \in V\}$ — орбита вектора $\xi \in E$ под действием окрестности V, так что T является непустым ограниченным подмножеством в E.

Поскольку пространство E зубчато, отсюда следует, что для непустого ограниченного множества $T \subset E$ существует зубчатая точка t в слабом замыкании $\overline{\operatorname{conv} T}$ выпуклой оболочки $\operatorname{conv} T$ множества T. Из зубчатости $\operatorname{conv} T$ следует зубчатость T согласно [184, предложение 2.1], так что для любой окрестности нуля U в E существует такая точка $t \in T$, что $t \notin T \setminus (t+U)$.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ (выпуклая) ε-окрестность $U = U_\varepsilon$ точки $\{t\colon\, t \in \overline{\operatorname{conv} T}\}$ не пересекается с выпуклой оболочкой $\operatorname{conv}(T \setminus U)$ множества $T \setminus U$.

По теореме об отделении выпуклых множеств существует слой, который является пересечением слабой окрестности точки t с множеством T и целиком лежит в U_ε, так что из слабой непрерывности представления π следует непрерывность представления π в точке $e \in G$ на векторе из орбиты вектора $\xi \in E$ в сильной операторной топологии. Следовательно, представление π непрерывно в точке $e \in G$ и на самом векторе $\xi \in E$ в сильной операторной топологии.

Отсюда непосредственно следует сильная непрерывность представления π в единичном элементе группы на векторе ξ.

Поскольку вектор ξ произволен, то получаем, что отображение π сильно непрерывно в e и, следовательно, сильно непрерывно всюду.

Теорема 2.12 доказана. $\square$

2.7. Вариант теоремы Ли для конечномерных неприводимых представлений разрешимых групп Ли

Лемма 2.9. *Пусть G — группа, N — нормальная подгруппа в G, π — неприводимое представление группы G в конечномерном векторном пространстве E, и пусть существует одномерное подпространство $L \subset E$, инвариантное относительно ограничения σ представления π на N. Если существует делимое подмножество $X \subset G/N$, порождающее G/N, то все операторы представления σ кратны единичному оператору в пространстве E.*

Доказательство. По предположению, представление σ имеет одномерное подпредставление и тем самым общий собственный вектор $\xi \in E$, так что, в частности,

$$\sigma(n)\xi = \lambda(n)\xi \quad \text{для всех} \quad n \in N,$$

где $\lambda(n) \in \mathbb{C}^*$, $n \in N$. Тогда

$$\sigma(n)\pi(g)\xi = \pi(g)\sigma(g^{-1}ng)\xi = \lambda(g^{-1}ng)\pi(g)\xi, \qquad n \in N, \quad g \in G, \tag{2.6}$$

и поэтому все векторы вида $\pi(g)\xi$, $g \in G$, — общие собственные векторы для представления σ. Все такие векторы порождают некоторое конечномерное подпространство $F \subset E$ (линейную оболочку всех векторов вида $\pi(g)\xi$, $g \in G$, в пространстве E), и по построению подпространство F имеет базис из собственных векторов представления σ. Разумеется, любое множество линейно независимых векторов вида $\sigma(g)\xi$, $g \in G$, конечно. Из формулы (2.6) следует, что ненулевое подпространство F инвариантно относительно представления π группы G. По предположению, представление π неприводимо, так что $F = E$. Таким образом, множество различных функций вида λ_g, $g \in G$, конечно, где

$$\lambda_g(n) = \lambda(g^{-1}ng), \qquad g \in G, \quad n \in N.$$

Поскольку λ_g, $g \in G$, — комплекснозначные характеры группы N, то они инвариантны относительно внутренних автоморфизмов группы N. Поэтому $\lambda_n = \lambda$, $n \in N$. Тем самым группа G/N транзитивно действует на (непустом) конечном множестве $\{\lambda_g \mid g \in G\}$ подстановками этого конечного множества, и если число элементов в этом конечном множестве равно m, то образ группы G/N является подгруппой симметрической группы S_m, так что порядок этой подгруппы является подгруппем числа $m!$. По условию, для любого $x \in X$ существует такой элемент $y \in X$, что $y^{m!} = x$. Следовательно, подстановка, отвечающая элементу x, есть $m!$-я степень подстановки, отвечающей элементу y, и поэтому является единичной подстановкой. Так как X по условию порождает группу G/N, то все подстановки, определяющие транзитивное действие группы G/N на $\{\lambda_g \mid g \in G\}$, единичны, так что множество $\{\lambda_g \mid g \in G\}$ одноэлементно, $\lambda_g = \lambda$ для всех $g \in G$, и тем самым все операторы представления σ является скалярными кратными единичного оператора на E (операторами умножения на число, $\sigma(n) = \lambda(n)1_E$, $n \in N$). $\square$

Применим предыдущую лемму для доказательства аналога теоремы Ли для конечномерных представлений некоторых групп, разрешимых в теоретико-групповом смысле.

Теорема 2.13. *Пусть G — разрешимая группа, и пусть каждый коммутативный фактор в композиционном ряде группы G порожден делимым подмножеством. Пусть π — представление группы G в конечномерном комплексном линейном пространстве E. Если представление π неприводимо, то пространство представления π одномерно.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по длине композиционного ряда группы G. Если эта длина равна 1, то группа G коммутативна, и утверждение справедливо даже без дополнительного предположения о делимости, что устанавливает базу индукции. Рассмотрим индуктивный шаг. Пусть утверждение справедливо, если длина композиционного ряда разрешимой топологической группы, каждый фактор которого порожден делимым подмножеством, не выше n, и пусть дана разрешимая топологическая группа G, длина композиционного ряда которой равна $n+1$, и каждый фактор которого порожден делимым подмножеством. Пусть π — неприводимое представление группы G в конечномерном линейном пространстве E. Рассмотрим подгруппу G_1, являющуюся следующим за группой G элементом композиционного ряда. Так как группа G/G_1 коммутативна, то группа G_1 содержит все коммутаторы $ghg^{-1}h^{-1}$, $g,h \in G$. По построению, группа G_1 разрешима, длина композиционного ряда группы G_1 не выше n, и каждый коммутативный фактор в композиционном ряде группы G_1 порожден делимым подмножеством. Пусть ρ — ограничение представления π на подгруппу G_1. По предположению индукции, представление ρ имеет одномерное подпредставление. По лемме 2.9, представление ρ есть представление скалярными операторами. Так как коммутант группы G содержится в G_1, то оператор $\rho(ghg^{-1}h^{-1})$, $g,h \in G$, есть скалярное кратное единичного оператора на E (оператор умножения на число $\lambda(ghg^{-1}h^{-1})$). Но

$$\rho(ghg^{-1}h^{-1}) = \pi(g)\pi(h)\pi(g^{-1})\pi(h^{-1}) \quad \text{для любых} \quad g,h \in G,$$

и поэтому $\det \rho(ghg^{-1}h^{-1}) = 1$, или

$$(\lambda(ghg^{-1}h^{-1}))^{\dim E} = 1, \qquad g,h \in G.$$

Таким образом, множество значений функции λ конечно на всей группе G_1. Но функция λ единична на G_2 (следующей за G_1 в композиционном ряду группы G), и λ-образ группы G_1 можно рассматривать как образ группы G_1/G_2

при гомоморфизме, определяемом переходом к факторгруппе по G_2. Поскольку образ группы, порожденной делимым подмножеством при любом гомоморфизме порожден делимым подмножеством, а конечная группа порождена делимым подмножеством тогда и только тогда, когда она единична, то λ-образ группы G_1 единичен. Итак,

$$\lambda(ghg^{-1}h^{-1}) \equiv 1 \quad \text{для всех} \quad g,h \in G.$$

Следовательно, ограничение представления ρ на коммутант группы G кратно единичному, и можно считать, что π — представление коммутативной факторгруппы группы G по её коммутанту. При этом, по условию, данное представление π неприводимо, и, следовательно, одномерно. □

Замечание 2.2. Теорему 2.13 можно доказать и с помощью теоремы Ли. Приведём схему соответствующего доказательства. Образ любого представления разрешимой группы есть разрешимая подгруппа полной линейной группы в пространстве представления, которую можно рассматривать как конечномерную полную линейную группу. Следовательно, замыкание этого образа — тоже разрешимая группа. С другой стороны, замкнутая подгруппа матричной группы является группой Ли (возможно, несвязной). Остаётся применить индукцию по длине композиционного ряда (что приводит к рассуждению почти того же размера), чтобы доказать, что рассматриваемое замыкание является связной группой Ли. Этот факт одновременно нетривиален и существен, особенно потому, что условие, что факторы порождены делимыми плдмножествами, существенно для справедливости теоремы 2.13. (Действительно, симметрическая группа $\mathbb{S}_3$ разрешима и имеет неприводимые двумерные представления.)

Отметим важное для дальнейшего следствие.

Следствие 2.8. (1) *Любое* (*не обязательно непрерывное*) *неприводимое конечномерное представление связной разрешимой локально компактной группы одномерно.*

(2) *Любое* (*не обязательно непрерывное*) *конечномерное представление связной разрешимой локально компактной группы имеет базис*, *в котором операторы представления записываются верхними треугольными матрицами.*

Доказательство. Любая коммутативная связная локально компактная группа делима. Действительно, такая группа является прямым произведением связной компакнтой коммутативной группы, которая автоматически делима, и конечномерной векторной группы, которая тоже делима. Последовательные коммутанты связной топологической группы связны, как и факторгруппы по ним, и поэтому любая связная разрешимая локально компактная группа удовлетворяет всем условиям теоремы 2.13, что доказывает (1), а (2) следует из (1). □

Замечание 2.3. Напомним, что связная разрешимая группа Ли сама по себе не обязательно делима. Примером может служить универсальная накрывающая группы движений плоскости с естественными параметрами $\varphi, x, y \in \mathbb{R}$, где φ накрывает поворот. Кубический корень из элемента $(2\pi, x, y)$ с $x^2 + y^2 > 0$ не существует.

Глава 3. Условия непрерывности локально ограниченных представлений топологических групп

3.1. Основные определения и факты теории локально ограниченных представлений топологических групп

Все рассматриваемые топологические группы предполагаются отделимыми.

Определение 3.1. Пусть G — топологическая группа, и пусть π — (не обязательно непрерывное) представление группы G в нормированном пространстве E. Представление π называется *локально равномерно ограниченным* (или просто *локально ограниченным*, если существует окрестность V единичного элемента e в G и такая постоянная C, что $\|\pi(g)\| \leqslant C$ для любого $g \in V$, где $\|\cdot\|$ — операторная норма в E.

Заметим, что класс локально равномерно ограниченных представлений топологической группы в данном конечномерном пространстве не зависит от выбора нормы в пространстве, поскольку пространства, получаемые введением различных норм в данном конечномерном векторном пространстве, изоморфны. Заметим также, что непрерывность представления группы Ли зависит только от поведения ограничения представления на связную компоненту единичного элемента. По этой причине при изучении вопросов непрерывности конечномерных представлений групп Ли можно ограничиться связными группами Ли.

Определение 3.2. Группа G называется *совершенной*, если она совпадает со своим *коммутантом*, т.е. с подгруппой, порождённой всевозможными коммутаторами $aba^{-1}b^{-1}$, $a,b \in G$.

3.1.1. Группа разрывов относительно компактного гомоморфизма топологических групп

Сначала напомним определения относительной компактности и локальной ограниченности гомоморфизмов топологических групп.

Определение 3.3. Пусть G — топологическая группа, π — её (не обязательно непрерывный) гомоморфизм в топологическую группу H. Мы будем говорить, что π *локально относительно компактен*, или просто *относительно компактен*, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G, что замыкание множества $\pi(V)$ является компактным подмножеством топологической группы H. Мы будем говорить, что π *локально вполне ограничен*, или просто *локально ограничен*, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G, что множество $\pi(V)$ является вполне ограниченным подмножеством топологической группы H, т.е. для любой окрестности W единичного элемента e_H в H существует конечное число сдвигов окрестности W, объединение которых покрывает множество $\pi(V)$.

Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ — фильтр окрестностей единицы в топологической группы G. Для любого локально относительно компактного (не обязательно непрерывного) гомоморфизма π группы G в топологическую группу H введем обозначение

$$\mathrm{DG}(\pi) = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \overline{\pi(U)}.$$

Здесь и далее, черта означает замыкание в соответствующей топологии (в данном случае — в топологии группы H).

Если π — конечномерное представление топологической группы, то определения 3.1 и 3.3, очевидно, согласованы. Более общим образом, если группа H локально компактна, то любой локально ограниченный гомоморфизм в группу H автоматически является локально относительно компактным.

Теорема 3.1. *Пусть G — топологическая группа, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в (отделимую) топологическую группу H. Множество $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной подгруппой топологической группы H и компактной нормальной подгруппой в замкнутой подгруппе $\overline{\pi(G)}$ группы H. Кроме того, для любой окрестности V множества $\mathrm{DG}(\pi)$ существует такая окрестность единицы U, что $\overline{\pi(U)} \subset V$, и гомоморфизм π непрерывен тогда и только тогда, когда $\mathrm{DG}(\pi) = \{e_H\}$.*

Доказательство. Фильтр $\mathfrak{U}$ содержит базис симметричных окрестностей V единичного элемента ($V = V^{-1}$), и любая симметричная окрестность V содержит такую симметричную окрестность W, что $WW \subset V$. По предположению, существует такая окрестность $U \in \mathfrak{U}$, что замыкание $\overline{\pi(U)}$ компактно. Отсюда следует, что введенное в теореме множество $\mathrm{DG}(\pi)$ компактно и содержит обратные к своим элементам и произведения своих элементов, и поэтому является компактной подгруппой группы H. Так как множество gVg^{-1}, $g \in G$, является симметричной окрестностью единицы вместе с V, то пересечение $\mathrm{DG}(\pi)$ всех множеств $\overline{\pi(U)}$, $U \in \mathfrak{U}$, инвариантно относительно сопряжения с любым элементом вида $\pi(g)$, $g \in G$, так что $\mathrm{DG}(\pi)$ является нормальной подгруппой в замкнутой подгруппе $\overline{\pi(G)}$ группы H.

Пусть V — окрестность множества $\mathrm{DG}(\pi)$ в H, а U_0 — некоторая окрестность единицы в G. По условию, множество $\overline{\pi(U_0)}$ компактно в H. Следовательно, множество $\overline{\pi(U_0)} \setminus V$ тоже компактно в H. Семейство пересечений $(\overline{\pi(U_0)} \setminus V) \cap \overline{\pi(U)}$, $U \in \mathfrak{U}$, имеет пустое пересечение и, ввиду компактности множества $\overline{\pi(U_0)} \setminus V$, содержит пересечения $(\overline{\pi(U_0)} \setminus V) \cap \overline{\pi(U)}$ конечного числа участников семейства с пустым пересечением; обозначим соответствующие окрестности через $U_1, \ldots, U_n$. Тогда пересечение $(\overline{\pi(U_0)} \setminus V) \cap \overline{\pi(U)}$ с таким $U \in \mathfrak{U}$, что $U \subset \bigcap_{i:1 \leqslant i \leqslant n} U_i$, пусто, так что $\overline{\pi(U)} \subset V$.

Из определения непрерывности следует, что $\mathrm{DG}(\pi) = \{e_H\}$, если π непрерывен. Обратно, если $\mathrm{DG}(\pi) = \{e_H\}$, то базис фильтра $\{\overline{\pi(U)} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ сходится к $\{e_H\}$, и поэтому гомоморфизм π непрерывен. $\square$

Предложение 3.1. *Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ — направленное по убыванию семейство окрестностей единицы в топологической группе G. Для любого локально относительно компактного (не обязательно непрерывного) гомоморфизма π группы G в отделимую топологическую группу H рассмотрим направленность $\{\pi(g_U) \mid g_U \in U \in \mathfrak{U}_G\}$ в H (о направленностях и их сходимости см. [80, раздел 1.6 и предложение 1.6.1]). Тогда все предельные точки направленности $\{\pi(g_U)\}$ принадлежат* $\mathrm{DG}(\pi)$.

Доказательство. По теореме 3.1, для любой окрестности V введенного выше множества $\mathrm{DG}(\pi)$ существует такая окрестность единицы U, что $\overline{\pi(U)} \subset V$. Как известно, отделимое пространство топологической группы вполне регулярно, так что в отделимом пространстве H любое замкнутое подмножество A в H имеет окрестность, не содержащую данную точку x_0, не принадлежащую подмножеству A. Поэтому пересечение всех окрестностей множества $\mathrm{DG}(\pi)$ совпадает с $\mathrm{DG}(\pi)$. В свою очередь, если V — окрестность множества $\mathrm{DG}(\pi)$ в H, а U_0 — такая окрестность единицы в G, что $\overline{\pi(U_0)} \subset V$, то при $U \subset U_0$ тем более $\overline{\pi(U)} \subset V$, так что все предельные точки направленности $\{\pi(g_U)\}$ лежат в замыкании V для любой окрестности V множества $\mathrm{DG}(\pi)$, и все эти точки содержатся в $\mathrm{DG}(\pi)$. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ — направленное по убыванию семейство окрестностей единицы в топологической группе G. Пусть π — локально относительно компактный (не обязательно непрерывный) гомоморфизм группы G в отделимую топологическую группу H. Тогда любая точка множества $\mathrm{DG}(\pi)$ является пределом некоторой поднаправленности направленности вида $\{\pi(g_U)\}$.*

Доказательство. Пусть $V \in H$ — окрестность множества $\mathrm{DG}(\pi)$ в H и пусть $U \in \mathfrak{U}_G$ и $W \in \mathfrak{U}_H$. Пусть $h_0 \in \mathrm{DG}(\pi)$. Сопоставим тройке (V, U, W) элемент $h_{(V,U,W)} \in h_0 W \cap \overline{\pi(U)}$ (множество $h_0 W \cap \overline{\pi(U)}$ непусто, так как $h_0 \in \overline{\pi(U)}$). Согласно [103, теорема 3.1.23], построенная направленность (с покомпонентными направленностями по убыванию) имеет предельную точку, и предел соответствующей поднаправленности непременно совпадает с h_0 ввиду участия направленности с $W \in \mathfrak{U}_H$. $\square$

Определение 3.4. Пусть G — топологическая группа, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H. Компактная нормальная подгруппа $\mathrm{DG}(\pi)$ замыкания образа группы G при гомоморфизме π называется *группой разрывов* гомоморфизма π.

В частности, группа разрывов определена для любого локально ограниченного гомоморфизма в локально компактную группу (см. определение 3.3) и тем самым и для любого локально ограниченного конечномерного представления топологической группы.

Введём важное для дальнейшего определение.

Определение 3.5. Пусть G — группа, X — подмножество в G. Множество X называется *делимым*, если для любого элемента $x \in X$ и любого натурального числа p существует такой элемент $y \in X$, что $y^p = x$. Группа G называется *локально делимой*, если операция возведения в любую натуральную степень p открыта в единице группы, т.е. множество p-х степеней элементов, пробегающих любую окрестность единицы в G, содержит некоторую окрестность единицы в G.

Очевидно, любая группа Ли локально делима. Следующее фольклорное утверждение показывает, что в любой топологической группе замыкания делимых относительно компактных подгрупп делимы.

Лемма 3.1. *Пусть G — топологическая группа, а X — подмножество группы G с компактным замыканием в G. Если X делимо, то и его замыкание в G делимо.*

Доказательство. Если $\overline{X}$ — замыкание множества X в G и если $x \in \overline{X}$, то для любого $p \in \mathbb{N}$ существует направленность элементов вида y^p, $y \in X$, сходящаяся к x. Так как замыкание множества X компактно, то направленность элементов y имеет сходящуюся поднаправленность. Если z — предел этой поднаправленности, то $z^p = x$ ввиду непрерывности операции возведения в степень. □

Следующее утверждение — локальный вариант предыдущего.

Лемма 3.2. *Пусть G — локально делимая группа, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H. Тогда группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной связной подгруппой группы H. В частности, если π — локально относительно компактный гомоморфизм локально делимой группы G в топологическую группу H, то $\mathrm{DG}(\pi)$ — связная компактная группа.*

Доказательство. Если гомоморфизм π непрерывен, то $\mathrm{DG}(\pi) = \{e_H\}$, и поэтому остается рассмотреть случай разрывного гомоморфизма π.

Так как π локально относительно компактен по условию, то группа $\mathrm{DG}(\pi)$ компактна по теореме 3.1. Пусть $V_0 \subset G$ — окрестность единицы в G, замыкание образа которой (множество $\overline{\pi(V_0)}$) компактно в H. По условию локальной делимости группы G, любой элемент U фильтра $\mathfrak{U}$ образован такими окрестностями единицы в G, которые для любого натурального p содержат окрестность $V = V_U \subset U$, любой элемент которой есть p-я степень некоторого элемента окрестности U. Эти окрестности V образуют базис фильтра $\mathfrak{U}$. Следовательно, для любого элемента $d \in \mathrm{DG}(\pi)$ существует направленность $\{q_{V_U}\}$, $q_{V_U} \in \overline{\pi(V_U)}$, $V_U \subset U \in \mathfrak{U}$, сходящаяся к d. Можно считать, что $q_{V_U} \in \pi(V_U)$. По построению окрестности V_U, существует такой элемент $\delta_{p,U} \in U$, что $\delta_{p,U}^p = q_{V_U}$. Тогда направленность $\pi(\delta_{p,U}^p) = (\pi(\delta_{p,U}))^p = \pi(q_{V_U})$, $U \in \mathfrak{U}$, сходится к d, причём все элементы $\pi(\delta_{p,U})$ лежат в компактном множестве $\overline{\pi(V_U)}$. Поэтому направленность $\{\pi(\delta_{p,U})\}$, $U \in \mathfrak{U}$, имеет предельные точки. С другой стороны, все предельные точки такой направленности должны принадлежать $\mathrm{DG}(\pi)$. В силу непрерывности операции возведения в степень, эти предельные точки является корнями степени p из элемента d. Следовательно, группа $\mathrm{DG}(\pi)$ делима. Поэтому она связна [122, теорема 9.35]. $\square$

Нам понадобится следующее факторизационное свойство групп разрывов.

Лемма 3.3. *Пусть G — связная локально компактная группа, N — её замкнутая нормальная подгруппа, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в некоторую топологическую группу H (например, локально ограниченный гомоморфизм в локально компактную группу). Пусть M — группа разрывов ограничения $\mathrm{DG}(\pi|_N)$. Тогда M является замкнутой нормальной подгруппой в компактной группе разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$, и соответствующая факторгруппа $\mathrm{DG}(\pi)/M$ изоморфна группе разрывов $\mathrm{DG}(\psi)$ гомоморфизма ψ группы G, получаемого композицией гомоморфизма π и канонического гомоморфизма $\overline{\pi(G)} \to \overline{\pi(G)}/M$.*

Доказательство. Так как гомоморфизм π локально относительно компактен по условию, то группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ компактна по теореме 3.1. Поскольку N — замкнутая нормальная подгруппа в G (и поэтому семейство окрестностей единицы в группе N инвариантно относительно автоморфизмов, определяемых ограничением на N внутренних автоморфизмов группы G), то из определения группы $\mathrm{DG}(\pi|_N)$ как пересечения замыканий образов всевозможных окрестностей следует, что компактная подгруппа $\mathrm{DG}(\pi|_N)$ группы $\overline{\pi(G)}$ является $\pi(G)$-инвариантной, а потому и $\overline{\pi(G)}$-инвариантной, т.е. компактной нормальной подгруппой в $\overline{\pi(G)}$. Рассмотрим гомоморфизм ψ группы G в $\overline{\pi(G)}/M$, получаемый композицией гомоморфизма π и канонического гомоморфизма

$$\theta\colon \overline{\pi(G)} \to \overline{\pi(G)}/M.$$

Гомоморфизм ψ локально относительно компактен, поскольку образы компактных множеств при непрерывном отображении компактны. Поскольку замыкание π-образа любой окрестности единицы в группе G содержит и нормальную подгруппу $\mathrm{DG}(\pi)$ в $\overline{\pi(G)}$, и тем более нормальную подгруппу M, то замыкание ψ-образа любой окрестности единицы в группе G содержит факторгруппу $\mathrm{DG}(\pi)/M$,

$$\mathrm{DG}(\psi) \supseteq \mathrm{DG}(\pi)/M,$$

а из компактности группы $\overline{\pi(G)}$ следует, что π-образ направленности $g_U \in U$, $U \in \mathfrak{U}$, ψ-образ которой сходится к данному элементу x группы $\mathrm{DG}(\pi)/M$, имеет предельную точку y в $\overline{\pi(G)}$, и $\theta(y) = x$ ввиду непрерывности отображения θ, так что

$$\mathrm{DG}(\psi) \subseteq \mathrm{DG}(\pi)/M,$$

что завершает доказательство леммы. □

Приведём следствие леммы 3.3.

Следствие 3.1. *Пусть G — коммутативная связная локально компактная группа, разрешимая связная локально компактная группа или компактная связная группа, а π — локально ограниченный гомоморфизм группы G в топологическую группу H. Тогда группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной связной подгруппой группы H.*

Доказательство. Если G — связная локально компактная коммутативная группа, то её можно представить в виде прямого произведения конечномерной векторной группы и связной компактной абелевой группы (см., например, [122, теорема 7.57 (iii)]). Но векторная группа локально делима как группа Ли, а связная компактная абелева группа тоже делима [122, следствие 8.5], и её локальная делимость следует из теоремы об открытом отображении, применённом к гомоморфизму, определяемому возведением в данную натуральную степень (см., например, [114, теорема 5.29]). Таким образом, любая коммутативная связная локально компактная группа локально делима, и остаётся применить лемму 3.2.

Если G — связная локально компактная разрешимая группа, то группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является одновременно компактной и связной разрешимой (таким образом, коммутативной), что сразу следует по индукции из леммы 3.3, применённой к последовательным факторам композиционного ряда.

Если G — связная компактная группа, то топология в группе G содержит фундаментальную систему окрестностей единицы e, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов [122, следствие 1.12], и, кроме того, в группе G существуют максимальные связные компактные коммутативные подгруппы $T \subset G$, и все они сопряжены в G. Пересечение данной окрестности O элемента e, инвариантной относительно внутренних автоморфизмов, с подгруппой T есть окрестность U элемента e в T. Тем самым в группе G существует фундаментальная система окрестностей единицы, имеющих вид множеств $\bigcup_{g\in G} gUg^{-1}$, где U пробегает семейство окрестностей единицы в T. На такой окрестности в группе G операция возведения в натуральную степень сводится к возведению в степень только на окрестности единицы U в коммутативной связной компактной группе T. Поскольку, как мы видели выше, группа T локально делима, то и вся группа G локально делима. Остаётся применить лемму 3.2. $\square$

Следующее свойство связывает группы разрывов гомоморфизма и определяемого им гомоморфизма коммутанта.

Лемма 3.4. *Пусть G — топологическая группа, G' — коммутант группы G (в алгебраическом смысле и в топологии, индуцированной топологией группы), а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в некоторую топологическую группу H. Коммутант группы разрывов гомоморфизма π является подгруппой группы разрывов ограничения $\pi|_{G'}$ гомоморфизма π на коммутант G' группы G:*

$$\mathrm{DG}(\pi)' \subset \mathrm{DG}(\pi|_{G'}).$$

Если отображение $[\cdot,\cdot]\colon G\times G \to G' \subset G$, определённое формулой

$$\{p,q\} \mapsto [p,q] (= pqp^{-1}q^{-1}), \qquad p,q \in G,$$

открыто в единице группы $G\times G$ (как отображение $G\times G \to G'$) в топологиях, индуцированных исходной топологией группы G, на всех достаточно малых окрестностях единицы в $G\times G$, то коммутант группы разрывов гомоморфизма π совпадает с группой разрывов ограничения $\pi|_{G'}$ представления π на коммутант G' группы G:

$$\mathrm{DG}(\pi)' = \mathrm{DG}(\pi|_{G'}).$$

Доказательство. Пусть c — элемент коммутанта группы $\mathrm{DG}(\pi)$. Тогда c есть произведение конечного числа элементов вида

$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}, \quad \text{где} \quad a,b \in \mathrm{DG}(\pi).$$

Любой элемент $[a,b]$, $a,b \in \mathrm{DG}(\pi)$, является пределом направленности элементов вида

$$[\pi(g_U),\pi(h_U)] = \pi([g_U,h_U]), \qquad g_U,h_U \in U \in \mathfrak{U},$$

которые принадлежат π-образу коммутанта G' группы G (где $\pi(g_U)$ сходится по базису фильтра $\mathfrak{U}$ к a, а $\pi(g'_U)$ — к b). Для любого $V \in \mathfrak{U}$ существует такая окрестность $U_V \in \mathfrak{U}$, что

$$\{[g,h] \mid g,h \in U_V\} \subset V \cap G',$$

так что семейство пересечений $V \cap G'$ пробегает базис окрестностей единицы в G' в индуцированной топологии. Поэтому направленность $[g_{U_V}, h_{U_V}]$ удовлетворяет условию $[g_{U_V}, h_{U_V}] \in V$ для любого $V \in \mathfrak{U}$, и любая предельная точка направленности $\pi([g_{U_V}, h_{U_V}])$ принадлежит группе разрывов $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$. В частности, элемент $[a,b]$ тоже принадлежит группе $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$. Таким образом, любой элемент вида $[a,b]$, $a,b \in \mathrm{DG}(\pi)$, принадлежит группе разрывов $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$ ограничения гомоморфизма π на G', и поэтому $c \in \mathrm{DG}(\pi|_{G'})$ (как произведение конечного числа элементов группы $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$), так что

$$\mathrm{DG}(\pi)' \subset \mathrm{DG}(\pi|_{G'}).$$

В свою очередь, замыкание $\overline{\pi(V_0)}$ компактно в H для некоторой окрестности единицы V_0 в G, и из условия открытости следует, что для любой достаточно малой окрестности единицы W в G существует такая окрестность единицы V в G, что множество $\overline{\pi(V \cap G')}$ содержится в замыкании множества элементов вида $\pi([a,b])$, $a,b \in W$. Таким образом, множество $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$ является подмножеством замыкания

$$\overline{\{\pi([a,b]) = [\pi(a),\pi(b)] \mid a,b \in W\}}$$

для любой достаточно малой окрестности единицы W в G. Для любой точки прикосновения этого замыкания существуют соответствующие направленности элементов a и b, обеспечивающие сходимость коммутатора $[a,b]$ к выбранной точке. Так как множество $\overline{\pi(V_0)}$ компактно, то можно выделить сходящиеся поднаправленности элементов a и b. Отсюда и следует обратное включение

$$\mathrm{DG}(\pi)' \supset \mathrm{DG}(\pi|_{G'}). \qquad \square$$

Замечание 3.1. В частности, условие открытости в лемме 3.4 выполняется автоматически, если G — односвязная группа Ли. Действительно, в этом случае коммутант G' группы G замкнут (см. теорему 3.18.8 в [213]), и из теоремы о неявной функции следует, что, поскольку дифференциал аналитического отображения $G \times G \to G'$, $\{p,q\} \mapsto [p,q]$, $p,q \in G$, сюръективен в единице группы, то образ окрестности в $G \times G$ точки $(e,e) \in G \times G$ при этом отображении содержит некоторую окрестность точки $e \in G'$ в G'.

Следствие 3.2. *Пусть G — разрешимая связная локально компактная группа, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H. Тогда группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является коммутативной компактной связной подгруппой в H. Если G — разрешимая связная односвязная группа Ли и π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H, то гомоморфизм π непрерывен на коммутанте G' группы G.*

Доказательство. Согласно следствию 3.1, группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной связной подгруппой в H. Кроме того, поскольку группа G разрешима, то и группы $\pi(G)$ и $\overline{\pi(G)}$ разрешимы, и группа $\mathrm{DG}(\pi)$ разрешима как подгруппа разрешимой группы. Но связная компактная разрешимая группа коммутативна (ср. [122, теорема 9.24]). Как и в замечании 3.1, это означает, что $\mathrm{DG}(\pi|_{G'}) = \mathrm{DG}(\pi)' = \{e\}$, так что ограничение $\pi|_{G'}$ непрерывно (по теореме 3.1). □

Следующее утверждение позволяет описывать структуру группы разрывов конечно разложимых топологических групп.

Лемма 3.5. *Пусть G — топологическая группа, A_1, ..., A_n — замкнутые подгруппы в G, и $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Предположим, что отображение $A \to G$, определенное правилом $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mapsto a_1 a_2 \cdots a_n \in G$ для любого $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in A$, $a_i \in A_i$, $i=1,\ldots,n$, открыто в единице группы A. Пусть π — локально относительно компактный гомоморфизм топологической группы G в топологическую группу H. Тогда любой элемент d группы разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ можно представить в виде $d = d_1 d_2 \cdots d_n$, где $d_i \in \mathrm{DG}(\pi|_{A_i})$.*

Доказательство. По предположению, любая достаточно малая окрестность единицы в G содержится в множестве $\{a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in U_i,\ i=1,\ldots,n\}$, где U_i — окрестность единицы в A_i. Так как гомоморфизм π локально относительно компактен по предположению, то его ограничение на каждую подгруппу A_i тоже локально относительно компактно. Если направленность элементов

$$\pi(a_1 a_2 \cdots a_n) = \pi(a_1)\pi(a_2)\cdots\pi(a_n), \qquad a_1 a_2 \cdots a_n \in U \subset G,$$

сходится к некоторой точке группы разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ по фильтру $\mathfrak{U}$, то любая направленность $\pi(a_i)$, $a_i \in U \cap A_i$, $i = 1,\ldots,n$, имеет предельные точки в компактном множестве $\mathrm{DG}(\pi|_{A_i})$. Переходя к поднаправленностям, мы можем считать, что все направленности $\pi(a_i)$, $a_i \in U \cap A_i$, $i = 1, \ldots, n$, сходятся к некоторым точкам $d_i \in \mathrm{DG}(\pi|_{A_i})$. Тогда требуемое соотношение следует из непрерывности умножения в G. $\square$

3.1.2. Условия непрерывности некоторых гомоморфизмов топологических групп

Начнём с теоретико-группового доказательства некоторого обобщения известных условий непрерывности приводимых представлений.

Теорема 3.2. *Пусть G и H — топологические группы и пусть f — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в группу H. Пусть M и N — такие замкнутые нормальные подгруппы в H, что пересечение $M \cap N$ не содержит нетривиальных компактных подгрупп, и пусть φ и ψ — канонические гомоморфизмы группы H на факторгруппы H/M и H/N соответственно. Если композиции $\varphi \circ f$ и $\psi \circ f$ непрерывны, то и гомоморфизм f непрерывен.*

Доказательство. Согласно теореме 3.1, группа разрывов $\mathrm{DG}(f) \subset H$ гомоморфизма f компактна, причём группы $\varphi(\mathrm{DG}(f)) \subset (\varphi \circ f)(G)$ и $\psi(\mathrm{DG}(f)) \subset$ $\subset (\psi \circ f)(G)$ единичны, поскольку группы $(\varphi \circ f)(G)$ и $(\psi \circ f)(G)$ единичны согласно теореме 3.1. Таким образом, группа разрывов $\mathrm{DG}(f)$ гомоморфизма f является компактной подгруппой пересечения $M \cap N$, которое не содержит нетривиальных компактных подгрупп по условию. Итак, $\mathrm{DG}(f) = \{e_H\}$, что равносильно непрерывности гомоморфизма f согласно теореме 3.1. $\square$

Отсюда немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 3.3. *Пусть G — топологическая группа, E — банахово пространство, F_1, F_2, ..., F_{n-1}, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, — замкнутые собственные векторные подпространства в E,*

$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = E,$$

а ρ — такое локально относительно компактное (в топологии простой сходимости, т.е. в топологии в пространстве $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E, база окрестностей нуля которой состоит из множеств вида $\{T \mid t \in L(E), T(S) \subset V\}$, где S пробегает семейство конечных множеств *в E, а V — базис окрестностей нуля в E) представление топологической группы G непрерывными линейными операторами в E, что*

$$\rho(g)F_k \subset F_k \quad \text{для любых} \quad g \in G, \quad k \in \{1,\ldots,n\},$$

и представление, определяемое представлением ρ в F_1 и в каждом факторпространстве

$$F_{k+1}/F_k, \qquad k \in \{0,1,\ldots,n-1\},$$

непрерывно в топологии простой сходимости пространства непрерывных линейных операторов в F_1 или F_{k+1}/F_k, соответственно. Тогда представление ρ группы G в E непрерывно в топологии простой сходимости пространства непрерывных линейных операторов в E.

Доказательство. Заметим сначала, что образ группы G в $L(E)$ есть топологическая группа. Для этого достаточно установить непрерывность умножения в этом образе по совокупности переменных (в топологии простой сходимости). Так как замыкания образов окрестностей единицы в G компактны в топологии простой сходимлсти по предположению, а все орбиты таких множеств операторов в E сильно компактны, то направленности, сходящиеся в $L(E)$ в топологии простой сходимости (т.е. на каждом векторе) сходятся равномерно на этих орбитах ([75, III.3.1 и III.4.5]), что обычным образом доказывает непрерывность умножения на компакте, являющемся замыканием образа окрестности единицы. Отсюда сразу следует непрерывность умножения на всей группе $\pi(G)$ в сильной операторной топологии.

Итак, рассматриваемое представление можно считать гомоморфизмом топологических групп. Из индуктивных соображений следует, что достаточно рассмотреть случай $n=2$. В этом случае множества

$$M = \{T \in \rho(G) \mid T|_{F_1} = 1_{F_1}\} \quad \text{и} \quad N = \{T \in \rho(G) \mid \widetilde{T} = 1_{E/F_1}\},$$

где оператор $\widetilde{T}$ определяется равенством

$$\widetilde{T}(\xi + F_1) = T\xi + F_1 \in E/F_1, \qquad \xi \in E,$$

являются замкнутыми нормальными подгруппами в $\rho(G)$ ввиду непрерывности представлений группы G, определяемых представлением ρ в F_1 и E/F_1 по условию, а компактная группа разрывов $\mathrm{DG}(\rho) \subset L(E)$ представления ρ имеет лишь тривиальное пересечение с $M \cap N$, поскольку последовательность степеней любого неединичного оператора T, принадлежащего пересечению $M \cap N \cap \mathrm{DG}(\rho)$, которое равно $\mathrm{DG}(\rho)$ по условию непрерывности ограничений представления ρ на F_1 и E/F_1, не ограничена (действительно, при $T \in M \cap N \cap \mathrm{DG}(\rho)$, $T\xi = \xi + \eta$, $\xi \in F_1$, $\eta \in F_2$, $\eta \neq 0$, имеем $T^n\xi = \xi + n\eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$) и поэтому $\{T^n, n \in \mathbb{Z}$ не может принадлежать относительно компактному множеству операторов в E. Следовательно, $M \cap N \cap \mathrm{DG}(\rho) = \{1_E\}$. Остаётся применить теорему 3.2 о непрерывности представлений с тривиальной группой разрывов. □

Фналогичный результат в слабой операторной топологии можно также получить с помощью аналога теоремы Лоуренса Брауна [42] (о слабой непрерывности представлений с сильно непрерывным подпредставлением и сильно непрерывным представлением в соответствующем факторпространстве), полученного автором в [253] и утверждающем слабую непрерывность локально эквинепрерывных представлений со слабо непрерывным подпредставлением и слабо непрерывным представлением в факторпространстве.

Отметим ещё одно очевидное следствие.

Следствие 3.4. *Если все неприводимые подфакторы данного локально ограниченного конечномерного представления топологической группы непрерывны, то и всё представление непрерывно. Если все неприводимые локально ограниченные конечномерные представления топологической группы непрерывны, то и все локально ограниченные конечномерные представления этой группы непрерывны.*

Это следствие, вместе с аналогом теоремы Ли об одномерности не обязательно непрерывных неприводимых конечномерных представлений разрешимой группы Ли с делимыми коммутативными факторами, используется в доказательстве автоматической непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений связной группы Ли на коммутанте группы. Мы кратко изложим эти факты, а затем укажем другой подход к задаче, позволяющий существенно обобщить результаты.

3.1.3. Следствия

Начнём с одного непосредственного приложения доказанного выше варианта теоремы Ли.

Следствие 3.5. *Пусть G — связная разрешимая локально компактная группа. Любое (не обязательно непрерывное) локально ограниченное конечномерное представление группы G непрерывно на коммутанте G' группы G в топологии, индуцированной исходной топологией группы G.*

Доказательство. Пусть π — локально ограниченное конечномерное представление группы G. Согласно теореме 2.13 главы 2, существует базис в пространстве представления, в котором все матрицы операторов представления π являются верхними треугольными. Следовательно, в этом базисе все элементы коммутанта G' записываются унипотентными матрицами. Таким образом, все диагональные представления оказываются единичными представлениями группы G', и поэтому они тривиальным образом непрерывны в любой групповой топологии на группе G'. Так как представление π группы G локально ограничено по предположению, то ограничение представления π на G' непрерывно согласно теореме 3.1. □

Следующее утверждение носит предварительный характер и будет в дальнейшем существенно усилено.

Следствие 3.6. *Любая некоммутативная связная разрешимая локально компактная группа содержит нетривиальную замкнутую связную подгруппу, ограничение на которую любого локально ограниченного гомоморфизма данной группы в локально компактную группу непрерывно.*

Доказательство. Действительно, данный гомоморфизм непрерывен на неединичном коммутанте группы. □

3.1.4. Условия непрерывности для конечномерных представлений группы Ли $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Начнём со следующей редукции.

Лемма 3.6. *Пусть G — связная простая группа Ли, а π — конечномерное представление группы G. Пусть H — нетривиальная однопараметрическая подгруппа в G.*

(1) *Если ограничение представления π на H локально ограничено, то и всё представление π локально ограничено.*

(2) *Если ограничение представления π на H непрерывно, то и всё представление π непрерывно.*

Доказательство. Так как присоединённое представление группы G в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G неприводимо по определению простой группы Ли, то орбита ненулевого вектора, касательного к H, тотальна в $\mathfrak{g}$, так что можно найти конечное число однопараметрических подгрупп $H_1 = H$, H_2, ..., H_n, $n = \dim G$, каждая их которых сопряжена с H, ненулевые касательные векторы которых в единице группы образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом, касательное пространство к множеству произведений $h_1 h_2 \cdots h_n$ элементов h_i, где каждый сомножитель h_i принадлежит некоторой окрестности единицы в $V_i \subset H_i$, совпадает со всей алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, так что само множество произведений содержит окрестность единицы в G. Выбирая окрестности V_i в H_i сопряжёнными такой окрестности V, что семейство $\pi|_V$ ограничено, мы видим, что представление π локально ограничено. Это доказывает утверждение (1). Доказательство утверждения (2) аналогично. □

В важнейшем частном случае конечномерных представлений вещественной унимодулярной группы матриц второго порядка $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ полученные выше результаты приводят к следующим условиям непрерывности.

Теорема 3.3. *Пусть G — универсальная накрывающая группа группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, и пусть $G = KAN$ — разложение Ивасавы группы G, где K накрывает группу вращений плоскости и изоморфна группе $\mathbb{R}$, A — подгруппа, накрывающая группу диагональных вещественных унимодулярных матриц с положительными элементами (группа A изоморфна этой матричной группе), а N — подгруппа, накрывающая группу унипотентных вещественных верхних треугольных матриц (группа N изоморфна этой матричной группе). Пусть ρ — конечномерное представление некоторой группы Ли, локально изоморфной группе G (ρ не предполагается непрерывным). Если ограничение представления ρ на подгруппу, соответствующую N, локально ограничено, то ρ непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим ρ как представление группы G. Так как ограничение представления ρ на N локально ограничено, то из леммы 3.6 следует, что всё представление ρ локально ограничено. Так как группы A и N изоморфны делимой группе $\mathbb{R}$ и коммутант группы AN совпадает с N, то группа $H = AN$ удовлетворяет условиям следствия 3.5. Следовательно, существует базис, в котором операторы представления ρ записываются верхними треугольными матрицами, и поэтому имеет вид, требуемый в следствии 3.5. Так как группа N совпадает с коммутантом группы AN, то диагональные представления единичны, так что ограничение представления ρ на N непрерывно. Следовательно, всё представление ρ непрерывно по лемме 3.6. Так как накрытия являются локальными гомеоморфизмами, то рассматриваемое представление непрерывно и на факторгруппе группы G по ядру представления, что завершает доказательство теоремы 3.3. □

3.2. Аналоги теоремы Картана–Ван дер Вардена о непрерывности

3.2.1. Теорема Ван дер Вардена о непрерывности для полупростых групп Ли

Теорема Картана–Ван дер Вардена [53, 214] утверждает, что любое ограниченное конеччномерное представление компактной группы Ли непрерывно. Ван дер Варден привел также схему доказательства аналогичной теоремы для локально ограниченных линейных представлений полупростых групп.

Приведём ключевую часть доказательства полного аналога этой теоремы для связных полупростых групп Ли.

Теорема 3.4. *Пусть G — связная полупростая группа Ли. Пусть ρ — конечномерное представление группы G* (*которое не предполагается непрерывным*). *Следующие условия равносильны*:

1) *Представление ρ непрерывно.*

2) *Представление ρ локально ограничено.*

Доказательство. Очевидно, что 1) $\Rightarrow$ 2). Докажем, что 2) $\Rightarrow$ 1). Так как любая полупростая группа Ли является факторгруппой прямого произведения конечного числа простых групп Ли, достаточно рассмотреть случай, когда группа Ли G проста. Если G компактна, то утверждение следует из теоремы Картана–Ван дер Вардена. Пусть G некомпактна. Пусть $G = KAN$ — разложение Ивасавы группы G, где K накрывает максимальную компактную подгруппу присоединённой группы, группа A накрывает соответствующую абелеву подгруппу, а N — соответствующую нильпотентную подгруппу разложения Ивасавы присоединённой группы.

Воспользуемся корневой системой простой группы Ли G относительно A и выберем систему положительных корней для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G. Для любого положительного корня α алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно построить стандартную трехмерную “корневую” подалгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы Ли $\mathrm{SL}\,(2{,}\mathbb{R})$. Так как композиция соответствующего отображения универсальной накрывающей Σ группы $\mathrm{SL}\,(2{,}\mathbb{R})$ в группу G и данного локально ограниченного представления ρ группы Ли G непрерывна на нильпотентной части группы Σ (как было доказано выше в теореме 3.3), то ограничение представления ρ на однопараметрическую подгруппу в N непрерывно, и из леммы 3.6 следует, что всё представление ρ непрерывно, что завершает доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 1). $\square$

3.2.2. Аналог теоремы Ван дер Вардена для коммутанта связной группы Ли

Теорема 3.5 [269]. *Пусть G — связная группа Ли, пусть G' — коммутант группы G, и пусть π — локально ограниченное конечномерное представление группы G. Ограничение $\pi|_{G'}$ представления π на G' является непрерывным представлением группы G' во внутренней топологии аналитической группы G'.*

Доказательство. Согласно следствию 3.3, достаточно доказать, что неприводимые подфакторы представления π непрерывны. Поэтому мы вправе дополнительно предположить, что π — неприводимое представление. Изучим сначала представление π, рассматривая его как представление π_H универсальной накрывающей H группы G и пользуясь соответствующим разложением Леви–Мальцева. Рассмотрим ограничение представления π_H на радикал R_H группы H. По теореме 2.13 главы 2, существует базис в пространстве E представления π_H (и тем самым в пространстве представления π), в котором ограничение представления π_H на радикал R_H записывается верхними треугольными матрицами. Следовательно, существует общий собственный вектор $\xi \in E$, $\xi \neq 0$, всех операторов $\pi_H(r)$, $r \in R_H$, так что $\pi_H(r)\xi = \lambda(r)\xi$ при $r \in R_H$, где $\lambda(r) \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для любого $r \in R_H$. Таким образом, существует одномерное подпространство $L \subset E$, инвариантное относительно ограничения π_H представления π на R_H. Так как H/R_H — связная группа Ли, то она порождена любой окрестностью единицы, и существует делимая окрестность единицы (например, гомеоморфная небольшой звёздной окрестности нуля в алгебре Ли с помощью экспоненциального отображения). По лемме 2.9 главы 2 отсюда следует, что все операторы ограничения представления π_H на R_H кратны единичному оператору в пространстве E. При этом, по условию, данное представление π неприводимо.

Таким образом,

$$\lambda(r)\pi_H(g)\xi = \lambda(g^{-1}rg)\pi_H(g)\xi = \pi_H(r)\pi_H(g)\xi, \qquad g \in H, \quad r \in R_H,$$

откуда следует, что $\pi_H(r)$ действует как оператор $\lambda(r)1_F$ на неприводимом подпространстве F, порождённом вектором ξ, и F совпадает с E, поскольку представление π_H неприводимо по предположению. Итак,

$$\pi_H(r) = \lambda(r)1_E \quad \text{для любого} \quad r \in R.$$

В частности, ограничение отображения π_H на любую полупростую подгруппу Леви в H является неприводимым представлением этой подгруппы, и характер λ централен, т.е. соотношение $\lambda(r) = \lambda(g^{-1}rg)$ выполняется для всех $g \in H$ и $r \in R_H$. Таким образом, функция λ тождественно равна единице на $[H,R_H] \supset R'_H = [R_H,R_H]$.

С другой стороны, радикальная часть любого коммутатора в H (компонента полупрямого разложения, лежащая в радикале) принадлежит ядру центрального характера λ. Действительно, если S — подгруппа Леви и если $g = sr$ и $g_1 = s_1r_1$, где $s,s_1 \in S$ и $r,r_1 \in R$, то

$$gg_1g^{-1}g_1^{-1} = srs_1r_1r^{-1}s^{-1}r_1^{-1}s_1^{-1} =$$
$$= ss_1s^{-1}s_1^{-1}((s_1(s_1s)^{-1})^{-1}r(s_1(s_1s)^{-1}))(s_1sr_1r^{-1}(s_1s)^{-1})(s_1r_1^{-1}s_1^{-1}).$$

Следовательно, $gg_1g^{-1}g_1^{-1} = s_0r_0$, где $\lambda(r_0) = 1$, и ограничение представления π_H на коммутант группы H действует как соответствующее представление полупростой факторгруппы Ли H/R_H (это представление тривиально на образе ядра естественного накрытия $H \to G$). Следовательно, ограничение неприводимого представления π на коммутант G' группы G можно считать ограничением представления факторгруппы группы G, определяемым неприводимым локально ограниченным представлением факторгруппы группы Ли G по её радикалу (который является замкнутой нормальной подгруппой в G), т.е. рассматривать как неприводимое локально ограниченное представление связной полупростой группы Ли, которое непрерывно в фактортопологии по теореме 3.4. Итак, представление π совпадает на коммутанте G' группы G с представлением, поднятым с непрерывного представления факторгруппы G/R, и поэтому ограничение π на G' непрерывно в топологии, индуцированной внутренней топологией группы G'. □

Отметим важное для дальнейшего следствие.

Следствие 3.7. *Пусть G — связная группа Ли, H — группа Ли, а π — локально ограниченный гомоморфизм группы G в H. Тогда группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является коммутативной компактной связной подгруппой в H.*

Доказательство. Рассмотрим универсальную накрывающую группу $\widetilde{G}$ группы G и композицию $\pi\circ\chi$ накрывающего гомоморфизма $\chi\colon \widetilde{G}\to G$ и данного гомоморфизма π. Рассмотрим замыкание $L=\overline{\pi(G)}=\overline{(\pi\circ\chi)(\widetilde{G})}$ образа $\pi(G)$ группы G в H. Группа L является группой Ли как замкнутая подгруппа группы Ли H. По лемме 3.2, группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$ — компактная связная нормальная подгруппа в L, а факторгруппа $L/\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$ — образ связной группы G при непрерывном отображении, получаемом композицией отображения $\pi\circ\chi$ и последующего перехода к факторгруппе по $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$, а эта композиция непрерывна (так как её группа разрывов единична, см. теорему 3.1. Следовательно, группа L — связная группа Ли.

Применим теорему Леви–Мальцева и предста́вим группу $\widetilde{G}$ в виде полупрямого произведения $\widetilde{G}=S_{\widetilde{G}}\cdot R_{\widetilde{G}}$, где $S_{\widetilde{G}}$ — подгруппа Леви в $\widetilde{G}$, а $R_{\widetilde{G}}$ — радикал группы G. Обозначим через σ ограничение гомоморфизма $\pi\circ\chi$ на подгруппу Леви $S_{\widetilde{G}}$. Пусть R_L — радикал группы L. Композиция θ отображения σ и канонического гомоморфизма $L\to L/R_L$ переводит S в подгруппу полупростой группы Ли L/R_L. Поскольку присоединённая группа $\widehat{L/R_L}$ полупростой группы Ли L/R_L является линейной группой, получаемой из L/R_L факторизацией по дискретному центру, мы вправе рассматривать композицию отображения θ и последующего перехода к присоединённой группе группы $\widehat{L/R_L}$ как линейное представление полупростой группы $S_{\widetilde{G}}$. Так как исходное представление группы G локально ограничено, то и полученное линейное представление группы $S_{\widetilde{G}}$ локально ограничено. Следовательно, оно непрерывно по теореме 3.4, а тогда и отображение θ непрерывно (потому что группа Ли L/R_L

и её присоединённая группа $\widehat{L/R_L}$ локально изоморфны), и, таким образом, группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$ отображения $\pi\circ\chi$ содержится в радикале R_L группы L и потому целиком содержится в замкнутой разрешимой нормальной пдгруппе $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)\cap R_L$ группы разрывов $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$. Но каждый элемент группы разрывов $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$ можно представить в виде произведения элемента группы $\mathrm{DG}(\sigma)$ и элемента группы разрывов $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi|_{R_{\widetilde{G}}})$ ограничения гомоморфизма $\pi\circ\chi$ на радикал $R_{\widetilde{G}}$, а группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi|_{R_{\widetilde{G}}})$ разрешима как подгруппа замыкания образа разрешимой группы $R_{\widetilde{G}}$ при гомоморфизме $\pi\circ\chi$. Таким образом, группа $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$ является расширением разрешимой группы Ли с помощью разрешимой группы Ли и потому сама является разрешимой группой Ли. Но эта группа одновременно компактна и связна по лемме 3.2, и, следовательно, коммутативна [122, предложение 9.4]. Таким образом, группа $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$ является тором. Согласно лемме 3.4, отсюда следует, что группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi|_{\widetilde{G}'})$ ограничения $\pi\circ\chi|_{\widetilde{G}'}$ гомоморфизма $\pi\circ\chi$ на коммутант $\widetilde{G}'$ группы $\widetilde{G}$, рассматриваемый во внутренней топологии Ли, тривиальна, и, следовательно, ограничение $\pi\circ\chi|_{\widetilde{G}'}$ отображения $\pi\circ\chi$ на $\widetilde{G}'$ непрерывно во внутренней топологии на аналитической подгруппе $\widetilde{G}'$ группы $\widetilde{G}$ по теореме 3.1. Кроме того, поскольку группа $\widetilde{G}$ локально делима, а группа автоморфизмов тора является некоторой группой автоморфизмов решетки, то каноническое действие группы $\pi(G)$ на торе $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$ тривиально на окрестности единицы, а тогда и на всей группе $\pi(G)$, так что тор $\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$ централен в $\pi(G)=\pi\circ\chi(\widetilde{G})$. □

Замечание 3.2. Любой элемент $aba^{-1}b^{-1}$ коммутатора $\pi(G)'=\pi(G')$ группы $\pi(G)$ является единственным прообразом в $\pi(G)'=\pi(G')$ канонического образа рассматриваемого элемента в $\pi\circ\chi(\widetilde{G})/\,\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$. Действительно, замена a на ac_a и b на bc_b, где $c_a,c_b\in\mathrm{DG}(\pi\circ\chi)$, приводит к тому же элементу $ac_abc_bc_a^{-1}a^{-1}c_b^{-1}b^{-1}=aba^{-1}b^{-1}$ ввиду центральности элементов c_a и c_b.

Следующее утверждение использует информацию о структуре компактных групп.

Теорема 3.6. *Любой гомоморфизм некоммутативной связной компактной группы в локально компактную группу имеет нетривиальное множество относительной непрерывности, а именно, его ограничение на каждую простую компоненту коммутанта непрерывно.*

Доказательство. Теорема 9.24 в [122] утверждает, что $G = Z_0(G)G'$, где $Z_0(G)$ — центр группы G, а G' — коммутант группы G, а теорема 9.6 в [122] утверждает, что G' — полупростая компактная группа, т.е. её коммутант совпадает с ней. Кроме того, теорема 9.19 в [122] утверждает, что G' — факторгруппа прямого произведения односвязных простых компактных групп Ли. Поэтому ограничение любого гомоморфизма некоммутативной связной компактной группы в локально компактную группу на каждую простую компоненту коммутанта непрерывно по теореме Картана–Ван дер Вардена [214]. □

3.2.3. Свойства группы разрывов гомоморфизмов локально компактных групп

Нам нужна следующая информация о структуре связных локально компактных групп Ли.

Лемма 3.7. *Пусть L — связная локально компактная группа, C — вполне несвязная компактная нормальная подгруппа в L, и пусть факторгруппа L/C есть группа Ли. Существует связная замкнутая разрешимая подгруппа группы L, пересечение которой с центром группы L является замкнутой подгруппой конечного индекса в центре группы L.*

Доказательство. Из условия следует, что группа C центральна в L, а L — конечномерная группа. Рассмотрим радикал R (наибольшая связная разрешимая нормальная подгруппа) группы L (см. [175, теорема 3.7]). Тогда либо $L = R$, либо факторгруппа $\Sigma = L/R$ есть связная полупростая локально компактная группа конечной размерности [201, теорема 7.6]. Пусть $\pi\colon L \to \Sigma$ — каноническое отображение. Рассмотрим образ $\pi(Z(L))$ центра $Z(L)$ группы L в группе Σ. Так как π — эпиморфизм, то $\pi(Z(L))$ содержится в центре $Z(\Sigma)$ группы Σ. В этом случае $Z(L) \supset C$, и поэтому факторгруппа $\Sigma/Z(\Sigma)$ (по центру $Z(\Sigma)$ группы Σ) есть связная полупростая группа Ли без центра (прямое произведение присоединенных групп простых групп Ли).

Если сама группа Σ — группа Ли, то её центр конечен. Следовательно, существует замкнутая подгруппа Q конечного индекса в $Z(L)$ (Q — полный прообраз единицы в $Z(\Sigma)$), лежащая в R.

Пусть группа Σ не является группой Ли. Напомним [201, теорема 8.3], что в этом случае существует последовательность $\pi_n\colon L_{n+1} \to L_n$, $n \in \mathbb{N}$, нетривиальных конечнократных накрытий связных групп Ли, где $L_0 = \Sigma/Z(\Sigma)$ (прямое произведение присоединенных групп простых групп Ли) и Σ — проективный предел семейства $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где каждая группа L_n есть гомоморфный образ универсальной накрывающей группы L_0, которая изоморфна прямому произведению универсальных накрывающих простых сомножителей группы L_0. Напомним, что для простого сомножителя в $\Sigma/Z(\Sigma)$ последовательность $\{\pi_n\}$ может существовать тогда и только тогда, когда этот сомножитель является эрмитово симметрической полупростой вещественной группы Ли. В этом случае центр любой группы L_n содержится в центральном торе максимальной компактной подгруппы группы L_n. Поскольку неэрмитовы прямые сомножители в $\Sigma/Z(\Sigma)$ имеют универсальные накрывающие группы с конечным центром, то центр $Z(\Sigma)$ группы Σ содержит подгруппу Z' конечного индекса (ядро факторизации группы Σ по прообразу в Σ прямого произведения всех неэрмитовых прямых сомножителей в $\Sigma/Z(\Sigma)$), лежащую в проективном пределе прямого произведения одномерных центральных торов максимальных компактных подгрупп эрмитовых сомножителей [201, пункт 8.5 и теорема 8.6]. Тогда группа Z' лежит в проективном пределе T' этих прямых произведений. Группа T' связна и коммутативна как проективный предел торов. Её полный прообраз R_1 в L разрешим как расширение связной коммутативной группы T' с помощью связной разрешимой группы R, и группа R_1 содержит центральную подгруппу конечного индекса в $Z(L)$.

Итак, и в этом случае центр $Z(L)$ группы L содержит замкнутую подгруппу конечного индекса, лежащую в замкнутой связной разрешимой подгруппе R_1 группы L. $\square$

3.2.4. Связность группы разрывов конечномерных локально ограниченных представлений связных локально компактных групп

Вернёмся к свойствам группы разрывов локально ограниченных гомоморфизмов связных локально компактных групп. Установим следующий общий факт, являющийся одним из основных утверждений этого раздела.

Теорема 3.7. *Пусть G — связная локально компактная группа, а π — локально ограниченный гомоморфизм связной локально компактной группы G в связную локально компактную группу H. Тогда группа разрывов* $\mathrm{DG}(\pi)$ *является компактной связной группой (компактной связной подгруппой группы H).*

Доказательство. Пусть π — локально ограниченный гомоморфизм связной локально компактной группы G в связную локально компактную группу H. Пусть K — некоторая компактная нормальная подгруппа в H, факторгруппа по которой является группой Ли. Композиция $\psi = \theta_K \circ \pi$, где θ_K — каноническое отображение группы H на факторгруппу H/K, является локально ограниченным гомоморфизмом связной локально компактной группы G в связную группу Ли H/K. Докажем, что группа разрывов гомоморфизма $\psi = \theta_K \circ \pi$ связна.

Пусть Q — такая компактная нормальная подгруппа в группе G, что факторгруппа G/Q является группой Ли. Пусть Q_0 — компонента единицы в группе Q. Факторгруппа G/Q_0 есть конечномерная локально компактная группа. По теореме 3.7 группа разрывов $M_1 = \mathrm{DG}(\psi|_{Q_0})$ ограничения гомоморфизма ψ на подгруппу Q_0 есть связная компактная нормальная подгруппа в группе Ли, получаемой замыканием образа гомоморфизма ψ в связной группе Ли H/K. Композиция $\rho = \chi_{M_1} \circ \psi$ гомоморфизма ψ и канонического гомоморфизма χ_{M_1} группы $\overline{\psi(G)}$ на факторгруппу $\overline{\psi(G)}/M_1$ является локально ограниченным (и потому локально относительно компактным) гомоморфизмом связной локально компактной группы G в факторгруппу Ли $\overline{\psi(G)}/M_1$. Согласно лемме 3.3 и [114, теорема 7.14], из связности группы M_1 следует, что достаточно проверить, что группа $\mathrm{DG}(\rho)$ связна. По построению, ограничение $\rho|_{Q_0}$ удовлетворяет условию $\mathrm{DG}(\rho|_{Q_0}) = \{e_{H/K}\}$, и тем самым непрерывно по теореме 3.1. Поскольку группа Ли H/K не содержит малых подгрупп, то существует такая компактная нормальная подгруппа N в группе Q_0, что факторгруппа Q_0/N есть группа Ли и ограничение отображения $\rho|_{Q_0}$ на N тривиально, и поэтому факторгруппа Q_0/N есть конечномерная связная локально компактная группа и ограничение отображения $\rho|_{Q_0}$ на N_0 тривиально. Следовательно, факторгруппа G/N_0 является конечномерной связной локально компактной группой [201, теорема 1.5], и гомоморфизм ρ корректно определяет гомоморфизм группы G/N_0 в группу Ли $\overline{\psi(G)}/M_1$, который мы обозначим через σ и группа разрывов которого совпадает с группой разрывов отображения ρ. Тем самым достаточно доказать, что группа разрывов $\mathrm{DG}(\sigma)$ любого гомоморфизма конечномерной связной локально компактной группы в связную группу Ли связна.

Напомним, что для любой компактной нормальной подгруппы N_1 в локально компактной группе G_1 любая однопараметрическая группа в G_1/N_1 допускает подъём до однопараметрической группы в G_1, которую каноническое отображение группы G_1 в G_1/N_1 проектирует в данную однопараметрическую группу [158, теорема 4.15.1]. Тем самым все однопараметрические подгруппы в группе $G_1/N_1 = (G/N_0)/(N/N_0) = G/N$, соответствующие векторам из некоторого базиса в алгебре Ли группы Ли $G_1/N_1 = G/N$, можно поднять до однопараметрических подгрупп в группе $G_1 = G/N_0$. Если Z — (вполне несвязный) центр группы G/N_0, то произведение окрестностей единицы во всех базисных однопараметрических подгруппах на центр Z есть окрестность единицы в G/N_0 (полный прообраз окрестности единицы в группе Ли G/N). Отсюда следует, что произведение любых окрестностей единицы во всех базисных однопараметрических подгруппах на любую открыто-замкнутую подгруппу в Z есть окрестность единицы в G/N_0.

Согласно лемме 3.7, условия которой выполнены для связной локально компактной группы $L = G/N_0$ и вполне несвязной нормальной подгруппы $C = N/N_0$ в L, поскольку факторгруппа $L/C = G/N$ есть группа Ли, существует связная замкнутая разрешимая подгруппа M группы L, содержащая замкнутую подгруппу, являющуюся подгруппой конечного индекса в центре Z группы L. Следовательно, любое множество $V = U_1U_2\cdots U_nU_M$, являющееся произведением (сколь угодно малых) окрестностей единицы U_i, $i=1,\ldots,n$, во всех поднятых базисных однопараметрических подгруппах $T_1,\ldots,T_n$ в G/N_0 на (сколь угодно малые) окрестности единицы U_M в M, содержит некоторую окрестность единицы в G/N_0.

Для таких окрестностей, образующих базис фильтра окрестностей единицы в G/N_0, множества вида

$$\overline{(\sigma(V))} = \overline{\sigma(U_1)}\,\overline{\sigma(U_2)}\cdots\overline{\sigma(U_n)}\,\overline{\sigma(U_M)}$$

сходятся, с одной стороны, к группе разрывов $\mathrm{DG}(\sigma)$, а с другой — к произведению групп разрывов

$$\mathrm{DG}(\sigma|_{T_1})\,\mathrm{DG}(\sigma|_{T_2})\cdots\mathrm{DG}(\sigma|_{T_n})\,\mathrm{DG}(\sigma|_M),$$

где каждый из сомножителей $\mathrm{DG}(\sigma|_{T_i})$, $i=1,\ldots,k$, как и последний сомножитель $\mathrm{DG}(\sigma|_M)$, связен по построению.

Таким образом, и группа $\mathrm{DG}(\sigma) = \mathrm{DG}(\rho)$, и тем самым и группа $\mathrm{DG}(\psi)$, где $\psi = \theta_K \circ \pi$, являются компактными связными группами для любой компактной нормальной подгруппы K в группе-образе H, факторгруппа по которой является группой Ли. Если компактная группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ не является связной, то существует такая окрестность единицы в группе H, что её пересечение с $\mathrm{DG}(\pi)$ есть открыто-замкнутая компонента единицы в группе $\mathrm{DG}(\pi)$, и эта окрестность тоже содержит компактную нормальную подгруппу K в H, факторгруппа по которой является группой Ли [158, глава IV]. Тогда разные связные компоненты группы $\mathrm{DG}(\pi)$ не могут объединиться в одну компоненту при факторизации по K, и тем самым группа $\mathrm{DG}(\psi)$ оказывается несвязной, что невозможно по доказанному выше. Таким образом, сама группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной связной группой, что завершает доказательство теоремы 3.7. $\square$

Пример 3.1. Пусть $K = \prod_{j=1}^{\infty} G_j$, где каждая компактная группа G_j, $j = 1,2,\ldots$, является копией некоторой группы корней из единицы, например,

$$G_j = G = \{\exp(2\pi i k/n) \mid k = 1,2,\ldots,n\}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Любой элемент f группы K определяет (ограниченную) последовательность, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Применяя к каждой такой функции некоторый фиксированный характер χ банаховой алгебры $m = \mathrm{B}(\mathbb{N})$ ограниченных комплексных последовательностей, не определяемый отображением взятия значения последовательности в какой-либо точке множества $\mathbb{N}$, мы получаем одномерный характер группы K, а именно, $\pi\colon f \to \chi(f)$, $f \in K$. Представление π очевидным образом разрывно, и множество значений представления π на каждой окрестности единицы есть вся группа G_n n-х корней из единицы, так что $\mathrm{DG}(\pi) = G_n$. Компактная группа G_n конечна, неединична и не является связной.

С другой стороны, для групп Ли можно получить существенно более точный результат, который был отмечен выше в ходе доказательства следствия 3.7.

Следствие 3.8. *Группа разрывов любого локально ограниченного конечномерного представления одной группы Ли в другую есть конечномерный тор.*

Доказательство. Пусть π — локально ограниченный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли H. Как известно (см. следствие 3.7, группа $\mathrm{DG}(\pi)$ является компактной связной коммутативной группой Ли, т.е. конечномерным тором. $\square$

Пример 3.2. Пусть $K=\prod_{k=1}^{\infty} G_k$, где каждая компактная группа Ли G_k является копией некоторой простой компактной группы Ли, записанной в матричной форме, например, $G_k = \mathrm{SU}(2)$, $k = 1,2,\dots$. Любой матричный элемент f_{ij}, $i,j = 1,2$, любого элемента $f = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^2$ группы K определяет (ограниченную) функцию на натуральном ряде, $f_{ij}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $i,j = 1,2$. Применяя к каждой такой функции некоторый фиксированный характер χ банаховой алгебры $m = \mathrm{B}(\mathbb{N})$ ограниченных последовательностей, не определяемый отображением взятия значения последовательности в какой-либо точке множества $\mathbb{N}$, мы получаем конечномерное унитарное матричное представление $\pi\colon f = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^2 \to \{\chi(f_{ij})\}_{i,j=1}^2$, $f \in K$, группы K. Представление π очевидным образом разрывно, поскольку множество значений представления π на каждой окрестности единицы есть вся группа $\mathrm{SU}(2)$, так что группа $\mathrm{DG}(\pi)$ совпадает с группой $\mathrm{SU}(2)$. Тем самым группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ некоммутативна.

Теорема 3.8. *Пусть G — топологическая группа, пусть G' — коммутант группы G (в теоретико-групповом смысле), и пусть π — локально относительно компактный гомоморфизм G в некоторую топологическую группу H. Тогда коммутант группы разрывов гомоморфизма π является подгруппой группы разрывов ограничения $\pi|_{G'}$ группы π на коммутант G' группы G:*

$$\mathrm{DG}(\pi)' \subset \mathrm{DG}(\pi|_{G'});$$

более того, $\mathrm{DG}(\pi)'$ является нормальной подгруппой группы $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$.

Доказательство. Включение следует из леммы 3.4. Группа $\mathrm{DG}(\pi)'$ является нормальной подгруппой $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$, поскольку, в силу инвариантности G' в G, $\mathrm{DG}(\pi)'$, очевидно, инвариантна относительно внутренних автоморфизмов G, и, следовательно, нормальна в $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$. □

Теорема 3.9. *Группа разрывов любого локально ограниченного гомоморфизма группы Ли в группу Ли коммутативна.*

Доказательство. Пусть G и H — группы Ли, и пусть π — локально ограниченный гомоморфизм G в H. Пусть G' — коммутант группы G. Группа разрывов π, очевидно, совпадает с группой разрывов ограничения $\pi|_{G_0}$ на компоненту единицы G_0 группы G. Таким образом, можно считать, что G связна. Пусть $DG(\pi) \subset H$ — группа разрывов π.

Рассмотрим присоединенное представление $\mathrm{Ad}\, H$ группы H. Композиция $\mathrm{Ad}\, H \circ \pi$ является локально ограниченным линейным представлением G. По следствию 3.7, группа разрывов $DG(\mathrm{Ad}\, H \circ \pi)$ является коммутативной компактной связной подгруппой H.

Из определения $\mathrm{DG}(\pi) = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \overline{\pi(U)}$ группы разрывов гомоморфизма и из непрерывности $\mathrm{Ad}\, H$ следует, что, поскольку ядро $\mathrm{Ad}\, H$ совпадает с центром Z_H группы H, отсюда следует, что $\mathrm{DG}(\mathrm{Ad}\, H \circ \pi) = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \overline{(\mathrm{Ad}\, H \circ \pi)(U)}$ совпадает с $\mathrm{Ad}\, H(DG(\pi))$, где $\mathfrak{U}$ — семейство окрестностей U единичного элемента в G. Следовательно, $\mathrm{DG}(\mathrm{Ad}\, H \circ \pi)$ является образом $\mathrm{DG}(\pi)$ при факторизации H по центру Z_H.

Однако и Z_H, и $\mathrm{DG}(\mathrm{Ad}\, H \circ \pi)$ являются коммутативными группами. Следовательно, $\mathrm{DG}(\pi)$ разрешима. Пусть Z'_H — связная компонента единичного элемента e группы Z_H, а D — такая дополнительная дискретная подгруппа группы Z_H к Z'_H, что $D \cap Z'_H = \{e\}$. Тогда связная компонента $\mathrm{DG}(\pi)$ является связной разрешимой подгруппой Ли компактной группы Ли $\mathrm{DG}(\pi)$. Следовательно, эта компонента коммутативна. Вся группа $\mathrm{DG}(\pi)$ порождается этой коммутативной связной компонентой единичного элемента и центральной подгруппой D. Следовательно, $\mathrm{DG}(\pi)$ коммутативна, что и требовалось. □

Отметим очевидное следствие этого факта.

Теорема 3.10. *Любой локально ограниченный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли непрерывен на коммутанте G' группы G.*

Доказательство. Пусть π — локально ограниченный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли H. Как было доказано в следствии 3.7, группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ гомоморфизма π коммутативна. По замечанию 3.1,

$$\mathrm{DG}(\pi|_{G'}) = \mathrm{DG}(\pi)' = \{e_G\},$$

и гомоморфизм π непрерывен на G' по теореме 3.1. □

Мы используем известный пример редуктивной группы Ли с незамкнутой подгруппой Леви (см., например, пример 47 на стр. 256 в [213]). Пусть G_0 — универсальная накрывающая группа группы Ли $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, а Z — центр группы G_0, которая изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$ целых чисел. Существует такая дискретная подгруппа D группы $\mathbb{R} \times Z$, что факторгруппа $(\mathbb{R} \times Z)/D$ изоморфна одномерному тору $\mathbb{T}$ и образ подгруппы $\{0\} \times Z$ плотен в $\mathbb{T}$ (например, для D

можно взять ядро гомоморфизма вида

$$(t,\nu) \mapsto \exp(2\pi i(t+\alpha\overline{\nu})), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad \nu \in Z,$$

переводящего произведение $\mathbb{R} \times Z$ на $\mathbb{T}$, где α иррационально, и отображение $\nu \mapsto \overline{\nu}$ является изоморфизмом из Z на $\mathbb{Z}$). Для группы G можно взять факторгруппу $G = (\mathbb{R} \times G_0)/D$.

Пример 3.3. Рассмотрим следующий локально ограниченный гомоморфизм группы G:

$$\pi_1(g) = \pi_1((t,\widetilde{g_0})D) = \rho(g_0) \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}), \qquad g_0 \in G_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad g = (t,\widetilde{g_0})D,$$

где ρ обозначает каноническое накрывающее отображение $\rho\colon G_0 \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ (скажем, фактор-отображение на присоединенную группу G_0). Тогда пересечение радикала R (образ $\mathbb{R}$-слагаемого в G) с коммутантом (образ G_0 в G, который является подгруппой Леви S в этом случае) является центром G, и π_1 переводит центр в единичный элемент $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ (потому что центр $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ тривиален), и, таким образом, ограничение π_1 на R непрерывно, π_1 тривиально на центре S и является непрерывным локально ограниченным гомоморфизмом G.

Пример 3.4. Рассмотрим следующее двумерное локально ограниченное представление группы G:

$$\pi_2(g) = \pi_1((t,\widetilde{g_0})D) = \theta(g_0) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \qquad g_0 \in G_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad g = (t,\widetilde{g_0})D,$$

где θ обозначает каноническое накрывающее отображение $\theta\colon G_0 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (скажем, фактор-отображение по четной части центра Z_{G_0} группы G_0). Пересечение радикала R с коммутантом S группы G (образ G_0 в G, который является подгруппой Леви $S \subset G$ в этом случае) является центром G, а π_2 переводит центр в $\pm 1_2$ (1_2 обозначает единичную матрицу в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$), поскольку центр $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ равен $\pm 1_2$, и поскольку центр S плотен в R и, в частности, нечетные степени порождающего элемента центра плотны в радикале R, то отсюда следует, что ограничение π_2 на R разрывно, π_2 разрывно на замыкании центра S (которое совпадает с R). Следовательно, π_2 является примером двумерного локально ограниченного представления G, которое разрывно на коммутанте G в топологии, индуцированной исходной топологией G.

Замечание 3.3. Любой локально ограниченный гомоморфизм группы Ли в группу Ли, не имеющую нетривиальных связных компактных подгрупп, непрерывен.

Доказательство. По следствию 3.7, группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ такого гомоморфизма π связна и компактна. Следовательно, она тривиальна, и гомоморфизм π непрерывен по теореме 3.1. □

Теорема 3.11. *Любой локально ограниченный гомоморфизм в связную группу Ли связной группы Ли G, коммутант которой G' замкнут и допускает замкнутую дополнительную подгруппу Z такую, что $G = G'Z$, непрерывен тогда и только тогда, когда непрерывно его ограничение на Z.*

Доказательство. Очевидно, что если гомоморфизм группы непрерывен, то он непрерывен на каждой подгруппе группы, поэтому достаточно доказать часть “если”.

Пусть G — связная группа Ли G, коммутант которой G' допускает замкнутую дополнительную подгруппу Z такую, что $G = G'Z$.

Пусть H — связная группа Ли. Пусть π — локально ограниченный гомоморфизм G в H, непрерывный на Z.

По теореме 3.10, ограничение π на коммутант G' непрерывно относительно внутренней топологии Ли. (Ср. теорему 1.1.2 в [254] и исправление в [262].)

Следовательно, представление π раздельно непрерывно относительно подгрупп Z и G'.

По теореме Намиоки [168], представление π имеет точку совместной непрерывности и, следовательно, является непрерывной. Это завершает доказательство теоремы 3.11. □

Следствие 3.9. *Пусть G — связная группа Ли, которая либо линейна, либо односвязна, и ее коммутант G' допускает такую замкнутую дополнительную подгруппу Z, что $G = G'Z$. Любой локально ограниченный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен на Z.*

Доказательство. Очевидно, что если гомоморфизм группы непрерывен, то он непрерывен на каждой подгруппе группы, поэтому достаточно доказать часть “если”.

Пусть G — связная группа Ли, которая либо линейна, либо односвязна, и ее коммутант G' допускает такую замкнутую дополнительную подгруппу Z, что $G = G'Z$. Тогда коммутант G' замкнут в G [213, теорема 3.8.12 и упражнение 41,(e) к главе 3].

Теперь утверждение следствия вытекает из теоремы 3.11. Это завершает доказательство следствия. □

Следствие 3.10. *Пусть G — полупрямое произведение совершенной группы Ли B и коммутативной группы Ли Z. Любой локально ограниченный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен на Z.*

Доказательство. Очевидно, что если гомоморфизм группы непрерывен, то он непрерывен на каждой подгруппе группы, поэтому достаточно доказать часть "если".

Пусть B — совершенная группа Ли, Z — абелева группа Ли. И пусть линейная связная группа Ли G входит в расщепимую короткую точную последовательность $\{e\} \to Z \overset{\iota}{\to}\!\!\to G \overset{\rho}{\to}\!\!\to B \to \{e\}$ с непрерывным вложением ι и каноническим эпиморфизмом ρ группы G на B, изоморфную факторгруппе G/Z. Тогда коммутант G' группы G отображается эпиморфизмом ρ на коммутант B' группы B. Более того, G' находится в естественном взаимно однозначном соответствии с B'. Действительно, для любого $z_1,z_2 \in Z$ и $b,c \in G$ имеем $bz_1c_2(bz_1)^{-1}(cz_2)^{-1} = bzb^{-1}c^{-1} = [b,c]$ и, следовательно, коммутатор bZ и cZ равен $[b,c]Z$ для любых $b,c \in Z$. Таким образом, коммутант группы G естественно изоморфен коммутанту B. Однако B совершенен, а значит, $B' = B$. Следовательно, подгруппа G' из G совпадает с изоморфным образом группы B в G при отображении расщепления и потому замкнута, и каждый элемент G является произведением элемента из G' и элемента из Z.

Теперь утверждение следствия вытекает из теоремы 3.11. Это завершает доказательство следствия. □

Теорема 3.12. *Пусть G — связная группа Ли, G' — коммутант группы G, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, пусть $\mathfrak{g}'$ — коммутант $\mathfrak{g}$, пусть $\mathfrak{h}$ — векторное подпространство $\mathfrak{g}$, дополнительное к $\mathfrak{g}'$, пусть $\{h_1, \ldots, h_k\}$ — базис в $\mathfrak{h}$, пусть одномерные векторные подпространства $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_k$ натянуты на $h_1, \ldots, h_k$ соответственно. Пусть G' замкнут в G.*

Локально ограниченный гомоморфизм π группы G в группу Ли G_1 непрерывен тогда и только тогда, когда составное отображение $\mathbb{R}$ в G, заданное формулой $\mathbb{R}\ni t\mapsto\pi(\exp(th_i))$, $i=1,\dots,k$, непрерывно.

Доказательство. Очевидно, что если π непрерывно, то составное отображение от $\mathbb{R}$ до G, заданного формулой $\mathbb{R}\ni t\mapsto\pi(\exp(th_i))$, $i=1,\dots,k$, является непрерывным.

Докажем обратное утверждение. Пусть соответствующие условия теоремы удовлетворяются для некоторого векторного подпространства $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, дополнительного к $\mathfrak{g}'$ и для некоторого базиса $\{h_1,\dots,h_k\}$ $\mathfrak{h}$.

По теореме 3.10, ограничение представления π на G' непрерывно (поскольку G' замкнуто, то внутренняя топология группы Ли G' совпадает с топологией G', индуцированной топологией G).

С другой стороны, по самому предположению отображение композиции $\mathbb{R}$ в G, заданное формулой $\mathbb{R}\ni t\mapsto\pi(\exp(th_i))$, $i=1,\dots,k$, непрерывно.

Следовательно, гомоморфизм π раздельно непрерывен в некоторой окрестности единичного элемента e группы G относительно подгрупп G', H_1, …, H_k.

Поскольку отображение, определяемое ограничением произведения соответствующих экспоненциальных отображений для подгрупп в малую окрестность U группы e, является аналитическим диффеоморфизмом

$$(G'\times H_1\times\dots\times H_k)\cap U$$

на некоторую окрестность G по теореме 2.10.1 из [213], то из теоремы Намиоки [168] следует, что представление π имеет точку совместной непрерывности в U и, следовательно, непрерывно.

Это завершает доказательство теоремы 3.12. $\square$

Определение 3.6. Пусть H — топологическая группа, G — открытая проективно-лиева подгруппа в H, т.е. топологическая группа, в которой любая окрестность единичного элемента содержит компактную нормальную подгруппу, факторгруппа по которой является (конечномерной) группой Ли, и пусть $\mathfrak{N}$ — семейство компактных нормальных подгрупп в G, факторгруппы группы G по которым являются группами Ли. Пусть π — (теоретико-групповое) представление группы H в топологическом векторном пространстве E. Множество $\mathrm{FDG}(\pi)=\bigcap_{N\in\mathfrak{N}}\overline{\pi(N)}$, где черта означает замыкание (в данном случае подмножества пространства непрерывных линейных операторов в пространстве E в топологии простой сходимости), называется *финальной группой разрывов* представления π. Представление π называется *финально непрерывным*, если $\mathrm{FDG}(\pi)=\{e\}$, где e — единичный элемент группы H.

Очевидно, это условие не зависит от выбора открытой подгруппы G.

Теорема 3.13. *Пусть G — проективно-лиева группа, и пусть π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H. Семейство $\mathfrak{N}$ образует фильтр по убыванию. Множество* $\mathrm{FDG}(\pi)$ *содержится в группе разрывов* $\mathrm{DG}(\pi)$ *и является компактной нормальной подгруппой в группе $\overline{\pi(G)}$. Фильтр $\{\overline{\pi(N)} \mid N \in \mathfrak{N}\}$ сходится к* $\mathrm{FDG}(\pi)$. *Кроме того*, $\mathrm{FDG}(\pi) \subset \mathrm{DG}(\pi)$.

Доказательство. Если $N_1,N_2 \in \mathfrak{N}$, то $N = N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{N}$. Действительно, если f_1 и f_2 — канонические гомоморфизмы группы G на G/N_1 и G/N_2, соответственно, то гомоморфизм $G \ni g \mapsto (f_1(g),f_2(g)) \in G/N_1 \times G/N_2$ имеет ядро, равное N. Поэтому образ этого гомомофизма изоморфен G/N. Нетрудно видеть, что этот образ замкнут в группе Ли $G/N_1 \times G/N_2$ и потому является группой Ли. Множество $\pi(N)$ является нормальной подгруппой в образе $\pi(G)$ группы G. Следовательно, для любого $g \in G$ множество $\pi(g)\pi(N)\pi(g^{-1})$ является нормальной подгруппой в $\pi(G)$ группы G. Поэтому множество

$$\mathrm{FDG}(\pi) = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} \overline{\pi(N)}$$

является пересечением замкнутых подгрупп и инвариантно относительно сопряжений с элементами группы $\pi(G)$, а потому и с элементами группы $\overline{\pi(G)}$. Так как гомоморфизм π локально относительно компактен по предположению и образ любой нормальной подгруппы, лежащей в окрестности, образ которой имеет компактное замыкание, относительно компактен, то множество $\mathrm{FDG}(\pi)$ является компактной нормальной подгруппой в $\overline{\pi(G)}$. Так как любая окрестность единицы в G содержит такую компактную нормальную подгруппу N в G, что факторгруппа G/N является группой Ли, то имеет место включение $\mathrm{FDG}(\pi) \subset \mathrm{DG}(\pi)$.

Наконец, так как базис фильтра $\{\overline{\pi(N)} \mid N \in \mathfrak{N}\}$ содержит компактный элемент и пересечение всех элементов базиса есть $\mathrm{FDG}(\pi)$, то фильтр сходится к $\mathrm{FDG}(\pi)$. $\square$

Теорема 3.14. *Пусть G — проективно-лиева группа, а H — проективно-лиева группа. Пусть $\pi\colon G\to H$ — локально относительно компактный гомоморфизм. Следующие условия эквивалентны*:

(1) *гомоморфизм π финально непрерывен, т.е.* $(\mathrm{FDG}(\pi)=\{e_H\})$;

(2) *для любой такой компактной нормальной подгруппы K в H, что факторгруппа H/K есть группа Ли, существует такая компактная нормальная подгруппа N в G, что факторгруппа G/N является группой Ли и $\pi(N)\subset K$; таким образом, гомоморфизм π корректно определяет* (*не обязательно непрерывный*) *гомоморфизм $\pi_{K,G,N}$, отображающий группу Ли G/N в группу Ли H/K по формуле $\pi_{K,G,N}(gN)=\pi(g)K$, $g\in G$.*

Как показывает пример 3.2, условие $\mathrm{FDG}(\pi)=\{e_H\}$ существенно для справедливости этого утверждения.

Доказательство. Пусть G и H — группы, свойства которых указаны в формулировке теоремы, и пусть $\pi\colon G\to H$ — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в группу H. Предположим, что $\mathrm{FDG}(\pi)=\{e_H\}$. Пусть K — компактная нормальная подгруппа в H, для которой факторгруппа $L_K=H/K$ есть группа Ли. Тогда существует окрестность единицы W в L_K, не содержащая неединичных подгрупп. Следовательно, полный прообраз V окрестности W в H не содержит подгрупп, не содержащихся в K. В частности, из условия $\mathrm{FDG}(\pi)=\{e_H\}$ следует, что пересечение замыканий образов компактных нормальных подгрупп в G есть e и, так как фильтр $\{\overline{\pi(N)}\mid N\in\mathfrak{N}\}$ сходится к $\mathrm{FDG}(\pi)$ (по теореме 3.13), то существует такой элемент N фильтра, что его образ содержится в окрестности V, а поэтому и в нормальной подгруппе K. Итак, N — искомая компактная нормальная подгруппа в группе G, поскольку (по определению фильтра $\mathfrak{N}$) факторгруппа G/N является группой Ли, а из включения $\pi(N)\subset K$ следует, что π-образ в группе H каждого смежного класса по N (рассматриваемого как подмножество в G) содержится в однозначно определенном смежном классе по нормальной подгруппе K в H, так что гомоморфизм π корректно определяет (не обязательно непрерывный) гомоморфизм $\pi_{K,G,N}$, отображающий группу Ли G/N в группу Ли H/K по формуле $\pi_{K,G,N}(gN)=\pi(g)K$, $g\in G$, что и требовалось. □

Теорема 3.15. *Пусть G — почти связная локально компактная группа, H — связная локально компактная группа, а $\pi\colon G\to H$ — локально ограниченный гомоморфизм. Если гомоморфизм π финально непрерывен* $(\mathrm{FDG}(\pi)=\{e_H\})$, *то гомоморфизм π непрерывен на коммутанте G_0' компоненты единицы G_0.*

Как мы видели в примере прозведения компактных матричных групп Ли, условие $\mathrm{FDG}(\pi)=\{e_H\}$ существенно для справедливости утверждения теоремы.

Доказательство. По теореме 3.14, для любой такой компактной нормальной подгруппы K в H, что факторгруппа H/K является группой Ли (с конечным числом связных компонент), существует такая компактная нормальная подгруппа N в G, что факторгруппа G/N — (связная) группа Ли и $\pi(N)\subset K$. Таким образом, гомоморфизм π корректно определяет (не обязательно непрерывный) гомоморфизм $\pi_{K,N}$ (возможно, несвязной) группы Ли в другую (связную) группу Ли, $\pi_{K,N}\colon G/N\to H/K$, по формуле $\pi_{K,N}(uN)=\pi(u)K$, $u\in U$. Гомоморфизм $\pi_{K,N}$ непрерывен на коммутанте компоненты единицы $(G/N)_0$ группы G/N по теореме 3.5. Однако образ компоненты единицы G_0 в G/N плотен в $(G/N)_0$ согласно теореме 7.12 в [114], и поэтому совпадает с $(G/N)_0$, так как N компактен. Так как коммутант группы G_0 непрерывно отображается на коммутант группы $(G/N)_0$ (изоморфной $G_0/(G_0\cap N)$) при каноническом гомоморфизме $\nu\colon G\to G/N$, то исходный гомоморфизм π определяет непрерывный гомоморфизм коммутанта группы G_0 во всевозможные факторгруппы Ли H/K, где K — компактная нормальная подгруппа в H. Из построения ясно, что это семейство непрерывных гомоморфизмов коммутирует с каноническим гомоморфизмом факторгруппы Ли (гомоморфизмом групп Ли вида $H/K_1\to H/K_2$ для всех $K_1\subset K_2$, где K_1 и K_2 — компактные нормальные подгруппы в H), и тем самым корректно определяет непрерывный гомоморфизм коммутанта группы G в H. $\square$

Подведем некоторый итог.

Теорема 3.16. I. *Пусть G — топологическая группа, содержащая открытую проективно-лиеву подгруппу, H — топологическая группа, а $\pi\colon G\to H$ — гомоморфизм. Этот гомоморфизм принадлежит одному и только одному из следующих классов.*

(A) *Гомоморфизм π не локально ограничен.*

(B) *Гомоморфизм π локально ограничен и не финально непрерывен* ($\mathrm{DG}(\pi)\supset\mathrm{FDG}(\pi)\neq\{e_H\}$).

(Γ) *Гомоморфизм π локально ограничен и финально непрерывен* ($\mathrm{FDG}(\pi)=$ $=\{e_H\}$)*; однако π не непрерывен,* $\mathrm{DG}(\pi)\neq\{e_H\}$.

(Δ) *Гомоморфизм π непрерывен.*

II. *Пусть G — почти связная локально компактная группа, H — связная локально компактная группа, а $\pi\colon G\to H$ — гомоморфизм. Тогда перечисленные выше классы* (A)–(Δ) *обладают следующими свойствами.*

Существуют не локально ограниченные гомоморфизмы π (даже среди гомоморфизмов связных локально компактных групп в группы Ли), принадлежащие типу (A), *для которых группа* $\mathrm{FDG}(\pi)$ *либо (тип* A_1) *не определена (это значит, что ограничение гомоморфизма π на любую компактную нормальную подгруппу, входящую в фильтр $\mathfrak{U}$, не является локально ограниченным), либо (тип* A_2) *определена и нетривиальна (в этом случае, как и в следующем случае* A_3, *ограничение гомоморфизма π на любую компактную нормальную подгруппу, входящую в фильтр $\mathfrak{U}$, является локально ограниченным гомоморфизмом), либо (тип* A_3) *определена и тривиальна. Гомоморфизм π принадлежит классу* (B), *если ограничение гомоморфизма π на любую нормальную подгруппу $N \in \mathfrak{N}$ в G разрывно и имеет относительно компактный образ в H. Если группа G связна, то гомоморфизм π принадлежит классу* (Γ), *если гомоморфизм π является проективным пределом (не обязательно непрерывных) гомоморфизмов групп Ли (в смысле утверждения* (2) *в теореме 3.14); однако некоторые из этих аппроксимирующих гомоморфизмов разрывны. Случай* (Γ) *может быть реализован только если группа G_0 не является совершенной, и в этом случае группы разрывов аппроксимирующих гомоморфизмов коммутативны.*

Условие $\mathrm{FDG}(\pi)=\{e_H\}$ существенно для справедливости утверждения (Γ).

Доказательство. Так как $\mathrm{FDG}(\pi) \subset \mathrm{DG}(\pi)$, если π локально относительно компактен, то любой локально относительно компактный гомоморфизм (т.е. любой гомоморфизм, не принадлежащий классу (A)) либо непрерывен (т.е. принадлежит классу (Δ)), либо разрывен. В последнем случае выполняется либо условие $\mathrm{FDG}(\pi) \neq \{e_H\}$ (т.е. гомоморфизм принадлежит классу (B), как в примере 3.2), либо $\mathrm{FDG}(\pi) = \{e_H\}$ (т.е. разрывный гомоморфизм класса (Γ), как в унитарном характере $\mathbb{R} \to T$, где T — одномерный тор, заданном формулой $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(i\chi(t)) \in T$, где χ — некоторая координатная функция относительно некоторого базиса Гамеля в $\mathbb{R}$). Это завершает доказательство утверждения I.

Остаётся проверить справедливость утверждения II.

Композиция гомоморфизма, построенного в примере 3.2, с разрывным автоморфизмом комплексного поля является примером конечномерного не локально ограниченного представления связной компактной группы, принадлежащего классу A_1, поскольку ограничение этого представления на любую окрестность не является локально ограниченным. Представление двумерного тора, являющееся произведением не локально ограниченного характера первого сомножителя и ограниченного разрывного характера второго сомножителя, даёт пример одномерного представления типа A_2, а ограничение этого характера на первый сомножитель является примером одномерного представления типа A_3.

В случае (В) рассмотрим ограничение $\pi|_N$ гомоморфизма π на любую нормальную подгруппу $N \in \mathfrak{N}$ в группе G. Если бы это ограничение было непрерывно, то выполнялось бы соотношение $\mathrm{DG}(\pi_N) = \{e\}$, а тогда из соотношения $\mathrm{FDG}(\pi) = \mathrm{FDG}(\pi|_N) \subset \mathrm{DG}(\pi_N)$ следовало бы, что $\mathrm{FDG}(\pi) = \{e\}$, в то время как $\mathrm{FDG}(\pi) \neq \{e_H\}$ по предположению (В). Таким образом, представление $\pi|_N$ разрывно для любого $N \in \mathfrak{N}$. Наконец, ограничение $\pi|_N$ представления π на N имеет относительно компактный образ в H, поскольку π локально ограничено, а N компактен.

Если группа G связна, то, по теореме 3.14, в случае (Г) гомоморфизм π является проективным пределом гомоморфизмов групп Ли (в смысле пункта (2) теоремы 3.14); при этом некоторые аппроксимирующие гомоморфизмы должны быть разрывны, поскольку проективный предел непрерывных гомоморфизмов групп Ли является непрерывным гомоморфизмом соответствующего проективного предела групп Ли. Группы разрывов аппроксимирующих гомоморфизмов коммутативны по следствию 3.7. Согласно тому же следствию 3.7, это возможно только если группа G не является совершенной, что завершает доказательство теоремы 3.16. □

Определение 3.7 (ср. [241]). Пусть G — топологическая группа и π — её (не обязательно непрерывное) представление в нормированном пространстве E над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Пусть $\|\cdot\|$ — норма на E, а E^* — пространство, сопряженное к E. Введём *слабое колебание* $\omega(\pi,\|\cdot\|) \geqslant 0$ *представления* π *в единичном элементе* e *группы* G (или, кратко, *слабое колебание представления* π), полагая

$$\omega(\pi,\|\cdot\|) = \sup_{\substack{\xi\in E,\ \|\xi\|\leqslant 1;\\ f\in E^*,\ \|f\|\leqslant 1}} \inf_{U\ni e} \sup_{g\in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|$$

и *колебание* $\upsilon(\pi) \geqslant 0$ представления π в единичном элементе группы G (или, кратко, *колебание представления* π), полагая

$$\upsilon(\pi) = \inf_{\{\|\cdot\|\}} \omega(\pi,\|\cdot\|),$$

где нижняя грань берётся по всем нормам в конечномерном векторном пространстве E, согласованным с векторной структурой.

Мы будем иногда кратко писать $\omega(\pi)$ вместо $\omega(\pi,\|\cdot\|)$, если норма в соответствующем рассуждении остаётся неизменной. Безусловно, величина $\upsilon(\pi)$ конечна тогда и только тогда, когда представление π локально ограничено. Докажем, что в этом случае величина $\upsilon(\pi)$ имеет нетривиальную верхнюю границу.

Следствие 3.11. *Пусть G — топологическая группа, а π — локально ограниченное представление группы G в конечномерном нормированном векторном пространстве E. Тогда существует такая (евклидова) норма $\|\cdot\|$ на E, что $\omega(\pi,\|\cdot\|)\leqslant 2$. В частности, $\upsilon(\pi)\leqslant 2$.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из теоремы 3.1 и определения 3.7. Действительно, пусть π — локально ограниченное конечномерное представление группы G. Рассмотрим группу разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$. Это — компактная подгруппа полной линейной группы пространства E. Следовательно, существует такое скалярное произведение в E, что группа $\mathrm{DG}(\pi)$ является подгруппой унитарной группы. Тогда неравенство $\omega(\pi,\|\cdot\|)\leqslant 2$ выполняется для нормы $\|\cdot\|$ на E, связанной с этим скалярным произведением, поскольку расстояние между любыми двумя унитарными операторами не превосходит числа 2, а базис фильтра $\{\overline{\pi(U)}\,|\,U\in\mathfrak{U}\}$ сходится к $\mathrm{DG}(\pi)$. □

С другой стороны, если локально ограниченное конечномерное представление связной локально компактной группы разрывно, то величина $\upsilon(\pi)$ имеет и нетривиальную нижнюю границу.

Теорема 3.17. *Пусть G — связная локально компактная группа и пусть π — локально ограниченное представление группы G в конечномерном нормированном векторном пространстве E. В этом случае неравенство $\upsilon(\pi)\geqslant 2$ выполняется тогда и только тогда, когда представление π группы G разрывно.*

Доказательство. Если представление π непрерывно, то $\mathrm{DG}(\pi)=\{1_E\}$ и, следовательно, нужно рассматривать только случай, в котором представление π разрывно. Как было доказано в теореме 3.7, в этом случае группа разрывов представления π — связная компактная группа. Диагонализуя образ максимального тора в группе разрывов в некотором базисе, получаем, что ограничение тавтологического представления компактной связной группы разрывов на максимальный тор содержит по крайней мере один нетривиальный диагональный матричный элемент. Этот матричной элемент определяет непрерывный характер тора, образ которого является нетривиальной замкнутой связной подгруппой одномерного тора и поэтому весь одномерный тор. Следовательно, если $\mathrm{DG}(\pi) \neq \{1_E\}$, то по крайней мере один матричный элемент представления π принимает значение -1 в базисе собственных векторов некоторого максимального тора в $\mathrm{DG}(\pi)$. Поэтому диаметр группы $\mathrm{DG}(\pi)$ не меньше 2 по отношению к любой норме в E, так что $\upsilon(\pi) \geqslant 2$. $\square$

Утверждение теоремы 3.10 может быть существенно уточнено в классе совершенных связных локально компактных групп. А именно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 3.12. *Пусть G — совершенная связная локально компактная группа. Любое конечномерное представление ρ группы G с конечной величиной $\omega(\rho)$ (т.е. локально ограниченное) и с $\mathrm{FDG}(\rho) = \{e_G\}$ непрерывно.*

Действительно, конечномерное представление ρ локально ограничено тогда и только тогда, когда величина $\omega(\rho)$ конечна для некоторой (и, следовательно, любой) нормы.

Теорема 3.18. *Пусть G — связная локально компактная группа. Любое конечномерное представление π группы G, удовлетворяющее условию $\upsilon(\pi) < 2$, непрерывно.*

Теорема 3.18 немедленно следует из теоремы 3.17 и теоремы 2.1 главы 2.

3.2.5. Гипотеза Мищенко и её доказательство

Напомним, что утверждение, что величины 0, 2, и ∞ являются единственными возможными значениями величины $\omega(\rho)$ для конечномерных представлений ρ “хороших” топологических групп было высказано А. С. Мищенко в качестве гипотезы при обсуждении доклада автора (а именно, при обсуждении теоремы 3.18 на семинаре А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого в МГУ. Мы можем теперь описать класс групп Ли, для которых единственными возможными значениями величины $\omega(\rho)$ для конечномерных представлений ρ являются величины 0 и ∞, и следующее утверждение даёт полное доказательство гипотезы Мищенко для связных локально компактных групп.

Теорема 3.19. *Пусть G и H — связные локально компактные группы и $\pi\colon G \to H$ — гомоморфизм. Тогда осуществляется одна и только одна из следующих взаимно исключающих возможностей.*

1. *Гомоморфизм π не локально ограничен.*

2. *Гомоморфизм π локально ограничен, причём $\mathrm{FDG}(\pi) \neq \{e_H\}$. В этом случае ограничение гомоморфизма π на любую нормальную подгруппу в группе G, факторгруппа по которому является группой Ли, разрывно и имеет относительно компактный образ в H.*

3. *Гомоморфизм π локально ограничен, причём $\mathrm{FDG}(\pi) = \{e_H\}$, $\mathrm{DG}(\pi) \neq \{e_H\}$. В этом случае гомоморфизм π является проективным пределом гомоморфизмов групп Ли (в смысле утверждения пункта (2) теоремы 3.14), но среди аппроксимирующих гомоморфизмов есть разрывные. Эта ситуация возможна только в случае, если группа G не является совершенной.*

4. *Гомоморфизм π непрерывен.*

Доказательство. Утверждение немедленно следует из следствия 3.11, теоремы 3.17 и теоремы 3.16. А именно, случай (A) теоремы 3.16 отвечает случаю 1 настоящей теоремы, случай (B) теоремы 3.16 отвечает случаю 2, случай (Г) теоремы 3.16 отвечает случаю 3, а случай (Δ) теоремы 3.16 отвечает случаю 4. □

Теорема 3.20. *Пусть G — связная локально компактная группа, а π — конечномерное представление группы G. В этом случае выполняется одна и только одна из следующих возможностей.*

1. *$\omega(\pi, \|\cdot\|) = \infty$ для любой нормы $|\cdot|$ в пространстве представления.*

2. *$0 < \omega(\pi, \|\cdot\|) < \infty$ для некоторой нормы $|\cdot|$ в пространстве представления. В этом случае $2 \leqslant \omega(\pi, \|\cdot\|) < \infty$ для любой нормы $|\cdot|$ в пространстве представления, и существует такая (евклидова) норма в пространстве представления, что $\omega(\pi, \|\cdot\|) = 2$.*

3. *$\omega(\pi, \|\cdot\|) = 0$ для любой нормы $|\cdot|$ в пространстве представления.*

Доказательство. Условие 1 выполяется тогда и только тогда, когда представление π не локально ограничено. Условие 2 означает, что представление π локально ограничено и разрывно (следствие 3.11 и лемма 4 главы 2). Условие 3 равносильно непрерывности представления π по лемме 2 главы 2. □

Теорема 3.21. *Пусть G — связная группа Ли, пусть R — радикал G, пусть L — подгруппа Леви G, пусть Z_L — центр L, и пусть π — конеч-*

номерное локально ограниченное представление группы G в пространстве E. Следующие условия эквивалентны:

(1) *ограничение π на L непрерывно относительно топологии на L, индуцированной исходной топологией G*;

(2) *ограничение π на центр Z_L из L непрерывно относительно топологии на L, индуцированной исходной топологией G.*

Доказательство. Ясно, что (1) $\Rightarrow$ (2). Докажем обратную импликацию. Заметим, что π-образ $\pi(Z_L)$ центра Z_L конечен, поскольку центр линейной аналитической группы $\pi(L)$ конечен (см. [213, глава 3, упражнение 40]). Следовательно, некоторая подгруппа Z конечного индекса в Z_L переводится представлением π в 1_E. Если центр Z_L дискретен в топологии группы G, то ограничение на L топологии группы G совпадает с внутренней топологией гпуппы L, и представление π является композицией канонического гомоморфизма на факторгруппу по Z и локально ограниченного конечномерного представления факторгруппы, которое непрерывно автоматически как следствие аналога теоремы Ван дер Вардена для полупростых групп. Предположим теперь, что Z_L недискретен. Эта подгруппа Z, очевидно, плотна в Z_L относительно топологии, индуцированной исходной топологией G, и $\pi(Z)$=1, поэтому $\pi(Z_L) = 1$. Следовательно, ограничение π на L можно рассматривать как представление фактор-группы L/Z_L, которая не имеет центра, и, следовательно, топология на L/Z_L, определяемая топологией группы G, совпадает с внутренней топологией группы L/Z_L. и это представление автоматически непрерывно в фактор-топологии исходной топологии L как подгруппы G. $\square$

Теорема 3.21 имеет очевидное следствие.

Теорема 3.22. *Пусть G — связная группа Ли, пусть R — радикал G, пусть L — подгруппа Леви G, пусть Z_L — центр L, и пусть π — конечномерное локально ограниченное представление G в пространстве E. Следующие условия эквивалентны*:

(1) *ограничение π на коммутант G' группы G непрерывно относительно топологии на G', индуцированной исходной топологией группы G*;

(2) *ограничение π на Z_L непрерывно относительно топологии на G', индуцированной исходной топологией группы G.*

Доказательство. Ясно, что (1) $\Rightarrow$ (2). Мы утверждаем, что (2) $\Rightarrow$ (1). По теореме 3.21 ограничение π на L непрерывно. С другой стороны, ограничение π на $G' \cap R$ непрерывно относительно топологии, индуцированной исходной топологией G, так как $\pi(R)$ имеет в некотором базисе тркугольную форму, и из принадлежности элемента r группы R коммутанту $G' \subset G$ следует, что определитель образа r в любом подпредставлении ограничения представления π на R равен единице, так что все диагональные элементы треугольных матриц в образе этого ограничения равны единице тождественно на $G' \cap R$, поэтому они непрерывны в исходной топологии группы, и, следовательно, все треугольное локально ограниченное представление непрерывно в исходной топологии. Следовательно, ограничение π на всю группу G' непрерывно по теореме Намиоки [168] (потому что G' порождается L и $G' \cap R$). Это завершает доказательство. $\square$

3.3. Приложения

3.3.1. Теорема Фрейденталя–Вейля без предположения непрерывности

Одним из наиболее ранних и красивых результатов теории топологических групп является теорема Фрейденталя–Вейля, дающая описание семейства связных локально компактных групп, допускающих непрерывное вложение в компактную группу, как семейства прямых произведений связных компактных групп и (конечномерных) векторных групп [93, 216]. Оказывается, условие непрерывности вложения излишне в этой теореме, и, кроме того, можно естественным образом распространить характеризацию на случай почти связных локально компактных групп и указать некоторые следствия.

Напомним, что необходимым и достаточным условием существования непрерывного вложения топологической группы в компактную группу является существование семейства непрерывных конечномерных унитарных представлений данной группы, разделяющего точки этой группы. В связи с этим был введён класс [MAP] топологических групп, чьи непрерывные конечномерные унитарные представления разделяют точки группы. Представляет интерес и более широкий класс [DMAP] топологических групп, чьи (не обязательно непрерывные) конечномерные унитарные представления разделяют точки группы, т.е. таких топологических групп, что соответствующие абстрактные группы, рассматриваемые в дискретной топологии, принадлежат классу [MAP]. Теорема 3.25 ниже равносильна утверждению, что почти связная локально компактная группа G принадлежит классу [MAP] тогда и только тогда, когда эта группа, рассматриваемая в дискретной топологии, принадлежит тому же классу [MAP], т.е. $G \in$ [MAP] $\Longleftrightarrow$ $G \in$ [DMAP]. В такой форме утверждение представляет интерес в связи с существованием сильно экзотических (тем самым, конечно, не локально компактных) абелевых групп, которые, конечно, имеют достаточно много одномерных представлений как дискретные группы, см. [257] (в связи с отсутствием описания локально компактных [MAP] групп, не являющихся почти связными, вопрос о совпадении условий [MAP] и [DMAP] в классе локально компактных групп открыт).

С другой стороны, это утверждение показывает, что связная или почти связная локально компактная группа, являющаяся [DMAP] группой, на самом деле принадлежит более узкому классу, так называемому классу [Moore] = [FIR][1], образованному локально компактными группами, все неприводимые непрерывные представления которых конечномерны [161] (см. также [181] и [227] и результаты о не обязательно локально компактных группах с конечномерными представлениями в [249]). Критерий существования достаточного семейства непрерывных представлений топологической группы в рефлексивных банаховых пространствах [231] и критерий существования непрерывного вложения топологической группы в локально компактную группу в терминах ее унитарных представлений [256] стимулируют вопрос о возможности ослабления условий непрерывности в этих теоремах (может быть, за счет сужения класса рассматриваемых топологических групп), а также о возможности выхода за пределы базового класса локально компактных групп, но здесь мы ограничимся обсуждением свойств локально компактных групп с дополнительными условиями.

Лемма 3.8. *Любая связная разрешимая локально компактная группа, являющаяся* [MAP] *группой как дискретная группа, коммутативна* (*и, таким образом, является прямым произведением конечномерного тора и* (*конечномерной*) *векторной группы*; ср. [147, теорема 7.57 (iii)]).

Доказательство. Пусть G — связная разрешимая локально компактная группа, являющаяся [MAP] группой как дискретная группа, и поэтому семей-

[1] FIR = ‘Finite-dimensional irreducible representations.’

ство неприводимых (не обязательно непрерывных) конечномерных унитарных представлений группы G разделяет точки этой группы. Согласно пункту (2) следствия 2.8 главы 2, эти представления можно считать треугольными, а потому (ввиду унитарности) и диагональными. Таким образом, некоторое семейство одномерных унитарных представлений разделяет точки группы G, откуда непосредственно следует, что группа G коммутативна. □

Докажем теперь утверждение о подгруппах компактных групп, изоморфных (как дискретные группы) связным группам Ли. Мы доказываем это утверждение отдельно, хотя теорема 3.24 сильнее теоремы 3.23, причём теорема 3.23 не используется в доказательстве теоремы 3.24. Причина, по которой доказательство теоремы 3.23 представляет самостоятельный интерес, состоит в том, что доказательство теоремы 3.23 не опирается на используемую в доказательстве теоремы 3.24 сильную теорему о структуре локально компактной группы общего вида (эту ссылку можно обойти, но с помощью весьма громоздкой конструкции; см. замечание 3.5).

Теорема 3.23. *Пусть G — связная группа Ли, K — компактная топологическая группа, и $J\colon G \to K$ — (не обязательно непрерывное) гомоморфное вложение. Тогда группа G топологически изоморфна прямому произведению связной компактной группы Ли и (конечномерной) векторной группы.*

Доказательство. Пусть G — связная группа Ли, K — компактная топологическая группа, и $J\colon G \to K$ — (не обязательно непрерывное) гомоморфное вложение. Пусть R — радикал группы G, а S — подгруппа Леви в G. Каждое непрерывное неприводимое унитарное (конечномерное) представление π группы K определяет непрерывное неприводимое унитарное конечномерное представление $\pi \circ J|_S$ группы S, и семейство этих представлений разделяет элементы группы S. Следовательно, группа S компактна (если бы она содержала некомпактную простую подгруппу, то, поскольку эта подгруппа не имеет нееединичных конечномерных неприводимых непрерывных унитарных представлений, то группа S не имела бы вложения в компактную топологическую группу). Рассмотрим произведенние всех конечномерных неприводимых непрерывных унитарных представлений вида $\pi \circ J|_S$ группы S и замыкание $\widetilde{K} = \overline{\prod_{\pi\in\widehat{K}} \pi \circ J|_S(S)}$ произведения образов группы S в этих представлениях. Оно компактно как замкнутая подгруппа произведения компактов. Замыкание $\mathfrak{S}$ образа группы S в $\widetilde{S}$ тоже является компактной группой, и все представления вида $\pi \circ J|_S$ непрерывны по теореме Э. Катрана [53], повторенной и усиленной Ван дер Варденом в [214], об автоматической непрерывности конечномерных представлений полупростых компактных групп. Следовательно, вложение группы K в компактную группу $\prod_{\pi \in \widehat{K}} \widehat{\pi(K)}$ непрерывно. Но непрерывное вложение компакта в компакт является гомеоморфизмом на образ, так что вложение группы S в K непрерывно. Таким образом, $J(S)$ — компактная связная подгруппа Ли в K.

Радикал R группы G — разрешимая группа Ли. Поэтому каждый фактор в композиционнм ряду этой группы порожден делимым подмножестаом. Следовательно, $J(R)$ — разрешимая группа с тем же свойством композиционного ряда, как и ее замыкание $\overline{J(R)}$. Это замыкание является компактной разрешимой группой, и каждый фактор в её композиционном ряду порожден делимым подмножеством. Все неприводимые представления такой группы одномерны по теореме 2.13 главы 2. Так как группа $\overline{J(R)}$ компактна, то из одномерности ее непрерывных неприводимых преддставлений следует, что она коммутативна. Следовательно, R коммутативен и $J(R)$ — коммутативная группа.

По теореме Фрейденталя–Вейля компактная группа $J(S)$ коммутирует с компактным замыканием $\overline{J(R)}$, которое является нормальной подгруппой в компактном замыкании $\overline{J(G)}$ J-образа группы G. Следовательно, компактная связная группа S коммутирует с коммутативной связной группой R, которая тем самым является прямым произведением компактной коммутативной связной группы и векторной группы, откуда непосредственно следует утверждение теоремы. $\square$

Следствие 3.13. *Пусть K — связная компактная топологическая группа, содержащая плотную подгруппу, изоморфную как абстрактная группа некоторой связной группе Ли. Тогда группа K является прямым произведением связной компоненты единицы центра группы K (связной коммутативной компактной группы) и связной полупростой компактной группы Ли. В частности, если группа K не имеет нетривиальных связных коммутативных компактных нормальных подгрупп, то K содержит плотную подгруппу, изоморфную как абстрактная группа некоторой связной группе Ли, тогда и только тогда, когда K является связной полупростой компактной группой Ли.*

Перед доказательством следствия 3.13 напомним, что, если G — связная топологическая группа, а Q — компактная нормальная подгруппа в G, то

$G = HQ$, где H — нормальная подгруппа в G, образованная всеми элементами в G, перестановочными с каждым элементом группы Q [129, теорема 2].

Определение 3.8. В этих предположениях, мы будем называть подгруппу H *почти дополнительной к Q в G в смысле Ивасавы.*

Доказательство следствия 3.13. Пусть K — связная компактная топологическая группа, содержащая плотную подгруппу, изоморфную как абстрактная группа некоторой связной группе Ли H. Тогда факторгруппа группы K по связной компоненте Z_0 центра Z (эта факторгруппа является полупростой компактной топологической группой) содержит группу разрывов тавтологического вложения группы Ли H на себя как подгруппу группы K, поскольку группа разрывов является связной коммутативной нормальной подгруппой в K, а связная компонента Z_0 центра Z является связной коммутативной нормальной подгруппой в K, наибольшей из таких нормальных подгрупп (т.е. содержащей каждую связную коммутативуюй нормальную подгруппу в K), что сразу следует из соответствующей структурной теоремы (см. теорему 9.19 в [122]). Композиция тавтологического вложения группы Ли H в K и канонического отображения $K \to K/Z_0$ имеет тогда тривиальную группу разрывов и потому является непрерывным гомоморфизмом связной группы Ли H на плотную подгруппу полупростой компактной топологической группы K/Z_0. Этот гомоморфизм допускает факторизацию через факторгруппу группы Ли H по (замкнутому) ядру этого непрерывного отображения, так что можно считать, что этот гомоморфизм является мономорфизмом. Тогда полные прообразы компактных нормальных подгрупп в группе K/Z_0, факторгруппы по которым являются группами Ли, компактны и имеют единичное пересечение, а в группе Ли, ввиду отсутствия малых подгрупп, это означает, что прообраз некоторой нормальной подгруппы N с этим свойством тривиален. Таким образом, замыкание образа группы H/Z_0 в K/Z_0 содержится в подгруппе Ли в K/Z_0, почти дополнительной к N в смысле Ивасавы, откуда и следует, что K/Z_0 — группа Ли. Тогда и коммутант K' группы K, являющийся замкнутой подгруппой в K, изоморфной факторгруппе группы Ли K/Z_0, тоже является группой Ли, и притом полупростой группы Ли, поскольку K' полупрост как компактная группа. Поскольку группа K является произведением Z_0K' связной компоненты единицы Z_0 центра Z группы K (это — связная коммутативная компактная группа) и связной полупростой компактной группы Ли K', то первое утверждение теоремы доказано. В случае, если группа K не имеет нетривиальных связных коммутативных компактных нормальных подгрупп и содержит плотную подгруппу, изоморфную как абстрактная группа некоторой связной группе Ли, сомножитель Z_0 единичен, и поэтому K является связной полупростой компактной группой Ли. Это произведение, как и в предыдущей теореме, является прямым по теореме Фрейденталя–Вейля. Это завершает доказательство следствия 3.13. □

Замечание 3.4. Отметим, что в *коммутативной* компактной группе, не являющейся группой Ли, может быть плотна не только некоторая подгруппа Ли, но даже некоторая однопараметрическая подгруппа. Например, в произведении $K = \prod_\alpha T_\alpha$ континуума одномерных торов достаточно воспользоваться базисом Гамеля $\{e_\alpha\}$ в $\mathbb{R}$ и построить однопараметрическую подгруппу $t \mapsto \{\exp(i\pi f_\alpha(t))\}$, $t \in \mathbb{R}$, где α пробегает индексы всех элементов базиса Гамеля, а f_α — координата, отвечающая индексу α (ср. [255, предложение 1]). Поэтому утверждение следствия 3.13 о подгруппе Z_0 не допускает усиления в общем случае.

Следующее утверждение является обещанным обобщением теоремы Фрейденталя–Вейля на случай связной локально компактной группы.

Теорема 3.24. *Пусть G — связная локально компактная группа, K — компактная топологическая группа, и $J: G \to K$ — (не обязательно непрерывное) гомоморфное вложение. Тогда группа G топологически изоморфна прямому произведению связной компактной группы и (конечномерной) векторной группы.*

Доказательство. Пусть G — связная локально компактная группа, K — компактная топологическая группа, и $J: G \to K$ — (не обязательно непрерывное) гомоморфное вложение. Согласно лемме 3.8, любая замкнутая связная разрешимая подгруппа группы G коммутативна. В частности, радикал R группы G тоже коммутативен. Факторгруппа $S = G/R$ группы G по радикалу R полупроста, т.е. не имеет нетривиальных замкнутых связных абелевых нормальных подгрупп [129, теорема 15]. Согласно теореме 10.29 в [123], которая справедлива в том числе для связных локально компактных групп, существует такое прямое произведение $\prod_{j\in J} S_j$ связных односвязных простых конечномерных групп Ли S_j, $j \in J$, и такие гомоморфизмы $\pi_S\colon \prod_{j\in J} S_j \to S$

и $f\colon S\to\prod_{j\in J}S_j/Z(S_j)$, где $Z(S_j)$ — центр группы S_j и $S_j/Z(S_j)$ — факторгруппа по центру, что образ гомоморфизма π_S плотен в S, а композиция $f\circ\pi_S$ гомоморфизмов f и π_S совпадает с каноническим гомоморфизмом группы на факторгруппу, определяемым переходом к фактору $S_j\to S_j/Z(S_j)$ в каждом сомножителе. Так как факторгруппа группы S по некоторой компактной нормальной подгруппе является группой Ли, то семейство некомпактных простых групп Ли в семействе $\{S_j, j\in J\}$, конечно (быть может, пусто). Докажем, что оно пусто. Если S_{j_0} — некоторая некомпактная простая группа Ли, то в ее разложении Ивасавы $S_{j_0}=K_{j_0}A_{j_0}N_{j_0}$ (где K_{j_0} — полный прообраз соответствующей максимальной компактной подгруппы в $S_{j_0}/Z(S_{j_0})$) имеется связная замкнутая некоммутативная разрешимая подгруппа Ли $A_{j_0}N_{j_0}$. Её полный прообраз в группе G — связная замкнутая некоммутативная разрешимая подгруппа, что невозможно для [DMAP] группы по лемме 3.8. Таким образом, группа $\prod_{j\in J}S_j$ компактна. Поэтому и группа S компактна как проективный предел компактных групп Ли. Итак, группа G содержит коммутативную связную нормальную подгруппу R, изоморфную произведению связной коммутативной компактной группы и (конечномерного) векторного пространства, и факторгруппа S по этой нормальной подгруппе компактна.

Рассмотрим произвольный элемент g группы G. Его образ в группе S при каноническом отображении группы G на факторгруппу $S=G/R$ принадлежит некоторому максимальному протору T в группе S, т.е. максимальной связной абелевой подгруппе группы S, которая необходимо замкнута [32]. Полный прообраз этого протора T в группе G является связной замкнутой разрешимой подгруппой группы G, и эта подгруппа содержит данный элемент g. Следовательно, применяя ту же лемму 3.8, видим, что любой элемент g группы G коммутирует с любым элементом подгруппы R. В частности, любой элемент g группы G коммутирует с любым элементом векторной подгруппы V в R. Таким образом, группа G содержит векторную подгруппу V, факторгруппа по которой компактна. По теореме о расщеплении ([45, предложение VII.3.2.3]), в таком случае существует (автоматически связная) компактная подгруппа Q в G, дополнительная к V. Но любой элемент группы Q коммутирует с любым элементом группы V, так что не только V, но и Q является связной замкнутой нормальной подгруппой в G. Таким образом, группа G топологически изоморфна прямому произведению связной компактной группы Q и (конечномерной) векторной группы V, что завершает доказательство теоремы 3.24. $\square$

Замечание 3.5. В доказательстве теоремы 3.24 можно избежать ссылки на теорему 10.29 в [123], воспользовавшись теоремой Монтгомери–Циппина (см. [158]) о подъёме однопараметрической подгруппы в факторгруппе локально компактной группы по компактной нормальной подгруппе до однопараметрической подгруппы в самой локально компактной группе и более слабой структурной теоремой Штроппеля [201, теорема 7.2]. А именно, подъем некоммутирующих однопараметрических подгрупп в разрешимой части AN разложения Ивасавы некомпактной простой факторгруппы данной связной локально компактной [DMAP] группы G в факторгруппы Ли по направленному по убыванию семейству компактных нормальных подгрупп, факторгруппы по которым является группами Ли, в сочетании с переходом к пределу прообразов этих подъёмов по фильтру таких нормальных подгрупп, позволяет построить пару однопараметрических подгрупп в факторгруппе группы G по радикалу R, которые не коммутируют и порождают связную разрешимую подгруппу в факторгруппе G/R, что невозможно для связной локально компактной [DMAP] группы.

Теорема 3.24 используется в доказательстве следующей основной теоремы этого параграфа.

Теорема 3.25. *Пусть G — почти связная локально компактная группа, K — компактная топологическая группа, и $J\colon G\to K$ —* (*не обязательно непрерывное*) *гомоморфное вложение. Тогда группа G топологически изоморфна конечному расширению прямого произведения компактной группы и* (*конечномерной*) *векторной группы.*

Доказательство. Пусть G — почти связная локально компактная группа, K — компактная топологическая группа, и $J\colon G\to K$ — (не обязательно непрерывное) гомоморфное вложение. Ограничение отображения J на компоненту единицы G_0 в G является гомоморфным вложением и, по теореме 3.24, группа G_0 является прямым произведением компактной связной группы K и векторной группы V, и факторгруппа G/G_0 изоморфна компактной вполне несвязной группе Q. Тогда K — нормальная подгруппа в G, поскольку K есть семейство элементов нормальной подгруппы G_0, последовательность натуральных степеней которых образует предкомпактное множество. При этом группа G/K есть расширение группы V с помощью Q. По уже применённой выше теореме о расщеплении [45, предложение VII.3.2.3], существует такая компактная подгруппа

L группы G, что G есть полупрямое произведение подгрупп L и V. Полный прообраз группы L в G есть компактная подгруппа $C \subset G$. По построению, $C \cap V = \{e\}$, $C \cap G_0 = K$, $G = CV$ и $C/K \simeq Q$. Действие группы C на V есть непрерывное линейное представление группы C в V, так как аддитивное отображение линейного пространства в себя линейно [69], так что образ некоторой окрестности единицы в C не может содержать нетривиальных подгрупп. Тогда образ открытой нормальной подгруппы в C, содержащейся в этой окрестности [25, § 22, теорема 16], единичен. Следовательно, группа C — конечное расширение открытой нормальной подгруппы C_1 в C, причём действие группы C_1 на V тривиально. Так как $C_1 \cap V = \{e\}$, $C_1 \cap G_0 = K$, и $G_1 = C_1V$ является подгруппой конечного индекса в G, то из тривиальности действия C_1 на V следует, что G_1 — прямое произведение C_1 и V. Итак, группа G топологически изоморфна конечному расширению прямого произведения компактной группы и (конечномерной) векторной группы, что завершает доказательство теоремы 3.25. □

Теореме 3.25 можно придать следующую эквивалентную форму.

Теорема 3.26. *Пусть G — почти связная локально компактная группа. Следующие условия эквивалентны:*

1. G — [MAP] *группа.*
2. G — [DMAP] *группа.*
3. G — *конечное расширение прямого произведения компактной группы и векторной группы.*

Повторим, что структура произвольных локально компактных [MAP] групп до сих пор не описана (напомним, что, например, свободные группы и группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ являются [MAP] группами, а группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ — нет), что не даёт возможности описать и структуру произвольных локально компактных [DMAP] групп. Тем не менее, поскольку любая вполне несвязная локально компактная группа содержит открытую компактную нормальную подгруппу, мы получаем следующее очевидное утверждение.

Следствие 3.14. *Любая локально компактная* [DMAP] *группа содержит открытую подгруппу, являющуюся прямым произведением компактной топологической группы и векторной группы.*

В частности, если связная локально компактная группа, рассматриваемая как абстрактная группа, допускает вложение в компактную топологическую группу, то сама эта локально компактная группа необходимо допускает и непрерывное вложение в компактную топологическую группу и, таким образом, по самой теореме Фрейденталя–Вейля [93, 216], является прямым произведением компактной связной локально компактной группы и векторной группы.

3.3.2. Теорема об образе вложения связной локально компактной группы в компактную группу

В то время как образ локально компактной группы при непрерывном гомоморфизме является образом факторгруппы по ядру этого гомоморфизма, и тем самым образом *непрерывного вложения* связной локально компактной группы, описание структуры образа не обязательно непрерывного гомоморфизма локально компактной группы в компактную группу не допускает этого элементарного описания, поскольку ядро этого гомоморфизма может быть незамкнутым. Тем не менее, структуру этих объектов удаётся выяснить. Соответствующий результат выглядит следующим образом.

Теорема 3.27. *Пусть G — связная локально компактная группа, пусть K — компактная топологическая группа, и пусть $J\colon G \to K$ — (не обязательно непрерывный) гомоморфизм. Тогда существует прямое произведение H компактной группы и векторной группы и гомоморфизм Θ группы H в K, удовлетворяющий условию совпадения образов, $\Theta(H) = J(G)$, как (не обязательно замкнутых) подгрупп группы K.*

Доказательство. Пусть G — локально компактная группа, пусть K — компактная топологическая группа, и пусть $J\colon G \to K$ — (не обязательно непрерывный) гомоморфизм. Воспользуемся результатом Ивасавы о локальном разложении [129, теорема 11], из которого непосредственно следует, что в любой окрестности единицы группы G найдётся такая компактная (не обязательно связная) нормальная подгруппа N, что факторгруппа $L = G/N$ является группой Ли, а группа G является образом некоторого гомоморфизма $\varphi\colon \widetilde{L} \times N \to G$ с дискретным ядром, где $\widetilde{L}$ — универсальная накрывающая группы Ли L.

Рассмотрим гомоморфизм $\widetilde{J}\colon \widetilde{L}\times N\to K$, определённный формулой $\widetilde{J}=J\circ\varphi$ (и поэтому имеющий тот же образ, что и J). Поскольку N — компактная группа, очевидно, что достаточно доказать утверждение теоремы для связной односвязной группы Ли $\widetilde{L}$. Заменяя в условии теоремы группу G группой $\widetilde{L}$ и гомоморфизм J ограничением гомоморфизма $\widetilde{J}$ на $\widetilde{L}$, мы вправе считать, что рассматриваемая группа G — связная односвязная группа Ли.

По теореме Леви–Мальцева, группа G является тогда полупрямым произведением связной полупростой группы Ли S и радикала R группы G (наибольшей связной разрешимой нормальной подгруппы в G). По аналогу теоремы Ван дер Вардена для полупростых групп Ли ограничение гомоморфизма J на S непрерывно.

Так как S полупроста, то ограничение гомоморфизма J на некоторые простые факторы в S тривиально и является локальным изоморфизмом на других простых факторах. Из классической теоремы Фрейденталя–Вейля [93, 216] следует, что J тривиален на любом некомпактном простом факторе, входящем в полупростую группу S.

С другой стороны, R — связная разрешимая группа. Следовательно, её образ $J(R)$ тоже разрешим. Поэтому и замыкание $\overline{J(R)}$ образа $J(R)$ в K разрешимо. Кроме того, каждый коммутативный фактор в композиционном ряде группы R делим. Это свойство сохраняется в образе и наследуется замыканием (см. лемму 3.1). Следовательно, $\overline{J(R)}$ — связная разрешимая компактная группа. Поэтому она коммутативна (см. лемму 3.8). Тогда и $J(R)$ коммутативна, и, таким образом, ядро гомоморфизма J содержит весь коммутант R' радикала R.

Заметим, что группа R' замкнута [213, теоремы 3.18.2 и 3.18.12]. Более того, эта группа является характеристической в R и, следовательно, нормальной подгруппой в G. Так как J тривиален на R', то мы можем перейти к фактор-группе G/R' и к соответствующему гомоморфизму факторгруппы G/R' в K, образ которого совпадает с образом J.

Мы можем поэтому дополнительно предположить, что G — связная односвязная группа Ли, радикал R которой коммутативен (и, следовательно, является векторной группой).

Обозначим через M связную компоненту единицы в пересечении ядра гомоморфизма J с полупростой подгруппой Ли S. Как и сама группа S, группа M обязательно полупроста. Действие группы M на векторной группе R аддитивно, и, следовательно, определяет конечномерное непрерывное линейное представление группы M на пространстве R. Но M — полупростая группа Ли, так что это представление вполне приводимо (является прямой суммой конечного числа неприводимых представлений), и, очевидно, любая нормальная подгруппа в G, содержащая M, обязательно содержит векторную подгруппу (инвариантное подпространство) векторной группы R, на которой соответствующее подпредставление не является отображением в единичный оператор. Следовательно, ядро гомоморфизма J автоматически содержит не только полупростую подгруппу M, но и векторную часть V группы R, на которой группа M нетривиально действует внутренними автоморфизмами группы G. Подгруппа MV группы G, порождённая M и V, очевидным образом замкнута и содержится в ядре гомоморфизма J.

Таким образом, мы снова можем заменить группу G более простой группой, а именно, факторгруппой Ли $G/(MV)$, и заменить гомоморфизм J соответствующим гомоморфизм группы $G/(MV)$ (образ которого совпадает с образом J). Сохраним обозначения S, R и N для новой группы G. Как мы только что доказали, любой гомоморфный образ связной локально компактной группы в компактной группе является образом некоторого гомоморфизма прямого произведения связной односвязной группы Ли $S\cdot R$ и компактной группы N в G, где S — компактная группа Ли, нормальная подгруппа R является векторной группой, а действие группы S на R сохраняет каждый элемент группы R.

Любой неединичный элемент любого простого компактного фактора Ли в S принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе в S. Образ этой подгруппы нетривиален, поскольку в противном случае соответствующий фактор должен содержаться в ядре соответствующего гомоморфизма группы G (напомним, что, по построению, после перехода к гомоморфизму факторгруппы $G/(MV)$, ограничение гомоморфизма J на любой простой (компактный) фактор в группе S является локальным изоморфизмом). Подгруппа в G, определяемая как полный прообраз этой однопараметрической подгруппы в факторгруппе G/R, изоморфной группе S, очевидным образом разрешима. Тогда образ этой группы в K есть разрешимая подгруппа компактной группы, и, как и выше, она коммутативна из соображений делимости факторов в композиционном ряде. Таким образом, коммутатор любого элемента компактной группы S с любым элементом группы V лежит в ядре гомоморфизма J. Если это ядро содержит всю группу V, то утверждение теоремы очевидно.

Предположим, что группа V не содержится в ядре гомоморфизма J. Напомним (см. предпоследний абзац), что каждый элемент группы R инвариантен относительно внутренних автоморфизмов группы G, определяемых любыми элементами группы S (поскольку группа R — векторная подгруппа “промежуточной” векторной группы, а именно, пространства подпредставления, кратного единичному представлению группы S). Действительно, иначе K-образ действия некоторой однопараметрической группы в S на V был бы нетривиален, что невозможно согласно предыдущему абзацу. Это и доказывает, что образ исходного гомоморфизма совпадает с образом (в той же компактной группе) гомоморфизма (не обязательно непрерывного) прямого произведения компактной группы и векторной группы, что завершает доказательство теоремы 3.27. □

3.3.3. Ядро фон Неймана и наименьшее ядро фон Неймана

В 1934 г. фон Нейман [171] ввёл, для любой топологической группы G, замкнутую нормальную подгруппу (и даже характеристическую подгруппу) $\mathrm{vNk}(G)$ группы G, образованную всеми элементами $g \in G$, удовлетворяющими условию $\varphi(g) = 1$ для любой почти периодической функции φ на G. Это подмножество, которое очевидным образом совпадает с пересечением ядер всех конечномерных непрерывных комплексных унитарных представлений группы G (или, что равносильно, с пересечением ядер всех неприводимых конечномерных непрерывных комплексных унитарных представлений группы G), сейчас называется *ядром фон Неймана* группы G. Топологическая группа G называется *минимально почти периодической*, если $\mathrm{vNk}(G) = G$, т.е. G не имеет нетривиальных неприводимых конечномерных непрерывных комплексных унитарных представлений, и *максимально почти периодической* ([MAP]), если $\mathrm{vNk}(G) = \{e\}$, что равносильно условию, что неприводимые конечномерные непрерывные комплексные унитарные представления разделяют точки группы G.

В 1936 г. Фрейденталь [93] получил необходимые и достаточные условия того, что связная локально компактная группа, удовлетворяющая второй аксиоме счётности, является [MAP] группой. А. Вейль [216] снял условие сепарабельности и доказал, что связная локально компактная группа G является

[MAP] группой тогда и только тогда, когда она является прямым произведением векторной группы и компактной группы. Заметим, что факторгруппа $G/\operatorname{vNk}(G)$ является очевидным образом [MAP] группой. Обобщения теоремы Фрейденталя–Вейля для почти связных локально компактных групп (т.е., таких, что G/G_0 компактна, где G_0 — компонента единицы в G) были получены в [107, 142, 166]. Попытка дать полное описание ядер фон Неймана связных групп Ли G была предпринята Ротманом [182], одним из соавторов знаменитой теоремы о проторах в компактных топологических группах [32]; однако его статья ошибочна (в утверждениях и доказательствах этих утверждений Ротман существенно использует тот "факт", что любая подгруппа Леви в связной группе Ли замкнута, хотя это условие может не выполняться (см. пример 1 ниже)). Ошибка сделана в доказательстве теоремы 1.4 в [182], где автор "использует" замкнутость центра подгруппы Леви во всей группе, что может нарушаться), и эта ошибка приводит к неверному доказательству в [182] основного утверждения этой статьи (сформулированного с опечаткой в определении на стр. 404 ключевого в [182] векторного подпространства V_f векторной части абелевой группы $R/[R,R]$, где R — радикал рассматриваемой группы, как подпространства, образованного элементами с конечными орбитами). Позже ошибка была повторена и развита в [183], где результат статьи [182] был "распространён" на случай связных локально компактных групп, с использованием тех же инструментов, но с устранённой опечаткой и тем самым с верной формулировкой для связных локально компактных групп (и с той же ошибкой в доказательстве).

По этой причине мы приводим здесь новую характеризацию ядра фон Неймана $\operatorname{vNk}(G)$ для связной локально компактной группы G. Мы также приводим характеризацию "наименьшего ядра фон Неймана" $\operatorname{svNk}(G)$ связной локально компактной группы G, определяемого как пересечение ядер всех (не обязательно непрерывных) неприводимых конечномерных комплексных унитарных представлений группы G).

Как мы видели в ряде задач, расширение класса представлений (с непрерывных до локально ограниченных) почти не меняло ответов на поставленные вопросы. Но в задаче об описании пересечения ядер непрерывных конечномерных унитарных представлений (ядра фон Неймана) и пересечения ядер всех (не обязательно непрерывных) конечномерных унитарных представлений ("наименьшего ядра фон Неймана") данной локально компактной группы результаты могут оказаться различными. Прежде всего, различны сами описания.

Обозначим символом $Z(G)$ центр связной локально компактной группы G, а символом $R = \operatorname{rad} G$ — радикал группы G. Воспользуемся следующим построением. Рассмотрим замыкание $\overline{[G,R]}$ нормальной подгруппы $[G,R]$ в G, порождённой коммутаторами вида $grg^{-1}r^{-1}$, $g \in G$, $r \in R$. Тогда $\overline{[G,R]}$ — замкнутая нормальная подгруппа в G.

Лемма 3.9. *Факторгруппа $R/\overline{[G,R]}$ центральна в $G/\overline{[G,R]}$.*

Доказательство леммы 3.9. Утверждение немедленно следует из определения $[G,R]$, поскольку образ любого коммутатора элемента группы $R/\overline{[G,R]}$ с любым элементом группы $G/\overline{[G,R]}$ принадлежит образу группы $[G,R]$ в $G/\overline{[G,R]}$, т.е. равен единице. Таким образом, любой коммутатор рассматриваемого типа автоматически отображается в единичный элемент группы $G/\overline{[G,R]}$. □

Для описания рассматриваемых объектов для связной локально компактной группы G мы снова воспользуемся результатом Ивасавы о локальном разложении [129, теорема 11], как уже было сделано в доказательстве теоремы 3.27. Таким образом, в любой окрестности единицы группы G найдётся такая компактная (не обязательно связная) нормальная подгруппа N, что факторгруппа $L = G/N$ является группой Ли, а группа G является образом некоторого гомоморфизма $\varphi_G\colon \widetilde{L} \times N \to G$ с дискретным ядром, где $\widetilde{L}$ — универсальная накрывающая группы Ли L. Пусть $\widetilde{L} = \widetilde{S}R_{\widetilde{L}}$ — разложение Леви–Мальцева связной односвязной группы Ли $\widetilde{L}$ ($\widetilde{S}$ — подгруппа Леви в $\widetilde{L}$, а $R_{\widetilde{L}}$ — радикал группы Ли $\widetilde{L}$). Введём следующее определение.

Определение 3.9. Пусть $\widetilde{H} = \widetilde{H}(L)$ — произведение всех некомпактных простых факторов в полупростой группе Ли $\widetilde{L}$ ($\widetilde{H}$ — замкнутая нормальная подгруппа в $\widetilde{L}$), а $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}(L)$ — произведение всех компактных простых факторов в $\widetilde{L}$ ($\widetilde{Q}$ — компактная нормальная подгруппа в $\widetilde{L}$). Пусть $H(G)$ ($Q(G)$) — образ группы $\widetilde{H}$ (группы $\widetilde{Q}$) в G при отображении φ_G.

Очевидно, что $H = H(G)$ — наибольшая (т.е. содержащая все остальные) полупростая аналитическая подгруппа связной локально компактной группы G без компактных факторов, а $Q = Q(G)$ — максимальная компактная полупростая подгруппа Ли связной локально компактной группы G.

Теорема 3.28. *Ядром фон Неймана* $\mathrm{vNk}(G)$ *произвольной связной локально компактной группы G с радикалом R является замкнутая нормальная* *подгруппа, порождённая группой* H *и нормальной подгруппой* $[G,R]$ *в* G*, порождённой коммутаторами вида* $grg^{-1}r^{-1}$*, где* $g\in G$ *и* $r\in R$.

Теорема 3.29. *Наименьшим ядром фон Неймана* $\mathrm{svNk}(G)$ *произвольной связной локально компактной группы* G *с радикалом* R *является нормальная подгруппа, порождённая группой* H *и нормальной подгруппой* $[G,R]$*, порождённой коммутаторами вида* $grg^{-1}r^{-1}$*, где* $g\in G$ *и* $r\in R$.

Сформулируем теперь соответствующие результаты о связных группах Ли.

Следствие 3.15. *Ядром фон Неймана* $\mathrm{vNk}(G)$ *произвольной связной группы Ли* G *с разложением Леви* $G=SR$*, где* R *— радикал, а* S *— некоторая подгруппа Леви в* G*, является замкнутая нормальная подгруппа, порождённая группой* H *и нормальной подгруппой* $[G,R]$ *в* G*, порождённой коммутаторами вида* $grg^{-1}r^{-1}$, $g\in G$, $r\in R$.

Следствие 3.16. *Наименьшим ядром фон Неймана* $\mathrm{svNk}(G)$ *произвольной связной группы Ли* G *с разложением Леви* $G=SR$*, где* R *— радикал, а* S *— некоторая подгруппа Леви в* G*, является нормальная подгруппа, порождённая группой* H *и нормальной подгруппой* $[G,R]$*, порождённой коммутаторами вида* $grg^{-1}r^{-1}$*, где* $g\in G$ *и* $r\in R$.

Мы также укажем пример связной редуктивной группы Ли G, для которой ядра фон Неймана $\mathrm{vNk}(G)$ и $\mathrm{svNk}(G)$ различны.

Доказательство теоремы 3.28. Пусть G — связная локально компактная группа с радикалом R. Рассмотрим семейство $[G,R]$ элементов группы G, являющихся конечными произведениями коммутаторов вида $grg^{-1}r^{-1}$, где $g\in G$ и $r\in R$. Так как

$$g_1^{-1}grg^{-1}r^{-1}g_1^{-1}=(g_1^{-1}gg_1)(g_1^{-1}rg_1)(g_1^{-1}g^{-1}g_1)(g_1^{-1}r^{-1}g_1^{-1}) \tag{3.1}$$

и

$$(grg^{-1}r^{-1})^{-1}=g^{-1}(grg^{-1})g(gr^{-1}g^{-1}) \tag{3.2}$$

для любых $g,g_1\in G$ и $r,r_1\in R$, то $[G,R]$ — нормальная подгруппа в G. Так как R — замкнутая разрешимая нормальная подгруппа в G, то и подгруппа $[G,R]\subset R$ тоже разрешима.

Следующее замечание полезно для доказательства и теоремы 3.28, и теоремы 3.29. Рассмотрим произвольное конечномерное (не обязательно непрерывное) унитарное представление π группы G. По утверждению (2) следствия 2.8 главы 2, ограничение представления π на R реализуется верхними треугольными матрицами в некотором базисе в пространстве представления π. Следовательно, эти матрицы одновременно являются и верхними треугольными, и подобными унитарным матрицам, и поэтому одновременно записываются в некотором базисе диагональными матрицами, так что ограничение представления π на R оказывается прямой суммой одномерных унитарных представлений. Поскольку любой коммутатор невырожденных матриц имеет единичный определитель, мы видим, что ограничение представления π на $[G,R]$ реализуется соответствующей единичной матрицей. Таким образом, $[G,R]$ содержится в ядре любого конечномерного унитарного представления группы G, и тем самым также и в наименьшем ядре фон Неймана группы G, а замыкание $\overline{[G,R]}$ группы $[G,R]$ содержится в ядре фон Неймана группы G.

Так как это замыкание $\overline{[G,R]}$ является замкнутой нормальной подгруппой в G, то можно рассмотреть факторгруппу $G_{\text{red}} = G/\overline{[G,R]}$ как такую локально компактную группу, что любое конечномерное непрерывное унитарное представление группы G может быть пропущено через G_{red}. Пусть H_{red} (Q_{red}) — образ H (Q) в G_{red}. Заметим, что радикал группы G_{red} коммутативен (потому что факторгруппа $R_{\text{red}} = R/\overline{[G,R]}$ очевидным образом коммутативна) и даже централен (по лемме 3.9). Таким образом, группа G_{red} редуктивна. Остаётся описать ядро фон Неймана редуктивной локально компактной группы G_{red}.

Рассмотрим представление $\widetilde{\pi}$ группы $\widetilde{L} \times N$, определённое как композиция, $\widetilde{\pi} = \pi \circ \varphi$. Это отображение автоматически непрерывно и потому тривиально на каждом некомпактном полупростом факторе в S; следовательно, представление π тривиально на подгруппе $H = H(G)$ в G, введённой в определении 3.9, т.е. на подгруппе, порождённой образами всех некомпактных полупростых факторов в группе G. Если π непрерывно, то оно тривиально и на замыкании подгруппы H в G. Таким образом, и замыкание подгруппы H, и замыкание группы $[G,R]$ содержатся в ядре фон Неймана группы G.

Факторизуя локально компактную группу G по нормальной подгруппе $\overline{[G,R]}$, мы получаем редуктивную локально компактную группу, а после факторизации группы $G/\overline{[G,R]}$ по нормальной подгруппе $\overline{H}/(\overline{H} \cap \overline{[G,R]})$ (это — нормальная подгруппа в группе $G/\overline{[G,R]}$, потому что радикал $R/\overline{[G,R]}$ группы $G/\overline{[G,R]}$ централен) получаем, что образ группы $\widetilde{L}$ в $G/\overline{H}$ имеет компактную полупростую часть. Так как и эта компактная часть, и группа N, и центральный радикал имеют достаточно много непрерывных конечномерных унитарных представлений, мы видим, как и в доказательстве теоремы 3.24, что полученная факторгруппа C группы $G/\overline{[G,R]}$ по нормальной подгруппе $\overline{H}/(\overline{H}\cap\overline{[G,R]})$ может быть реализована как группа с центральной векторной нормальной подгруппой, факторгруппа по которой компактна, так что полученная группа имеет достаточно много непрерывных конечномерных унитарных представлений, и в рассматриваемой ситуации нормальная подгруппа, факторизацией по которой эта группа получена, порождёна подгруппами, указанными в условии теоремы 3.28, что завершает доказательство этой теоремы. □

Доказательство теоремы 3.29. В этом доказательстве естественно рассматривать некоторые локально компактные группы и их подгруппы и факторгруппы как абстрактные группы. Нужно описать наименьшее ядро фон Неймана абстрактной группы $G/[G,R]$, содержащей центральный нормальную подгруппу $R/[G,R]$, факторгруппа по которому изоморфна как абстрактная группа связной полупростой группе Ли G/R. Напомним, что, как мы видели в доказательстве теоремы 3.28, подгруппа $[G,R]$ содержится в ядре любого конечномерного унитарного представления группы G, и тем самым также и в наименьшем ядре фон Неймана группы G. По лемме 3.9, все элементы подгруппы $R/[G,R]$ центральны в $G/[G,R]$. В частности, факторгруппа $G/[G,R]$ (рассматриваемая в теоретико-групповом смысле) имеет абелеву и даже центральную нормальную подгруппу $R/[G,R]$, причём факторгруппа $(G/[G,R])/(R/[G,R])$ изоморфна (как абстрактная группа) полупростой локально компактной группе G/R. Напомним, что группы $\widetilde{H}$ и $\widetilde{Q}$ являются нормальными подгруппами в $\widetilde{S}$. Как и в доказательстве теоремы 3.28, видим, что любое (не обязательно непрерывное) конечномерное унитарное представление группы G тривиально на H. Тем самым любое (не обязательно непрерывное) конечномерное унитарное представление группы G тривиально на нормальной подгруппе в G, порождённой (в теоретико-групповом смысле) подгруппами $[G,R]$ и H.

Отметим, что каждый элемент $\widetilde{g}$ группы $(\widetilde{Q}\cdot R_{\widetilde{L}})\times N$ можно естественным образом представить в виде произведения $\widetilde{g}=\widetilde{h}\widetilde{q}\widetilde{r}n$, где $\widetilde{h}\in\widetilde{H}$, $\widetilde{q}\in\widetilde{Q}$, $\widetilde{r}\in R_{\widetilde{L}}$, $n\in N$, так что образ g элемента $\widetilde{g}$ есть произведение $hqrn$ образов элементов $\widetilde{h},\widetilde{q},\widetilde{r}$ и n в подгруппах-образах этих групп в G, т.е. в H, Q, R_L и N, соответственно, где N совпадает со своим образом и является нормальной подгруппой в G, так что $K=QN$ — компактная группа, а нормальная подгруппа R_L является группой Ли как образ группы Ли $R_{\widetilde{L}}$ при гомоморфизме с дискретным ядром.

Заметим также, что подгруппа в G, порождённая подгруппами H и $[R_L,G]$, является нормальной подгруппой в G, на которой, как мы видели выше, любое конечномерное унитарное представление группы G тривиально.

Рассмотрим пересечение P группы R_L с компактной группой K. Поскольку элементы группы N коммутируют с элементами образа группы $\widetilde{L}$ в G, то рассматриваемое пересечение содержится в подгруппе Q. Это — замкнутая разрешимая подгруппа в Q и в R_L, и тем самым — компактная разрешимая группа Ли. Замыкание V пересечения группы $[R_L,G]$ с Q содержится в P и является компактной подгруппой и даже компактной нормальной подгруппой в Q, и тем самым также в K. Поскольку любое конечномерное унитарное представление группы G тривиально, в частности, на $[R_L,G]$, причём любое конечномерное унитарное представление подгруппы Q автоматически непрерывно, а группа R_L является подгруппой радикала R (поскольку она связна и разрешима), то оказывается, что любое конечномерное унитарное представление группы G тривиально не только на подгруппах H и $[R_L,G]$, но и на замыкании пересечения коммутанта радикала $[G,R]$ с произведением Π всевозможных компактных простых сомножителей Ли, являющихся аналитическими подгруппами группы G (нетрудно проверить совпадение этого замыкания с V).

Заметим, однако, что пересечение радикала R с произведением Π всевозможных компактных простых сомножителей Ли, являющихся аналитическими подгруппами группы G, содержится в пересечении произведения группы R_L на коммутативную связную нормальную подгруппу N_{00} в N с прямым произведением $Q \times N$. Таким образом, речь идёт о произведении группы $R_L \cap Q$ и группы N_{00}. Но группа N_{00} поэлементно перестановочна со всеми элементами группы G, так что $[G,R] \cap N_{00} = \{e\}$. Следовательно, $[G,R] \cap \Pi = [G,R_L] \cap Q$. Но группа $[G,R_L] \cap Q$ содержится в $R_L \cap Q$, а это — конечная разрешимая группа Ли. Следовательно, группа $R_L \cap Q$ конечна. Поэтому и группа $[G,R_L] \cap Q$ конечна, и тем самым автоматически замкнута.

Факторгруппа Q/V (в теоретико-групповом смысле) может рассматриваться как обычная компактная топологическая группа, и она имеет даже достаточно много непрерывных конечномерных унитарных представлений. Для завершения доказательства теоремы 3.29 достаточно убедиться, что любое непрерывное конечномерное унитарное представление группы Q/V может быть продолжено до (не обязательно непрерывного) конечномерного унитарного представления группы $(KR)/X$, где X — нормальная подгруппа $[R,G]$.

Образ группы R в $(KR)/X$ коммутативен, и пересечение группы $R/(X\cap R)=R/[G,R]$ с образом группы K является коммутативной и даже центральной подгруппой в $K/(K\cap X)$. Поэтому ограничение любого конечномерного унитарного представления группы $K/(K\cap X)$ на пересечение $F=(K/(K\cap X))\cap(R/[G,R])$ кратно некоторому (автоматически непрерывному) характеру центральной группы F. Рассмотрим группу $R/[G,R]$ в дискретной топологии. Тогда дискретная абелева группа F становится замкнутой в дискретной абелевой группе $R/[G,R]$, и поэтому любой характер группы F можно продолжить до непрерывного характера коммутативной дискретной группы $R/[G,R]$ (см., например, [114, 24.12]). Тем самым факторгруппа по нормальной подгруппе, описанной в формулировке теоремы 3.29, имеет достаточно много конечномерных унитарных представлений (семейство таких представлений разделяет точки рассматриваемой факторгруппы), что завершает доказательство теоремы 3.29. □

Пример 3.5. Воспользуемся известным примером редуктивной группы Ли с незамкнутой подгруппой Леви (см., например, [213, с. 256]). Пусть G_0 — универсальная накрывающая группа группы Ли $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ и Z — центр группы G_0, который изоморфен аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$. Существует такая дискретная подгруппа D в $\mathbb{R}\times Z$, что факторгруппа $\mathbb{R}\times Z/D$ изоморфна одномерному тору $\mathbb{T}$ и образ подгруппы $\{0\}\times Z$ плотен в $\mathbb{T}$ (например, можно взять в качестве D ядро гомоморфизма вида

$$(t,\nu)\mapsto \exp 2\pi i(t+\alpha\overline{\nu}),\qquad t\in\mathbb{R},\quad \nu\in Z,$$

произведения $\mathbb{R}\times Z$ на $\mathbb{T}$, где α иррационально и отображение $\nu\mapsto\overline{\nu}$ — некоторый изоморфизм группы Z на $\mathbb{Z}$. В качестве группы G можно взять факторгруппу $G=\mathbb{R}\times G_0/D$. Ясно, что $\mathrm{vNk}(G)=G$ (группа G — минимально почти периодическая), тогда как $\mathrm{svNk}(G)=[G,G]$.

Таким образом, здесь учёт разрывных конечномерных представлений может повлиять на ответ.

Отметим два утверждения, являющиеся непосредственными следствиями теорем. Первое из них сформулировано в [182]; пробел в доказательстве в [182] отмечен выше.

Следствие 3.17. *Группы* $\mathrm{vNk}(G)$ *и* $\mathrm{svNk}(G)$ *связны для любой связной локально компактной группы* G.

Доказательство. Объединение связного множества с замыканием части этого множества связно. Поэтому порождающие множества для нормальных подгрупп $\mathrm{vNk}(G)$ и $\mathrm{svNk}(G)$, указанные в теоремах 3.28 и 3.29, можно считать связными, что немедленно доказывает утверждение следствия 3.17. □

Следствие 3.18. *Связная локально компактная группа G с радикалом R и факторгруппой по радикалу S является минимально почти периодической тогда и только тогда, когда полупростая группа S не имеет нетривиальных компактных простых факторов (в частности, является группой Ли), а замыкание нормальной подгруппы $[G,R]$ группы G, порождённой коммутаторами вида*

$$grg^{-1}r^{-1}, \qquad g \in G, \qquad r \in R,$$

совпадает с радикалом R. Группа G не имеет нетривиальных конечномерных унитарных представлений (т.е. $\mathrm{svNk}(G) = G$) тогда и только тогда, когда полупростая группа S не имеет нетривиальных компактных простых факторов (в частности, является группой Ли), а радикал R совпадает с нормальной подгруппой $[G,R]$ в G.

Доказательство. Первое условие означает, что $\mathrm{vNk}(G) = G$, а второе — что $\mathrm{svNk}(G) = G$. Остаётся применить теоремы 3.28 и 3.29, соответственно. □

3.4. Вложения связных локально компактных групп в аменабельные группы

Установленный в разделе 3.3 факт, что условие непрерывности вложения в теореме Фрейденталя–Вейля излишне, вызывает интерес к другим не обязательно непрерывным вложениям, которые могут накладывать сильные условия на структуру вкладываемых групп. В настоящем параграфе показано, что почти связная локально компактная группа, допускающая (не обязательно непрерывное) локально ограниченное вложение в почти связную аменабельную локально компактную группу, аменабельна (здесь и далее — как топологическая группа). Чтобы демистифицировать это утверждение, напомним, что почти связная локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда её факторгруппа по радикалу является компактной группой (см. например, [175, теорема 3.8]). С другой стороны, любая простая (некоммутативная) компактная группа Ли содержит неаменабельную (незамкнутую) подгруппу, некоторая факторгруппа которой изоморфна свободной группе с двумя образующими (см., скажем, пример 1.2.8 и теорему 1.3.4 в [103]), так что далеко не каждая незамкнутая подгруппа аменабельной связной локально компактной группы аменабельна, и дополнительные условия, специализирующие вкладываемую группу, действительно нужны для установления желаемого аналога теоремы Фрейденталя–Вейля.

Следует отметить два вспомогательных результата. Во первых, показано, что расширение центра факторгруппы связной локально компактной группы по её радикалу с помощью самого радикала является наибольшей связной разрешимой нормальной подгруппой данной связной локально компактной группы. Во вторых, показано, что образ (не обязательно непрерывного) локально ограниченного гомоморфизма связной локально компактной группы в почти связную локально компактную группу содержится в компоненте единицы этой почти связной группы.

Следующая теорема является обещанным аналогом теоремы Фрейденталя–Вейля для аменабельных связных локально компактных групп, причём вложение одной группы в другую может быть не непрерывным.

Теорема 3.30. *Пусть G — связная локально компактная группа, K — почти связная аменабельная локально компактная группа, и $J\colon G \to K$ — (не обязательно непрерывное) локально ограниченное гомоморфное вложение. Тогда G — аменабельная локально компактная группа, и поэтому G является расширением связной компактной топологической группы с помощью связной разрешимой нормальной подгруппы.*

Эта теорема имеет почти очевидное следствие.

Следствие 3.19. *Пусть G — почти связная локально компактная группа, K — почти связная аменабельная локально компактная группа, и $J\colon G \to K$ — (не обязательно непрерывное) локально ограниченное гомоморфное вложение. Тогда G — аменабельная локально компактная группа (и потому является расширением компактной топологической группы с помощью разрешимой нормальной подгруппы).*

Перейдём к доказательствам. Начнём со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 3.10. *Пусть K — связная локально компактная группа, R — радикал группы K, а Z — центр факторгруппы K/R. Тогда полный прообраз $N = N(K)$ группы Z в K содержит любую разрешимую нормальную подгруппу группы K.*

Доказательство. Напомним, что R — связная замкнутая нормальная подгруппа в K. Пусть Q — разрешимая нормальная подгруппа в K. Образ P группы Q при каноническом отображении $K \to K/R$ разрешим и является нормальной подгруппой в K/R. Тогда полный прообраз $\widetilde{P}$ группы P в K при этом каноническом отображении содержит и R, и Q и является разрешимой нормальной подгруппой в K. Таким образом, любая разрешимая нормальная подгруппа в K содержится в разрешимой нормальной подгруппе в K, содержащей R. Рассмотрим теперь разрешимую нормальную подгруппу N в K, содержащую R. Её образ N/R в факторгруппе K/R является разрешимой нормальной подгруппой в K/R. Компонента единицы в N/R тривиальна, поскольку иначе её полный прообраз в K был бы связной разрешимой нормальной подгруппой в K, строго содержащей R, что невозможно по определению R. Следовательно, группа N/R — вполне несвязная подгруппа связной топологической группы. Как хорошо известно, любая такая группа центральна, так что $N/R \subset Z$, что и доказывает утверждение. □

Следствие 3.20. *Пусть K — связная локально компактная группа, R — радикал группы K, а Z — центр факторгруппы K/R. Полный прообраз $N = N(K)$ группы Z в K является наибольшей разрешимой нормальной подгруппой в K.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3.10, поскольку N разрешим как расширение коммутативной группы с помощью разрешимой группы. □

Лемма 3.11. *Пусть G — связная локально компактная группа, K — почти связная локально компактная группа и $J\colon G \to K$ — (не обязательно непрерывное) локально ограниченное гомоморфное вложение. Тогда образ $J(G)$ группы G в K содержится в компоненте единицы K_0 группы K.*

Разумеется, предположение о почти связности группы K и локальной ограниченности вложения существенно. Образ связной группы $\mathbb{R}$ (в естественной топологии) при ее тождественном отображении в ту же группу в дискретной топологии неединичен.

Доказательство. Рассматривая композицию I отображения J и канонического отображения группы K на K/K_0, мы вправе считать, что K — вполне несвязная компактная группа. Заменяя группу K при необходимости замыканием $\overline{(J(G))}$ образа $J(G)$ группы G в K, можно считать, что образ $I(G)$ плотен в K. Рассмотрим произвольную связную разрешимую замкнутуюю нормальную подгруппу Q группы G. Покажем, что замыкание $\overline{(I(Q))}$ образа $I(Q)$ группы Q в K есть единичная группа. Если $Q=\{e\}$, то утверждение очевидно. Если длина композиционного ряда группы Q равна 1, т.е. если группа Q коммутативна, то группа Q делима как связная коммутативная локально компактная группа. В таком случае, и образ $J(Q)$ группы Q делим. По лемме 3.1, замыкание образа $J(Q)$ группы Q в компактной группе K тоже делимо. Следовательно, оно связно [122, теорема 9.35], и потому единично, как и утверждалось. Таким образом, образ $I(N)$ наименьшей неединичной нормальной подгруппы N в композиционном ряде группы Q единичен. Отсюда следует, что можно рассматривать отображение I как отображение факторгруппы группы Q по N, после чего утверждение о единичности образа $I(Q)$ группы Q в K сразу следует индукцией по длине композиционного ряда группы Q. В частности, I-образ радикала R группы G единичен. Следовательно, отображение I определяет гомоморфизм связной полупростой локально компактной группы $S=G/R$ во вполне несвязную компактную группу K.

Факторгруппа $S=G/R$ группы G по радикалу R связна и полупроста, т.е. не имеет нетривиальных замкнутых связных абелевых нормальных подгрупп [129, теорема 15]. Согласно [123, теорема 10.29], существует такое прямое произведение $\prod_{j\in J} S_j$ связных односвязных простых конечномерных групп Ли S_j, $j\in J$, и такие гомоморфизмы $\pi_S\colon \prod_{j\in J} S_j \to S$ и $f\colon S\to\prod_{j\in J} S_j/Z(S_j)$, где $Z(S_j)$ — центр группы S_j и $S_j/Z(S_j)$ — факторгруппа по центру, что образ гомоморфизма π_S плотен в S, а композиция $f\circ\pi_S$ гомоморфизмов f и π_S совпадает с каноническим гомоморфизмом группы на факторгруппу, определяемым переходом к фактору $S_j\to S_j/Z(S_j)$ в каждом сомножителе. Так как факторгруппа группы S по некоторой компактной нормальной подгруппе является группой Ли, то семейство некомпактных простых групп Ли в семействе $\{S_j, j\in J\}$, конечно (быть может, пусто). Докажем, что оно пусто. Если S_{j_0} — некоторая некомпактная простая группа Ли, то в ее разложении Ивасавы $S_{j_0}=K_{j_0}A_{j_0}N_{j_0}$ (где K_{j_0} — полный прообраз соответствующей максимальной компактной подгруппы в $S_{j_0}/Z(S_{j_0})$) имеется связная замкнутая некоммутативная разрешимая подгруппа Ли $A_{j_0}N_{j_0}$. Её полный прообраз в группе S — связная замкнутая некоммутативная разрешимая подгруппа Ли, и, как мы видели в первой части доказательства, образ этой подгруппы в группе K единичен (напомним, что группа K вполне несвязна). Следовательно, ядро гомоморфизма S_{j_0} в K, определяемого ограничением отображения S в K, содержит нетривиальную связную подгруппу. Поскольку S_{j_0} — простая группа Ли по построению, то ядро этого гомоморфизма есть вся группа S_{j_0}. Таким образом, можно рассматривать отображение I как отображение компактной факторгруппы группы S по π_S-образу M подгруппы, отвечающей (конечному) произведению всех некомпактных простых сомножителей вида S_j, $j \in J$. Но группа S/M компактна и связна. Любой максимальный протор (максимальная связная абелева подгруппа) в S/M (см. [122, определение 9.30] или [32]) имеет единичный образ, как показано в первой части доказательства, и поэтому образ всей группы S/M в K единичен, что завершает доказательство леммы 3.11. $\square$

Докажем теперь утверждение о подгруппах аменабельных групп, изоморфных (как дискретные группы) с помощью локально ограниченных отображений связным локально компактным группам.

Доказательство теоремы 3.30. Пусть G — связная локально компактная группа, K — почти связная аменабельная локально компактная группа и $J\colon G \to K$ — (не обязательно непрерывное) локально ограниченное гомоморфное вложение. По лемме 3.11, заменяя группу K при необходимости замыканием образа $J(G)$ группы G при отображении J, мы вправе предположить дополнительно, не нарушая общности утверждения, что аменабельная локально компактная группа K связна.

Рассмотрим ограничение вложения J на построенную в лемме 3.10 нормальную подгруппу $N = N(G)$ группы G. Его образ $J(N(G))$ разрешим, а потому и его замыкание $\overline{J(R)}$ разрешимо. По лемме 3.10, нормальная подгруппа $\overline{J(R)}$ содержится в построенной в лемме 3.10 разрешимой нормальной подгруппе $N = N(K)$ в группе K. Таким образом, композиция I отображения J и последующего канонического отображения группы K на факторгруппу $K/N(K)$ тривиальна на R и может поэтому рассматриваться как гомоморфизм (не обязательно непрерывный) связной полупростой факторгруппы G/N в связную факторгруппу без центра K/N, которая компактна, поскольку группа K аменабельна по предположению. Кроме того, поскольку J — вложение, то полный прообраз разрешимой группы разрешим и полный прообраз нормальной подгруппы является нормальной подгруппой. Таким образом, полный прообраз разрешимой нормальной подгруппы $N = N(K)$ в группе K содержится в нормальной подгруппе $N(G)$ группы G. Отсюда следует, что гомоморфизм I определяет локально ограниченное вложение связной факторгруппы $G/N(G)$ в компактную связную факторгруппу без центра $K/N(K)$.

Заметим теперь, что, согласно аналогу теоремы Фрейденталя–Вейля для не обязательно непрерывных вложений связных локально компактных групп в компактные топологические группы (теорема 3.24), группа $G/N(G)$ изоморфна прямому произведению связной компактной группы и векторной группы. Так как нормальная подгруппа $N(G)$ группы G разрешима, то группа G оказывается расширением компактной группы с помощью разрешимой группы, и потому аменабельна как топологическая группа. Это завершает доказательство теоремы. □

Перейдём к доказательству следствия 3.19.

Доказательство. Пусть G — почти связная локально компактная группа, K — почти связная аменабельная локально компактная группа, и $J\colon G \to K$ — (не обязательно непрерывное) локально ограниченное гомоморфное вложение. Тогда связная компонента единицы G_0 в группе G является связной аменабельной локально компактной группой, а ограничение отображения J на G_0 является вложением группы G_0 в почти связную аменабельную локально компактную группу K. Таким образом, G_0 является связной аменабельной локально компактной группой по только что доказанной теореме 3.30, а локально компактная группа G, являющаяся расширением компактной топологической группы с помощью связной аменабельной локально компактной группы, аменабельна (в силу теоремы 3.8 в [175]). □

Вложение группы $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ в дискретной топологии на себя, где образ рассматривается в обычной топологии, показывает, что при наличии вложения (в данном случае — даже непрерывного) не обязательно почти связной локально компактной группы G в компактную группу группа G может быть топологически неизоморфна прямому произведению компактной группы и векторной группы и даже неаменабельна. Таким образом, условие почти связности в следствии 3.19 существенно.

Следствие 3.13 можно переформулировать следующим очевидным образом.

Теорема 3.31. *Пусть G — почти связная локально компактная группа. Следующие условия равносильны*:

(1) *Группа G допускает локально ограниченное вложение* (*как топологическая группа*) *в некоторую почти связную аменабельную локально компактную группу.*

(2) *Группа G аменабельна.*

(3) *Группа G содержит связную разрешимую нормальную подгруппу, факторгруппа по которой компактна.*

(4) *Группа G изоморфна* (*как абстрактная группа*) *всюду плотной подгруппе почти связной аменабельной локально компактной группы.*

Напомним, что основной результат предыдущего раздела (теорема 3.26) утверждает равносильность условий принадлежности связной локально компактной группы в исходной и в дискретной топологии классу [MAP]. Но в случае локально ограниченных вложений аналогичной возможности нет, и, кроме того, для аменабельных групп привлечение дискретной топологии малоэффективно, поскольку аменабельность топологической группы в дискретной топологии не равносильна ее аменабельности в исходной топологии (напомним, что связная локально компактная топологическая группа аменабельна в дискретной топологии тогда и только тогда, когда она разрешима).

Теорема 3.32. *Не обязательно непрерывное локально ограниченное конечномерное представление π связной группы Ли вполне приводимо тогда и только тогда*, *когда ограничение π на радикал R вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть π вполне приводимо, т.е. является прямой суммой неприводимых представлений группы G. Поэтому достаточно рассмотреть случай неприводимого представления π. Как мы неоднократно видели, неприводимые представления разрешимой группы Ли R одномерны. Следовательно, по лемме 2.9 главы 2 они являются (не обязательно непрерывными) характерами группы R, и из связности группы G сдедует, что если π неприводимо, то все диагональные характеры ограничения π на R одинаковы и центральны, т.е. инвариантны относительно внутренних автоморфизмов группы G. Пусть S — подгруппа Леви группы G. Если (не обязательно непрерывное) локально ограниченное конечномерное представление π связной группы Ли G неприводимо, то, поскольку ограничение π на R образовано скалярными кратными единичного оператора, то ограничение π на S неприводимо, и $\pi|_S$ непрерывно по теореме 3.4. Таким образом, каждое (не обязательно непрерывное) неприводимое представление группы G имеет вид

$$\pi(g)=\pi(sr)=\chi(r)\rho(s),\quad g=sr,\quad s\in S,\quad r\in R,$$

где ρ является непрерывным во внутренней топологии группы S неприводимым представлением полупростой группы Ли S в пространстве представления π, а χ является (не обязательно непрерывным) характером R, который является центральным (т.е. $\chi(grg^{-1})=\chi(r)$ для каждого $r\in R$ и $g\in G$). Это автоматически означает, что ограничение π на R вполне приводимо.

Обратно, пусть π — конечномерное (не обязательно непрерывное) конечномерное представление G с вполне приводимым ограничением на R. Поскольку R разрешима, ее (не обязательно непрерывное) неприводимые представления являются одномерными. Поскольку R — нормальная подгруппа G, то, как и в доказательстве прямого утверждения, соответствующие характеры R являются центральными. Пусть $\chi_1,\dots,\chi_k$ — полный список центральных характеров, участвующих в качестве подпредставлений ограничения π на R. Тогда для каждого $i\in\{1,\dots,k\}$ линейная оболочка E_i одномерных подпространств, соответствующих символу χ_i, автоматически инвариантна относительно π, а ограничение π_i представления π на E_i имеет ограничение на радикал R, который тождественно равен $\chi_i 1|_{E_i}$, где $1|_{E_i}$ обозначает единичный оператор на пространстве E_i. Рассмотрим отображение

$$\sigma\colon\, g=sr\mapsto\chi_i(r),$$

где $g=sr\in G$, $s\in S$, $r\in R$. Поскольку χ_i является центральным, то отсюда следует, что σ определяет одномерное представление G — действительно,

$$\begin{aligned}&\sigma(s_1r_1s_2r_2)=\sigma(s_1s_2s_2^{-1}r_1s_2r_2)=\sigma(s_2^{-1}r_1s_2r_2)=\\&=\sigma(s_2^{-1}r_1s_2)\sigma(r_2)=\sigma(r_1)\sigma(r_2)=\sigma(s_1r_1)\sigma(s_2r_2)\end{aligned}$$

для каждых $s_1,s_2\in S$ и $r_1,r_2\in R$). Тогда представление $\theta\colon\, g\mapsto\sigma^{-1}(g)\pi(g)$, $g\in G$, тривиально на R. Поэтому это представление можно рассматривать как представление полупростой факторгруппы G/R. По теореме Вейля это представление вполне приводимо. Поэтому представление $\pi_i=\chi_i\sigma=\chi_i\otimes\sigma$ также вполне приводимо. Поскольку π является прямой суммой представлений π_i, $i=1,\dots,k$, то отсюда следует, что π также вполне приводимо, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Перед тем как приступить к исследованию ядер универсальных представлений связных локально компактных групп, напомним некоторые характеризации линейных групп Ли (см. [39, 101, 102, 112, 118, 119, 121, 152, 164, 165]).

Лемма 3.12. *Пусть G — связная группа Ли с разложением Леви $G=S\cdot R$. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *G имеет точное непрерывное конечномерное линейное представление*;

2) *радикал замыкания коммутанта группы G односвязен* (*это условие выполняется тогда и только тогда*, *когда радикал коммутанта группы G замкнут и односвязен*) *и S имеет точное непрерывное линейное представление.*

Разрывные представления почти не изучались, и Московиц считал вопрос о разрывных представлениях сложным.[2]

Теорема 3.33. *Связная группа Ли допускает точное локально ограниченное* (*не обязательно непрерывное*) *конечномерное представление тогда и только тогда*, *когда она допускает непрерывное точное конечномерное представление*, *т.е. тогда и только тогда*, *когда она является линейной группой Ли.*

Доказательство. В дальнейшем символ $Z(G)$ означает центр группы G, $R=\operatorname{rad} G$ — радикал связной локально компактной группы G (наибольшую связную разрешимую нормальную подгруппу группы G), S — полупростую факторгруппу по радикалу, $S=G/R$, Σ — подгруппу Леви связной группы Ли, $G'=[G,G]$ — коммутант группы G, и R_* — радикал коммутанта G'.

Предположим, что связная группа Ли G имеет точное локально ограниченное линейное π в комплексном векторном пространстве. Как мы знаем, отсюда следует, что ограничение π на Σ автоматически непрерывно, и поэтому Σ — линейная группа. По лемме 3.12, остаётся доказать утверждение теоремы в дополнительном предположении, что группа Ли G разрешима. Для разрешимых связных групп Ли условие 2) выполняется тогда и только тогда, когда замыкание G' односвязно [164]. По теореме 2.13 главы 2, существует базис в пространстве представления, в котором матрицы представления π — верхние треугольные, и поэтому матрицы ограничения π на G' — верхние треугольные с единицами на главной диагонали. Следовательно, так как диагонадьные (единичные) представления треугольного представления непрерывны, то ограничение π на коммутант G' непрерывно, и образ $\pi(G')$ группы G' —

[2]“Of course, in this form one cannot get necessary and sufficient conditions” [165].

аналитическая подгруппа односвязной нильпотентной группы унипотентных верхних треугольных матриц. Поэтому $\pi(G')$ замкнута и односвязна. Следовательно, и G' односвязна. Если замыкание G' содержит нетривиальную компактную подгруппу, то пересечение замыканий дополнений ограниченных замкнутых окрестностей единичного элемента в группе G' содержит элементы этой компактной подгруппы, а тогда это пересечение содержит и единичный элемент этой компактной подгруппы, который тоже является элементом группы G'. Это свойство должно наследоваться непрерывным образом $\pi(G')$; однако $\pi(G')$ — такая подгруппа, для которой пересечение замыканий дополнений открытых окрестностей единичного элемента не может содержать единичный элемент (потому что нормы нильпотентных матриц не могут быть близки к 1 на бесконечности). Отсюда следует, что обе части условия 2) в лемме 3.12 выполнены, так что группа G линейна. □

Хохшильд [120] описал пересечение ядер всех непрерывных конечномерных представлений связной группы Ли.

Определение 3.10 ([120]). Пусть G — топологическая группа. *Ядро Хохшильда* группы G, или *ядро универсального представления* $\mathrm{urk}(G)$ группы G, определяется как пересечение ядер всех непрерывных конечномерных представлений группы G.

Приведем описание Хохшильда. Если G — полупростая группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{g}^{\mathcal{C}}$ — комплексификация $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{\mathcal{C}}$ — естественное вложение, то это вложение является дифференциалом единственного гомоморфизма γ соответствующих односвязных групп Ли $\widetilde{G}$ и $\widetilde{G}^{\mathcal{C}}$. Ядро Q гомоморфизма γ — дискретная нормальная подгруппа в $\widetilde{G}$, и $\mathrm{urk}(G)$ равно образу ядра γ при универсальном накрытии $\widetilde{G} \to G$. Если G — связная группа Ли и L — ее подгруппа Леви, то $\mathrm{urk}(G)$ — подгруппа F, содержащая замыкание A группы $\mathrm{urk}(L)$, и факторнруппа F/A есть наибольшая компактная подгруппа замыкания в G/A радикала коммутанта группы G/A.

Следующий объект также представляет интерес.

Определение 3.11. Пусть G — топологическая группа. *Ядро локально ограниченных представлений* $\mathrm{lbrk}(G)$ группы G определяется как пересечение ядер всех (не обязательно непрерывных) локально ограниченных конечномерных представлений группы G.

Очевидно, что $\mathrm{lbrk}(G)$ — нормальная подгруппа в G (не обязательно замкнутая), содержащаяся в замкнутой нормальной подгруппе $\mathrm{urk}(G)$ в G. Суммируем некоторые результаты статей [101, 102, 112, 118, 119, 121, 152, 164, 165], чтобы прояснить постановку задачи. Согласно следствию 2 к теореме 4 в [102], если G — группа Ли, то фактор-группа $G/\mathrm{urk}(G)$ линейна, т.е. имеет точное непрерывное конечномерное представление. Таким образом, $\mathrm{urk}(G)$ — наименьшая замкнутая нормальная подгруппа N в группе Ли G, для которого G/N изоморфна вещественно-аналитической подгруппе некоторой полной линейной группы.

Пример 3.6. Воспользуемся известным примером связной редуктивной группы Ли с незамкнутой подгруппой Леви (см., например, [213, с. 256]) и с коммутантом, плотным в группе. Пусть G_0 — универсальная накрывающая группа группы Ли $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ и Z — центр группы G_0, который изоморфен аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$. Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}$ — подполе рациональных чисел в поле $\mathbb{R}$. Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — одномерный тор. Существует такая дискретная центральная нормальная подгруппа D в $\mathbb{R} \times Z$ (и одновременно в $\mathbb{R} \times G_0$), что факторгруппа $\mathbb{R} \times Z/D$ изоморфна одномерному тору $\mathbb{T}$ и образ подгруппы $\{0\} \times Z$ плотен в $\mathbb{T}$ (например, в качестве D можно взять ядро гомоморфизма $(t,\nu) \mapsto \exp 2\pi i(t + \alpha\overline{\nu})$, где $t \in \mathbb{R}$, $\nu \in Z$, произведения $\mathbb{R} \times Z$ на $\mathbb{T}$; здесь α иррационально и отображение $\nu \mapsto \overline{\nu}$ — некоторый изоморфизм группы Z на $\mathbb{Z}$ ($\overline{\nu}$ — целое, соответствующее $\nu \in Z$ при этом изоморфизме). В качестве группы G можно взять факторгруппу $G = \mathbb{R} \times G_0/D$; пусть C — центр G, и пусть π — канонический гомоморфизм группы $\mathbb{R} \times G_0$ на факторгруппу G. Ясно, что $\pi(\mathbb{R} \times Z) = C$, $\pi(\{0\} \times G_0) = [G,G]$ и $\mathrm{vNk}(G) = G$ (группа G — минимально почти периодическая), тогда как $\mathrm{svNk}(G) = [G,G]$. Как мы видим, замыкание группы $[G,G]$ — это вся группа G. Однако связная группа Ли, имеющая точное конечномерное представление, имеет замкнутую подгруппу Леви и замкнутый коммутант (см., например, [213, гл. 3, упражнение 41]), а факторгруппа группы G может удовлетворять этим условиям только тогда, когда соответствующая нормальная подгруппа содержит подгруппу $W = \pi(\mathbb{R} \times \{e_Z\})$, так что $\mathrm{urk}(G) = W$. При этом группа $[G,G] = \pi(\{0\} \times G_0)$ очевидным образом изоморфна группе G_0, так что $\mathrm{lbrk}(G) = \mathrm{urk}(G_0) \subsetneq W$, поскольку факторгруппа G/G_0 (взятая в теоретико-групповом смысле) коммутативна и автоматически имеет достаточно много (возможно, разрывных) характеров. Что касается группы $\mathrm{urk}(G_0)$, то, как известно, она равна $2Z$, т.е. группе четных степеней образующего элемента группы Z.

Отметим, что в этом примере группа $\operatorname{lbrk}(G)$ не является замкнутой. Кроме того, $\operatorname{lbrk}(G) \neq \{e\}$ и $\operatorname{urk}(G) \neq \{e\}$. Это — общий факт: если группы $\operatorname{lbrk}(G)$ и $\operatorname{urk}(G)$ не совпадают, то обе они нетривиальны; см. приведённую выше теорему 3.33.

Докажем теперь теорему о непрерывной конечномерной представимости для связной локально компактной группы. Эта теорема утверждает, что связная локально компактная группа G имеет достаточно много непрерывных линейных представлений в конечномерных векторных пространствах, или, что равносильно, выполняется условие $\operatorname{urk}(G) = \{e_G\}$, тогда и только тогда, когда G является проективным пределом связных линейных групп Ли. Мы покажем также, что эти условия эквивалентны также сочетанию двух условий, а именно, что наибольшая некомпактная (аналитическая) полупростая подгруппа Ли S_1 в G является линейной группой Ли (и, таким образом, соответствующая группа $\operatorname{urk}(S_1)$ тривиальна) и (единственная) максимальная компактная подгруппа B замыкания в группе G радикала $\operatorname{rad}(G')$ коммутанта $G' = [G,G]$ группы G также тривиальна. Сформулируем это утверждение об эквивалентности нескольких свойств связной локально компактной группы.

Теорема 3.34. *Пусть G — связная локально компактная группа. Следующие условия равносильны*:

(i) *G имеет достаточно много непрерывных линейных представлений в конечномерных векторных пространствах*, *т.е. семейство конечномерных линейных представлений группы G разделяет точки G*;

(ii) $\operatorname{urk}(G) = \{e_G\}$;

(iii) *G является проективным пределом связных линейных групп Ли*;

(iv) *наибольшая некомпактная* (*аналитическая*) *полупростая подгруппа Ли S_1 в G является линейной группой Ли* (*конечно*, *это значит*, *что соответствующая группа $\operatorname{urk}(S_1)$ тривиальна*) *и* (*единственная*) *максимальная компактная подгруппа B замыкания в G радикала $\operatorname{rad}(G')$ коммутанта G' группы G также тривиальна.*

Доказательство. Очевидно, что (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Мы докажем цепочку импликаций (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii).

Если условие (i) выполнено, то не только G, но и S имеет достаточно много непрерывных линейных представлений в конечномерных векторных пространствах. Согласно уже упомянутой эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (ii), отсюда следует, что $\operatorname{urk}(S_1) = \{e_{S_1}\}$. Следовательно, замыкание группы $\operatorname{urk}(S_1)$ в G также единично. Пусть U — заданная окрестность единичного элемента в G, а N — такая нормальная подгруппа в G, содержащаяся в U, что G/N — связная группа Ли. Применим основную теорему Хохшильда [120] о ядре универсального представления связных групп Ли к факторгруппе Ли $H = G/N$. Поскольку группы $S_1(G)$ и $S_1(G/N)$ естественно изоморфны, то $H = G/N$ является группой Ли, подгруппа Леви которой, S, линейна, так что группа $A = \operatorname{urk}(S)$ тривиальна, $A = \operatorname{urk}(S) = \{e_S\}$. Тогда и замыкание $\mathcal{A}$ группы A тоже тривиально, $\mathcal{A} = \{e_G\}$. По той же теореме Хохшидьда [120], в этом случае, группа Ли H имеет точное непрерывное конечномерное представление (или, что равносильно для связной группы Ли по теореме 9 в [102], имеет достаточно много непрерывных линейных представлений в конечномерных векторных пространствах) тогда и только тогда, когда подгруппа P в G, совпадающая при $\operatorname{urk}(S) = \{e_S\}$ с (единственной) максимальной компактной подгруппой B замыкания в G радикала $\operatorname{rad}(G')$ коммутанта G' группы G, тривиальна.

Однако, если максимальная компактная подгруппа B замыкания в G радикала $\operatorname{rad}(G')$ коммутанта G' группы G нетривиальна, то существует окрестность V единичного элемента в G, не содержащая некоторых элементов B. В таком случае, образ группы B в G/N, где N — компактная нормальная подгруппа в G, содержащаяся в V, является нетривиальной компактной подгруппой замыкания в H образа в H радикала $\operatorname{rad}(G')$ коммутанта G' группы G. С другой стороны, поскольку нормальная подгруппа N компактна, из следствия 3.8 в [62], в сочетании с § 3 в [94], вытекает, что образ в H радикала $\operatorname{rad}(G')$ совпадает с $\operatorname{rad}(H')$, поскольку радикалы в группах G и H автоматически замкнуты. Таким образом, если B нетривиальна, то ядро Хохшильда $\operatorname{urk}(H)$ любой факторгруппы Ли вида $H = G/N$ нетривиально, поскольку содержит нетривиальный образ группы B в H. Тем самым $B \subset \operatorname{urk}(G)$, и семейство непрерывных конечномерных линейных представлений группы G не разделяет точки группы. Это завершает доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (iv).

Для завершения доказательства теоремы нам достаточно доказать импликацию (iv) $\Rightarrow$ (iii). Пусть группы $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G)$ и $B = B(G)$ тривиальны. Рассмотрим окрестность U элемента e_G в G и найдём такую нормальную подгруппу $N \subset U$, что $H = G/N$ — группа Ли. Как мы уже видели, в таком случае выполняется и равенство $\mathcal{A}(H) = \{e_H\}$. Предположим, что для выбранного N существует нетривиальная компактная группа $B = B(H)$ замыкания в H подгруппы

$\mathrm{rad}(H')$. Так как группа B является частью ядра универсального представления, а ядро присоединённого представления совпадает с центром группы, то B центральна, и поэтому является нормальной подгруппой в G. Следовательно (напомним, что N компактен), полный прообраз $\overline{B(H)}$ группы $B(H)$ в G является компактной нормальной подгруппой в G, и эта компактная группа $\overline{B(H)}$ коммутативна по модулю N, т.е. коммутант этой группы содержится в N.

Пересечение C всех компактных нормальных подгрупп вида $\overline{B(G/N)}$ в G (по всем таким компактным нормальным подгруппам N, что факторгруппа G/N является группой Ли) есть компактная подгруппа в G. Подгруппа C коммутативна, поскольку коммутант группы C содержится в пересечении всех групп вида N, а это пересечение единично. Кроме того, поскольку $B(H)$ — компактная подгруппа замыкания в H радикала $\mathrm{rad}(H')$, то,поскольку, как и для радикала группы, образ $\mathrm{rad}(G')$ есть $\mathrm{rad}(H')$ и полный прообраз $\mathrm{rad}(H')$ есть $\mathrm{rad}(G')N$, то компактная подгруппа $\overline{B(G/N)}$ (лежащая в $\mathrm{rad}(H')$) содержится в произведении замыкания $\overline{\mathrm{rad}(G')}$ радикала $\mathrm{rad}(G')$ и нормальной подгруппы N, а тогда пересечение C всех компактных нормальных подгрупп вида $\overline{B(G/N)}$ в G содержится в пересечении произведений $\overline{\mathrm{rad}(G')}N$, т.е. в замыкании в G радикала $\mathrm{rad}(G')$ коммутанта $G' = [G,G]$ группы G.

Кроме того, факторгруппа $G/\overline{B(G/N)}$ естественно изоморфна факторгруппе $(G/N)/(\overline{B(G/N)}/N)$ группы Ли G/N и, таким образом, также факторгруппе $(G/N)/B(G/N)$, и, по построению и по применённой выше теореме Хохшильда, факторгруппа Ли $(G/N)/B(G/N)$ (а с ней и факторгруппа Ли $G/\overline{B(G/N)}$) является линейной группой Ли. Рассмотрим введённое выше общее ядро $C = \bigcap_N \overline{B(G/N)}$ всех полученных таким образом линейных представлений группы G в конечномерных векторных пространствах. Так как все группы $\overline{B(G/N)}$ — компактные нормальные подгруппы, то и C — компактная нормальная подгруппа в G. Мы видели выше, что она также коммутативна и что C содержится в замыкании в G радикала $\mathrm{rad}(G')$ коммутанта $G' = [G,G]$ группы G. В силу условия (iv), группа C единична. Так как любой элемент группы G, не принадлежащий C, переходит в неединичный элемент в некотором непрерывном конечномерном представлении π группы G по построению группы C, а все факторгруппы Ли вида $G/\overline{B(G/N)}$ линейны, то группа $G = G/C$ оказывается проективным пределом линейных групп Ли вида $G/\overline{B(G/N)}$. Это завершает доказательство теоремы 3.34. □

Теорема 3.35. *Пусть G — связная локально компактная группа, U — заданная окрестность единицы в G, $N \subset U$ — такая компактная (не обязательно связная) нормальная подгруппа, что факторгруппа $L = G/N$ является связной группой Ли, а группа G является образом некоторого гомоморфизма $\psi\colon \widetilde{L} \times N \to G$ с дискретным ядром, где $\widetilde{L}$ — универсальная накрывающая группы Ли L. Пусть $S_{\widetilde{L}}$ — подгруппа Леви в группе Ли $\widetilde{L}$, и пусть A — замыкание в G группы* $\mathrm{urk}(S)$. *Тогда* $\mathrm{urk}(G)$ *совпадает с замкнутой (нормальной) подгруппой P в G, содержащей A, для которой факторгруппа P/A является (единственной) максимальной компактной подгруппой замыкания в G/A радикала коммутанта $(G/A)_*$ группы G/A.*

Доказательство. Пусть $S_{\widetilde{L}}$ — подгруппа Леви в $\widetilde{L}$, и пусть A — замыкание в G подгруппы $\mathrm{urk}(\psi(S_{\widetilde{L}}))$. Поскольку любое непрерывное конечномерное представление группы G единично на подгруппе $\mathrm{urk}(\psi(S_{\widetilde{L}}))$, то и присоединённое представление любой факторгруппы Ли G/N тоже единично на подгруппе $\mathrm{urk}(\psi(S_{\widetilde{L}}))$, так что образ любого элемента подгруппы $\mathrm{urk}(\psi(S_{\widetilde{L}}))$ лежит в центре группы G/N и, следовательно, сам элемент лежит в центре группы G. Поэтому и подгруппа A центральна; в частности, она является замкнутой нормальной подгруппой в G. Поскольку все непрерывные конечномерные линейные представления группы G тривиальны на A, то мы можем перейти к факторгруппе G/A и рассматривать непрерывные конечномерные линейные представления группы G как непрерывные конечномерные линейные представления группы G/A. Упростим обозначения и обозначим группу G/A буквой G; тогда достаточно заметить, что $\mathrm{urk}(\psi(S_{\widetilde{L/(L\cap A)}})) = \{e\}$ по построению, а тогда и замыкание этой единичной группы единично. Остаётся доказать, что в рассматриваемом случае имеет место равенство $\mathrm{urk}(G) = C$, где C — (единственная) максимальная компактная подгруппа замыкания в G радикала коммутанта G' группы G. (Напомним, что после факторизации по A максимальная полупростая аналитическая подгруппа в G без компактных факторов стала линейной группой Ли.)

Заметим теперь, что замкнутая подгруппа $\overline{[G,R]}$ в G является связной локально компактной группой. Следовательно, максимальная компактная подгруппа C в $\overline{[G,R]}$ существует и является связной группой [129, теорема 13]. Кроме того, поскольку $C \subset \overline{[G,R]} \subset R$, мы видим, что группа C одновременно компактна, связна и разрешима. Поэтому группа C — компактная абелева группа. Так как ограничение на C любого непрерывного конечномерного представления группы G является прямой суммой одномерных (и потому неприводимых) представлений, то любое непрерывное конечномерное представление группы G единично на подгруппе C, поскольку определитель образа коммутатора (в данном случае число) единичен. Повторяя соответствующее рассуждение в предыдущем абзаце, мы видим, что подгруппа C центральна; в частности, она тоже является нормальной подгруппой в G. Поскольку все максимальные компактные подгруппы C в любой связной локально компактной группе сопряжены, то, ввиду центральности, они все совпадают, так что группа C определена однозначно и является единственной максимальной компактной подгруппой в $\overline{[G,R]}$.

Таким образом, доказано, что $\operatorname{urk}(G)$ содержит замкнутую нормальную подгруппу P в G, факторгруппа которой по подгруппе A является единственной максимальной компактной подгруппой замыкания $\overline{[G,R]}$.

Докажем теперь обратное утверждение. Рассмотрим факторгруппу группы G по замкнутой нормальной подгруппе P в G, порождённой подгруппой A и единственной максимальной компактной подгруппой группы $\overline{[G,R]}$. Обозначим эту группу снова через G; тогда $A = \{e\}$ и максимальная компактная подгруппа замыкания $\overline{[G,R]}$ единична. Действительно, группа $C(G/C)$ для факторгруппы по C компактна и абелева, так что расширение этой группы с помощью группы C компактно, связно и разрешимо и содержится в замыкании $\overline{[G,R]}$, поэтому абелево, а C максимальна среди компактных подгрупп замыкания $\overline{[G,R]}$. Из теоремы 3.34 следует тогда, что факторгруппа G/P имеет достаточно много непрерывных линейных конечномерных представлений, что завершает доказательство теоремы 3.35. □

3.5. Вариант теоремы Хохшильда о ядре локально ограниченных представлений

Очевидно, $\operatorname{lbrk}(G) \subset \operatorname{urk}(G)$. Конечно, $\operatorname{urk}(G)$ — замкнутая нормальная подгруппа группы G [171], и, согласно [102, теорема 9], факторгруппа $G/\operatorname{urk}(G)$ имеет точное непрерывное конечномерное представление. Таким образом, $\operatorname{urk}(G)$ — наименьшая замкнутая нормальная подгруппа P в G, удовлетворяющая условию, что G/P изоморфна вещественно-аналитической подгруппе полной линейной группы.

Как показывает приведённый выше пример связной редуктивной группы Ли с $\mathrm{urk}(G) \subsetneq \mathrm{lbrk}(G)$, в теореме о достаточных условиях совпадения групп $\mathrm{lbrk}(G)$ и $\mathrm{urk}(G)$ неизбежны дополнительные предположения. Вместо непрерывных конечномерных представлений, участвующих в теореме Хохшильда, мы предполагаем, что конечномерные представления локально ограничены и непрерывны на замыкании ядра универсального представления некоторой подгруппы Леви во всей группе и на замыкании радикала коммутанта. Таким образом, эта теорема обобщает характеризацию Хохшильда.

Теорема 3.36. *Пусть G — связная группа Ли, S — максимальная полупростая аналитическая подгруппа в G. Пусть A — замыкание в G группы $\mathrm{urk}(S)$. Тогда пересечение L_G ядер всех локально ограниченных конечномерных представлений группы G (в комплексных векторных пространствах), которые непрерывны на A и на замыкании радикала коммутанта $\mathrm{rad}(G')$ в G, — это нормальная подгруппа P в G, содержащая A, для которой факторгруппа P/A — это (единственная) максимальная компактная подгруппа замыкания в G/A радикала коммутанта $(G/A)_*$ группы G/A.*

Если G совершенна (т.е. коммутант группы G совпадает с G), а также если подгруппа Леви S замкнута в G или ядро универсального представления группы S замкнуто в G и замыкание радикала коммутанта $\mathrm{rad}(G')$ в G содержится в коммутанте подгруппы G' группы G, то $L_G = \mathrm{vNk}(G)$.

Доказательство. Пусть $R = \mathrm{rad}\, G$ — радикал связной группы Ли G, а π (вообще говоря, разрывное) конечномерное представление группы G. По теореме 3.4 ограничение представления π на S автоматически непрерывно, и поэтому представление π отображает нормальную подгруппу $\mathrm{vNk}(S)$ группы S в единичный оператор в пространстве представления π. По предположению, представление π непрерывно на замыкании A группы $\mathrm{vNk}(S)$ в G, и поэтому представление π тривиально не только на $\mathrm{vNk}(S)$, но и на всём A. Заметим, что любая группа Ли имеет присоединённое представление, ядро которого совпадает с центром Z_G группы G. Следовательно, $\mathrm{vNk}(S) \subset Z_G$, где Z_G автоматически замкнут. Таким образом, замыкание A группы $\mathrm{vNk}(S)$ в G также содержится в Z_G, и поэтому группа A центральна. Итак, A — замкнутая нормальная подгруппа в G.

Отсюда следует, что любое конечномерное представление группы G в комплексном векторном пространстве, удовлетворяющее условиям теоремы 3.36, тривиально на A. Переходя к группе G/A, мы можем рассматривать любое конечномерное представление группы G, удовлетворяющее условиям теоремы 3.36 (и не обязательно непрерывное), как представление группы G/A. По этой причине мы можем предположить, что группа G имеет линейную подгруппу Леви S и тривиальную группу A.

Остаётся доказать, что любое конечномерное линейное представление π такой группы G в комплексном векторном пространстве, удовлетворяющее условиям теоремы 3.36, единично на любой компактной подгруппе Q замыкания в G радикала $\operatorname{rad} G'$ коммутанта G' группы G. Для краткости обозначим замыкание $\overline{\operatorname{rad} G'}$ символом O. Так как ограничение представления π на G' единично и потому непрерывно в каждом неприводимом подпредставлении представления π, то ограничение представления π на $\operatorname{rad} G'$ непрерывно и представляется верхними треугольными матрицами с единичными матричными элементами на главной диагонали, и из нашего условия непрерывности следует, что ограничение представления π на O тоже непрерывно и представляется верхними треугольными матрицами с единицами на главной диагонали. Таким образом, представление π тривиально на каждой компактной подгруппе в O, а это показывает, что L_G содержит максимальную компактную подгруппу в O. Следовательно, $L_G \supset \mathrm{vNk}(G)$. Так как, очевидно, $L_G \subset \mathrm{vNk}(G)$ то доказательство теоремы завершено. □

Приведем описание пересечения $\mathrm{lbrk}(G)$ ядер всех локально ограниченных представлений для произвольной связной редуктивной группы Ли G.

Теорема 3.37. *Пусть G — связная редуктивная группа Ли, а S — максимальная полупростая аналитическая подгруппа в G. Пусть A — "линеаризатор" подгруппы S, т.е. группа $\mathrm{urk}(S)$. Тогда группа $\mathrm{lbrk}(G)$ (пересечение ядер всех, не обязательно непрерывных, локально ограниченных конечномерных представлений группы G в комплексных векторных пространствах) совпадает с A.*

Доказательство. Пусть $R = \operatorname{rad} G$ — абелев радикал связной редуктивной группы Ли G. Предположим, что π — (вообще говоря, разрывное) локально ограниченное конечномерное представление группы G. По теореме Ван дер Вардена [214], ограничение π на S автоматически непрерывно (в частности, отсюда следует, что $\mathrm{urk}(S) = \mathrm{lbrk}(S)$), и поэтому представление π отображает нормальную подгруппу A группы S в единичный оператор в пространстве представления π.

Напомним, что ядро присоединённого представления любой группы Ли является центром группы. Следовательно, из очевидного включения $A \subset \mathrm{urk}(G)$ следует, что A является подгруппой центра группы G. Так как любое (непрерывное) конечномерное представление полупростой группы Ли S вполне приводимо, то любое локально ограниченное представление полупростой группы Ли S является прямой суммой неприводимых представлений.

Пусть $B = S \cap R$. Так как S не имеет никаких связных разрешимых нормальных подгрупп, отсюда следует, что B — дискретная нормальная подгруппа в группе S. Следовательно, B — подгруппа центра Z_S группы S.

Вернёмся к рассмотрению локально ограниченного конечномерного линейного представления группы G и ограничим это представление на подгруппу S. Как было замечено выше, это ограничение является прямой суммой неприводимых представлений группы S. В частности, любой элемент центра Z_S группы S переходит в скалярный оператор в подпространстве любого неприводимого подпредставления.

Это свойство означает, что любой элемент теоретико-множественной разности $Z_S \setminus A$ и, в частности, любой элемент теоретико-множественной разности $B \setminus A$ переходит в неединичный оператор в пространстве представления для некоторого локально ограниченного линейного конечномерного представления группы G.

Рассмотрим теперь абелеву группу R и снабдим её дискретной топологией. Покажем, что любое локально ограниченное конечномерное линейное представление группы S может быть продолжено до локально ограниченного линейного представления группы G. Достаточно установить это утверждение для неприводимых представлений. Если рассматриваемое представление неприводимо, то ограничение этого представления на пересечение $B = S \cap R$ (дискретное в S и потому центральное в S) определяется некоторым характером группы B по лемме Шура. Согласно теореме 24.12 в [114], этот характер можно продолжить до характера всей (абелевой) группы R. Так как элементы групп S и R коммутируют (поскольку R центральна по предположению), это продолжение характера определяет искомое продолжение представления всей группы S.

Отсюда следует, что любой элемент дополнения $S \setminus A$ имеет нетривиальный образ в некотором локально ограниченном конечномерном линейном представлении группы G. Элементы множества $R \setminus B$ также имеют нетривиальный образ в некотором локально ограниченном конечномерном линейном представлении группы G, поскольку факторгруппа R/B автоматически абелева и тем самым имеет достаточно много одномерных (унитарных) характеров. Это завершает доказательство теоремы 3.37. $\square$

Отметим очевидное следствие.

Следствие 3.21. *Связная редуктивная группа Ли G с подгруппой Леви S удовлетворяет условию $\operatorname{urk}(G) = \operatorname{lbrk}(G)$ тогда и только тогда, когда группа $\operatorname{urk}(S)$ замкнута в G.*

Доказательство теоремы 3.37 выявляет затруднения, связанные с характеризацией ядра $\operatorname{lbrk}(G)$ для связной группы Ли G общего вида и тем более для произвольной связной локально компактной группы, и хорошо видна упрощающая роль предположения о редуктивности рассматриваемой группы G (и тем самым — роль предположения, что радикал централен).

Теорема 3.38. *Пусть G — связная локально компактная группа, U — заданная окрестность единицы в G с компактным замыканием, $N \subset U$ — такая компактная (не обязательно связная) нормальная подгруппа, что факторгруппа $L = G/N$ является связной группой Ли, а группа G является образом некоторого гомоморфизма $\psi\colon \widetilde{L} \times N \to G$ с дискретным ядром, где $\widetilde{L}$ — универсальная накрывающая группы Ли L. Пусть $S_{\widetilde{L}}$ — подгруппа Леви в $\widetilde{L}$, и пусть A — замыкание в G подгруппы $\operatorname{urk}(\psi(S_{\widetilde{L}}))$. Тогда $\operatorname{lbrk}(G)$ — подгруппа в G (нормальная подгруппа), являющаяся пересечением $P \cap [G,G]$, где группа P определена в формулировке теоремы 3.35.*

Лемма 3.13. *Пусть G — связная локально компактная группа, пусть π — (не обязательно непрерывное) локально ограниченное конечномерное линейное представление группы G, и пусть M — (не обязательно замкнутое) ядро представления π. Тогда замыкание ядра M представления π компактно.*

Доказательство леммы. Пусть U — такая окрестность единичного элемента $e \in G$, что π-образ $\pi(U)$ этой окрестности ограничен в пространстве линейных операторов в пространстве представления π. Для любого $\mu \in \overline{M}$ существует такой элемент m ядра M представления π, что $\mu \cdot m^{-1} \in U$ и потому

$\pi(\mu) = \pi(\mu)\pi(m^{-1}) = \pi(\mu\cdot m^{-1}) \in \pi(U)$, так что множество $\pi(\overline{M})$ ограничено в пространстве линейных операторов в пространстве представления π. С другой стороны, M — подгруппа в G, и поэтому $\overline{M}$ — тоже подгруппа в G, а $\pi(\overline{M})$ — подгруппа в группе линейных операторов в пространстве представления π. Так как эта подгруппа ограничена, то её замыкание компактно, что и утверждалось. □

Доказательство теоремы 3.38. Пусть G — связная локально компактная группа, U — заданная окрестность единицы в G, $N \subset U$ — такая компактная (не обязательно связная) нормальная подгруппа, что факторгруппа $L = G/N$ является связной группой Ли, и, как выше, группа G является образом некоторого гомоморфизма $\psi\colon \widetilde{L} \times N \to G$ с дискретным ядром, где $\widetilde{L}$ — универсальная накрывающая группы Ли L. Пусть $\widehat{L} = \psi(\widetilde{L}) \subset G$. Пусть $S_{\widehat{L}}$ — некоторая подгруппа Леви в группе Ли $\widehat{L}$, и пусть A — замыкание в G группы $\mathrm{urk}(\psi(S_{\widehat{L}}))$. Пусть π — (не обязательно непрерывное) локально ограниченное конечномерное линейное представление группы G. По теореме 3.5 это представление непрерывно на $S_{\widehat{L}}$ во внутренней топологии Ли на $S_{\widehat{L}}$. Следовательно, группа $\mathrm{urk}(S_{\widehat{L}})$ содержится в ядре представления π. (В частности, поскольку π может быть любым непрерывным конечномерным представлением, группа $\mathrm{urk}(S_{\widehat{L}})$ центральна в G.) По лемме 3.13, π-образ группы A содержится в компактной подгруппе (Ли) группы линейных операторов в пространстве представления π.

С другой стороны, согласно доказательству теоремы 3.28, существует базис в пространстве E_π представления π, в котором этот образ группы A является подмножеством семейства $\pi([G,R])$ (R — радикал G), и это множество содержится в множестве верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали, а натуральные степени такой матрицы ограничены тогда и только тогда, когда матрица единична. Таким образом, множество $\pi(A\cap[G,R])$ единично для любого (не обязательно непрерывного) локально ограниченного конечномерного линейного представления π группы G, что доказывает включение $A\cap[G,R] \subset \mathrm{lbrk}(G)$.

Рассмотрим теперь образ всей группы P_N в представлении π. Поскольку A — нормальная подгруппа в P_N, то факторгруппа замыкания образа группы P_N по замыканию образа группы A содержится в замкнутой подгруппе замыкания произведения предкомпактного (по доказанному выше) образа группы A и образа компактного множества C, лежащего в группе P (напомним рассуждение Вейля [216, § 3]: если P — локально компактная группа, g — замкнутая подгруппа группы P, а C' — некоторое компактное множество в однородном пространстве $H = P/g$, то существует компактное в P множество C, образ которого в H совпадает с C'; действительно, пусть V — некоторая компактная окрестность единицы в P; так как C' компактно, то можно найти конечное число таких точек $s_i \in P$, что C' содержится в образе множества $C_1 = \cup_i s_i V$; C_1 компактно; тогда за C можно взять компактное множество элементов из C_l, образ которых принадлежит C). Компактное множество C покрывается конечным числом сдвигов окрестности U; поэтому образ этого множества ограничен. Следовательно, весь образ подгруппы P_N ограничен, а потому и предкомпактен. Итак, образ группы P_N лежит в компактной подгруппе (Ли) группы линейных операторов в пространстве представления π. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, мы видим, что и $P_N \cap [G,R] \subset \mathrm{lbrk}(G)$. Таким образом, $\mathrm{lbrk}(G)$ содержит $P_N \cap [G,R]$ и $P_N \cap S_L$, т.е. $P_N \cap [G,G]$. Обратное включение следует из рассуждений выше.

По теореме 3.36 $\mathrm{urk}(G)$ совпадает с замкнутой подгруппой (нормальной подгруппой) P_N в G, содержащей A, для которой факторгруппа P_N/A является (единственной) максимальной компактной подгруппой замыкания в G/A радикала коммутанта $(G/A)_*$ группы G/A. $\square$

3.6. Дополнения

3.6.1. Следствие об автоматической непрерывности для конечномерных представлений связных локально компактных групп

Отметим усиление одной из теорем Ивасавы [129, теорема 2].

Теорема 3.39. (1) *Пусть G — топологическая группа, факторгруппа которой по центру связна, а Q — компактная связная нормальная подгруппа в G. Тогда $G = HQ$, где H — замкнутая нормальная подгруппа в G, образованная всеми элементами в G, перестановочными с каждым элементом группы Q. Пересечение $H \cap Q$ совпадает с центром группы Q.*

(2) *Связная компактная коммутативная нормальная подгруппа в топологической группе, факторгруппа которой по центру связна, лежит в центре группы.*

Доказательство. (1) Группа внутренних автоморфизмов компактной связной группы совпадает со связной компонентой группы автоморфизмов группы G [129, теорема 1']. Поскольку автоморфизмы группы Q, определяемые сопряжениями с элементами группы G, тривиальны, если сопрягающий элемент лежит в центре Z группы G, то образ группы G в группе автоморфизмов является непрерывным образом группы G/Z. Поэтому этот образ связен, и тем самым содержится в компоненте единицы в группе автоморфизмов. Следовательно, для любого $g\in G$ существует такой $q=q(g)\in Q$, что $gsg^{-1}=qsq^{-1}$ для всех $s\in Q$, и $q^{-1}g$ поэлементно коммутирует с Q. Замкнутость H следует из непрерывности операции умножения в G. Так как каждый элемент H перестановочен с любым элементом Q, то $H\cap Q$ перестановочен и с H, и с Q, так что перестановочен и с их произведением, что доказвает последнее утверждение в (1).

Утверждение (2) сразу следует из (1), если в качестве Q взять рассматриваемую компактную коммутативную нормальную подгруппу в группе G. $\square$

Определение 3.12. В ситуации утверждения (1) мы будем называть подгруппу H *почти дополнительной к Q в G в смысле Ивасавы.*

Сформулируем теперь результат.

Теорема 3.40. *Пусть G — связная локально компактная группа, M — такая компактная нормальная подгруппа в G, что факторгруппа $J=G/M$ — (связная) группа Ли, $N=M_0$ — компонента единицы в группе M, H — замкнутая подгруппа в G, почти дополнительная к N в G в смысле Ивасавы, и $L=G/N$ — связная локально компактная группа, факторгруппа которой по вполне несвязной (и потому центральной) нормальной подгруппе M/N в L является группой Ли, изоморфной группе Ли G/M.*

(1) *Факторгруппа группы $(HN)/N=H/(H\cap N)$ по её центральной подгруппе M/N является замкнутой подгруппой группы Ли $L/(M/N)$ и потому является группой Ли.*

(2) *Любое локально ограниченное конечномерное представление группы G в пространстве E, записанное в блочной верхней треугольной форме с непри-*

водимыми подфакторами, непрерывно тогда и только тогда, когда все неприводимые представления, реализованные в подфакторах, непрерывны. Любое непрерывное неприводимое представление группы G является тензорным произведением над $H \cap N$ непрерывных неприводимых представлений групп N и H, ограничения которых на $H \cap N$ совпадают.

(3) *Любое локально ограниченное неприводимое представление группы G в пространстве E непрерывно на коммутаторе G' группы G во внутренней топологии группы Ли G'.*

Доказательство. Перед доказательством утверждений (1)–(3) напомним, что группа M/N вполне несвязна, так как N — компонента единицы в M.

(1) Достаточно проверить замкнутость факторгруппы группы $(HN)/N = H/(H \cap N)$ по её центральной подгруппе M/N в группе Ли $L/(M/N)$. Это следует из [114, Theorem 5.18].

(2) Первое утверждение доказано выше в следствии 3.4. Второе утверждение может быть доказано непосредственно. Пусть ρ — неприводимое непрерывное конечномерное представление группы G в пространстве E. Ограничение ρ на N может быть реализовано как прямая сумма неприводимых представлений. Если среди них есть неэквивалентные подпредставления, то соответствующие клетки блочной матрицы для элементов группы H — нулевые по лемме Шура, что исключено условием неприводимости представления ρ. Поэтоиу $\sigma = \rho|_N$ кратно неприводимому представлению группы N. Коммутант семейства операторов этого ограничения состоит из матриц со скалярными матрицами в соответствующих блоках, и поэтому представление $\tau = \rho|_H$ реализуют матрицы, образованные такими скалярами. Ограничения обоих ограничений на $H \cap N$ совпадают. Следовательно, при правильном выборе базисов имеем $\rho(hn) = \tau(h) \otimes \sigma(n)$, и неоднозначность в выборе h и n несущественна, поскольку $hn = h_1 n_1$, $h, h_1 \in H$, $n, n_1 \in N$, означает, что $h_1^{-1} h = n_1 n^{-1} = p \in H \cap N$, $h = h_1 p$, $p^{-1} n_1 = n$, и, поскольку $\rho(p) = \lambda(p) 1_E$ по лемме Шура, мы видим, что $\tau(h) \otimes \sigma(n) = \lambda(p) \tau(h_1) \otimes \sigma(n) = \tau(h_1) \otimes \sigma(n_1)$ для любого $hn \in HN = G$. Неприводимость представления τ тоже следует теперь из леммы Шура.

Конечно, любое тензорное произведение такого типа, в свою очередь, определяет непрерывное неприводимое представление группы G.

Утверждение (3) непосредственно следует из теоремы 3.15. $\square$

Конечно, ограничение локально ограниченного представления группы G на N может быть разрывным для сколь угодно малой связной нормальной подгруппы N с конечномерной факторгруппой G/N (достаточно рассмотреть счетное произведение групп $\mathbb{Z}_2$ и его представление, получаемое применнением к каждому элементу группы некоторого фиксированного свободного ультрафильтра).

Напомним краткое доказательство одного из важнейших результатов главы.

Следствие 3.22. *Пусть G — связная разрешимая локально компактная группа. Любое (не обязательно непрерывное) локально ограниченное конечномерное представление группы G непрерывно на коммутанте G' группы G в топологии, индуцированной исходной топологией группы G.*

Доказательство. Пусть π — локально ограниченное конечномерное представление группы G. Согласно теореме 2.13 главы 2, существует базис в пространстве представления, в котором все матрицы операторов представления π являются верхними треугольными. Следовательно, в этом базисе все элементы коммутанта G' записываются унипотентными матрицами. Таким образом, все диагональные представления оказываются единичными представлениями группы G', и поэтому они тривиальным образом непрерывны в любой групповой топологии на группе G'. Так как представление π группы G локально ограничено по предположению, то ограничение представления π на G' непрерывно согласно теореме 3.15. □

3.6.2. Группы с точными линейными конечномерными представлениями

Теорема 3.41. *Связная группа Ли допускает точное локально ограниченное (не обязательно непрерывное) конечномерное представление тогда и только тогда, когда она допускает непрерывное точное конечномерное представление, т. е. тогда и только тогда, когда она является линейной группой Ли.*

До конца доказательства этого утверждения термин “линейное представление” будет означать конечномерное локально ограниченное представление связной группы Ли. Далее $Z(G)$ обозначает центр связной группы Ли G,

$R = \operatorname{rad} G$ — радикал группы G, S — подгруппа Леви (полупростая аналитическая подгруппа группы G, такая что $G = S \cdot R$), $G' = [G,G]$ — коммутант группы G, а R^* — радикал группы G'.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, отметим, что, в частности, разрешимая связная группа Ли G имеет точное непрерывное конечномерное линейное представление тогда и только тогда, когда замыкание G' односвязно. Это версия теоремы XVIII.3.2 из [119]. По классическому результату Мальцева в [13] условие, что G имеет точное непрерывное конечномерное линейное представление, эквивалентно условию, что и R, и S имеют точные непрерывные конечномерные линейные представления.

Доказательство теоремы 3.41. Предположим, что связная группа Ли G имеет точное локально ограниченное линейное представление π в конечномерном комплексном векторном пространстве. Применяя теорему 3.15, мы видим, что ограничение π на S автоматически непрерывно, и, следовательно, S является линейной группой. По теореме Ивасавы о совместной непрерывности, остается доказать утверждение теоремы при дополнительном предположении, что G разрешима. По теореме 2.13 главы 2, представление π можно считать верхнетреугольным, и, следовательно, ограничение π на G' является верхнетреугольным с тождественно постоянными единицами на главной диагонали. Следовательно, ограничение π на G' непрерывно в топологии, индуцированной топологией группы G, и образ $\pi(G')$ группы G' является аналитической подгруппой односвязной нильпотентной группы унипотентных верхнетреугольных матриц. Это доказывает, что $\pi(G')$ замкнуто и односвязно. В свою очередь, это показывает, что G' односвязно. Если замыкание группы G' содержит компактную подгруппу, то пересечение замыканий дополнений к открытым окрестностям единичного элемента в G' содержит элементы этой компактной подгруппы, и, следовательно, содержит единичный элемент этой компактной подгруппы, который также является элементом группы G'. Это свойство должно наследоваться непрерывным образом $\pi(G')$; однако $\pi(G')$ является подгруппой, для которой пересечение замыканий дополнений к открытым окрестностям единичного элемента не может содержать единичный элемент (потому что нормы нильпотентных матриц не могут быть близки к 1 на бесконечности). Это показывает, что выполняются оба условия леммы 3.12, и, следовательно, группа G линейна. $\square$

Теорема 3.42. *Пусть G — связная группа Ли, имеющая точное локально ограниченное линейное представление. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *каждое точное конечномерное локально ограниченное* (*не обязательно непрерывное*) *представление G является гомеоморфизмом*;

2) *G — совершенная линейная группа Ли*;

3) *G — совершенная линейная группа Ли, снабженная топологией, индуцированной охватывающей матричной группой.*

В частности, из этой теоремы следует, что семейство ограниченных множеств определяет топологию для рассматриваемых групп. До конца доказательства термин "линейное представление" будет означать конечномерное локально ограниченное представление связной группы Ли, а термин "достаточно много", примененный к семейству представлений групп, означает, что рассматриваемое семейство разделяет точки рассматриваемой группы, символ $R = \operatorname{rad} G$ обозначает радикал группы G (наибольшую связную разрешимую нормальную подгруппу группы G), S — подгруппу Леви (полупростую аналитическую подгруппу группы G, такую, что $G = S \cdot R$), $G' = [G,G]$– коммутант группы G, а R^* — радикал группы G'.

Доказательство теоремы 3.42. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть G — связная группа Ли, удовлетворяющая условию 1). Пусть G' — коммутант группы G. Это нормальная подгруппа группы G, и если $G \neq G'$, то абелева факторгруппа G/G' нетривиальна. Если G' не замкнута, то она допускает унитарный характер, который разрывен как характер группы G. Действительно, если все унитарные характеры, поднятые из G/G', непрерывны, то G' замкнута как пересечение ядер этих характеров. Однако, если G' замкнута в G и отлична от G, то G/G' является нетривиальной абелевой связной группой Ли, и эта группа, безусловно, имеет разрывный унитарный характер, который можно построить, используя базис Гамеля в алгебре Ли этой абелевой группы Ли (ср. [114, п. 25.6]). Из предположения теоремы также следует, что группа G линейна. Взяв прямую сумму точного непрерывного представления и построенного выше унитарного характера, мы получаем разрывное точное представление, которое не может быть гомеоморфизмом. Следовательно, предположение, что $G \neq G'$, приводит к противоречию. Таким образом, $G = G'$, и 1) $\Rightarrow$ 2).

2) $\Rightarrow$ 3). Если G — совершенная связная группа Ли, удовлетворяющая другим условиям теоремы, то каждое локально ограниченное конечномер-

ное представление π группы G непрерывно по следствию 3.12. Как доказал Московиц при доказательстве теоремы 1 в [165, стр. 194–195], радикал коммутанта, $\operatorname{rad} G'$, замкнут и односвязен для линейной связной группы Ли G. Поскольку $G = G'$, это означает, что радикал группы G замкнут и односвязен. Следовательно, G' замкнут в охватывающей матричной группе [213, гл. 3, упражнение 41 (e)], и, следовательно, группа G замкнута в этой группе.

2) $\Rightarrow$ 1). Воспользуемся аргументом, представленным в доказательстве импликации 2) $\Rightarrow$ 3). Этот аргумент доказывает, что матричная группа $\pi(G)$ является связной группой Ли (как замкнутая связная подгруппа группы Ли); в частности, она σ-компактна. Более того, $\pi(G)$ локально связна. По теореме Чэня–У [54], непрерывный изоморфизм локально компактной и σ-компактной группы на локально связную группу является гомеоморфизмом, что завершает доказательство.

3) $\Rightarrow$ 2). Очевидно.

Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Совершенная связная группа Ли не обязана быть линейной. Примером служит универсальная накрывающая матричной группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Глава 4. Отображения, близкие к представлениям топологических групп

4.1. Определения и основные свойства

Определение 4.1. Пусть S — полугруппа. Вещественная функция f на S называется (*вещественным*) *квазихарактером* на S, если множество $\{f(st)-f(s)-f(t) \mid s,t \in S\}$ ограничено. Вещественный квазихарактер f на S называется (*вещественным*) *псевдохарактером* на S, если $f(x^n) = nf(x)$ для всех $x \in S$ и всех $n \in \mathbb{N}$ (и, есои S – группа, то и для всех $n \in \mathbb{Z}$).

Теорема 4.1 (см. [232]). *Пусть S — полугруппа, f — вещественный квазихарактер на S.*

1. *Для любого $s \in S$ существует предел*

$$\varphi(s) = \varphi_f(s) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} f(s^n). \tag{4.1}$$

Если $|f(st)-f(s)-f(t)| \leqslant C$ для всех $s,t \in S$, то $|f(s)-\varphi(s)| \leqslant C$ для всех $s \in S$ и $|\varphi(st)-\varphi(s)-\varphi(t)| \leqslant 4C$ для всех $s,t \in S$.

2. *Ограниченный псевдохарактер (и, в частности, любой псевдохарактер на полугруппе с нулём) равен нулю.*

3. *Если R — односторонне аменабельная подполугруппа в S, то ограничение отображения φ на R есть аддитивный характер R, т.е. $\varphi(st) = \varphi(s) + \varphi(t)$ для всех $s,t \in S$. Кроме того, величина $\varphi(s)$, $s \in R$, может быть определена как общее значение всех односторонних инвариантных средних на соответствующей ограниченной функции $t \mapsto f(ts)-f(t)$, $t \in R$, или $t \mapsto f(st)-f(t)$, $t \in R$.*

4. *$\varphi(xy) = \varphi(yx)$ для всех $x,y \in S$.*

5. *Если G — топологическая группа и φ — локально ограниченный псевдохарактер на G, то φ непрерывен. В частности, если f — непрерывный квазихарактер на G, то φ непрерывен.*

6. *Если $S = G$ — группа, N — нормальная подгруппа в G, π — канонический эпиморфизм G на G/N и псевдохарактер φ обращается в нуль на N, то существует такой псевдохарактер ψ группы G/N, что $\varphi = \psi \circ \pi$. Если G — локально компактная группа, N замкнут и φ непрерывен, то ψ непрерывен.*

Доказательство. Пусть R аменабельна справа (в случае левой аменабельности доказательство совершенно аналогично). Для любого правоинвариантного среднего I на R положим

$$I_t(f(ts)-f(t))=\varphi_I(s) \quad \text{для всех} \quad s\in S.$$

Тогда

$$\varphi_I(sw)=I_t(f(tsw)-f(t))=I_t((f(tsw)-f(ts))+(f(ts)-f(t)))=\varphi_I(w)+\varphi_I(s)$$

для всех $s,t,w\in S$, откуда следует, что φ_I — аддитивный характер подполугруппы R. Следовательно,

$$\varphi_I(s^n)=n\varphi_I(s) \quad \text{для всех} \quad n\in\mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Поэтому либо $\varphi_I(s)=0$, либо множество $\{\varphi_I(s)\}$ неограничено. С другой стороны, по предположению, $|f(ts)-f(t)-f(s)|\leqslant C$ для всех $t,s\in S$; применяя среднее I по переменной t, получаем

$$|\varphi_I(s)-f(s)|\leqslant C \qquad \text{для всех } s\in S, \tag{4.3}$$

откуда следует, что для другого правоинвариантного среднего J разность $\varphi_J(s)-\varphi_I(s)$, $s\in S$, является ограниченным псевдохарактером, и потому равна нулю. Итак, $\varphi_J(s)=\varphi_I(s)$ для всех $s\in S$, и на функции $f_s(t)=f(ts)-f(t)$ переменного $t\in S$ все правоинвариантные средние совпадают, так что функция f_s является правосторонне почти сходящейся для любого $s\in S$.

Обозначим через $\varphi(s)$ общее значение всех правоинвариантных средних на функции f_s. Тогда из (4.3) следует неравенство $|f(s)-\varphi(s)|\leqslant C$ для всех $s\in S$, утверждение о существовании предела в 1 следует из (4.2) и (4.3), а из неравенства $|f(st)-f(s)-f(t)|\leqslant C$ для всех $s,t\in S$ и формулы (4.3) получаем, что $|\varphi(st)-\varphi(s)-\varphi(t)|\leqslant 4C$ для всех $s,t\in S$. Так как, в частности, значения всех правоинвариантных средних совпадают на абелевой подполугруппе, образованной натуральными степенями данного элемента $s\in S$, то, применяя так называемый критерий Лоренца (см. [150]), видим, что средние Чезаро последовательности $k\mapsto f_s(s^k)$, $k\in\mathbb{N}$, сходятся, т.е. предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}(f_s(s^{k+1})+\cdots+f_s(s^{k+n}))$$

существует и равен общему значению инвариантных средних, т.е. числу $\varphi(s)$, причём этот предел равномерен относительно $k\in\mathbb{N}$. Таким образом, предел $\varphi(s)$ последовательности $\lim_{n\to\infty} n^{-1}(f(s^{k+n})-f(s^{k+1}))$ равномерен относительно $k \in \mathbb{N}$. В частности, предел $\lim_{n\to\infty} n^{-1} f(s^n)$ существует и равен $\varphi(s)$ для всех $s \in S$. Отсюда сразу следует утверждение 2.

Так как функция φ, определённая в утверждении 1 теоремы 4.1, является псевдохарактером, как и функция, ограничение которой на каждую правоаменабельную подполугруппу определено в 3, то разность этих функций является ограниченным псевдохарактером, т.е. нулём, и поэтому функция φ, определённая в 1, является гомоморфизмом на любой правоаменабельной подполугруппе в S и число $\varphi(s)$, $s \in S$, является общим значением на функции $f_s(t) = f(ts) - f(t)$, $t \in S$, $s \in S$, всех правоинвариантных средних на такой правоаменабельной подполугруппе в S. Это завершает доказательство утверждений 1 и 3.

Для доказательства утверждения 4 заметим, что $\varphi((xy)^n) = n\varphi(xy)$, $x,y \in S$. Отсюда следует соотношение

$$|f((xy)^n) - n\varphi(xy)| \leqslant C.$$

Кроме того,

$$|f((xy)^n) - f(x) - f((yx)^{n-1}y)| \leqslant C$$

и аналогично

$$|f((yx)^{n-1}y) - f((yx)^{n-1}) - f(y)| \leqslant C \quad \text{при} \quad x,y \in S;$$

следовательно,

$$|f((xy)^n) - f(x) - f((yx)^{n-1}) - f(y)| \leqslant 2C.$$

Умножая на $1/n$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство $|\varphi(xy) - \varphi(yx)| \leqslant 0$, или $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ для всех $x,y \in S$. Это завершает доказательство утверждения 4.

Докажем утверждение 5. Пусть G — топологическая группа и φ — псевдохарактер на G, ограниченный на окрестности U единицы. Обозначим через M такую постоянную, что $|\varphi(x)| \leqslant M$ для всех $x \in U$. Напомним, что $|\varphi(yz) - \varphi(y) - \varphi(z)| \leqslant C$ для всех $y, z \in G$. Следовательно, неравенства $|\varphi(ya^n) - \varphi(y) - \varphi(a^n)| \leqslant C$ и $|\varphi(za^n) - \varphi(z) - \varphi(a^n)| \leqslant C$ выполняются для всех $y, z \in U$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Вычитая, получаем

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \leqslant 2C + 2M \quad \text{для всех} \quad u, v \in Ua^n. \tag{4.4}$$

Предположим теперь, что $a \in G$ — точка разрыва псевдохарактера φ. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Так как групповая операция непрерывна, то существует окрестность V элемента a в G, удовлетворяющая условию $V^n \subset Ua^n$. По предположению,

a — точка разрыва псевдохарактера φ, так что для некоторого $\varepsilon > 0$, зависящего только от a, и для любой окрестности U существуют такие $b,c \in V$, что $|\varphi(b) - \varphi(c)| > \varepsilon$. Тогда $b^n, c^n \in V^n \subset Ua^n$; но $\varphi(b^n) = n\varphi(b)$ и $\varphi(c^n) = n\varphi(c)$, и поэтому

$$|\varphi(b^n) - \varphi(c^n)| = n|\varphi(b) - \varphi(c)| > n\varepsilon, \quad b^n, c^n \in V^n \subset Ua^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Так как величина $\varepsilon > 0$ зависит только от a, то неравенства (4.4) и (4.5) не могут выполняться одновременно для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Это доказывает 5.

Докажем 6. Предположим теперь, что псевдохарактер φ определен на группе G и обращается в нуль на нормальной подгруппе N группы G. Тогда для некоторого сечения $S\colon G/N \to G$ положим $f = \varphi \circ S$. Так как элементы $S(x)S(y)$ и $S(xy)$ лежат в одном и том же смежном классе по N, то они отличаются множителем $n(x,y) \in N$. Поэтому

$$|\varphi(S(x)S(y)) - \varphi(S(xy))| = |\varphi(S(xy)n(x,y)) - \varphi(S(xy))| \leqslant C + |\varphi(n(x,y))| = C,$$

а тогда и

$$|\varphi(S(x)) + \varphi(S(y)) - \varphi(S(xy))| \leqslant |\varphi(S(x)S(y)) - \varphi(S(xy))| + C \leqslant 2C,$$

так что величина $f(x) + f(y) - f(xy)$ ограничена. Следовательно, f — квазихарактер на G/N. Пусть ψ — псевдохарактер на G/N, связанный с f по теореме 4.1. Тогда разность $\psi - f$ ограничена, причём функция $F = \psi \circ \pi$ является псевдохарактером на группе G. Поэтому разность $\varphi - F$ ограничена на образе сечения S. Но изменения функций F и φ равномерно ограничены на каждом смежном классе по N. Поэтому разность $\varphi - F$ ограничена на всей группе G. Так как F и φ псевдохарактеры на G, то их разность — тоже псевдохарактер, и притом ограниченный. Следовательно, он равен нулю (см. 2). Таким образом, $\varphi = \psi \circ \pi$.

Наконец, если G — локально компактная группа, а N замкнут, то отображение $\pi\colon G \to G/N$ открыто. Если φ — непрерывный псевдохарактер и если $\varphi = \psi \circ \pi$, то полный φ-прообраз любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ открыт в G. Так как каноническое отображение π открыто, то образ множества $\varphi^{-1}(U)$ в G/N (этот образ совпадает с прообразом открытого множества U в фактор-группе G/N) тоже открыт, так что ψ непрерывен. □

Приведём очевидное следствие теоремы 4.1.

Следствие 4.1 (см. [232]). (1) *Для любого квазихарактера f на полугруппе S существует единственный псевдохарактер φ на S, для которого разность $f-\varphi$ ограничена, причём для всех $s\in S$ предел $\lim_{n\to\infty} n^{-1}f(s^n)$ существует и равен $\varphi(s)$.*

(2) *Отображение $f\mapsto\varphi$, сопоставляющее квазихарактеру f связанный с ним псевдохарактер, линейно и является проектором.*

(3) *Если $\|df\|$ — дефект квазихарактера f (квазинорма в пространстве квазихарактеров, определяемая условием, что $\|df\|$ есть радиус наименьшего замкнутого шара с центром в нуле, содержащего множество $\{f(st)-f(s)-$ $-f(t)\mid s,t\in S\}$), то отображение $f\mapsto\varphi$ непрерывно.*

Приведём пример нетривиального псевдохарактера. Пусть M — группа, и пусть в M можно выделить такие подмножества M^+ и M^-, что $e\notin M^+$, $M^+\cap M^-=\varnothing$, $M^-=(M^+)^{-1}$, $M=M^+\cup M^-\cup\{e\}$. Введем отображение $\operatorname{sign}\colon M\to\mathbb{Z}$, полагая $\operatorname{sign}(m)$ равным 1 при $m\in M^+$, -1 при $m\in M^-$ и $\operatorname{sign}(e)=0$. Пусть N — группа, $N\neq\{e\}$. Определим функцию f на свободном произведении $G=M*N$, полагая $f(g)=\sum_{i=1}^{k+1}\operatorname{sign}(m_i)$ для $g=m_1n_1m_2n_2\cdots m_kn_km_{k+1}$, где $m_i\in M$, $n_i\in N$, $n_i\neq e$ для всех $i=1,\ldots,k$ и $m_i\neq e$ для $i=2,\ldots,k$.

Пример 4.1 (см. [232]). Функция f есть квазихарактер на G, принимающий целые значения, и $|f(g_1g_2)-f(g_1)-f(g_2)|\leqslant 3$ для всех $g_1,g_2\in G$.

Доказательство. Целочисленность значений очевидна. Пусть

$$g_1=m_1^{(1)}n_1^{(1)}m_2^{(1)}n_2^{(1)}\ldots m_k^{(1)}n_k^{(1)}m_{k+1}^{(1)},$$
$$g_2=m_1^{(2)}n_1^{(2)}m_2^{(2)}n_2^{(2)}\ldots m_l^{(2)}n_l^{(2)}m_{l+1}^{(2)}.$$

При $m_{k+1}^{(1)}m_1^{(2)}=e_M$ значение функции f на g_1 зависит от ответа на вопрос, в какой группе (в M или в N) соответствующее произведение впервые не обращается в единицу. Если $n_{k-i+1}^{(1)}n_i^{(2)}=e_N$, $1\leqslant i<j$, $m_{k-i+1}^{(1)}m_i^{(2)}=e_M$, $1\leqslant i<j$, и $n_{k-j+1}^{(1)}n_j^{(2)}\neq e_N$, то ясно, что $f(g_1g_2)=f(g_1)+f(g_2)$. Однако, если $m_{k-j+1}^{(1)}m_j^{(2)}\neq e_M$ или $m_{k+1}^{(1)}m_1^{(2)}=e_M$ и $n_{k-i+1}^{(1)}n_i^{(2)}=e_N$, $1\leqslant i\leqslant j$, $m_{k-i+1}^{(1)}m_i^{(2)}=e_M$, $1\leqslant i<j$, то для $m_{k+1}^{(1)}m_1^{(2)}\neq e_M$ имеем

$$f(g_1g_2)-f(g_1)-f(g_2)=\operatorname{sign}(m_{k+1}^{(1)}m_1^{(2)})-\operatorname{sign}(m_{k+1}^{(1)})-\operatorname{sign}(m_1^{(2)});$$

отсюда немедленно следует утверждение. □

Замечание 4.1. В статье [141] построен пример конечномерного (но не одномерного) квазипредставления фундаментальной группы римановой поверхности, не близкого к обычным представлениям. С другой стороны, экспонента от квазихарактера, построенного в примере 4.1, — это *одномерное* квазипредставление, не близкое к характерам.

Пример 4.2 (продолжение примера 4.1; частные случаи).

1. Свободные произведения. Пусть $M \neq \{e\}$ — подгруппа группы $\mathbb{R}$, пусть $M^+ = \{x \mid x \in M, x > 0\}$, и пусть sign есть ограничение обычного знака на M^+. Тогда приведённая выше конструкция даёт нетривиальный псевдохарактер на свободном произведении $M * N$ для любой группы $N \neq \{e\}$. В частности, на любой некоммутативной свободной группе существует нетривиальный псевдохарактер.

2. Группа $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{e,-e\} = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ (свободное произведение конечных групп). Пусть N — образ в $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ подгруппы группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, порожденной элементом $a = (a_{ij})$, $i,j = 1,2$, $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = -a_{21} = 1$; пусть M — образ подгруппы, порожденной элементом $b = (b_{ij})$, $i,j = 1,2$, где $b_{11} = b_{12} = 1$, $b_{21} = -1$, $b_{22} = 0$. Если A и B — образы элементов a и b в $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ соответственно, то $A^2 = B^3 = 1_G$ в G, причем G есть свободное произведение своих циклических подгрупп N и M, порожденных элементами A и B, соответственно. Положим $M^+ = \{B\}$, $M^- = \{B^2\}$; тогда, очевидно, все условия случая 1 будут выполнены, что определяет квазихарактер на G (и потому также и связанный с ним псевдохарактер на G).

Таким образом, свободные группы (с более чем одной образующей) и свободные произведения на бесконечные циклические группы и циклические группы нечетного порядка имеют нетривиальные псевдохарактеры. Их описание приведено в [28] и [29].

3. Псевдохарактер Радемахера. Пусть η — эта-функция Дедекинда на верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, т.е. $\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12} h(e^{2\pi i\tau})$, где функция h есть произведение $h(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)$, $x = e^{2\pi i\tau}$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. Воспользуемся известными формулами для логарифма η-функции: если выбрать ветвь логарифма с $\mathrm{Im}\ln(i) \in (0,\pi)$, то

$$\ln\eta(\tau') = \ln\eta(\tau) + (\operatorname{sgn} c)^2 \ln(c\tau + d))/2 - (\pi i/4)(\operatorname{sgn} c) + (\pi i/12)\Phi(g),$$

где

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),$$

$\tau'=(a\tau+b)/(c\tau+d)$, а Φ — так называемый символ Радемахера [180], определяющий отображение группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ (точнее, её факторгруппы $G=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$) в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее соотношению $\Phi(gg')=\Phi(g)+\Phi(g')-3\,\mathrm{sgn}(cc'c'')$ для всех $g,g'\in G$, где g,g',g'' — образы в $G=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),$$

соответственно, так что Φ — квазихарактер на G, принимающий значения в $\mathbb{Z}$. Соответствующий псевдохарактер на группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{\pm e\}$ (или на группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$) мы назовем *псевдохарактером Радемахера* (подробности см. в [228]).

4.2. Структурные свойства и ограниченные вещественные непрерывные 2-когомологии локально компактных групп

Теория псевдохарактеров доказала свою глубокую связь с группами когомологий второго порядка с вещественными коэффициентами для дискретных групп [38].

Это соответствие между пространствами псевдохарактеров и соответствующими группами когомологий можно расширить до соответствия, включающего непрерывные ограниченные когомологии топологических групп (которое было введено Громовым [104]), а именно, до соответствия между второй ограниченной вещественной непрерывной группой когомологий $\hat{H}^2(G)$ локально компактной группы G и пространством непрерывных вещественных псевдохарактеров на этой группе следующим образом.

Пусть G — локально компактная группа, а $H^n(G)$ — n-я группа когомологий комплекса

$$0\longrightarrow\mathbb{R}\xrightarrow{d^0=0}C^1(G)\xrightarrow{d^1}C^2(G)\longrightarrow\cdots\,,\tag{4.6}$$

где $C^n(G)$ — вещественное векторное пространство всех непрерывных вещественных функций f на группе G^n, $f\colon (g_1,\ldots,g_n)\mapsto f(g_1,\ldots,g_n)\in\mathbb{R}$, $g_i\in G$, и

$$d^n f(g_1,\ldots,g_n)=$$
$$=f(g_2,\ldots,g_n)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\ldots,g_i g_{i+1},\ldots,g_{n+1})+(-1)^{n+1}f(g_1,\ldots,g_n) \quad (4.7)$$

(см. [109]; ср. также [30], где эти группы называются действительными группами когомологий *ван Эста*, соответствующими тривиальному действию группы G на $\mathbb{R}$). Ограниченные вещественные непрерывные когомологии $\hat{H}^n(G)$ группы G определяются аналогичным образом формулами (4.6) и (4.7), в которых пространства $C^n(G)$ заменяются на пространства $CB^n(G)$ ограниченных непрерывных функций на G^n. Здесь изучается группа $\hat{H}^2(G)$.

Естественное отображение $\hat{H}^n(G)\to H^n(G)$ определяется рассмотрением ограниченных непрерывных коциклов как непрерывных коциклов без условия ограниченности цепей. Вышеуказанная связь между второй ограниченной вещественной непрерывной группой когомологий $\hat{H}^2(G)$ локально компактной группы G и пространством непрерывных вещественных псевдохарактеров на этой группе заключается в том, что при $n=2$ ядро $\tilde{H}^2(G)$ отображения $\hat{H}^2(G)\to H^2(G)$ естественным образом изоморфно векторному факторпространству $QP(G)$ пространства $P(G)$ всех непрерывных псевдохарактеров на G по векторному подпространству (обычных) непрерывных (вещественных) характеров группы G; см. [233, 238, 240].

Особую роль в строении группы $\hat{H}^2(G)$ играет компонента (единицы) данной локально компактной группы G. Это явление имеет место и для хорошо изученной группы ван Эста $H^n(G)$ (см. [30, 109]) поскольку группа $H^n(G)$ естественным образом изоморфна группе $H^n(G/K)$, где K — компактная нормальная подгруппа группы G, для которой компонента факторгруппы G/K является группой Ли (ср. лемму 4.3 ниже; аналогичное рассуждение позволяет доказать, что группа $H^n(G)$ конечномерна для любой почти связной группы G, см. замечание 4.4). Строение группы $\hat{H}^2(G)$ определяется образом этой группы в $H^2(G)$ и упомянутым выше ядром $\tilde{H}(G)$ отображения $\hat{H}^2(G)\to H^2(G)$, и это ядро может быть описано с помощью псевдохарактеров на G.

В настоящей работе с помощью некоторых вспомогательных результатов о строении локально компактных групп мы строим для заданной локально компактной группы G “достаточно большую” нормальную подгруппу N в G

такую, что компонента группы G/N является группой Ли, а векторные пространства $\hat{H}^2(G)$ и $\hat{H}^2(G/N)$ естественно изоморфны (см. предложения 4.1 и 4.2). Эти факты, вместе со вспомогательной теоремой о существовании сечений (теорема 4.2), затем используются при описании пространств $QP(G)$ и $\hat{H}^2(G)$ для любой связной локально компактной группы G и при доказательстве того, что пространство $QP(G)$ (факторпространство нетривиальных непрерывных вещественных псевдохарактеров по подпространству обычных характеров) и пространство $\hat{H}^2(G)$ конечномерны для любой почти связной локально компактной группы G. Основные результаты — теоремы 4.3–4.12.

Некоторые результаты были опубликованы без доказательства в [238].

4.3. Структура локально компактных групп: наибольшая компактная нормальная подгруппа группы и её компоненты

Обозначим через G_0 связную компоненту локально компактной группы G.

Лемма 4.1. *Пусть G — локально компактная группа, а $K(G_0)$ — объединение всех компактных нормальных подгрупп группы G_0. В этом случае $K(G_0)$ — наибольшая компактная нормальная подгруппа группы G_0 (т.е. $K(G_0)$ содержит любую компактную нормальную подгруппу группы G_0) и является характеристической подгруппой; в частности, $K(G_0)$ — компактная нормальная подгруппа группы G. Связная компонента факторгруппы $G/K(G_0)$ является группой Ли.*

Доказательство. Рассмотрим наибольшую компактную нормальную подгруппу $K(G_0)$ связной компоненты G_0 данной локально компактной группы G; $K(G_0)$ была построена Ивасавой в [129, лемма 4.2], где также было доказано, что $G_0/K(G_0)$ является группой Ли. Более того, любой автоморфизм группы G сохраняет компоненту G_0 и переводит любую компактную нормальную подгруппу группы G_0 в некоторую компактную нормальную подгруппу группы G_0, а значит, и в $K(G_0)$; Следовательно, $K(G_0)$ является характеристической подгруппой группы G_0 и, в частности, нормальной подгруппой группы G. □

Для доказательства предложения 4.1 вполне достаточно использовать результат леммы 4.1; однако в доказательстве теоремы 4.12 нам понадобится наибольшая компактная нормальная подгруппа в почти связной группе (напомним, что локально компактная группа называется *почти связной*, если факторгруппа G/G_0 компактна).

Лемма 4.2 предоставляет простые достаточные условия существования наибольшей компактной нормальной подгруппы в локально компактной группе.

Ниже, в замечании 4.2, мы обсуждаем связь наших рассуждений с результатами работы [206].

Лемма 4.2. *Локально компактная группа имеет наибольшую компактную нормальную подгруппу $K(G)$ (которая содержит каждую компактную нормальную подгруппу группы G, и, следовательно, является характеристической подгруппой группы G) при условии, что факторгруппа G/G_0 имеет наибольшую компактную нормальную подгруппу. Если G — почти связная локально компактная группа, то факторгруппа $G/K(G)$ является группой Ли с конечным числом компонент связности.*

Замечание 4.2. В [206] Терп изучал свойство ICS локально компактных групп, означающее, что любая возрастающая цепочка компактных подгрупп данной локально компактной группы содержится в некоторой компактной подгруппе этой группы. Очевидно, что любая локально компактная ICS-группа G содержит наибольшую компактную нормальную подгруппу K (это означает, что любая компактная нормальная подгруппа группы G принадлежит K). Теорема 2 из [206] утверждает, что локально компактная группа G обладает ICS-свойством тогда и только тогда, когда этим свойством обладает группа G/G_0. Лемму 4.2 можно рассматривать как частный случай этого утверждения. Однако доказательство теоремы 2 в [206] основано только на использовании результатов из [148], где доказано, что любая почти связная локально компактная группа H допускает компактную подгруппу, образом которой в H/H_0 является вся группа H/H_0, в то время как в доказательстве теоремы 2 в [206] не обнаружено попыток доказать, что для любой локально компактной группы H и любой возрастающей цепочки K_α компактных подгрупп группы H/H_0 действительно можно сохранить монотонность, т.е. можно выбрать возрастающую цепочку соответствующих компактных подгрупп в H с заданными возрастающими компактными образами в H/H_0. Этот пробел, не допускающий очевидного заполнения, препятствует использованию теоремы Терпа.

Условия леммы 4.2 достаточны, но не необходимы для существования наибольшей компактной нормальной подгруппы. Например, рассмотрим теоретико-групповую подгруппу группы движений плоскости, взяв дискретную подгруппу группы движений, соответствующую множеству углов поворота, соизмеримых с π, и наделим эту группу обычной топологией плоскости на сдвигах и дискретной топологией на поворотах (таким образом, рассматриваемая группа является расширением дискретной группы корней из единицы, каждый из которых рассматривается как поворот обычной плоскости группой сдвигов этой плоскости). Эта группа, очевидно, имеет (единичную) наибольшую компактную нормальную подгруппу, но факторгруппа по этой компоненте является объединением конечных групп.

Заметим также, что компонента наибольшей компактной нормальной подгруппы (если она существует) совпадает с наибольшей связной компактной нормальной подгруппой Ивасавы [129, Теорема 14].

Доказательство леммы 4.2. Пусть K_0 — наибольшая компактная нормальная подгруппа факторгруппы G/G_0. Прообраз H группы K_0 в G почти связен, и поэтому H имеет наибольшую компактную нормальную подгруппу K, которая является характеристической подгруппой, а следовательно и нормальной подгруппой в G. С другой стороны, поскольку образ любой компактной нормальной подгруппы K_1 группы G в факторгруппе G/G_0 является компактной нормальной подгруппой группы G/G_0, то этот образ содержится в K_0. Следовательно, $K_1 \subset H$. Следовательно, $K_1 \subset K$. Таким образом, любая компактная нормальная подгруппа группы G содержится в компактном множестве K. Следовательно, объединение N всех компактных нормальных подгрупп в G, а также замыкание $\bar{N}$ этого объединения являются нормальными подгруппами (напомним, что семейство компактных нормальных подгрупп направлено вверх по включению, поскольку K_1K_2 — компактная нормальная подгруппа группы G для любых компактных нормальных подгрупп K_1 и K_2 в G). Последняя подгруппа содержится в компактном множестве K и, следовательно, является компактной, и, по построению, компактная нормальная подгруппа $\bar{N}$ группы G является наибольшей подгруппой с этим свойством. □

4.4. Структура локально компактных групп: наибольшая аменабельная нормальная подгруппа принадлежащая компоненте

Перейдём теперь к изучению “аменабельного радикала” локально компактной группы.

Предложение 4.1. *Пусть G — локально компактная группа, и пусть $A(G_0)$ — объединение всех аменабельных нормальных подгрупп группы G_0. Тогда $A(G_0)$ — наибольшая аменабельная нормальная подгруппа группы G_0 (т.е. $A(G_0)$ содержит любую аменабельную нормальную подгруппу группы G_0), и она является замкнутой характеристической подгруппой. В частности, $A(G_0)$ — замкнутая аменабельная нормальная подгруппа в G. Кроме того, $G_0/A(G_0)$ — связная полупростая группа Ли без центра без простых компактных факторов.*

Доказательство. Известно существование наибольшей аменабельной нормальной подгруппы в произвольной локально компактной группе [175, Problem (0.26)]. Более того [129, Лемма 5.2], для любой связной локально компактной группы H существует такая наибольшая нормальная подгруппа P, что ее компонента единицы является проективным пределом расширений компактных групп Ли посредством связных разрешимых групп Ли (таким образом, P является расширением дискретной абелевой группы с помощью связной аменабельной нормальной подгруппы), и факторгруппа H/P является прямым произведением присоединенных групп простых некомпактных групп Ли. Таким образом, P — это в точности наибольшая аменабельная нормальная подгруппа группы G. Наконец, из определения наибольшей аменабельной нормальной подгруппы следует, что $A(G_0)$ является характеристической подгруппой в G_0, что завершает доказательство предложения 4.1. □

Легко видеть, что (обычный) радикал “аменабельного радикала” $A(G_0)$ совпадает с радикалом $R(G)$ группы G; таким образом, из [175] и [114, Теорема (7.14)] следует, что связная и аменабельная компонента $(A(G_0))_0$ является расширением наибольшей связной компактной нормальной подгруппы [129, Теорема 14] факторгруппы $G/R(G)$ посредством радикала $R(G)$. Кроме того, факторгруппа $A(G_0)/(A(G_0))_0$ является (возможно, тривиальной) конечно порождённой дискретной абелевой группой (напомним, что вполне несвязная нормальная подгруппа связной группы является центральной, а замкнутая вполне несвязная нормальная подгруппа группы Ли конечно порождёна и дискретна).

4.5. Редукция псевдохарактеров на локально компактной группе

Предложение 4.2 (см. [239]). *Пусть G — локально компактная группа, пусть $A(G_0)$ — наибольшая аменабельная нормальная подгруппа группы G_0 (см. Предложение 4.1), пусть $B=\mathrm{cl}[A(G_0),A(G_0)]$ — замыкание коммутанта группы $A(G_0)$, и пусть $K(G_0)$ — наибольшая компактная нормальная подгруппа группы G_0. Пусть $Q(G_0)=K(G_0)B$ (замкнутая подгруппа, порождённая произведениями элементов из $K(G_0)$ и B). В этом случае $Q=Q(G_0)$ — характеристическая подгруппа группы G, G_0/Q — расширение полупростой группы Ли без центра без компактных факторов посредством абелевой группы Ли, и любой непрерывный псевдохарактер на группе G обращается в нуль на группе Q (и, следовательно, он определяется непрерывным псевдохарактером на группе G/Q по теореме 4.1).*

Доказательство. Любой непрерывный псевдохарактер φ на группе G обращается в нуль на наибольшей компактной нормальной подгруппе $K(G_0)\subset G_0$, поскольку любой ограниченный псевдохарактер тождественно равен нулю. Следовательно, псевдохарактер φ определяется непрерывным псевдохарактером Φ на $H=G/K(G_0)$ по п. 6 теоремы 4.1. По п. 3 теоремы 4.1 ограничение псевдохарактера Φ на аменабельную группу $A(H_0)$ является обычным характером этой группы.

Поскольку $K(G_0)\subset G_0$, то образ G_0 — это H_0 (см. [110, Следствие 7.13]), и, следовательно, образ $A(G_0)$ принадлежит $A(H_0)$ (поскольку этот образ является замкнутой аменабельной нормальной подгруппой в H_0). Следовательно, ограничение псевдохарактера φ на $A(G_0)$ является обычным характером группы $A(G_0)$, и, следовательно, φ обращается в нуль на $[A(G_0),A(G_0)]$ (и, конечно же, на $K(G_0)$). Таким образом, $\varphi|_Q=0$. Более того, Q является характеристической подгруппой, поскольку таковыми являются $A(G_0)$ и $K(G_0)$. Наконец, группа $(G/Q)_0$ является замыканием канонического образа группы G_0, и этот образ является факторгруппой группы Ли $G_0/K(G_0)$. Следовательно, $(G/Q)_0$ — это в точности канонический образ группы $G_0/K(G_0)$. Этот образ является расширением $G_0/A(G_0)$ с помощью $A(G_0)/Q$, где $G_0/A(G_0)$ полупроста и не имеет компактных множителей, а $A(G_0)/Q$ абелева. Это завершает доказательство предложения 4.2. □

Замечание 4.3. Из доказательства предложения 4.2 следует, что среди полупростых факторгрупп данной связной локально компактной группы G, не имеющих связных компактных нормальных подгрупп, можно указать наибольшую факторгруппу (т.е. любая факторгруппа с указанным свойством является образом этой факторгруппы при естественной факторизации), и эта наибольшая группа есть факторгруппа $S(G)=G/A(G)_0$ по компоненте $A(G)_0$ нормальной подгруппы $A(G)$; более того, как мы видели выше, $A(G)_0$ является расширением наибольшей связной компактной нормальной подгруппы $K(G/R)_0$ с помощью радикала $R=R(G)$.

4.6. Когомологии и ограниченные когомологии: переход к группам Ли

Для локально компактной группы G обозначение $K(G_0)$ было введено в лемме 4.1.

Лемма 4.3. *Пусть G — локально компактная группа, а f — вещественный непрерывный 2-коцикл на G. Этот коцикл когомологичен некоторому вещественному непрерывному 2-коциклу g на G, постоянному на смежных классах по нормальной подгруппе $K(G_0)$. Если коцикл f ограничен, то и g ограничен.*

Доказательство. Если $f(g,h)=f(h,k)-f(gh,k)+f(g,hk)$, $g,h,k\in G$, где f непрерывна, то, интегрируя по $k\in K(G_0)$ по мере Хаара на $K(G_0)$, получаем

$$f(g,h)=F(h,e)-F(gh,e)+F(g,h),\quad g,h\in G, \tag{4.8}$$

где

$$F(g,h)=\int_{K(G)} f(g,hk)\,d\mu(k),\quad g,h\in G.$$

Это следует из соотношения (4.8), которое гласит, что коцикл f когомологичен функции $\Phi\colon (g,h)\mapsto F(g,h)-F(g,e)$, $g,h\in G$, которая $K(G_0)$-инвариантна относительно $h\in G$, и F ограничена, если ограничена f.

Интегрируя соотношение

$$\Phi(h,k)=\Phi(g,h)-\Phi(g,hk)+\Phi(gh,k),\quad h,k\in G,\quad g\in K(G_0),$$

относительно $g\in K(G_0)$ и применяя приведенные выше рассуждения, получаем искомую когомологическую эквивалентность данного коцикла двустороннему

$K(G_0)$-инвариантному коциклу, который ограничен, если исходный коцикл f ограничен. □

Замечание 4.4. Из леммы 4.3 следует, что векторные пространства $H^n(G)$ и $H^n(G/K(G_0))$ изоморфны, а также изоморфны векторные пространства $\hat{H}^n(G)$ и $\hat{H}^n(G/N)$. Если G связна, то $G/K(G_0)$ — группа Ли, и, следовательно, $H^n(G/K(G_0))$ конечномерна. Следовательно, $H^n(G)$ также конечномерна для любого $n \in \mathbb{N}$.

4.7. Соответствие между ограниченными непрерывными коциклами на локально компактной группе и псевдохарактерами на одномерных центральных расширениях этой группы

Пусть H — центральное расширение локально компактной группы G с помощью группы $\mathbb{R}$, и пусть $\pi\colon H \to G$ — каноническое отображение. В дальнейшем мы воспользуемся следующим фактом, который гарантирует существование (глобальных) непрерывных сечений для одномерных центральных расширений локально компактных групп.

Теорема 4.2. *Любое топологическое расширение локально компактной группы G с помощью односвязной группы Ли допускает глобальное непрерывное сечение.*

Доказательство. Существование локально непрерывного сечения следует из теоремы Серра [196] (доказательство см. также [174]; отметим, что сам Серр приписал эту теорему в [195] Глисону согласно сообщению Бурбаки; однако единственный случай, опубликованный в работах Глисона, был связан с действием *компактной группы Ли*). Поскольку наша нормальная подгруппа односвязна, существование глобального непрерывного сечения следует из [192, Теорема (B.1)]. □

В частности, теорема 4.2 означает, что любое расширение локально компактной группы векторной группой топологически тривиально. Таким образом, в рассматриваемом случае задачи, связанные с соответствующими расширениями групп, могут быть решены на уровне групп когомологий Ван Эста и не требуют информации о группах когомологий Сигала [192], см. [30, Глава 2, § 2, Теорема 4].

Соответствие между непрерывными псевдохарактерами (по модулю векторного подпространства обычных вещественных характеров) на центральных расширениях локально компактной группы G посредством группы $\mathbb{R}$, определяемыми ограниченными 2-коциклами на G (по модулю кограниц, порождённых ограниченными непрерывными функциями), и самими коциклами, определяющими эти псевдохарактеры, устанавливается следующим образом.

Теорема 4.3. *Пусть G — локально компактная группа. Если ψ — ограниченный непрерывный 2-коцикл на G, то формула*

$$(g_1,r_1)(g_2,r_2)=(g_1g_2,\, r_1+r_2+\psi(g_1,g_2)),\quad g_1,g_2\in G,\quad r_1,r_2\in\mathbb{R}, \tag{4.9}$$

определяет центральное расширение H группы G посредством $\mathbb{R}$, и отображение $f\colon H\to\mathbb{R}$, определяемое соотношением

$$(g,r)\mapsto r,\quad (g,r)\in H, \tag{4.10}$$

является (непрерывным) квазихарактером на H. Соответствующий непрерывный псевдохарактер φ на H задаётся формулой

$$\varphi(g,r)=r+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\psi(g,g^k),\quad (g,r)\in H. \tag{4.11}$$

Обратно, пусть s — непрерывное сечение канонического отображения $\pi\colon H\to G$. Пусть f — непрерывный действительный псевдохарактер на H, а ψ — непрерывная действительная 2-коцепь на S, определяемая формулой

$$\psi(x,y)=f(s(x)s(y))-f(s(x))-f(s(y)),\quad x,y\in G. \tag{4.12}$$

Тогда функция ψ является ограниченным коциклом, а псевдохарактер f нетривиален (т.е. не является обычным характером) тогда и только тогда, когда коцикл φ нетривиален (не гомологичен нулю).

Доказательство. Пусть s — непрерывное сечение естественного отображения $\pi : H\to G$ (такое сечение существует по теореме 4.2), и пусть φ — вещественная (непрерывная) 2-коцепь на G, заданная формулой

$$\varphi(x,y)=f(s(x)s(y))-f(s(x))-f(s(y)),\qquad x,y\in S.$$

Поскольку f — псевдохарактер, отсюда следует, что функция φ ограничена. Сначала покажем, что φ — 2-коцикл на факторгруппе G. Необходимо проверить соотношение

$$f(s(g)s(h))-f(s(g))-f(s(h))+(f(s(gh)s(k))-f(s(gh))-f(s(k))=$$
$$=f(s(h)s(k))-f(s(h))-f(s(k))+(f(s(g)s(hk))-f(s(g))-f(s(hk)).$$

Элементы $s(g)s(h)$ и $s(gh)$ заведомо принадлежат одному и тому же смежному классу по центральной нормальной подгруппе Z в H, которая изоморфна $\mathbb{R}$. Более того, в этом случае Z является центральным, поскольку

$$f(g^{-1}xg)=f(x), \qquad x\in Z, \quad g\in G.$$

Более того, поскольку ограничение f на Z является непрерывным (ненулевым) вещественным характером Z, мы можем ввести мультипликативную координату на Z и предположить, что f определяет аддитивную координату на $\mathbb{R}$, и таким образом отождествить функцию f на Z с логарифмической функцией на $\mathbb{R}^+$. Теперь мы можем записать

$$s(gh)=s(g)s(h)x_{g,h},$$

где отображение $H\times H\to Z$, заданное формулой

$$\{g,h\}\mapsto x_{g,h}, \qquad g,h\in G, \quad x_{g,h}\in Z,$$

является ограниченным непрерывным отображением. Для любого элемента $k\in H$ замкнутая подгруппа L_k группы H, порождённая k и R, заведомо разрешима и, следовательно, аменабельна; поэтому ограничение f на эту подгруппу является непрерывным (обычным) аддитивным вещественным характером группы L_k. В частности, это означает, что $f(kr)=f(k)+f(r)$, $k\in H$, $r\in Z$, и, таким образом, из определения $x(g,h), g,h\in H$, следует, что

$$f(s(gh))=f(s(g)s(h)x_{g,h})=f(s(g)s(h))+\ln(x_{g,h})$$

для всех $g,h\in G$. Теперь непосредственное вычисление вида

$$s(ghk)x_{gh,k}^{-1}=s(gh)s(k)=s(g)s(h)s(k)x_{g,h}=s(g)s(hk)x_{h,k}^{-1}x_{g,h}=s(ghk)x_{g,hk}^{-1}x_{h,k}^{-1}x_{g,h},$$

из которого следует соотношение для проверки коцикличности отображения φ, доказывает, что функция φ действительно является (непрерывным) вещественным ограниченным 2-коциклом на H. Более того, заметим, что мы можем определить специальное сечение $\sigma: H \to G$, установив $\sigma(h) \in G$ как элемент в G, такой что $\pi(\sigma(h)) = h$ и $f(\sigma(h)) = 0$ для любого $h \in H$. Для этого сечения, очевидно, имеем

$$\ln(x_{g,h}) = -f(\sigma(g)\sigma(h)), \qquad g,h \in H,$$

и, следовательно, псевдохарактер f определяет коцикл x однозначно с точностью до кограницы. Соответствующее расширение H расщепляется тогда и только тогда, когда x — кограница. Однако H является полупрямым произведением тогда и только тогда, когда существует сечение s, являющееся гомоморфизмом. Поскольку s непрерывно, оно тогда является аналитическим гомоморфизмом в H, а композиция $f \circ s$ является непрерывным псевдохарактером на H. Этот псевдохарактер, очевидно, определяет псевдохарактер $F = f \circ s \circ \pi$ группы H, и $f - F$ ограничен на образе s. Следовательно, $f = F$ на образе s, и, таким образом, образ s является замкнутым множеством (поскольку он совпадает с нулевым множеством непрерывного псевдохарактера $f - F$). Однако это означает, что G является прямым произведением подгрупп $s(H)$ и $\mathbb{R}$, а разность $\Phi = f - F$ является (непрерывным) характером, который равен нулю на $s(H)$ и определяет ненулевую линейную функцию на Z. Следовательно, $f = F + \Phi$, где F — непрерывный псевдохарактер, обращающийся в нуль на Z, и, таким образом, является непрерывным псевдохарактером на G. Следовательно, F равен нулю, поскольку обращается в нуль на $s(G)$ и на Z. Это показывает, что $f = \Phi$, что противоречит предположению, что f не является характером. Следовательно, если существует нетривиальный непрерывный псевдохарактер на группе H и H является расширением G с помощью Z, изоморфного $\mathbb{R}$, то H — нетривиальное центральное расширение, определяемое нетривиальным ограниченным непрерывным вещественным 2-коциклом на G. Это завершает доказательство.

Утверждение о существовании и свойствах предела в (4.11) следует из формул (4.6) и (4.7) и общих свойств квазихарактеров и псевдохарактеров (см., например, [233]): для любого квазихарактера f на группе G существует предел $\varphi(s) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} f(s^n)$ для любого $s \in G$ (причём этот предел совпадает с общим значением всех инвариантных средних на группе $\mathbb{Z}$ на ограниченной функции $n \mapsto f((n+1)s) - f(ns)$, $n \in \mathbb{Z}$). Осталось заметить, что отображения (4.11) и (4.12) являются взаимно обратными для частного случая, когда заданное расширение H реализуется в виде (4.6) при специальном выборе множителей, а именно, посредством топологического изоморфизма

$H \ni h \mapsto (\pi(h),\varphi(h)) \in G \times \mathbb{R}$ (топологическое произведение) с умножением $h_1 h_2 \mapsto (\pi(h_1)\pi(h_2),\varphi(h_1) + \varphi(h_2) + (\varphi(h_1 h_2) - \varphi(h_1) - \varphi(h_2))$, $h_1,h_2 \in H$, где $\varphi(h_1 h_2) - \varphi(h_1) - \varphi(h_2)$ сохраняется при модификации h_1 и h_2 элементами группы $\mathbb{R}$; полученный таким образом 2-коцикл на G согласуется с формулой (4.12) при выборе сечения $s(g) = (g,0) \in H$, $g \in G$. Наконец, утверждения об эквивалентности коциклов относительно добавления обычных характеров к псевдохарактерам немедленно следуют из формулы (4.12), а утверждения об инвариантности полученных таким образом псевдохарактеров относительно возмущений коциклов кограницами ограниченных цепей следуют из (4.11). $\square$

Замечание 4.5. Как известно, одномерное центральное расширение $H = G \rtimes \mathbb{R}$ заданного G, определяемое некоторым коциклом ψ, расщепляется (в полупрямое произведение) тогда и только тогда, когда ψ является кограницей. Для ограниченного коцикла ψ это условие выполняется тогда и только тогда, когда ψ является кограницей некоторой вещественной непрерывной функции f на G, которая, таким образом, является квазихарактером и, следовательно, ограниченно когомологична некоторому псевдохарактеру θ на G. Рассмотрим θ как псевдохарактер на H. В этом случае непосредственное вычисление показывает, что условие расщепления эквивалентно условию, что разность $f - \varphi$, где φ определяется формулой (4.11), является кограницей, определяемой ограниченной 1-коцепью (ограниченной вещественной непрерывной функцией на H), или, что то же самое, $\theta - \varphi$ — обычный непрерывный вещественный характер. Таким образом, ψ-расширение расщепляется тогда и только тогда, когда φ — сумма непрерывного псевдохарактера на H, определяемого некоторым псевдохарактером на G, и некоторого обычного вещественного характера на H.

4.8. Пространства псевдохарактеров, ограниченные когомологии и коциклы Гишарде–Вигнера

Сначала приведем условия тривиальности пространства $QP(G)$.

Связная локально компактная группа G является проективным пределом связных факторгрупп Ли (по компактным нормальным подгруппам), и, по теореме Леви–Мальцева, каждая из этих факторгрупп Ли является расширением полупростой группы Ли с помощью разрешимой группы Ли. В свою очередь, каждая из полученных таким образом полупростых групп Ли является расширением полупростой связной группы Ли S без нетривиальных компактных связных нормальных подгрупп (с точностью до изоморфизма, “стабильная” группа S не зависит от выбора исходных “достаточно малых” компактных нормальных подгрупп; в замечании 4.3 мы обозначили эту группу через $S(G)$) связной компактной полупростой группой Ли. Очевидно, что каждая полупростая факторгруппа Ли группы G без нетривиальных компактных связных нормальных подгрупп является факторгруппой группы $S(G)$, и в этом смысле группа $S(G)$ является наибольшей полупростой некомпактной факторгруппой Ли группы G.

Предложение 4.3. *Следующие условия эквивалентны для любой связной локально компактной группы G:*

1) *каждый непрерывный псевдохарактер группы G является обычным действительным характером*;

2) *центр наибольшей полупростой факторгруппы Ли группы $S(G)$ без нетривиальных компактных связных нормальных подгрупп конечен.*

Мы дополним это предложение описанием (см. теоремы 4.4–4.10 ниже) векторных пространств $QP(G)$ и $\hat{H}^2(G)$ для связной локально компактной группы G в терминах строения некомпактной части T полупростой группы Ли, которая является наибольшей полупростой факторгруппой без центра наибольшей полупростой факторгруппы Ли S группы G.

Для связной группы Ли H обозначим через $\tilde{H}$ односвязную группу Ли, локально изоморфную H (как известно, $\tilde{H}$ определена однозначно с точностью до топологического изоморфизма). В этом разделе для локально компактной группы G мы обозначим через A группу $A(G_0)$, введённую в предложении 4.1, а через Q — группу $Q(G_0)$, введённую в предложении 4.2. Теорема 4.4 ниже означает, что вторая вещественная непрерывная группа когомологий $\hat{H}^2(G)$ локально компактной группы G естественно изоморфна соответствующей группе для полупростой факторгруппы G/A (которая свободна от центра и не имеет нетривиальных компактных множителей), векторное пространство $QP(G)$ псевдохарактеров на группе G изоморфно пространству $QP(G/Q)$, а группа $\tilde{H}^2(G)$ — группе $\tilde{H}^2(G/Q)$.

Теорема 4.4. *В указанных выше обозначениях для любой локально компактной группы G существуют естественные изоморфизмы $\hat{H}^2(G)\simeq\hat{H}^2(G/A)$, $QP(G)\simeq QP(G/Q)$ и $\tilde{H}^2(G)\simeq\tilde{H}^2(G/Q)$, определяемые поднятием элементов групп в правых частях этих соотношений.*

Доказательство. Из описания соответствия между элементами $\hat{H}^2(G)$ и элементами пространства $P(G \rtimes \mathbb{R})$, см. теорему 4.3, следует, что каждый непрерывный ограниченный коцикл на G определяет одномерное центральное расширение $G \rtimes \mathbb{R}$ и непрерывный псевдохарактер на $G \rtimes \mathbb{R}$. Если полученный таким образом псевдохарактер на $G \rtimes \mathbb{R}$ тривиален на $\mathbb{R}$, то он определяется псевдохарактером на G, а значит, и на G/A, а значит, и псевдохарактером на $(G/A) \rtimes \mathbb{R}$, который тривиален на $\mathbb{R}$. Следовательно, этот псевдохарактер определяет непрерывный ограниченный коцикл на G/A. Если указанный выше псевдохарактер на $G \rtimes \mathbb{R}$ нетривиален на $\mathbb{R}$, то он определяется псевдохарактером на $M = G \rtimes \mathbb{R}/A_{G\rtimes\mathbb{R}}$, который нетривиален на образе группы $\mathbb{R}$ в факторгруппе M. Следовательно, этот псевдохарактер на M определяет псевдохарактер на одномерном центральном расширении группы G/A, и, следовательно, непрерывный ограниченный коцикл на самой группе G/A. Поскольку полученное таким образом соответствие между пространством $\hat{H}^2(G)$ (образованным классами ограниченно когомологичных непрерывных вещественных коциклов на G) и пространством $\hat{H}^2(G/A)$ (классов ограниченных когомологичных коциклов на G/A) взаимно однозначно и, очевидно, сохраняет выпуклые комбинации (см. формулы (4.11) и (4.12)), то это соответствие является изоморфизмом векторных пространств. Таким образом, пространства $\hat{H}^2(G)$ и $\hat{H}^2(G/A)$ действительно изоморфны.

Второе соотношение следует из предложения 4.2, а третье эквивалентно второму, поскольку группа $\tilde{H}^2(G)$ естественно изоморфна аддитивной группе $QP(G)$ (см. [38]). □

Таким образом, вычисление группы $\hat{H}^2(G)$ для заданной связной локально компактной группы G сводится к вычислению соответствующей группы $\hat{H}^2$ для связной полупростой группы Ли S без центра без компактных полупростых факторов, а вычисление группы $\tilde{H}^2(G)$ и пространства $QP(G)$ нетривиальных предхарактеров (факторпространства пространства всех псевдохарактеров по подпространству аещественных характеров группы G) сводится к вычислению соответствующих групп для расширения $S \rtimes V$ связной полупростой группы

Ли без центра без компактных полупростые множители с помощью векторной группы V.

Перейдём к подготовке описания группы $\hat{H}^2(S)$.

Теорема 4.5 (см. [126, гл. VIII и IX]). *Если G — простая группа Ли, то условие $H^2(G) \neq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда центр $\mathscr{Z}(\mathfrak{k})$ алгебры Ли $\mathfrak{k}$ нетривиален, а также тогда и только тогда, когда пространство гомоморфизмов Ли $\mathrm{Hom}(\mathfrak{k},\mathbb{R})$ отлично от нуля. Если эти условия выполнены (в этом случае пространство G/K естественно снабжено G-инвариантной комплексной структурой, относительно которой оно является эрмитово симметрическим), то*

$$\dim H^2(G) = \dim \mathscr{Z}(\mathfrak{k}) = \dim \mathrm{Hom}(\mathfrak{k},\mathbb{R}) = 1.$$

С точностью до локального изоморфизма, группа G совпадает с одной из следующих групп:

1) $\mathrm{SU}(p,q)$, $p,q \in \mathbb{N}$,

2) $\mathrm{SO}_0(2,q)$, *где* $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 2$ (*напомним, что* $\mathrm{SO}_0\,(2,2)$ *не является простой группой Ли*),

3) $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{R}$,

4) $\mathrm{SO}^*(2n)$, $n > 1$ (*напомним, что* $\mathrm{SO}^*(2)$ *не является простой группой Ли*),

5) *вещественная форма комплексной простой группы Ли типа* E_6 *с* $\dim \mathfrak{k} = 46$,

6) *вещественная форма комплексной простой группы Ли типа* E_7 *с* $\dim \mathfrak{k} = 79$.

Примем введённые выше обозначения для групп когомологий. Пусть G — простая группа Ли с конечным центром, а K — максимальная компактная подгруппа группы G. Напомним результаты Гишарде–Вигнера о вещественных непрерывных 2-коциклах на G и укажем связь между этими коциклами и нетривиальным псевдохарактером $\varphi_{GW}: g \mapsto z(k(g))$, где $g \in G$, $k(g) \in K$, $z(k(g)) \in \mathscr{Z}(K)$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ алгебры Ли групп G и K, соответственно, и начнем с определений и общих фактов.

Введём 2-коцикл Гишарде–Вигнера [109, 110]. Пусть G — простая группа Ли и $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ — разложение Картана, связанное с компактной подалгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Обозначим через $\exp$ экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в G.

Теорема 4.6 ([109, 110]). *Пусть* E — *отображение* $\mathbb{R}$ *на единичную окружность* $\mathbb{T}$, *определяемое формулой* $t \mapsto \exp(2\pi i t)$, $t \in \mathbb{R}$, v — *такая дифференцируемая функция на* G *со значениями в* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *что ограничение* v *на* K — *нетривиальный морфизм* K *на одномерный тор* $\mathbb{T}$, *ограничение* v *на* $\exp \mathfrak{p}$ *строго положительно и* K*-инвариантно, а формула*

$$v(k \exp p) = v(k) v(\exp p)$$

справедлива для любых $k \in K$ *и* $p \in \mathfrak{p}$. *Пусть* $w(g) = v(g)/|v(g)|$, $g \in G$, *т.е.* $w(g) = v(k)/|v(k)|$, $g = k \exp p$, $k \in K$, $p \in \mathfrak{p}$. *Тогда существует единственный дифференцируемый вещественный 2-коцикл* f *на* G, *являющийся нерерывной ветвью отображения*

$$f(g_1,g_2) = (2\pi)^{-1} \operatorname{Arg}(v(g_1)v(g_2)v(g_1g_2)^{-1}), \quad g_1,g_2 \in G, \quad f(e,e) = 0, \tag{4.13}$$

на $G \times G$.

Следующее утверждение устанавливает связь между ограниченными и обычными 2-когомологиями простых групп Ли.

Теорема 4.7. *Для любой простой группы Ли* G, *универсальная накрывающая которой имеет бесконечный центр, любая функция* f *вида* (4.13) *ограничена на* $G \times G$.

Сделаем несколько замечаний перед доказательством теоремы 4.7. Начнём со следующего наблюдения, известного ещё по докладу Бессона 1988 года в Лионе [38].

Теорема 4.8. *Пусть* G — *группа,* φ — *псевдохарактер на* G. *Формула*

$$\psi(g_1,g_2) = \varphi(g_1g_2) - \varphi(g_1) - \varphi(g_2), \quad g_1,g_2 \in G, \tag{4.14}$$

определяет ограниченный 2-коцикл ψ *на группе* G. *Коцикл* ψ *тривиален как ограниченный коцикл* (*т.е. является кограницей ограниченной цепи*) *тогда и только тогда, когда квазихарактер* φ *является ограниченным возмущением обычного аддитивного вещественного характера группы* G.

Введем теперь псевдохарактер, непосредственно связанный с 2-коциклом Гишарде–Вигнера на эрмитово симметрической простой группе Ли. Оказывается, односвязные эрмитово симметрические простые группы Ли — единственные простые группы Ли, допускающие нетривиальные псевдохарактеры.

Определение 4.2 (см. [233, 237–240]). Пусть G — связная односвязная простая группа Ли, центр которой бесконечен (и, таким образом, соответствующее симметрическое пространство является эрмитово симметрическим; см. теорему 4.5), и пусть K — аналитическая подгруппа группы G, отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли G. Осуществим изоморфное отождествление центра Z_K аналитической группы K с аддитивной группой поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ (например, с помощью натурального параметра на однопараметрической подгруппе, определяемой подгруппой Z_K). Пусть $\widetilde{G}$ — присоединенная группа группы G, $\widetilde{G} = (\widetilde{K})AN$ разложение Ивасавы группы $\widetilde{G}$, связанное с группой K. Тогда $G = KAN$, где A — абелева, а N — нильпотентная группа (изоморфные соответствующим группам для присоединенной группы), и пусть

$$g = k(g)an, \quad g \in G, \quad k(g) \in K, \quad a \in A, \quad n \in N,$$

— соответствующее разложение элемента $g \in G$. Как хорошо известно, отображение

$$\varpi\colon g \mapsto k(g), \quad g \in G,$$

переводящее каждый элемент $g \in G$ в компоненту $k(g) \in K$ его разложения непрерывно. Рассмотрим композицию ψ отображения

$$\varpi\colon g \mapsto k(g), \quad g \in G,$$

и непрерывной проекции π, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$ [122]. Эта композиция

$$\psi = \pi \circ \varpi$$

определяет некоторый квазихарактер на G. Псевдохарактер θ, соответствующий этому квазихарактеру, называется *псевдохарактером Гишарде–Вигнера*, ср. [237].

Псевдохарактер Гишарде–Вигнера автоматически непрерывен на всей группе 4.1, поскольку он связан с непрерывным квазихарактером ψ формулой (4.1).

Очевидно, что псевдохарактер Гишарде–Вигнера на односвязной эрмитово симметрической простой группе Ли определён однозначно с точностью до ненулевого числового множителя.

Существует непосредственная связь между псевдохарактером Гишарде–Вигнера на универсальной накрывающей простой группы Ли и коциклом Гишарде–Вигнера на этой группе (и на всех её факторгруппах с конечным центром). А именно, из нашего определения псевдохарактера Гишарде–Вигнера при сравнении с определением коцикла Гишарде–Вигнера очевидно, что коцил, определенный псевдохарактером Гишарде–Вигнера, совпадает по определению с соответствующим коциклом Гишарде–Вигнера. Для группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ограниченность коцикла f, определяемого формулой (4.13), следует из прямого вычисления [233] соответствующего псевдохарактера (причём $|f(g)| < \pi/2$, $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$); см. также [238]. Оценки для коциклов Гишарде–Вигнера на простых эрмитово симметрических группах Ли приведены ниже и доказывают ограниченность этих коциклов на всех эрмитово симметрических простых группах Ли (ср. [238]) и тем самым независимо устанавливают существование соответствующих этим коциклам псевдохарактеров. Полное описание псевдохарактеров на всех эрмитово симметрических простых группах Ли с бесконечным центром было получено с помощью исследования каждого из перечисленных выше классов групп отдельно. Частные результаты о псевдохарактерах на группах Ли были опубликованы также Гизом в 2001г. [98] (для группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$), и позже Ентовым [82] (для группы $\widehat{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbb{R})$ — универсальной накрывающей соответствующей матричной группы) в связи с изучением финслеровой псевдометрики на симплектической группе.

В работе Монода 2001 г. по непрерывным ограниченным когомологиям локально компактных групп [159] (как и в более поздних работах [48–50, 160]) нет ни доказательства ограниченности коциклов Гишарде–Вигнера, ни даже правильной постановки задачи. Хотя соответствующее утверждение и высказано в начале стр. 125 в [159] (пример 9.3.3) но (нетривиальная) проверка этого утверждения заменена неверным замечанием о компактности подгруппы Ли, отвечающей максимальной компактной подалгебре Ли эрмитово симметрической группы Ли (“This cocycle arises as the obstruction to extend to G a complex character defined on a maximal compact subgroup, and therefore it is bounded.”). Это безоговорочно ошибочно, поскольку для случая односвязной группы, как раз и отвечающего нетривиальному псевдохарактеру, максимальная компактная подалгебра Ли содержит одномерный центр, и поэтому соответствующая подгруппа односвязной группы тоже содержит одномерный центр, изоморфный числовой прямой.

Вернёмся к доказательству теоремы 4.7.

Доказательство теоремы 4.7. Группа когомологий одномерна, так что ненулевые кратные любых двух нетривиальных коциклов когомологичны. Рассмотрим каждый из случаев 1)–6) в теореме 4.5 отдельно.

Случай 1). $\mathrm{SU}(p,q)$, $p,q\in\mathbb{N}$.

Для группы $\mathrm{U}(p,q)$ нетривиальный коцикл требуемого вида вычислен в [110, Section 5, Cas I]. Напомним его описание. Реализуем группу G как множество комплексных матриц

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix},$$

где g_{ij} — подматрицы порядков $d_i\times d_j$ для $i,j=1,2$, $d_1=p$ и $d_2=q$, удовлетворяющие условиям $gjg^*=j$ и $\det g=1$ (g^* означает матрицу, эрмитово сопряжённую g),

$$j=\begin{pmatrix} I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}.$$

Группа K реализуется в этом описании как множество матриц $g\in G$ с $g_{12}=$ $=g_{21}=0$, $g_{11}\in\mathrm{U}(p)$, $g_{22}\in\mathrm{U}(q)$ и $\det g_{11}\det g_{22}=1$ (как всегда, $\mathrm{U}(n)$ — группа унитарных матриц порядка n). Пространство $\mathfrak{p}$ можно отождествить с множеством эрмитовых матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & R\\ R^* & 0\end{pmatrix},$$

где R — любая $p\times q$-матрица. В качестве функции v, определяющей коцикл по формуле (4.13), можно взять $v(g)=\det g_{11}$, $g\in G$, и в этом случае свойства, перечисленные в теореме 4.6, очевидны.

Докажем, что непрерывная функция

$$\{g_1,g_2\}\mapsto \operatorname{Arg}(\det g_{11}^{(1)}\det g_{11}^{(2)}(\det(g^{(1)}g^{(2)})_{11})^{-1}),\quad \{g^{(1)},g^{(2)}\}\in\mathrm{SU}(p,q)\times\mathrm{SU}(p,q), \tag{4.15}$$

ограничена на всей группе $\mathrm{SU}(p,q)\times\mathrm{SU}(p,q)$. Для

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\in\mathrm{SU}(p,q)$$

имеем

$$g_{11}^*g_{11}-g_{21}^*g_{21}=I_p,\quad g_{22}^*g_{22}-g_{12}^*g_{12}=I_q,\quad g_{11}^*g_{12}-g_{21}^*g_{22}=0_{p,q}; \tag{4.16}$$

в частности,

$$g_{12}=(g_{11}^{*})^{-1}g_{21}^{*}g_{22}, \quad g_{12}(g_{22})^{-1}=(g_{11}^{*})^{-1}g_{21}^{*}. \tag{4.17}$$

Поэтому

$$\det\bigl(g_{11}^{(1)}g_{11}^{(2)}+g_{12}^{(1)}g_{21}^{(2)}\bigr)=\det\bigl(g_{11}^{(1)}\bigl(1+\bigl(g_{11}^{(1)}\bigr)^{-1}g_{12}^{(1)}g_{21}^{(2)}\bigl(g_{11}^{(2)}\bigr)^{-1}\bigr)g_{11}^{(2)}\bigr).$$

Подставляя эту формулу в (4.15), видим, что нам нужно оценить непрерывную ветвь функции

$$\det\bigl(1+\bigl(g_{11}^{(1)}\bigr)^{-1}g_{12}^{(1)}g_{21}^{(2)}\bigl(g_{11}^{(2)}\bigr)^{-1}\bigr) \tag{4.18}$$

на группе $\mathrm{SU}(p,q)\times\mathrm{SU}(p,q)$. В формуле (4.18) произведение $A=g_{21}^{(2)}\bigl(g_{11}^{(2)}\bigr)^{-1}$ удовлетворяет условию

$$A^{*}A=\bigl(\bigl(g_{11}^{(2)}\bigr)^{-1}\bigr)^{*}\bigl(g_{21}^{(2)}\bigr)^{*}g_{21}^{(2)}\bigl(g_{11}^{(2)}\bigr)^{-1},$$

где

$$\bigl(g_{21}^{(2)}\bigr)^{*}g_{21}^{(2)}=\bigl(\bigl(g_{11}^{(2)}\bigr)^{-1}\bigr)^{*}\bigl(g_{11}^{(2)}\bigr)^{-1}-I_p$$

по второй формуле в (4.16). Не выписывая ненужные сейчас верхние индексы (2), получаем

$$\begin{aligned}A^{*}A&=(g_{11}^{-1})^{*}g_{21}^{*}g_{21}g_{11}^{-1}=(g_{11}^{-1})^{*}((g_{11}^{-1})^{*}g_{11}^{-1}-I_p)g_{11}^{-1}=\\&=(g_{11}^{*})^{-1}((g_{11}^{-1})^{*}g_{11}^{-1}-I_p)g_{11}^{-1}=I_p-(g_{11}^{*})^{-1}g_{11}^{-1}=I_p-(g_{11}g_{11}^{*})^{-1}.\end{aligned}$$

Так как $g_{11}^{*}g_{11}=I_p+g_{21}^{*}g_{21}>I_p$, то оператор $g_{11}g_{11}^{*}$ (унитарно эквивалентный произведению $g_{11}^{*}g_{11}$) удовлетворяет неравенству $0<A^{*}A<I_p$. Следовательно, $\|A\|<1$.

Теперь мы не будем выписывать явно верхние индексы (1). Докажем, что норма оператора $B=g_{11}^{-1}g_{12}$ тоже меньше единицы. Заметим с этой целью, что группа $\mathrm{SU}(p,q)$ инвариантна относительно перехода к комплексно сопряжённым матрицам (это сразу следует из приведённого выше описания алгебры Ли $\mathfrak{su}(p,q)$ группы Ли $\mathrm{SU}(p,q)$). Следовательно, $I_p+g_{12}g_{12}^{*}=g_{11}^{-1}(g_{11}^{*})^{-1}$. Если $B=g_{11}^{-1}g_{12}$, то

$$BB^{*}=g_{11}^{-1}g_{12}g_{12}^{*}(g_{11}^{-1})^{*},$$

и соотношение $\|B\|<1$ доказывается аналогично предыдущему.

Таким образом, непрерывная ветвь выражения (4.16) совпадает с аргументом определителя оператора вида I_p+C при $\|C\|<1$. Приводя оператор C к жордановой нормальной форме, сразу видим, что модуль каждого диагонального элемента матрицы оператора C меньше единицы. Поэтому модуль вклада этого диагонального элемента в аргумент определителя меньше $\pi/2$, и модуль полного приращения аргумента определителя меньше $p\pi/2$, что завершает доказательство теоремы в случае 1).

Случай 2). $\mathrm{SO}_0(2,q)$, где $q\in\mathbb{N}$, $q\neq 2$.

Для группы $\mathrm{SO}_0(2,q)$ нетривиальный коцикл требуемого вида вычислен в [110, Section 5, Cas II]. Напомним его построение. Реализуем группу G в виде множества вещественных матриц,

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix},$$

где g_{ij} — такие подматрицы порядков $d_i\times d_j$, $i=1,2$, $d_1=2$ и $d_2=q$, что $gjg'=j$ и $\det g=1$ (g' — матрица, транспонированная к g), причём $\det g_{11}>0$ и

$$j=\begin{pmatrix} I_2 & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}.$$

В этом описании подгруппа K реализуется как множество матриц $g\in G$ с $g_{12}=g_{21}=0$, $g_{11}\in\mathrm{SO}(2)$ и $g_{22}\in\mathrm{SO}(q)$ (где $\mathrm{SO}(n)$, как всегда, означает группу ортогональных матриц порядка n с единичным определителем). Пространство $\mathfrak{p}$ можно отождествить с семейством матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & R\\ R' & 0\end{pmatrix},$$

где R — любая вещественная матрица порядка $2\times q$. Функцию v, определяющую коцикл по формуле (4.13), можно задать формулой

$$v(g)=\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22}+ia_{21}-ia_{12}),\quad g=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in G,\quad a_{ij}\in\mathbb{R},\quad i,j=1,2; \tag{4.19}$$

очевидно, что все свойства, требуемые в теореме 4.6, выполнены.

Докажем, что непрерывная функция

$$\{g^{(1)},g^{(2)}\}\mapsto \operatorname{Arg}\Big(\big(a_{11}^{(1)}+a_{22}^{(1)}+ia_{21}^{(1)}-ia_{12}^{(1)}\big)\big(a_{11}^{(2)}+a_{22}^{(2)}+ia_{21}^{(2)}-ia_{12}^{(2)}\big)\times$$
$$\times\Big(\big(a_{11}^{(1)}a_{11}^{2}+a_{12}^{(1)}a_{21}^{(2)}\big)+\big(a_{12}^{(1)}a_{21}^{2}+a_{22}^{(1)}a_{22}^{(2)}\big)+i\big(a_{21}^{(1)}a_{11}^{2}+a_{22}^{(1)}a_{21}^{(2)}\big)-i\big(a_{11}^{(1)}a_{12}^{2}+a_{12}^{(1)}a_{22}^{(2)}\big)\Big)^{-1}\Big),$$

где $\{g^{(1)},g^{(2)}\}\in\mathrm{SO}_0(2,q)\times\mathrm{SO}_0(2,q)$, ограничена на $\mathrm{SO}_0(2,q)\times\mathrm{SO}_0(2,q)$.

Воспользуемся полярным разложением 2×2-матрицы g_{11} (напомним, что определитель матрицы g_{11} заведомо положителен). Если

$$g_{11}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\alpha & t\sin\alpha\\ -r\sin\alpha & t\cos\alpha\end{pmatrix},$$

то соотношение (4.19) принимает вид

$$v(g)=((r+t)/2)\exp(i\alpha). \tag{4.20}$$

Отметим два следствия этой формулы. Во первых, результат очевидным образом унитарно инвариантен. Во вторых, отсюда следует, что вопрос о функции (4.19) можно заменить вопросом о том, верно ли, что есть непрерывная ветвь функции, заданной формулой (4.20), которая ограничена на всей группе G. Повторяя вычисления, проведённые в случае 1), можно убедиться, что произведение матриц

$$g^{(1)}=\begin{pmatrix}g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)}\\ g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)}\end{pmatrix},\qquad g^{(2)}=\begin{pmatrix}g_{11}^{(2)} & g_{12}^{(2)}\\ g_{21}^{(2)} & g_{22}^{(2)}\end{pmatrix},$$

приводит к матрице $(g^{(1)}g^{(2)})_{11}$, равной произведению трёх матриц,

$$(g^{(1)}g^{(2)})_{11}=g_{11}^{(1)}\big(I_2+\big(g_{11}^{(1)}\big)^{-1}g_{21}^{(1)}g_{21}^{(2)}\big(g_{11}^{(2)}\big)^{-1}\big)g_{11}^{(2)}. \tag{4.21}$$

Как и в случае 1), можно доказать, что

$$\big\|\big(g_{11}^{(1)}\big)^{-1}g_{21}^{(1)}g_{21}^{(2)}\big(g_{11}^{(2)}\big)^{-1}\big\|<1.$$

Так как модуль любого матричного элемента матрицы, норма которой меньше единицы, тоже меньше единицы, то вещественная часть функции в (4.19) положительна, и поэтому соответствующее значение функции v на матрице, стоящей в середине в правой части (4.21), не превосходит $\pi/2$. Остаётся выяснить, что происходит при умножении матриц.

Пусть

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix}\cos\alpha^{(1)} & \sin\alpha^{(1)}\\ -\sin\alpha^{(1)} & \cos\alpha^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r^{(1)} & 0\\ 0 & t^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r^{(1)}\cos\alpha^{(1)} & t^{(1)}\sin\alpha^{(1)}\\ -r^{(1)}\sin\alpha^{(1)} & t^{(1)}\cos\alpha^{(1)}\end{pmatrix}$$

и (совершенно аналогично)

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix}r^{(2)}\cos\alpha^{(2)} & t^{(2)}\sin\alpha^{(2)}\\ -r^{(2)}\sin\alpha^{(2)} & t^{(2)}\cos\alpha^{(2)}\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{(1)}A^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha^{(1)} & \sin\alpha^{(1)} \\ -\sin\alpha^{(1)} & \cos\alpha^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{(1)} & 0 \\ 0 & t^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha^{(2)} & \sin\alpha^{(2)} \\ -\sin\alpha^{(2)} & \cos\alpha^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{(2)} & 0 \\ 0 & t^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (4.20) следует, что

$$v(A^{(1)}A^{(2)}) = v(B) + i\alpha^{(1)},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} r^{(1)} & 0 \\ 0 & t^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha^{(2)} & \sin\alpha^{(2)} \\ -\sin\alpha^{(2)} & \cos\alpha^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{(2)} & 0 \\ 0 & t^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы

$$B \begin{pmatrix} \cos(\alpha^{(2)}) & \sin(-\alpha^{(2)}) \\ \sin(\alpha^{(2)}) & \cos(\alpha^{(2)}) \end{pmatrix}$$

равны суммам

$$r^{(1)}r^{(2)}\cos^2(\alpha^{(2)}) + r^{(1)}t^{(2)}\sin^2(\alpha^{(2)}), \quad t^{(1)}r^{(2)}\sin^2(\alpha^{(2)}) + t^{(1)}t^{(2)}\cos^2(\alpha^{(2)}),$$

откуда легко следует, что след матрицы

$$B \begin{pmatrix} \cos(\alpha^{(2)}) & \sin(-\alpha^{(2)}) \\ \sin(\alpha^{(2)}) & \cos(\alpha^{(2)}) \end{pmatrix}$$

положителен. Следовательно, разность между значением $v(A^{(1)}A^{(2)})$ и суммой $v(A^{(1)}) + v(A^{(2)})$ не превосходит $\pi/2$. Так как в формуле (4.21) мы должны применить это рассуждение дважды и модуль функции v на среднем сомножителе в (4.21) меньше $\pi/2$, то модуль любого значения рассматриваемого коцикла меньше $3\pi/2$.

Случай 3). $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{R}$.

В [110, Section 5, Cas III] найден и нетривиальный коцикл искомого вида на группе $G = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$, но нам нужна лишь некоторая информация об этом коцикле, а не его явное описание. Эта информация позволит нам рассматривать нужный нетривиальный коцикл как ограничение коцикла на группе $\mathrm{SU}(n,n)$, описанного выше в случае 1), на подгруппу, изоморфную группе G. С этой целью мы рассмотрим группу G как семейство вещественных матриц

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

где g_{ij} — подматрицы порядков $n\times n$, удовлетворяющие условию $gjg'=j$ для

$$j=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}.$$

Группу K можно тогда рассматривать как семейство матриц $g\in G$, удовлетворяющих условиям $g_{12}=-g_{21}$, $g_{11}=g_{22}$, $g_{11}g'_{11}+g_{12}g'_{12}=I_n$ и $g_{11}g'_{12}-g_{12}g'_{11}=0$; эта группа K изоморфна унитарной группе $\mathrm{U}(n)$ при отображении

$$k\leftrightarrow k_{11}+ik_{12},\qquad k\in K,\quad k_{11}+ik_{12}\in \mathrm{U}(n).$$

Пространство $\mathfrak{p}$ можно отождествить с множеством вещественных матриц вида

$$\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12} & -X_{11}\end{pmatrix},$$

где вещественные матрицы X_{11} и X_{12} симметричны. Функцию

$$v(g)=\det\frac{1}{2}(g_{11}+g_{22}+ig_{12}-ig_{21}),\quad g\in G,$$

можно взять в качестве функции v, определяющей коцикл по обычной формуле (4.13); тогда свойства, требуемые в теореме 4.6, очевидно, выполнены.

Преобразование подобия, определяемое матрицей

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}I_p & iI_p\\ iI_p & I_p\end{pmatrix},$$

переводит группу $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ в рассмотренной выше форме на подгруппу G' группы $\mathrm{SU}(n,n)$ так, что K отображается на подгруппу матриц вида

$$\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & u^*\end{pmatrix},\quad u\in \mathrm{U}(n).$$

Это значит, что ограничение (нетривиального) коцикла Гишарде–Вигнера на группе $\mathrm{SU}(n,n)$ на подгруппу G' нетривиально и, следовательно, определяет нетривиальный коцикл Гишарде–Вигнера на G'. Это ограничение является ограниченным коциклом, так как коцикл Гишарде–Вигнера на $\mathrm{SU}(n,n)$ ограничен в случае 1).

Случай 4). $\mathrm{SO}^*(2n)$, $n>1$.

Нетривиальный коцикл требуемого вида на группе $G=\mathrm{SO}^*(n)$ вычислен в [110, Section 5, Cas IV]. Но, как и в предыдущем случае, нам нужен не явный вид этого коцикла, а некоторая дополнительная информация, которая позволит нам рассматривать этот нетривиальный коцикл как ограничение коцикла на группе $\mathrm{SU}(n,n)$, описанного выше в случае 1), на подгруппу, изоморфную G. Напомним определение коцикла на G. Рассмотрим группу G как семейство комплексных матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

где g_{ij} — подматрицы порядков $n \times n$, удовлетворяющие условию $gjg^* = j$ для той же матрицы

$$j = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

а также условию $g'g = I_{2n}$. В таком случае, подгруппа K есть семейство матриц того же вида, что и в случае 3) (вещественных матриц, удовлетворяющих условиям $g_{12} = -g_{21}$, $g_{11} = g_{22}$, $g_{11}g'_{11} + g_{12}g'_{12} = I_n$ и $g_{11}g'_{12} - g_{12}g'_{11} = 0$), так что группа K снова изоморфна унитарной группе $\mathrm{U}(n)$ при отображении

$$k \leftrightarrow k_{11} + ik_{12}, \quad k \in K, \quad k_{11} + ik_{12} \in \mathrm{U}(n).$$

Пространство $\mathfrak{p}$ можно отождествить с семейством матриц вида

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ -X'_{12} & -X_{11} \end{pmatrix}.$$

В качестве функции v, определяющей коцикл по формуле (4.13), можно взять функцию

$$v(g) = \det \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22} + ig_{12} - ig_{21}), \quad g \in G;$$

тогда свойства, требуемые в теореме 4.6, очевидно, выполнены.

Как и в случае 3), преобразование подобия, определённое матрицей

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_p & iI_p \\ iI_p & I_p \end{pmatrix},$$

отображает группу $\mathrm{SO}^*(n)$ в описанной выше форме на некоторую подгруппу G'' группы $\mathrm{SU}(n,n)$, и при этом преобразовании подобия группа K отображается на подгруппу матриц вида

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix},$$

где $u \in \mathrm{U}(n)$. Это означает, что ограничение нетривиального коцикла Гишарде–Вигнера на группе $\mathrm{SU}(n,n)$ на подгруппу G'' нетривиально и, следовательно, является нетривиальным коциклом Гишарде–Вигнера на G''. Это ограничение является ограниченным коциклом, так как коцикл Гишарде–Вигнера на $\mathrm{SU}(n,n)$ ограничен (см. случай 1)).

В статье [110] Гишарде–Вигнера нет формул для коциклов на соответствующих вещественных формах групп E_6 и E_7. Оказывается, однако, что подход, использованный в случаях 3) и 4) продуктивен и для этих исключительных групп Ли.

Случай 5). Вещественная форма G комплексной простой группы типа E_6 с размерностью максимальной компактной подгруппы $\dim\mathfrak{k}=46$.

Согласно оригинальной статье Картана [52, Section VII], рассматриваемая вещественная форма сохраняет кубику

$$\sum_{\substack{i,j=1,\dots,6,\\ i\neq j}} x_i y_j z_{i,j} - \sum_{s\in S_6} \operatorname{sign}(s)\, z_{s(1),s(2)} z_{s(3),s(4)} z_{s(5),s(6)}$$

от комплексных переменных

$$x_i, \quad y_j, \quad z_{i,j} \quad (i\neq j), \quad z_{i,j}=-z_{j,i}, \quad i,j\in\{1,2,3,4,5,6\},$$

и эрмитову форму

$$\sum_{i=1}^{5} x_i\overline{x_i} - x_6\overline{x_6} - \sum_{i=1}^{5} y_i\overline{y_i} + y_6\overline{y_6} + \sum_{\substack{i,j=1,\dots,5,\\ i\neq j}} z_{i,j}\overline{z_{i,j}} - \sum_{i=1}^{5} z_{i,6}\overline{z_{i,6}}$$

от тех же переменных. Это условие инвариантности означает, что $G\subset\mathrm{SU}(16,11)$. Очевидно, одномерная компактная группа Ли $\mathbb{T}$, элементы которой t_φ определяются формулами

$$x_k\mapsto\exp(i\varphi)x_k, \quad y_k\mapsto\exp(-i\varphi)y_k, \quad z_{j,k}\mapsto z_{j,k}, \quad j,k=1,\dots,6, \quad j\neq k,$$

сохраняет и кубическую форму, и эрмитову форму. Тем самым эта группа содержится в G. Определители унитарных компонент матриц, соответствующих элементам группы $\mathbb{T}$ в рассматриваем представлении, нетривиальны, а именно, $\det u_{11}(t_\varphi)=\exp(4i\varphi)$, $t_\varphi\in\mathbb{T}$. Как и в случаях 3) и 4), отсюда следует, что ограничение нетривиального коцикла Гишарде–Вигнера на группе $\mathrm{SU}(16,11)$ на подгруппу G нетривиально, и тем самым определяет нетривиальный коцикл Гишарде–Вигнера на G. Это ограничение автоматически является ограниченным коциклом (так как коцикл Гишарде–Вигнера на $\mathrm{SU}(16,11)$ ограничен, см. случай 1)).

Случай 6). Вещественная форма G комплексной простой группы типа E_7 с размерностью максимальной компактной подгруппы $\dim\mathfrak{k}=79$.

Согласно формуле (4.1) в [95], существует такое действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в 56-мерном вещественном векторном пространстве, что одномерный центр компактной подалгебры Ли $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$ действует в пряиой сумме четырёх инвариантных подпространств размерностей 27, 27, 1 и 1 (соответственно) по формуле

$$\mathfrak{k}\ni\rho\mapsto\begin{pmatrix} i(\rho/3)I_{27} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -i(\rho/3)I_{27} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\rho & 0\\ 0 & 0 & 0 & i\rho\end{pmatrix},$$

и, следовательно, определители соответствующих унитарных компонент снова нетривиальны. Следовательно, ограничение нетривиального коцикла Гишарде–Вигнера на группе $\mathrm{SU}(28,28)$ на подгруппу G нетривиально. Таким образом, это ограничение определяет нетривиальный коцикл Гишарде–Вигнера на G, и он ограничен, поскольку уже́ коцикл Гишарде–Вигнера на $\mathrm{SU}(28,28)$ ограничен (см. случай 1)).

Это завершает доказательство теоремы 4.7. □

Теорема 4.9. *Пусть S — связная полупростая (вещественная) группа Ли, пусть T — простая группа Ли, являющаяся факторгруппой S, и пусть центр соответствующей односвязной группы Ли $\tilde{T}$ бесконечен (т.е. симметрическое пространство, ассоциированное с T, является эрмитово симметричным).*

1. *Поднятие на S коцикла f Гишарде–Вигнера, связанного с группой T* ([110], см. также [109, Глава III, Предложение 7.6]) *является ограниченным вещественным непрерывным 2-коциклом на S.*

2. *Каждый ограниченный вещественный непрерывный 2-коцикл на S когомологичен некоторой линейной комбинации поднятий коциклов Гишарде–Вигнера, соответствующих всем присоединенным группам простых факторгрупп группы T, для которых центр универсальной накрывающей группы бесконечен.*

3. *Размерность векторного пространства $\hat{H}^2(S)$ равна числу некомпактных простых прямых множителей T группы S, для которых центр группы $\tilde{T}$ бесконечен.*

Доказательство теоремы 4.9. Пусть T — произвольная полупростая некомпактная факторгруппа группы S, для которой центр соответствующей односвязной группы Ли бесконечен, и пусть $\pi\colon S\to T$ — каноническое отображение. Пусть F — псевдохарактер на T, отвечающий коциклу f. Формула $\Phi(g)=F(\pi(g))$, $g\in G$, определяет псевдохарактер Φ на G, и отвечающий ему коцикл является искомым поднятием коцикла f. Это доказывает утверждение 1.

Более того, любой непрерывный псевдохарактер на связной локально компактной группе G определяется непрерывным псевдохарактером на одномерном центральном расширении H полупростой факторгруппы $S=G/A(G)$, и, следовательно, он допускает поднятие на универсальную накрывающую группу $\tilde H$, которая изоморфна полупрямому произведению сомножителей и, поскольку расширение H является центральным, прямому произведению $\tilde S\times\mathbb{R}$. Каждый псевдохарактер на прямом произведении является суммой псевдохарактеров на сомножителях; однако любой псевдохарактер на $\mathbb{R}$ является обычным характером, и на $\tilde S$ существуют ненулевые характеры, в то время как каждый псевдохарактер на универсальной накрывающей группе $\tilde S$ группы S является суммой своих “ограничений” на простые множители группы $\tilde S$, т.е. суммой некоторых псевдохарактеров Гишарде–Вигнера на этих множителях. В частности, любой непрерывный псевдохарактер на S является линейной комбинацией стандартных псевдохарактеров Гишарде–Вигнера (с точностью до добавления обычного характера). Это доказывает утверждение 2, из которого немедленно следует утверждение 3 о размерности вещественного векторного пространства $\hat H^2(S)$, что завершает доказательство теоремы 4.9. □

Теперь опишем ядро $\tilde H^2(L)$ естественного отображения $\hat H^2(L)\to\tilde H^2(L)$ (см. § 4.2) и группу $QP(L)$ (изоморфную этому ядру) для расширения L полупростой группы с помощью векторной группы.

Теорема 4.10. *Пусть L — связная (вещественная) группа Ли, являющаяся расширением полупростой группы Ли S с помощью векторной группы V относительно непрерывного 2-коцикла φ на S со значениями в V. Пространство $\tilde H^2(L)$ образовано коциклами, для которых соответствующее расширение группы L с помощью $\mathbb{R}$ расщепляется (см. Замечание 4.5). Как векторное пространство, $\tilde H^2(L)$ порождается классами эквивалентности поднятий всех коциклов Гишарде–Вигнера на простых односвязных факторгруппах S с бесконечным центром и классами эквивалентности всех вещественных коциклов вида $f=F\circ\varphi$, где F пробегает пространство V^*, двойственное к V. Пространство $QP(L)$ порождается классами эквивалентности псевдохарактеров*

Гишарде–Вигнера на простых односвязных факторгруппах S с бесконечными центрами и классами эквивалентности всех псевдохарактеров ψ на L, определяемыми вещественными коциклами вида $f = F \circ \varphi$ по формуле (4.12)*, где F пробегает пространство V^*, двойственное к V.*

Доказательство. Из замечания 4.5 следует, что ядро $\tilde{H}^2(L)$ образовано коциклами, для которых соответствующее расширение группы L посредством V расщепляется, т.е. определяется коциклом, соответствующим псевдохарактеру на L (а не на одномерном расширении L). Переходя к пересечению ядер обычных характеров на L, можно считать, что нетривиальных характеров на L нет, и $QP(L)$ — это линейное пространство непрерывных псевдохарактеров на L. Если некоторый псевдохарактер на L нетривиален на V, то его ограничение на V является линейным функционалом F на V (элементом пространства V^*); этот псевдохарактер определяет коцикл $F \circ \varphi$ на S по формуле (4.12), который может быть разложен на коциклы Гишарде–Вигнера по теореме 4.9. Если данный псевдохарактер обращается в нуль на V, то он определяется псевдохарактером на S, строение которого известно [233, 238], и этот псевдохарактер также имеет вид, указанный в теореме, что завершает доказательство теоремы 4.10. □

Замечание 4.6. Пусть D — дискретная подгруппа центра группы $\tilde{S}$, такая что $\tilde{S}/D$ изоморфна S. Поднятие псевдохарактера на S до псевдохарактера на $\tilde{S}$ является линейной комбинацией псевдохарактеров Гишарде–Вигнера на простых односвязных факторгруппах группы $\tilde{S}$ с бесконечным центром, и ограничение этого псевдохарактера на подгруппу D центра группы $\tilde{S}$ обращается в нуль. Обратно, если псевдохарактер на группе $\tilde{S}$ обращается в нуль на D, то он определяет псевдохарактер на S. (Дискретную группу D можно рассматривать как подгруппу конечно порождённой свободной абелевой группы, соответствующей прямому произведению центров конечного числа односвязных простых групп эрмитово-симметричного типа, и следовательно, D — свободная группа, ранг которой не превосходит ранга центра $\tilde{S}$.)

Из теорем 4.4–4.10 следует, что единственные простые факторгруппы Ли данной полупростой группы Ли, способные давать ненулевой вклад как в обычную вторую непрерывную вещественную группу ван Эста, так и во вторую непрерывную вещественную ограниченную когомологию, — это факторгруппы, связанные с эрмитовыми симметрическими пространствами (см. [109, Глава III,

§ 7.5] и [240]). Рассмотрим пример простой группы такого типа, иллюстрирующий теоремы 4.9 и 4.10.

Пример 4.3. Если T — простая группа Ли с конечным центром, и если T связано с эрмитовым симметрическим пространством, то коцикл Гишарде–Вигнера на T определяет нетривиальный элемент как обычной второй непрерывной вещественной группы когомологий Ван Эста (эта группа одномерна, см. [109, Глава III, Предложение 7.5]), так и второй непрерывной вещественной ограниченной группы когомологий, в то время как на сомножителе T [233, 238, 240] нет нетривиальных псевдохарактеров, и, следовательно, ядро $\tilde{H}^2(T)$ естественного отображения этих групп когомологий тривиально. Таким образом, в рассматриваемом случае вклад множителя T в каждую из этих групп когомологий (как в обычной группе ван Эста, так и в ограниченной группе когомологий) одномерен, а вклад в ядро $\tilde{H}^2(T)$ тривиален. Напротив, если центр группы T бесконечен, что означает, что $T = \tilde{T}$, то коцикл Гишарде–Вигнера определяет нетривиальный псевдохарактер на $\tilde{T}$, и этот псевдохарактер единственен с точностью до скалярного кратного; следовательно, ядро $\tilde{H}^2(T)$ естественного отображения $\hat{H}^2(T) \to H^2(T)$ одномерно. В то же время из теоремы Леви–Мальцева следует, что $H^2(T) = 0$ (используя только аппарат когомологий, можно рассмотреть коммутатор подгруппы $P = [K_T, K_T]$ аналитической группы K_T и применить очевидный аналог предложения 7.5 из [109, Гл. III] вместе с теоремой Ван Эста [109, Гл. III, Следствие 7.2] к группе P, а не к максимальной компактной подгруппе K_T, что влечёт формулу $H^*(G) = H^*(\mathfrak{t}, \mathfrak{p})$ для алгебр Ли $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{p}$ групп T и P, соответственно, что приводит к той же теореме о тривиальности). Следовательно, если центр бесконечен, то группа $H^2(T)$ тривиальна, а группы $\hat{H}^2(T)$ и $\tilde{H}^2(T)$ одномерны.

4.9. Конечномерность группы $\hat{H}^2(G)$ для любой почти связной локально компактной группы G

Теперь мы можем доказать теорему о конечности для размерности второй ограниченной вещественной непрерывной группы когомологий произвольной связной локально компактной группы. Этот результат усиливается ниже, см. Теорему 4.2.

Теорема 4.11. *Пусть G — связная локально компактная группа. Вторая ограниченная вещественная непрерывная группа когомологий $\hat{H}^2(G)$ является конечномерной.*

Доказательство. Это утверждение немедленно следует из теоремы 4.9 и леммы 4.2 вместе с теоремой о конечности для групп Ли Ван Эста о когомологиях [109, Следствие III, 7.3]. □

В заключение мы распространим теорему о конечности на случай почти связных локально компактных групп. Сначала докажем соответствующий вариант леммы 4.3. Для почти связной локально компактной группы G мы построили (в лемме 4.2) наибольшую компактную нормальную подгруппу $K(G)$, а факторгруппа $G/K(G)$ является группой Ли с конечным числом связных компонент.

Лемма 4.4. *Пусть G — почти связная локально компактная группа, а f — действительный непрерывный 2-коцикл на G. Этот коцикл когомологичен некоторому действительному непрерывному 2-коциклу g на G, постоянному на любом смежном классе наибольшей компактной нормальной подгруппы $K(G)$. Если коцикл f ограничен, то g также ограничен.*

Доказательство. Рассуждение такое же, как в доказательстве леммы 4.3. □

Теперь усилим теорему 4.11.

Теорема 4.12. *Для любой почти связной локально компактной группы G группы когомологий $H^2(G)$ (в смысле Ван Эста) и $\hat{H}^2(G)$ конечномерны.*

Доказательство. Из теоремы 4.4 следует, что векторное пространство $QP(G_0)$ конечномерно. В этом случае векторное пространство $QP(G)$ также конечномерно. Действительно, если два непрерывных вещественных псевдохарактера на G совпадают на G_0, то их разность является псевдохарактером на конечной группе G/G_0, т.е. нулевой функцией. Следовательно, пространство $\tilde{H}^2(G)$, изоморфное $QP(G)$, также конечномерно. Утверждение следует теперь из теоремы 4.2 и теоремы о конечности когомологий Ван Эста для групп Ли с конечным числом компонент связности [109, Глава III, Следствие 7.3]. □

Пусть G — почти связная локально компактная группа, а f — локально ограниченный псевдохарактер на G. Пусть N — максимальная компактная нормальная подгруппа группы G (см. лемму 4.2 из [129]). Тогда факторгруппа

$H = G/N$ является группой Ли. Поскольку f локально ограничен, а N компактна, то ограничение f на N ограничено, а значит, равно нулю по теореме 4.1. Следовательно, существует локально ограниченный псевдохарактер φ на H такой, что $f = \varphi \circ \pi$, где π обозначает канонический эпиморфизм G на G/N, а φ непрерывен по теореме 4.1. Очевидно, что H является почти связной группой Ли. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 4.5. *Каждый локально ограниченный псевдохарактер на почти связной локально компактной группе однозначно определяется локально ограниченным псевдохарактером на почти связной факторгруппе Ли H группы G, не имеющей компактных нормальных подгрупп.*

Локально ограниченный псевдохарактер на связной группе Ли автоматически непрерывен по теореме 4.1. По этой причине мы формулируем основную теорему для непрерывных псевдохарактеров на почти связных группах Ли. Вспомним теорему о дополнении Донг Хуна Ли [148, теорема а 2.13]): каждая почти связная локально компактная группа G со связной компонентой G_0 (т.е. локально компактная группа G, для которой факторгруппа G/G_0 является компактной) допускает вполне несвязную компактную подгруппу D такую, что $G = G_0 D$. Заметим, что если H — группа Ли, то H/H_0 — вполне несвязная группа Ли и, следовательно, является дискретной, что влечет конечность H/H_0. Тогда, по лемме 2.12 из [148], существует дополнение для H_0, т.е. конечная подгруппа D из H такая, что $H = H_0 D$, где H_0 обозначает связную компоненту H.

Теорема 4.13. *Пусть H — почти связная группа Ли, пусть H_0 — ее связная компонента единицы. Вещественное векторное пространство псевдохарактеров на H находится в естественном взаимно однозначном соответствии с пространством псевдохарактеров на H_0, определяемом ограничением псевдохарактеров на H на H_0. Пусть φ — локально ограниченный* (*т.е. непрерывный*) *псевдохарактер на H. Пусть D — упомянутое выше дополнение для H_0 в H* (см. [148, теорема 2.13])) *и пусть ψ — ограничение φ на H_0. Выберем некоторое представление каждого элемента $h \in G$ в виде $h = h_0 d$, где $h_0 \in H_0$ и $d \in D$. Тогда формула*

$$F(h) = \psi(h_0), \quad h = h_0 d,$$

корректно определяет квазихарактер на H. Псевдохарактер, соответствующий F по теореме 4.1 *— это φ* [271].

Доказательство. Пусть $h = h_0 d$ и $h' = h_0' d'$ — два элемента H в выбранных формах. Тогда

$$hh' = h_0 d h_0' d' = h_0 d h' h_0' d^{-1} dd' = (h_0 d h_0' d^{-1}) dd' = (h_0 d h_0' d^{-1}) dd' d''^{-1} d'',$$

где $(h_0 d h_0' d^{-1}) dd' d''^{-1} d''$ — выбранное представление соответствующего элемента H с $(h_0 d h_0' d^{-1}) dd' d''^{-1} \in H_0$. Поэтому, поскольку f обращается в нуль на D, то есть

$$\begin{aligned} F(hh') = \psi((h_0 d h_0' d^{-1}) dd' d''^{-1}) = \\ = (\psi((h_0 d h_0' d^{-1}) dd' d''^{-1}) - \psi(h_0 d h_0' d^{-1}) - \psi(dd' d''^{-1}) + \psi(h_0 d h_0' d^{-1}) = \\ = (\psi((h_0 d h_0' d^{-1}) dd' d''^{-1}) - \psi(h_0 d h_0' d^{-1}) - \psi(dd' d''^{-1}) + \\ + (\psi(h_0 d h_0' d^{-1}) - \psi(h_0) - \psi(d h_0' d^{-1})) + \psi(h_0) + \psi(h_0') = \\ = (\psi((h_0 d h_0' d^{-1}) dd' d''^{-1}) - \psi(h_0 d h_0' d^{-1}) - \psi(dd' d''^{-1}) + \\ + (\psi(h_0 d h_0' d^{-1}) - \psi(h_0) - \psi(h_0')) + \psi(h_0) + \psi(h_0'), \end{aligned}$$

из-за внутренней инвариантности ψ. Таким образом, $|F(hh') - F(h) - F(h')|$ не превосходит двух дефектов псевдохарактера φ и, таким образом, ограничен на $H \times H$, что доказывает, что F действительно является квазихарактером на H. Для выбранного представления $h = h_0 d \in G$, $h_0 \in H_0$, $d \in D$, мы видим, что $|\varphi(h) - F(h)| = |\varphi(h_0 d) - \varphi(h_0) - \varphi(d)|$ не превосходит дефекта f; поскольку разница между псевдохарактером φ и квазихарактером F ограничена, то φ — это псевдохарактер, определяемый квазихарактером F на H по теореме 4.1. Это завершает доказательство теоремы. □

Теорема 4.14. *Пусть H — почти связная группа Ли, а φ — локально ограниченный* (*т.е. непрерывный*) *псевдохарактер на H. Пусть D — дополнение к H_0 в H* (см. [148, теорема 2.13]), *и пусть ψ — ограничение φ на H_0. Пусть q — порядок D. Тогда*

$$\varphi(h_0 d) = q^{-1} \psi\left(\prod_{k=0}^{q-1} d^k h_0 d^{-k}\right), \qquad h_0 \in G_0, \quad d \in D. \tag{4.22}$$

Доказательство. Найдем псевдохарактер на H, соответствующий квазихарактеру F явно. Пусть $h = h_0 d \in H$ — выбранное представление элемента $h \in H$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — положительное целое число. Тогда

$$F(h^n) - F\left(\prod_{k=0}^{n-1} d^k h_0 d^{-k}\right) = F\left(\prod_{k=0}^{n-1} d^k h_0 d^{-k} \cdot d^n\right) - F\left(\prod_{k=0}^{n-1} d^k h_0 d^{-k}\right)$$

не превышает дефект F, а значит, ограничен. Следовательно,

$$\varphi(h) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\psi\left(\prod_{k=0}^{n-1} d^k h_0 d^{-k}\right). \tag{4.23}$$

Поскольку $d^q = e_D = e_G$, то для $n = pq + r$, где $r = r(n) \in \{0.1. \dots, q-1\}$, имеем

$$\psi\left(\prod_{k=0}^{n-1} d^k h_0 d^{-k}\right) = \psi\left(a^p \prod_{k=0}^{r-1} d^k h_0 d^{-k}\right), \tag{4.24}$$

где произведение в правой части равно e, если $r = 0$ и

$$a = \prod_{k=0}^{q-1} d^k h_0 d^{-k}. \tag{4.25}$$

Объединяя (4.24) и (4.25), мы видим, что абсолютное значение

$$\psi\left(\prod_{k=0}^{n-1} d^k h_0 d^{-k}\right) - p\psi(a) - \psi\left(\prod_{k=0}^{r} d^k h_0 d^{-k}\right) \tag{4.26}$$

ограничено дефектом псевдохарактера ψ. Конечно, последний член в (4.26) ограничен. Следовательно, предел выражения в (4.26) равен пределу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n - r(n))/q}{n}\psi(a) = (1/q)\psi(a),$$

что и требовалось доказать. □

4.10. Квазипредставления групп

4.10.1. Определение и основные свойства

Определение 4.3 ([229]). Пусть S — полугруппа, E — топологическое векторное пространство. Отображение T полугруппы S в алгебру $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E называется *квазипредставлением* (точнее, U-*квазипредставлением*, где U — данное равностепенно непрерывное семейство в $L(E)$) полугруппы S в E, если семейство $U(T)$, определяемое равенством

$$U(T) = \{T(s_1 s_2) - T(s_1)T(s_2) \mid s_1, s_2 \in S\},$$

равностепенно непрерывно (соответственно, если $U(T)$ содержится в U).

Если ЛВП E метризуемо и d — некоторая метрика в E, а $\varepsilon > 0$, то отображение T называется ε-квазипредставлением относительно метрики d, если

$$d(T(s_1 s_2)x, T(s_1)T(s_2)x) \leqslant \varepsilon d(x,0), \quad s_1, s_2 \in S, \quad x \in E,$$

а число ε называется *дефектом* или *точностью* квазипредставления T.

Определение 4.4. Пусть G — топологическая группа, e — единичный элемент в G, B — банахово пространство, $\mathscr{L}(B)$ — алгебра ограниченных линейных операторов в B, 1_B — единичный оператор в B. Группа G называется *устойчиво представимой* в B, если для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует число $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: если T — слабо непрерывное δ-квазипредставление группы G в B обратимыми операторами, удовлетворяющее условиям $T(e) = 1_B$, $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$ и $\|T(g)\| \leqslant C$ для всех $g \in G$, то существует такое слабо* непрерывное представление R группы G в B^*, что $\|T(g)^* - R(g)\| \leqslant \varepsilon$ для всех $g \in G$, т.е. отображение T^* является ε-возмущением обычного (слабо* непрерывного) представления группы G.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.15 ([232]). *Любая аменабельная локально компактная группа устойчиво представима в любом банаховом пространстве.*

Эта теорема является следствием результатов Б. Джонсона об аменабельных банаховых алгебрах и ниже усилена.

Лемма 4.6 (см. [235]). *Пусть G — группа, T — её неограниченное квазипредставление в банаховом пространстве $E = E_T$.*

1. *Квазипредставление T имеет хотя бы одну неограниченную орбиту.*

2. *T-орбита вектора $(T(gh) - T(g)T(h))x$ ограничена для любых $g, h \in G$ и любого вектора $x \in E$. В частности, если все ненулевые T-орбиты неограничены, то T — обычное представление.*

3. *Пусть L — векторное подпространство E, образованное такими элементами $x \in E$, что орбита $O_T(x) = \{T(g)x,\ g \in G\}$ ограничена. Снабдим L нормой $\|x\|_L = \sup_{g \in G} \|T(g)x\|$, $x \in E$, где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_E$. Тогда тождественное отображение $j\colon L \to E$ непрерывно и L полно относительно нормы $\|\cdot\|_L$. Векторное подпространство $L \subset E$ инвариантно относительно всех операторов $T(g)$, $g \in G$, и выполняются соотношения*

$$\|T(g)x\|_L \leqslant \|x\|_L + \varepsilon \|x\|, \quad g \in G, \quad x \in L, \tag{4.27}$$

и

$$\|(T(k)T(l)-T(kl))x\|_L \leqslant \varepsilon\|T(l)x\|+2\varepsilon\|x\|, \quad g,k,l\in G, \quad x\in E, \tag{4.28}$$

для всех $g,k,l\in G$; *в частности,*

$$\|T(k)T(l)-T(kl)\|_L \leqslant 3\varepsilon \quad \text{для всех} \quad k,l\in G.$$

4. *Пусть* S — *квазипредставление группы* G, *являющееся ограниченным возмущением квазипредставления* T (*так что отображение* $S-T\colon G\to\mathscr{L}(E)$ *имеет ограниченный образ*). *Тогда образ оператора* $S(g)-T(g)$ *содержится в подпространстве* $L\subset E$ *для любого* $g\in G$. *В частности, если все ненулевые* T-*орбиты в* E *неограничены* (*так что* T — *обычное представление, см. утверждение* 2), *то* T *жёстко в том смысле, что если ограниченное возмущение* S *квазипредставления* T *является квазипредставлением, то* S *совпадает с* T.

Мы существенно опираемся на это утверждение ниже.

Доказательство. Утверждение 1 непосредственно следует из принципа равномерной ограниченности.

Рассмотрим утверждение 3. Очевидно, что множество L, является векторным подпространством в E (так как суммы и кратные ограниченных множеств ограничены), а $\|\cdot\|_L$ является нормой на L. Непрерывность отображения $j\colon L\to E$ также очевидна, поскольку

$$\|x\|_L=\sup_{g\in G}\|T(g)x\|\geqslant\|x\|_E, \quad x\in E.$$

Если последовательность $\{x_n\}$, $x_n\in L$, фундаментальна в L, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное N, что

$$\|T(g)x_n-T(g)x_m\|_E\leqslant\varepsilon \quad \text{для всех} \quad g\in G \quad \text{и всех} \quad n,m>N.$$

Следовательно, для любого $g\in G$ существует такой вектор $y(g)\in E$, что $\|T(g)x_n-y(g)\|\leqslant\varepsilon$ для всех $n>N$. Однако, $T(g)x_n\to T(g)x$, где $x=\lim x_n$ (напомним, что если $\{x_n\}$ фундаментальна в L, то она фундаментальна и в E). Отсюда следует, что $\|T(g)x_n-T(g)x\|\leqslant\varepsilon$ для всех $n>N$, или $\|x_n-x\|_L\leqslant\varepsilon$ при $n>N$, а это доказывает полноту L.

Для доказательства соотношения (4.27) воспользуемся основным неравенством $\|T(h)T(k)-T(hk)\|\leqslant\varepsilon$, или $\|T(h)T(k)x-T(hk)x\|\leqslant\varepsilon\|x\|$. Если $x\in L$, то отсюда сразу следует справедливость цепочки неравенств

$$\|T(h)(T(k)x)\|\leqslant\|T(hk)x\|+\varepsilon\|x\|\leqslant\|x\|_L+\varepsilon\|x\|\leqslant(1+\varepsilon)\|x\|_L,$$

что доказывает одновременно и инвариантность L относительно $T(h)$ для любого $h \in G$, и соотношение (4.27).

Для доказательства соотношения (4.28) рассмотрим тождество

$$T(g)(T(k)T(l) - T(kl)) =$$
$$= (T(g)T(k) - T(gk))T(l) + (T(gk)T(l) - T(gkl)) + (T(gkl) - T(g)T(kl)). \quad (4.29)$$

Применим (4.29) к $x \in E$ и оценим норму. Для любых $g,k,l \in G$ и $x \in E$ получаем

$$\|T(g)(T(k)T(l) - T(kl))x\| \leqslant \varepsilon \|T(l)x\| + 2\varepsilon \|x\|.$$

По определению нормы в L отсюда следует неравенство

$$\|(T(k)T(l) - T(kl))x\|_L \leqslant \varepsilon \|x\|_L + 2\varepsilon \|x\|. \quad (4.30)$$

Это доказывает соотношение (4.28).

Заметим теперь, что, в частности, соотношение (4.28) доказывает первую часть утверждения 2, а вторая часть утверждения 2 сразу следует из первой части этого утверждения.

Рассмотрим утверждение 4. Пусть S — квазипредставление группы G, являющееся ограниченным возмущением квазипредставления T, $R = T - S$ ограничено. Тогда множество

$$\{T(gh) - T(g)T(h) = S(gh) + R(gh) - S(g)S(h) - S(g)R(h) -$$
$$- R(g)S(h) - R(g)R(h), \; g,h \in G\}$$

ограничено. Отсюда следует ограниченность множества $\{S(g)R(h) + R(g)S(h), g,h{\in}G\}$. При любом фиксированном $h \in G$ это означает, что множество $\{S(g)R(h)x, \; g{\in}G\}$ ограничено для любого $x \in E$. Таким образом, $R(h)x \in L$ для всех $g \in G$ и $x \in E$. Это завершает доказательство леммы. □

Как отмечено в [235], при доказательстве существования обычного представления, близкого к неограниченному непрерывному квазипредставлению с малым дефектом нельзя непосредственно воспользоваться аменабельностью групповой алгебры. Может показаться возможным использовать аменабельность групповых алгебр с весом. Аменабельность таких алгебр действительно имеет место для некоторых аменабельных локально компактных групп и некоторых весов, но класс аменабельных алгебр с весом невелик. В частности, в [106] показано, что если G — локально компактная группа и неотрицательный непрерывный вес ω на G субмультипликативен (т.е. $\omega(st) \leqslant \omega(s)\omega(t)$, $s,t \in G$), то банахова алгебра $L^1(G,\omega)$ аменабельна тогда и только тогда, когда группа G аменабельна и $\sup\{\omega(g)\omega(g^{-1}) \mid g \in G\} < \infty$, и в этом случае банахова алгебра $L^1(G,\omega)$ изоморфна групповой алгебре $L^1(G)$ [218].

4.10.2. Операции над ε-квазипредставлениями

Для ε-квазипредставлений естественным образом определена операция прямой суммы (в подходящей прямой сумме пространств ε-квазипредставлений), а для ограниченных ε-квазипредставлений в нормированных пространствах (т.е. ε-квазипредставлений T, удовлетворяющих условиям $\|T(s)\| \leqslant C$ для всех $s \in S$ и для некоторого $C > 0$) естественно определена и операция тензорного произведения (в подходящем тензорном произведении пространств ε-квазипредставлений), и тензорное произведение ε-квазипредставления и δ-квазипредставления в гильбертовых пространствах (с образами в шарах радиусов C_ε и C_δ, соответственно) является σ-квазипредставлением, где $\sigma = \delta C_\varepsilon + \varepsilon C_\delta + \varepsilon\delta$, и его образ содержится в шаре радиуса $C_\varepsilon C_\delta$.

Далее, если X — некоторое множество, Ω — некоторая σ-алгебра его подмножеств, μ — мера на σ-алгебре Ω, $(H(x), x \in X)$ — измеримое поле сепарабельных гильбертовых пространств (см., например, [73]) и $(T(x), x \in X)$ — измеримое равномерно ограниченное поле ε-квазипредставлений (т.е. $T(x)$ — ε-квазипредставление группы G в гильбертовом пространстве $H(x)$ при каждом $x \in X$ и для любого $g \in G$ операторное поле $(T(x)(g), x \in X)$ равномерно ограничено и измеримо), то в прямом интеграле гильбертовых пространств $\mathscr{H} = \int_X H(x)\, d\mu(x)$ семейство операторов $\{T(g), g \in G\}$, определяемых как прямые интегралы

$$T(g) = \int_X T(x)(g)\, d\mu(x), \quad g \in G,$$

определяет ε-квазипредставление (более точно, σ-квазипредставление, где σ — существенная верхняя грань измеримой функции E, которая определяется формулой

$$E(x) = \sup\{\|T(x)(gh) - T(x)(g)T(x)(h)\| \mid g,h \in G\} \quad \text{для} \quad x \in X,$$

причём $\sigma = \operatorname{ess\,sup} E \leqslant \varepsilon$).

Очевидно, что ограничение ε-квазипредставления на подгруппу является δ-квазипредставлением с некоторым $\delta \leqslant \varepsilon$.

Кроме того, если G — сепарабельная локально компактная группа, H — её замкнутая подгруппа и T — ε-квазипредставление группы H в нормированном пространстве E, то в пространстве $L^2(H \setminus G)$ измеримых E-значных вектор-функций на однородном пространстве $H \setminus G$ с суммируемым квадратом относительно квазиинвариантной меры ν на $H \setminus G$ действует ε-квазипредставление V^T группы G, определяемое формулой

$$V^T(g)f(x) = T(h(x,g))\theta(x,g)f(x(g)), \quad f \in L^2(H \setminus G),\ g \in G,\ x \in H \setminus G,$$

где $x(g)$ — точка однородного пространства $H \setminus G$, в которую переходит точка $x \in H \setminus G$ при правом действии элемента $g \in G$, $\theta(x,g) \geqslant 0$ — квадратный корень из производной Радона–Никодима образа квазиинвариантной меры $d\nu(x)$ при действии элемента $g \in G$ на $H \setminus G$ по исходной мере $d\nu(x)$, а множитель $T(h(x,g))$ определяется с помощью формулы $X(x)g = h(x,g)X(x(g))$, где $X\colon H \setminus G \to G$ — такое борелевское сечение, что образ элемента $X(x)$ при каноническом отображении G на $H \setminus G$ равен x для всех $x \in H \setminus G$ [153]. Эту операцию естественно называть операцией *квазииндуцирования*, а ε-квазипредставление V^T — *ε-квазипредставлением группы G, квазииндуцированным ε-квазипредставлением T подгруппы H группы G.*

4.10.3. Непрерывные почти гомоморфизмы групповых алгебр и ограниченные измеримые ε-квазипредставления локально компактных групп

Теорема 4.16. *Семейство ограниченных измеримых ε-квазипредставлений локально компактной группы в сепарабельных банаховых пространствах связано с введённым Джонсоном семейством* (см. [132–137]) *почти гомоморфизмов* (*или обобщенных гомоморфизмов*) *групповой алгебры этой локально компактной группы с помощью интегрального соотношения, связывающего ограниченные представления этой группы и её групповой алгебры в банаховых пространствах.*

Доказательство. Действительно, если π — скалярно измеримое и существенно ограниченное (т.е. удовлетворяющее условию $\|\pi(g)\| \leqslant C$ для почти всех $g \in G$ по мере Хаара и для некоторого $C > 0$) существенное ε-квазипредставление локально компактной группы G в сепарабельном банаховом пространстве E (естественно, отображение π локально компактной группы G в пространство ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве называется *существенным ε-квазипредставлением*, если соотношение $\|\pi(g_1g_2) - \pi(g_1)\pi(g_2)\| \leqslant \varepsilon$ выполняется для почти всех $g_1,g_2 \in G$), и если $\mathscr{L}(E)$ — алгебра ограниченных линейных операторов в E, то формула

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)\,dg, \quad f \in L_1(G),$$

где dg — левоинвариантная мера Хаара на G, определяет $LMNM$-отображение групповой алгебры $L_1(G)$, т.е. такое линейное отображение $\pi\colon L_1(G) \to \mathscr{L}(E)$, которое близко к мультипликативному отображению, а именно,

$$\|\pi(f_1 * f_2) - \pi(f_1)\pi(f_2)\| \leqslant \varepsilon \|f_1\|\|f_2\| \quad \text{для всех} \quad f_1,f_2 \in L_1(G).$$

Справедливость этого неравенства следует из очевидной оценки

$$\begin{gathered}
\|\pi(f_1 * f_2) - \pi(f_1)\pi(f_2)\| = \\
= \left\| \int_G (f_1 * f_2)(g)\pi(g)\,dg - \int_G f_1(g_1)\pi(g_1)\,dg_1 \int_G f_2(g_2)\pi(g_2)\,dg_2 \right\| = \\
= \left\| \int_G \int_G (f_1(h) f_2(h^{-1}g)\,dh)\pi(g)\,dg - \int_G f_1(g_1)\pi(g_1)\,dg_1 \int_G f_2(g_2)\pi(g_2)\,dg_2 \right\| = \\
= \left\| \int_G \int_G f_1(g_1) f_2(g_2)(\pi(g_1g_2) - \pi(g_1)\pi(g_2))\,dg_1dg_2 \right\| \leqslant \\
\leqslant \int_G \int_G |f_1(g_1)|\,|f_2(g_2)|\,\|\pi(g_1g_2) - \pi(g_1)\pi(g_2)\|\,dg_1dg_2,
\end{gathered}$$

$f_1,f_2 \in L_1(G)$, где вычисление оправдывается неравенством между нормой интеграла и интегралом нормы [75]. (Напомним, что пространство E предполагается сепарабельным, и поэтому слабая измеримость отображения π равносильна сильной измеримости, и функция $g \mapsto \|\pi(g)\|$, $g \in G$, автоматически оказывается измеримой как верхняя грань последовательности измеримых функций [75].)

Обратно, пусть S — ε-почти гомоморфизм групповой алгебры $L_1(G)$ сепарабельной локально компактной группы G в алгебру $\mathscr{L}(E)$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве E, которое является сопряжённым к некоторому банахову пространству E_* (вообще говоря, не определённому однозначно), т.е. предположим, что отображение S линейно, непрерывно и удовлетворяет условию

$$\|S(f_1*f_2)-S(f_1)S(f_2)\|\leqslant\varepsilon\|f_1\|\|f_2\|$$

для некоторого $\varepsilon>0$ и всех $f_1,f_2\in L_1(G)$.

Так как S непрерывно, то образ отображения S сепарабелен. Поэтому [75, следствие VI.8.7] существует такое отображение π группы G в пространство $\mathscr{L}(E)$, что для любых $\xi\in E$ и $\eta\in E^*$ функция

$$g\mapsto(\pi(g)\xi,\eta),\quad g\in G,$$

измерима и существенно ограничена, причем

$$(S(f)\xi,\eta)=\int_G f(g)(\pi(g)\xi,\eta)\,dg,\qquad \xi\in E,\quad \eta\in E^*,$$

а норма отображения S равна существенной верхней грани функции $g\mapsto\|\pi(g)\|$, $g\in G$ (что следует из [75, теорема VI.8.2] с учетом того, что банахово пространство $\mathscr{L}(E)$ изометрично банахову пространству, сопряжённому проективному тензорному произведению E_* и E, ср. [203]). Тогда соотношение

$$\|S(f_1*f_2)-S(f_1)S(f_2)\|\leqslant\varepsilon\|f_1\|\|f_2\|$$

принимает вид неравенства

$$\begin{gathered}\sup\bigl\{|((S(f_1*f_2)-S(f_1)S(f_2))\xi,\eta)|\bigm|\xi,\eta\in E,\ \|\xi\|\leqslant 1,\ \|\eta\|\leqslant 1\bigr\}=\\ =\sup\left\{\left|\int_G\int_G f_1(g)f_2(h)((\pi(gh)-\pi(g)\pi(h))\xi,\eta)\,dgdh\right|\,\middle|\,\|\xi\|,\|\eta\|\leqslant 1\right\}\leqslant\\ \leqslant\varepsilon\,\|f_1\|\,\|f_2\|,\end{gathered}$$

из которого следует, что для любых $\xi,\eta\in E$ существенная верхняя грань функции

$$\{g,h\}\mapsto|((\pi(gh)-\pi(g)\pi(h))\xi,\eta)|$$

не превосходит $\varepsilon\|\xi\|\,\|\eta\|$, так что

$$\operatorname{ess\,sup}_{g,h\in G}\|\pi(gh)-\pi(g)\pi(h)\|\leqslant\varepsilon.\qquad\square$$

4.11. Псевдопредставления

4.11.1. Определение псевдопредставления

Теорема об устойчивой представимости для аменабельных групп показывает, что ограничение любого ограниченного квазипредставления с малым дефектом на аменабельную подгруппу — в частности, на подгруппу, порожденную одним элементом — допускает аппроксимацию обычным ограниченным представлением подгруппы. Конечно, аппроксимирующее представление, вообще говоря, не определено однозначно (в [232] приведен пример двумерного квазипредставления группы $\mathbb{Z}$, для которого аналог явной формулы из [113] приводит к представлению, зависящему от выбора инвариантного среднего на $\mathbb{Z}$), но близкие представления аменабельной группы подобны с помощью оператора, близкого к единице, по теореме 4.18, приведенной ниже. Этот факт позволяет ввести следующее определение.

Определение 4.5 [229]. Пусть G — группа, $\varepsilon,\sigma > 0$, а π — ε-квазипредставление группы G в банаховом пространстве E. Отображение π называется $\sigma-\varepsilon$-*псевдопредставлением*, если $\pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$ для всех $g \in G$ и для всех $g \in G$ и всех $n \in \mathbb{Z}$ существует такой линейный оператор $A(n,g)$ в $L(E^*)$, что

$$\|A(n,g) - \mathbf{1}_{E^*}\| \leqslant \sigma, \quad \pi(g^n)^* = A(n,g)(\pi(g)^*)^n A(n,g)^{-1}, \quad g \in G, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\|\cdot\|$ — операторная норма в $L(E^*)$, а $\mathbf{1}_{E^*}$ — единичный оператор в E^*.

Определение 4.6 [232]. Пусть G — группа, E — банахово пространство. Группа G называется устойчиво псевдопредставимой в банаховом пространстве E, если для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если π — δ-квазипредставление группы G в E обратимыми операторами, удовлетворяющее условиям $\|\pi(g)\| \leqslant C$, $\|\pi(g)^{-1}\| \leqslant C$ для всех $g \in G$, то существует такое $\varepsilon C - \varepsilon$-псевдопредставление ρ группы G в E^*, что $\|\pi(g)^* - \rho(g)\| \leqslant \varepsilon$ для всех $g \in G$.

"Подкручивание" $A(n,g)$, введенное в предыдущем определении 4.5, существенно в определении 4.6, как показывает пример в [232].

Теорема 4.17 [232]. *Любая группа устойчиво псевдопредставима в любом банаховом пространстве.*

Доказательство. Доказательство сразу следует из теоремы 4.15 об аппроксимации квазипредставлений примененной к циклическим (и потому аменабельным) подгруппам $G(g)$ и $G(g^n)$, порождённым элементами g и g^n, $n \in \mathbb{Z}$, для всех $g \in G$. Ограничение полученного представления π группы $G(g)$ на подгруппу $G(g^n)$ равномерно мало отличается от соответствующего представления ρ группы $G(g^n)$, поэтому представления $\pi|_{G(g^n)}$ и ρ группы $G(g^n)$ подобны с помощью оператора, близкого к единичному по следующей теореме 4.18. □

Теорема 4.18. 1. *Пусть G — аменабельная группа, π и ρ — представления группы G в банаховом пространстве E, сопряженном к банахову пространству E_*. Если $\|\pi(g)\| \leqslant C$ и $\|\rho(g)\| \leqslant C$ для всех $g \in G$ и $\|\pi(g) - \rho(g)\| \leqslant \delta$ для всех $g \in G$ и для некоторого $C > 0$, и если $C\delta < 1$, то представления π и ρ подобны с помощью оператора A, для которого норма $\|A - 1_E\|$ мала при малом $C\delta$.*

2. *Пусть G — группа, π и ρ — конечномерные чистые псевдопредставления группы G в пространстве E. Если $\|\pi(g)\| \leqslant C$ и $\|\rho(g)\| \leqslant C$ для всех $g \in G$ и $\|\pi(g) - \rho(g)\| \leqslant \delta$ для всех $g \in G$, и если $C\delta < 1$, то для любого $g \in G$ операторы псевдопредставлений π и ρ подобны с помощью оператора $A(g)$, для которого норма $\|A(g) - 1_E\|$ мала при малом $C\delta$. В частности, характеры псевдопредставлений π и ρ совпадают.*

Доказательство. Из условия следует, что $\|\pi(g)\rho(g^{-1}) - 1_E\| \leqslant C\delta$ для всех $g \in G$. Применяя инвариантное среднее к функции

$$g \mapsto ((\pi(g)\rho(g^{-1}) - 1_E)x)(f), \qquad x \in E, \quad f \in E_*,$$

получаем линейный оператор B в E, для которого $\pi(h)A\rho(h^{-1}) = A$ для всех $h \in G$ и $\|A - 1_E\| \leqslant C\delta < 1$. Таким образом, $\pi(h)A = A\rho(h)$ для всех $h \in G$. Это доказывает 1.

2 следует из 1, примененного к циклической подгруппе, порожденной элементом $g \in G$. □

4.11.2. Чистые псевдопредставления

Основной недостаток определения псевдопредставления состоит в отсутствии естественной процедуры усреднения, оставляющей данное псевдопредставление на месте. Этого недостатка лишено следующее понятие, выделяющее важный узкий класс псевдопредставлений, для которого $A \equiv 1$. Этот класс представляет особый интерес для свободных групп, односвязных групп Ли и для полупростых групп Ли, достаточно богат для решения некоторых задач лифтинга и деформации представлений групп (см. [246, 250]).

Определение 4.7. Квазипредставление π группы G называется *чистым псевдопредставлением*, если ограничение π на любую аменабельную подгруппу H группы G является обычным представлением группы H.

Простейшими и важнейшими примерами чистых псевдопредставлений являются экспоненты от псевдохарактеров, которые рассматриваются в разделе об одномерных квазипредставлениях групп.

4.11.3. Структура конечномерных квазипредставлений групп

Конечномерные квазипредставления групп устроены следующим образом.

Теорема 4.19 ([232]). *Пусть G — группа, а T — квазипредставление группы G в конечномерном векторном пространстве E_T. Пусть E_T^* — пространство, сопряжённое к E_T. Пусть L — множество векторов $\xi \in E_T$, орбита которых $\{T(g)\xi \mid g \in G\}$ ограничена в E; пусть M — множество функционалов $f \in E_T^*$, орбита которых $\{T(g)^* f \mid g \in G\}$ ограничена в E_T^*; тогда L и аннулятор $M^\perp$ — T-инвариантные векторные подпространства в E_T. Рассмотрим возрастающий набор подпространств $\{0\}$, $L \cap M^\perp$, $M^\perp$, $L + M^\perp$, $E = E_T$ и запишем матрицу $t(g)$ оператора $T(g)$, $g \in G$, в блочной форме, отвечающей разложению пространства E в прямую сумму подпространств $L \cap M^\perp$, $M^\perp \setminus (L \cap M^\perp)$, $L \setminus (L \cap M^\perp)$, и $E \setminus (L + M^\perp)$, где символ “$\setminus$” означает взятие дополнительного подпространства*:

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G. \tag{4.31}$$

(*Здесь $t_{23}(g) = 0$, так как L инвариантно относительно T.*)

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *отображения* α, δ, γ, σ *и* χ *ограничены*;

2) *матричнозначные отображения* t_1 *и* t_2, *определяемые равенствами*

$$t_1(g)=\begin{pmatrix}\alpha(g) & \varphi(g)\\ 0 & \beta(g)\end{pmatrix}, \quad t_2(g)=\begin{pmatrix}\beta(g) & \rho(g)\\ 0 & \delta(g)\end{pmatrix}$$

являются представлениями группы G;

3) *отображение* τ *является квазикоциклом относительно представлений* t_1 *и* t_2, *т.е. отображение*

$$(g,h)\mapsto \tau(gh)-\alpha(g)\tau(h)-\varphi(g)\rho(h)-\tau(g)\delta(h), \quad g,h\in G,$$

ограничено.

Обратно, конечномерное отображение, заданное формулой (4.31), *является квазипредставлением группы* G, *если условия, перечисленные в теореме, выполнены.*

Доказательство. Так как семейство операторов

$$\{T(g_1)T(g_2)-T(g_1g_2)\mid g_1,g_2\in G\}$$

ограничено, то из ограниченности множества $\{T(g)\xi\mid g\in G\}$ для некоторого вектора $\xi\in E_T$ следует, что множество $\{T(g)T(g_0)\xi\mid g\in G\}$ ограничено для любого $g_0\in G$. Следовательно, множество L является T-инвариантным. Кроме того, множество L линейно, поскольку суммы и кратные ограниченных множеств ограничены. Таким образом, L является T-инвариантным векторным подпространством в E. Аналогично доказывается, что семейство M является T^*-инвариантным векторным подпространством в E^*, откуда немедленно получаем, что его аннулятор $M^\perp\subset E$ является T-инвариантным векторным подпространством в E, так что разложение вида (4.31) имеет смысл.

Из определения подпространств L и M немедленно следует, что отображения $g\to T(g)|_L$ и $g\to T(g)^*|_M$, $g\in G$, ограничены. Отсюда следует, что отображения α, δ, γ, σ и χ, перечисленные в утверждении 1), действительно ограничены.

По определению L, соотношение $\xi\notin L$ выполняется тогда и только тогда, когда множество $\{T(g)\xi\mid g\in G\}$ не является ограниченным. В частности, при $\xi\in M^\perp\setminus L$, $\xi\neq 0$, орбита вектора ξ не является ограниченным множеством.

Следовательно, для любого ненулевого вектора ξ из $\xi \in M^{\perp} \setminus L$ либо множество $\{\varphi(g)\xi \mid g \in G\}$, либо множество $\{\beta(g)\xi \mid g \in G\}$ неограничено. В этой ситуации мы будем говорить, что выполнено (φ,β)-условие. С другой стороны, множества операторов

$$\{\varphi(gh) - \alpha(g)\varphi(h) - \varphi(g)\beta(h) \mid g,h \in G\}, \quad \{\alpha(g) \mid g \in G\}$$

ограничены, и из ограниченности множества разностей вида

$$\{\alpha(g)\varphi(hk) + \varphi(g)\beta(hk) - \alpha(gh)\varphi(k) - \varphi(gh)\beta(k) \mid g,h,k \in G\}$$

следует ограниченность множества

$$\begin{aligned} \{\alpha(g)\alpha(h)\varphi(k) + \alpha(g)\varphi(h)\beta(k) + \varphi(g)\beta(hk) - \alpha(gh)\varphi(k) - \varphi(gh)\beta(k)\} \\ = \{(\alpha(g)\alpha(h) - \alpha(gh))\varphi(k) + (\alpha(g)\varphi(h) \\ + \varphi(g)\beta(h) - \varphi(gh))\beta(k) + \varphi(g)(\beta(hk) - \beta(h)\beta(k)) \mid g,h,k \in G\}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Отображения

$$g \mapsto (\alpha(g)\alpha(h) - \alpha(gh))\varphi(k), \quad g \mapsto (\alpha(g)\varphi(h) + \varphi(g)\beta(h) - \varphi(gh))\beta(k), \quad g \in G,$$

являются ограниченными функциями от g при любых фиксированных h и k в G. Поэтому и слагаемое $\varphi(g)(\beta(hk) - \beta(h)\beta(k))$ в правой части (4.32) является ограниченной функцией от g при фиксированных h и k в G. Следовательно, функция $\varphi(g)$ ограничена на любом (ненулевом) векторе, принадлежащем образу оператора $\beta(hk) - \beta(h)\beta(k)$. Такой вектор принадлежит $M^{\perp} \setminus L$. С другой стороны, на таком векторе и функция $\beta(g)$ тоже ограничена, поскольку операторная функция

$$\begin{aligned} g \mapsto \beta(g)(\beta(hk) - \beta(h)\beta(k)) = \\ = (\beta(g)\beta(hk) - \beta(hgk)) + (\beta(ghk) - \beta(gh)\beta(k)) + (\beta(gh) - \beta(g)\beta(h))\beta(k), \quad g \in G, \end{aligned}$$

ограничена при любых фиксированных h и k в G. Из (φ,β)-условия следует тогда, что образ оператора $\beta(hk) - \beta(h)\beta(k)$ содержит только нулевой вектор в E_T при любых фиксированных h и k в G. Таким образом, β — представление группы G.

Отсюда и из (4.32) следует ограниченность множества

$$\begin{aligned} \{\alpha(g)\alpha(h)\varphi(k) + \alpha(g)\varphi(h)\beta(k) + \varphi(g)\beta(hk) - \alpha(gh)\varphi(k) - \varphi(gh)\beta(k)\} = \\ = \{(\alpha(g)\alpha(h) - \alpha(gh))\varphi(k) + (\alpha(g)\varphi(h) + \varphi(g)\beta(h) - \varphi(gh))\beta(k) \mid g,h,k \in G\}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Обозначим оператор $-\alpha(g)\alpha(h)+\alpha(gh)$ символом $\Delta_\alpha(g,h)$, а оператор

$$-\alpha(g)\varphi(h)-\varphi(g)\beta(h)+\varphi(gh)$$

— символом $\Delta_\varphi(g,h)$. Из (4.33) следует, что семейство

$$\{\Delta_\alpha(g,h)\varphi(k)+\Delta_\varphi(g,h)\beta(k)\,|\,g,h,k\in G\}$$

ограничено.

Рассмотрим семейство N пар операторов A, B (где A действует в $L\cap M^\perp$, а B отображает $M^\perp\setminus L$ в $L\cap M^\perp$), для которых семейство $\{A\varphi(k)+B\beta(k)\mid k\in G\}$ ограничено. Как доказано выше, любая пара $(A,B)=(\Delta_\alpha,\Delta_\varphi)$ принадлежит семейству N. Ясно, что если $(A,B)\in N$, то для любого линейного оператора C в пространстве $L\cap M^\perp$ пара (CA,CB) тоже принадлежит N; кроме того, очевидно, что N — линейное подпространство в пространстве пар операторов с указанным выше действием. Рассмотрим пару $(\Delta_\alpha,\Delta_\varphi)\in N$. Пусть R — линейный оператор в E_T, обращающийся в нуль на дополнении образа оператора Δ_α и определяющий такое биективное отображение образа оператора Δ_α на векторное подпространство, дополнительное к ядру этого оператора, что $R\Delta_\alpha$ — проектор на линейное подпространство, дополнительное к $\mathrm{Ker}(\Delta_\alpha)$ (такой оператор нетрудно построить с помощью некоторого скалярного произведения в E_T как подходящий многочлен от оператора $(\Delta_\alpha)^*\Delta_\alpha$). Тогда $\Delta_\alpha=\Delta_\alpha R\Delta_\alpha$. В частности, $\Delta_\alpha R$ — тоже проектор (на образ оператора Δ_α).

Оператор R удовлетворяет соотношению $\Delta_\alpha R\Delta_\varphi=\Delta_\varphi$. Действительно, пары $(\Delta_\alpha,\Delta_\varphi)$ и $(\Delta_\alpha R\Delta_\alpha=\Delta_\alpha,\Delta_\alpha R\Delta_\varphi)$ одновременно принадлежат N. Следовательно, их разность $(0,\Delta_\varphi-\Delta_\alpha R\Delta_\varphi)$ также принадлежит N, и поэтому множество элементов вида $(\Delta_\varphi-\Delta_\alpha R\Delta_\varphi)\beta(k)$, $k\in G$, ограничено, и остаётся доказать, что из этого условия следует соотношение $\Delta_\varphi-\Delta_\alpha R\Delta_\varphi=0$. Заметим с этой целью, что отображение

$$(g,h)\mapsto\tau(gh)-\alpha(g)\tau(h)-\varphi(g)\rho(h)-\tau(g)\delta(h),\quad g,h\in G,\tag{4.34}$$

ограничено (так как отображения σ и χ ограничены). Следовательно, множества

$$\{\tau(ghk)-\alpha(g)\tau(hk)-\varphi(g)\rho(hk)-\tau(g)\delta(hk),g,h,k\in G\},$$
$$\{\tau(ghk)-\alpha(gh)\tau(k)-\varphi(gh)\rho(k)-\tau(gh)\delta(k),g,h,k\in G\}$$

ограничены, и поэтому множество

$$\big\{(\alpha(gh)-\alpha(g)\alpha(h))\tau(k)+(\varphi(gh)-\alpha(g)\varphi(h)-\varphi(g)\beta(h))\rho(k)+$$
$$+\tau(g)(\delta(hk)-\delta(h)\delta(k))+\varphi(g)(\rho(hk)-\beta(h)\rho(k)-\rho(h)\delta(k)),\ g,h,k\in G\big\}$$

тоже ограничено. Из ограниченности подмножества этого множества, получаемого при переменном $g \in G$ при фиксированных $h,k \in G$, следует, что и множество

$$\{\tau(g)\Delta_\delta(h,k)+\varphi(g)\Delta_\rho(h,k) \mid g \in G\}$$

тоже ограничено при фиксированных $h,k \in G$, где положено

$$\Delta_\delta(h,k)=\delta(hk)-\delta(h)\delta(k), \quad \Delta_\rho(h,k)=\rho(hk)-\beta(h)\rho(k)-\rho(h)\delta(k)$$

при $h,k \in G$. Точно так же, из условия ограниченности при переменном $k \in G$ при фиксированных $h,g \in G$ следует, что множество

$$\{\Delta_\alpha(g,h)\tau(k)+\Delta_\varphi(g,h)\rho(k) \mid k \in G\}$$

ограничено при фиксированных $h,g \in G$. Как и выше, из этого условия следует, что множество

$$\{(\Delta_\varphi(g,h)-\Delta_\alpha(g,h)R\Delta_\varphi(g,h))\rho(k) \mid k \in G\}$$

ограничено для любых фиксированных $g,h \in G$. С другой стороны, из определения подпространства M следует, что для любого функционала f, ограничение которого на подпространство $M^\perp \setminus L$, дополняющее L в $M^\perp$, отлично от нуля, хотя бы одно из множеств $\{\beta^*(g)f \mid g \in G\}$ и $\{\rho^*(g)f \mid g \in G\}$ неограничено. Это завершает доказательство соотношения $\Delta_\varphi - \Delta_\alpha R\Delta_\varphi = 0$.

Так как множества

$$\{\beta^*(g)(\Delta_\varphi(h,k)-\Delta_\alpha(h,k)R\Delta_\varphi(h,k))^* \mid g \in G\}$$

и

$$\{\rho^*(g)(\Delta_\varphi(h,k)-\Delta_\alpha(h,k)R\Delta_\varphi(h,k))^* \mid g \in G\}$$

одновременно ограничены для любых $h,k \in G$, то образ оператора $(\Delta_\varphi(h,k)- -\Delta_\alpha(h,k)R\Delta_\varphi(h,k))^*$ состоит только из нулевого функционала для любых $h,k \in G$. Таким образом, $\Delta_\varphi(h,k)=\Delta_\alpha(h,k)R\Delta_\varphi(h,k)$ для любых $h,k \in G$. В частности, образ оператора $\Delta_\varphi(h,k)$ содержится в образе оператора $\Delta_\alpha(h,k)$ для любых $h,k \in G$.

Положим $Q=R\Delta_\varphi(h,k)$. Введём операторную матрицу

$$S=\begin{pmatrix} 1 & -Q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где каждый символ 1 означает единичный оператор в соответствующем пространстве. В базисе, получаемом из исходного базиса с помощью матрицы перехода S, матрица $t'(g)$ оператора $T(g)$, $g \in G$, имеет вид $t'(g) = S^{-1}T(g)S$, где

$$t'(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g)+Q\beta(g)-\alpha(g)Q & \sigma(g) & \tau(g)+Q\rho(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G.$$

Из этой формулы, из ограниченности отображения α и из предыдущих замечаний следует, что для функции $\varphi_1(g) = \varphi(g) + Q\beta(g) - \alpha(g)Q$, $g \in G$, множество $\{\Delta_\alpha \varphi_1(g) \mid g \in G\}$ ограничено.

Пусть $\tau_1(g) = \tau(g) + Q\rho(g)$, $g \in G$. Функция

$$k \mapsto \Delta_\alpha(g,h)\tau(k) + \Delta_\varphi(g,h)\rho(k), \quad k \in G,$$

ограничена для любых $g,h \in G$. Как и выше, отсюда следует, что функция $\Delta_\alpha(h,k)\tau_1(g)$, $g \in G$, ограничена для любых $h,k \in G$. С другой стороны, аналогично предыдущему, из определения подпространства M следует, что для любого функционала f, ограничение которого на подпространство $M^\perp \cap L$ отлично от нуля, хотя бы одно из множеств $\{\varphi_1^*(g)f \mid g \in G\}$ и $\{\tau_1^*(g)f \mid g \in G\}$ неограничено. Так как функция $g \mapsto \tau(g)\Delta_\delta(h,k) + \varphi(g)\Delta_\rho(h,k)$, $g \in G$, ограничена для любых $h,k \in G$, то, с одной стороны, τ_1 и φ_1 должны удовлетворять тем же условиям, что и операторные функции τ и φ (и, в частности, хотя бы одно из множеств $\{\varphi_1^*(g)f \mid g \in G\}$ и $\{\tau_1^*(g)f \mid g \in G\}$ должно быть неограниченным для любого функционала f с ненулевым ограничением на подпространство $M^\perp \cap L$). С другой стороны, из одновременной ограниченности функций $g \mapsto \Delta_\alpha \varphi_1(g)$ и $g \mapsto \Delta_\alpha \tau_1(g)$, $g \in G$, следует, что для всех f из образа оператора $(\Delta_\alpha(h,k))^*$ обе орбиты, $\{\varphi_1^*(g)f \mid g \in G\}$ и $\{\tau_1^*(g)f \mid g \in G\}$, одновременно ограничены. Следовательно, $\Delta_\alpha(h,k) = 0$ для любых $h,k \in G$, и α — обычное представление.

Как мы видели выше, отсюда следует, что образ отображения $\Delta_\varphi(h,k)$ (содержащийся в образе оператора $\Delta_\alpha(h,k)$) также тривиален. Следовательно, $\Delta_\varphi(h,k) = 0$, что завершает проверку того факта, что t_1 — обычное представление группы G. Применяя аналогичное рассуждение к сопряжённому представлению, мы видим, что и отображение t_2 также является обычным представлением группы G.

Обратное утверждение проверяется непосредственно.

Это завершает доказательство теоремы. □

Таким образом, изучение конечномерных квазипредставлений групп в основном сводится к изучению обычных представлений, квазипредставлений с ограниченными орбитами и квазикоциклов. Результаты, полученные в [34, 146] являются частными случаями теоремы 4.19. Некоторые результаты, родственные теореме 4.19, получены (для одномерных отображений) в [193].

Для аменабельных групп модель квазипредставления может быть упрощена [260]. Мы пользуемся этим упрощением в следующей главе.

Приведём важное для дальнейшего следствие.

Теорема 4.20 (см. [235, теорема 2.2]). *Пусть G — аменабельная группа.*

1. *Любое конечномерное ε-квазипредставление группы G есть ограниченное возмущение обычного представления.*

2. *Радиус шара, содержащего все операторы этого ограниченного возмущения, определяется числом ε и нормами ограниченных компонент квазипредставления, упомянутыми в теореме* 4.19, *и этот радиус стремится к нулю при равномерно ограниченных нормах ограниченных компонент и при $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство. Из теоремы 4.19 непосредственно следует, что отображения t_3 и t_4, определенные формулами

$$t_3(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \sigma(g) \\ 0 & \gamma(g) \end{pmatrix}, \quad t_4(g) = \begin{pmatrix} \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G, \tag{4.35}$$

ограничены и являются квазипредставлениями аменабельной группы G. Поэтому достаточно проверить оба утверждения теоремы для квазикоцикла τ. Действительно, если дефект ограниченного квазипредставления велик, то можно рассматривать это квазипредставление как ограниченное возмущение, скажем, единичного представления, а при малом дефекте оба утверждения теоремы 4.20 для отображений t_3 и t_4 следуют из теорем 4.15 и 4.19. Так как компоненты σ и χ ограничены, при этой проверке мы вправе считать их нулевыми (поскольку замена их нулями есть ограниченное возмущение исходного отображения). Так как компонента γ ограничена, мы вправе считать ее представлением (по теореме 4.15; впрочем, и замена отображения γ на отображение в единичный оператор в подпространстве $L \setminus (L \cap M^{\perp})$ есть ограниченное возмущение исходного отображения t). Если подпространство $L \cap M^{\perp}$ нульмерно, то из перечисленных выше свойств отображения t непосредственно следует, что отображение t есть ограниченное возмущение обычного представления. Фактически, достаточно установить, что τ есть ограниченное возмущение соответствующего $\{t_1,t_2\}$-коцикла в предположении, что исходное отображение имеет блочный вид:

$$t(g)=\begin{pmatrix}\alpha(g) & \phi(g) & 0 & \tau(g)\\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g)\\ 0 & 0 & \gamma(g) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta(g)\end{pmatrix}, \quad g\in G.$$

Пусть I — некоторое правоинвариантное среднее на G. Применим I по аргументу $g\in G$ к правой части (4.32), умноженной слева на ограниченную величину $\alpha(g)^{-1}=\alpha(g^{-1})$, $g\in G$. Итак, если мы введем величину ψ с помощью формулы

$$\psi(h)=I_g\big((\alpha(g)^{-1})(\tau(gh)-\phi(g)\rho(h)-\tau(g)\delta(h))\big), \qquad h\in G \tag{4.36}$$

(напомним, что это среднее имеет смысл, поскольку функция под знаком среднего в правой части (4.36) равномерно ограничена на группе G), то разность $\tau(g)-\psi(g)$, $g\in G$, — ограниченная величина (которую можно оценить с помощью величины ε и нормы отображения α). Тогда остаётся проверить, что ψ — коцикл относительно представлений t_1 и t_2, т.е. что

$$\psi(gh)=\alpha(g)\psi(h)+\phi(g)\rho(h)+\psi(g)\delta(h), \qquad g,h\in G. \tag{4.37}$$

Чтобы проверить (4.37), найдем левую часть:

$$\psi(gh)=I_k\big((\alpha(k)^{-1})(\tau(kgh)-\phi(k)\rho(gh)-\tau(k)\delta(gh))\big), \qquad g,h\in G, \tag{4.38}$$

и воспользуемся тем, что ввиду правой инвариантности I справедлива формула

$$\psi(h)=I_k\big((\alpha(kg)^{-1})(\tau(kgh)-\phi(kg)\rho(h)-\tau(kg)\delta(h))\big), \qquad g,h\in G. \tag{4.39}$$

Вычитая (4.39) из (4.38), умноженного слева на $\alpha(g)^{-1}$, и учитывая то, что α — (обычное) представление, мы находим

$$\alpha(g)^{-1}\psi(gh)-\psi(h)=I_k\Big((\alpha(kg)^{-1})\big(\phi(kg)\rho(h)+\tau(kg)\delta(h)-\\ -\phi(k)\rho(gh)-\tau(k)\delta(gh)\big)\Big), \quad g,h\in G. \tag{4.40}$$

Замечая, что t_1 и t_2 — представления группы G, и подставляя в (4.40) соответствующие выражения для функций от gh, получаем равенство

$$\alpha(g)^{-1}\psi(gh)-\psi(h)=I_k\Big((\alpha(kg)^{-1})\big((\phi(k)\beta(g)+\alpha(k)\phi(g))\rho(h)+$$
$$+\tau(kg)\delta(h)-\phi(k)(\rho(g)\delta(h)+\beta(g)\rho(h))-\tau(k)\delta(g)\delta(h)\big)\Big),\quad g,h\in G.$$

Перегруппируем слагаемые в правой части (4.40), выделяя в качестве сомножителя под знаком среднего группу слагаемых $\tau(kg)-\phi(k)\rho(g)-\tau(k)\delta(g)$ для $g,h\in G$:

$$\alpha(g)^{-1}\psi(gh)-\psi(h)=I_k\big(\alpha(kg)^{-1}\phi(k)\beta(g)\rho(h)+\alpha(g^{-1})\phi(g)\rho(h)+$$
$$+\alpha(kg)^{-1}(\tau(kg)-\phi(k)\rho(g)-\tau(k)\delta(g))\delta(h)-\alpha(kg)^{-1}\phi(k)\beta(g)\rho(h)\big)=$$
$$=I_k\big(\alpha(g^{-1})\phi(g)\rho(h)+\alpha(kg)^{-1}(\tau(kg)-\phi(k)\rho(g)-\tau(k)\delta(g))\delta(h)\big)=$$
$$=\alpha(g^{-1})\phi(g)\rho(h)+I_k\big(\alpha(kg)^{-1}(\tau(kg)-\phi(k)\rho(g)-\tau(k)\delta(g))\delta(h)\big).\qquad(4.41)$$

Первое слагаемое в правой части (4.41) совпадает с первым слагаемым в (4.37) с точностью до введенного выше множителя $\alpha(g)^{-1}$. При вычислении второго множителя воспользуемся тем, что α — представление, и перестановочностью операции взятия операторного инвариантного среднего с умножением слева и справа на линейные операторы, не зависящие от параметра $k\in G$, по которому берется среднее:

$$I_k\big(\alpha(kg)^{-1}(\tau(kg)-\phi(k)\rho(g)-\tau(k)\delta(g))\delta(h)\big)=$$
$$=I_k\big(\alpha(g)^{-1}\alpha(k)^{-1}(\tau(kg)-\phi(k)\rho(g)-\tau(k)\delta(g))\delta(h)\big)=$$
$$=\alpha(g)^{-1}I_k\big(\alpha(k)^{-1}(\tau(kg)-\phi(k)\rho(g)-\tau(k)\delta(g))\big)\delta(h)=$$
$$=\alpha(g)^{-1}\psi(g)\delta(h),\quad g,h\in G,$$

где использовано определение отображения ψ с помощью (4.36). Эта величина совпадает со вторым слагаемым в (4.37) с точностью до множителя $\alpha(g)^{-1}$, что завершает доказательство формулы (4.37) и, тем самым, доказывает теорему 4.20. □

Непосредственным следствием теоремы 4.19 о квазипредставлениях с ограниченными орбитами является

Теорема 4.21. *Если конечномерное неприводимое квазипредставление некоторой группы неограничено, то оно является обычным представлением этой группы.*

Следующий пример квазикоцикла представляет особый интерес.

Пример 4.4. Пусть G — группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, τ — псевдохарактер Радемахера на G (см. пример 4.2, 3), и пусть

$$g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \tau(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

— отображение группы G в группу матриц второго порядка. В терминах предыдущей теоремы имеем $\alpha = 1$ и $\delta = 1$, а подпространство $L = M^{\perp}$ натянуто на первый вектор базиса.

Этот пример показывает, что отображение τ в условиях теоремы не обязано быть ни коциклом, ни ограниченным возмущением коцикла.

4.12. Специфические свойства одномерных псевдопредставлений групп

Лемма 4.7. *Пусть G — группа, а π и ρ — неограниченные одномерные представления группы G, удовлетворяющие условию $\|\pi(g) - \rho(g)\| \leqslant q$ для некоторого q и всех $g \in G$. Тогда $\pi = \rho$. Пусть G — аменабельная группа, а π и ρ — одномерные ограниченные представления группы G, удовлетворяющие условию $\|\pi(g) - \rho(g)\| \leqslant q$ для некоторого $q < \sqrt{3}$ и всех $g \in G$. Тогда $\pi = \rho$.*

Доказательство. Если одно из представлений π и ρ не ограничено, то и другое не ограничено. Пусть $\pi(g_\alpha)$ — такая сеть, что $\pi(g_\alpha) \to \infty$. Тогда $\pi(g_\alpha)\rho(g_\alpha)^{-1} \to 1$ и $\|\pi(gg_\alpha) - \rho(gg_\alpha)\| \leqslant q$, откуда

$$\|\pi(g)\pi(g_\alpha)\rho(g_\alpha)^{-1} - \rho(g)\| \to 0$$

и в пределе по α получаем $\|\pi(g) - \rho(g)\| = 0$ для любого $g \in G$. Если же представления π и ρ ограничены, то они унитарны, и отображение $g \mapsto \pi(g)(\rho(g))^{-1}$, $g \in G$, — унитарный характер группы G, удовлетворяющий условию

$$|\pi(g)(\rho(g))^{-1} - 1| \leqslant q, \quad q < \sqrt{3}.$$

Такой характер единичен, потому что множество $\{t\colon t \in \mathbb{T},\ |t-1| < \sqrt{3}\}$ не содержит неединичных подгрупп группы $\mathbb{T}$. $\square$

Лемма 4.8. *Пусть G — группа, f — одномерное ε-квазипредставление на G с комплексными значениями* ($\varepsilon > 0$), *удовлетворяющее условию* $f(e) = 1$. *Тогда*

1) *если f не ограничено, то f — обычное представление;*

2) *если f ограничено, то $|f(g)| \leqslant (1+\sqrt{1+4\varepsilon})/2$ для всех $g \in G$.*

Доказательство. Утверждение 1) хорошо известно для квазипредставлений общего вида (см. лемму 4.6). Пусть f ограничено. Тогда отображение $F\colon G \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$), определенное формулой $F(g) = |f(g)|$, $g \in G$, является ограниченным одномерным ε-квазипредставлением со значениями в $\mathbb{R}^+$. Из условия $F(g)F(g^{-1}) = 1$ легко следует, что

$$\sup\{|F(g)-1|,\ g \in G\} = \sup\{|F(g)-1|,\ F(g) > 1,\ g \in G\}.$$

Пусть $\delta = \sup\{|F(g)-1|,\ g \in G\}$. Из условия $|F(g)F(h) - F(gh)| \leqslant \varepsilon$ следует, что $(1+\delta)^2 - 1 - \delta \leqslant \varepsilon$, $\delta + \delta^2 \leqslant \varepsilon$, и $\delta \leqslant (\sqrt{1+4\varepsilon}-1)/2$, что завершает доказательство утверждения 2). □

Следствие 4.2. *Пусть G — группа, а f — одномерное псевдопредставление группы G.*

1. *Ограничение псевдопредставления f на каждую циклическую подгруппу в G является гомоморфизмом.*

2. *При достаточно малом дефекте* ($\varepsilon < 0{,}5$), *псевдопредставление f инвариантно относительно внутренних автоморфизмов группы G.*

Доказательство. По определению, для любого элемента $g \in G$ соотношение $f(g^n) = f(g)^n$ выполняется для всех $n \in \mathbb{Z}$. Это доказывает 1. Если f не ограничено, то f — обычное представление (лемма 4.8), поэтому утверждение очевидно. Если f ограничено и ε — дефект f, то

$$|f(ghg^{-1}) - f(g)f(hg^{-1})| \leqslant \varepsilon$$

и

$$|f(g)f(hg^{-1}) - f(g)f(h)f(g^{-1})| \leqslant |f(g)|\varepsilon \quad \text{для всех} \quad h,g \in G,$$

где $|f(g)| \leqslant (1+\sqrt{1+4\varepsilon})/2$ по лемме 4.8. Если $\varepsilon(1+(1+\sqrt{1+4\varepsilon})/2) < \sqrt{3}$, то для любой циклической подгруппы $\{h^n, n \in \mathbb{Z}\}$ характеры $h^n \mapsto f(h^n)$ и $h^n \mapsto f(g)f(h^n)(f(g))^{-1}$ этой подгруппы отличаются по модулю меньше, чем на $\sqrt{3}$, и, следовательно, совпадают. □

Лемма 4.9. *Сохраним обозначения леммы 4.8. Пусть f ограничен и отображение $F\colon G\to\mathbb{R}^+$ определено формулой $F(g)=|f(g)|$, $g\in G$. Пусть $\varphi(g)=f(g)(F(g))^{-1}$, $g\in G$. Тогда φ — одномерное унитарное (т.е. принимающее значения в $\mathbb{T}$) ε_1-квазипредставление группы G, где $\varepsilon_1=\varepsilon(1+\varepsilon+\sqrt{1+4\varepsilon})$.*

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
|\varphi(g_1)\varphi(g_2)-\varphi(g_1g_2)| = |f(g_1)(F(g_1))^{-1}f(g_2)(F(g_2))^{-1}-f(g_1g_2)(F(g_1g_2))^{-1}| \leqslant \\
\leqslant |(f(g_1)f(g_2)-f(g_1g_2))(F(g_1))^{-1}(F(g_2))^{-1}| + \\
+|f(g_1g_2)|\,|(F(g_1))^{-1}(F(g_2))^{-1}-(F(g_1g_2))^{-1}| \leqslant \\
\leqslant \varepsilon((\sqrt{1+4\varepsilon}+1)/2)^2+\varepsilon((\sqrt{1+4\varepsilon}+1)/2),
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4.10. *Пусть G — аменабельная группа (например, коммутативная), f — одномерное ограниченное ε-квазипредставление группы G ($\varepsilon>0$), удовлетворяющее условию $f(e)=1$. Если $\varepsilon<1/3$, то существует обычный унитарный характер ψ группы G, удовлетворяющий условию*

$$
|f(g)-\psi(g)|<\varepsilon/(1-3\varepsilon) \quad \textit{для всех} \quad g\in G.
$$

Если $\varepsilon<\sqrt{3}/(2+3\sqrt{3})$ (например, если $\varepsilon<0{,}24$), то существует обычный унитарный характер ψ группы G, удовлетворяющий условию $|f(g)-\psi(g)|<\sqrt{3}/2$ для всех $g\in G$.

Доказательство. Пусть I — левоинвариантное среднее на G. Тогда

$$
\begin{aligned}
\Phi(g)\overset{def}{=} I_h(f(gh)f(h^{-1})) = I_h(f(gkh)f((kh)^{-1})) = I_h(f(gkh)f(h^{-1}k^{-1})) = \\
= I_h\big((f(gkh)-f(gk)f(h))(f(h^{-1}k^{-1})-f(h^{-1})f(k^{-1}))+ \\
+f(gk)f(h)(f(h^{-1}k^{-1})-f(h^{-1})f(k^{-1}))+f(gkh)f(h^{-1})f(k^{-1})\big) = \\
= \Delta_1+f(gk)I_h\big(f(h)(f(h^{-1}k^{-1})-f(h^{-1})f(k^{-1}))\big)+\Phi(gk)f(k^{-1})
\end{aligned}
$$

для всех $g,k\in G$, где $\Delta_1=\Delta_1(gk,k^{-1})$ — числовая функция

$$
I_h\big((f(gkh)-f(gk)f(h))(f(h^{-1}k^{-1})-f(h^{-1})f(k^{-1}))\big),
$$

модуль которой не превосходит ε^2. Так как $I_{h\in G}(f(h)f(h^{-1}))=\Phi(e)$, то

$$
I_h\big(f(h)(f(h^{-1}k^{-1})-f(h^{-1})f(k^{-1}))\big) = I_h(f(h)f(h^{-1}k^{-1}))-\Phi(e)f(k^{-1})
$$

и

$$I_h(f(h)f(h^{-1}k^{-1}))-\Phi(e)f(k^{-1})=I_l(f(k^{-1}l)f(l))-\Phi(e)f(k^{-1})$$

(это получается заменой переменных $h\mapsto kl$ и переходом к значению I по переменному l), причем правая часть равна $\Phi(k^{-1})-\Phi(e)f(k^{-1})$. Отсюда следует, что

$$\Phi(g)=\Delta_1+f(gk)(\Phi(k^{-1})-\Phi(e)f(k^{-1}))+\Phi(gk)f(k^{-1})$$

или, в другой форме,

$$f(gk)\Phi(e)f(k^{-1})-f(gk)\Phi(k^{-1})-\Phi(gk)f(k^{-1})+\Phi(g)=\Delta_1 \tag{4.42}$$

для всех $g,k\in G$. С другой стороны, произведение величин $\Phi(gk)-f(gk)$ и $\Phi(k^{-1})-f(k^{-1})$ равно

$$\Phi(gk)\Phi(k^{-1})-f(gk)\Phi(k^{-1})-\Phi(gk)f(k^{-1})+f(gk)f(k^{-1}) \tag{4.43}$$

для всех $g,k\in G$. Вычитая (4.43) из (4.42), получаем

$$\begin{gathered}\Phi(g)-\Phi(gk)\Phi(k^{-1})=\\ =-\Delta_1-(\Phi(gk)-f(gk))(\Phi(k^{-1})-f(k^{-1}))+f(gk)(1-\Phi(e))f(k^{-1})=\\ =\Delta_1(gk,k^{-1})+\Delta_2(gk,k^{-1})+f(gk)(1-\Phi(e))f(k^{-1}),\end{gathered}$$

где

$$\Delta_2=\Delta_2(gk,k^{-1})=-(\Phi(gk)-f(gk))(\Phi(k^{-1})-f(k^{-1}))$$

(заметим, что $\|\Delta_2\|\leqslant\varepsilon^2$). Наконец,

$$\Phi(gh)-\Phi(g)\Phi(h)=\Delta_1(g,h)+\Delta_2(g,h)+f(g)(1-\Phi(e))f(h),\quad g,h\in G. \tag{4.44}$$

Таким образом, Φ — тоже квазихарактер группы G.

Напомним, что

$$\begin{gathered}(f(ghk)-f(gh)f(k))+(f(gh)-f(g)f(h))f(k)+\\ +f(g)(f(h)f(k)-f(hk))+(f(g)f(hk)-f(ghk))=0\end{gathered}$$

для всех $g,h,k\in G$, где модули первого и последнего слагаемых не превосходят ε, так что

$$\|f(gh)-f(g)f(h))f(k)+f(g)(f(h)f(k)-f(hk))\|\leqslant 2\varepsilon$$

для всех $g,h,k\in G$.

Пусть $|f(g)|\leqslant M$ для всех $g\in G$. Введём операторную функцию

$$\psi(g)=\psi_f(g)\overset{def}{=}\Phi(g)-f(g)\Phi(e)+\Phi(g),\quad g\in G$$

(ср. [234]). Из определения немедленно следует, что ψ — квазихарактер. Кроме того, $\psi(e)=1_E$, где e — единичный элемент G, причём

$$\|\psi(g)-\Phi(g)\|\leqslant M\varepsilon,\quad \|\psi(g)-f(g)\|\leqslant (M+1)\varepsilon\quad \text{для всех}\quad g\in G.$$

Найдём дефект ψ. Так как $\|f(h)f(h^{-1})-1_E\|\leqslant\varepsilon$, то $\|\Phi(e)-1_E\|\leqslant\varepsilon$ и $\|\Phi(e)\|\leqslant 1+\varepsilon$. Заметим, что выражение

$$\begin{aligned} &f(gkk^{-1}h)-(f(gk)-f(g)f(k))(f(k^{-1}h)-f(k^{-1})f(h))\\ &\qquad+f(g)f(k)f(k^{-1})f(h)-f(gk)f(k^{-1})f(h)-f(g)f(k)f(k^{-1}h)\end{aligned}\tag{4.45}$$

равно $f(gkk^{-1}h)-f(gk)f(k^{-1}h)$, так что модуль этого выражения не превосходит ε для всех $g,k,h\in G$. Применим инвариантное среднее по $k\in G$ к выражению в (4.45); получим

$$\|f(gh)-\Phi(g)f(h)-f(g)\Phi(h)+f(g)\Phi(e)f(h)\|\leqslant\varepsilon.$$

Непосредственное вычисление показывает тогда (с учётом неравенства

$$\|(f(gk)-f(g)f(k))(f(k^{-1}h)-f(k^{-1})f(h))\|\leqslant\varepsilon^2$$

для всех $g,k,h\in G$), что $\|\Delta_3\|\leqslant\varepsilon^2$, где

$$\Delta_3=-(f(gh)-\Phi(g)f(h)-f(g)\Phi(h)+f(g)\Phi(e)f(h))(\Phi(e)-1).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\psi(gh)-\psi(g)\psi(h)=\Phi(gh)-f(gh)(\Phi(e)-1)-\Phi(g)\Phi(h)+\\ +\Phi(g)f(h)(\Phi(e)-1)+f(g)(\Phi(e)-1)\Phi(h)-f(g)(\Phi(e)-1)f(h)(\Phi(e)-1)=\\ =\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-f(g)(\Phi(e)-1)f(h)-(\Phi(g)f(h)+f(g)\Phi(h)-f(g)\Phi(e)f(h))(\Phi(e)-1)+\\ +\Phi(g)f(h)(\Phi(e)-1)+f(g)(\Phi(e)-1)\Phi(h)-f(g)(\Phi(e)-1)f(h)(\Phi(e)-1)=\\ =\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-f(g)(\Phi(e)-1)f(h)-\Phi(g)f(h)(\Phi(e)-1)+\Phi(g)f(h)(\Phi(e)-1)-\\ -f(g)\Phi(h)(\Phi(e)-1)+f(g)(\Phi(e)-1)\Phi(h)-f(g))(\Phi(e)-1)f(h)(\Phi(e)-1)=\\ =\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+f(g)(\Phi(e)-1)(\Phi(h)-f(h))-f(g)\Phi(h)(\Phi(e)-1)+\\ +f(g)\Phi(e)f(h)(\Phi(e)-1)-f(g)(\Phi(e)-1)f(h)(\Phi(e)-1)=\\ =\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+f(g)(\Phi(e)-1)(\Phi(h)-f(h))-f(g)(\Phi(h)-f(h))(\Phi(e)-1),\end{gathered}$$

где

$$\Delta_1 = I_{l\in G}((f(gl)-f(g)f(l))(f(l^{-1}h^{-1})-f(l^{-1})f(h^{-1})))$$

и

$$\Delta_2(g,h) = \Delta_2 = (\Phi(g)-f(g))(\Phi(h)-f(h)),$$

и, следовательно, $\|\Delta_1\| \leqslant \varepsilon^2$ и $\|\Delta_2\| \leqslant \varepsilon^2$. Это соотношение означает, что $\psi(gh)-\psi(g)\psi(h) = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$, откуда следует, что

$$\|\psi(gh)-\psi(g)\psi(h)\| \leqslant 3\varepsilon^2.$$

Так как основные свойства f наследуются квазихарактерами Φ и ψ, мы можем использовать итерацию Джонсона [133]. Заметим, что

$$|\psi(g)| \leqslant |f(g)| + |f(g)(\Phi(e)-1)| \leqslant M + M\varepsilon$$

для всех $g\in G$ и $|\psi(g)-f(g)|\leqslant M(1+\varepsilon)$. Положим $M_0=M$, $\varepsilon_0=\varepsilon$, $M_1=M(\varepsilon+1)$, $f_0=f$, $\varepsilon_n=3\varepsilon_{n-1}$, $M_{n+1}=M_n(1+\varepsilon_n)$, и $f_{n+1}=\psi_{f_n}$ при $n\in\mathbb{N}$, и предположим, что $0<\varepsilon<1/3$. Тогда, начиная с

$$\|f_0(gh)-f_0(g)f_0(h)\| \leqslant \varepsilon = \varepsilon_0,$$

мы можем продолжать по индукции по n. Имеем

$$\|f_{n+1}(gh)-f_{n+1}(g)f_{n+1}(h)\| \leqslant \varepsilon_{n+1} = 3\varepsilon_n^2, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{4.46}$$

где $\varepsilon_n = (1/3)(3\varepsilon)^{2^n}$, $n\in\mathbb{N}$, и

$$\|f_{n+1}(g)-f_n\| \leqslant (M_n+1)\varepsilon_n$$

для всех $g\in G$ при

$$M_{n+1} \leqslant M_n + (M_n+1)\varepsilon_n.$$

Пусть $M_n = \mu_n + m_n$, где

$$\mu_n = M\prod_{k=0}^{n}(1+\varepsilon_k);$$

тогда

$$M_n \leqslant (M+\varepsilon)\prod_{k=0}^{n}(1+\varepsilon_k) \leqslant \mathcal{M}(\varepsilon) \overset{def}{=} (M+\varepsilon)\prod_{k=0}^{\infty}(1+\varepsilon_k).$$

Следовательно, последовательность M_n ограничена при $\varepsilon<1/3$, $M_n\leqslant\mathcal{M}(\varepsilon)$, где $\mathcal{M}(\varepsilon)$ — ограниченная монотонно возрастающая функция переменного ε. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(g)-f_{n-1}(g))$$

абсолютно сходится для любого $g \in G$, поскольку

$$\|f_{n+1}(g) - f_n(g)\| \leqslant (\mathcal{M}(\varepsilon)+1)\varepsilon_n$$

для всех $g \in G$. Пусть

$$R(g) = f(g) + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(g) - f_{n-1}(g)).$$

Переходя к пределу в соотношении (4.46), видим, что

$$\|R(gh)\xi - R(g)R(h)\xi\| \leqslant 0 \quad \text{при} \quad \xi \in E,$$

так что R — обычный характер группы G, причем

$$\|R(g) - f(g)\| \leqslant (\mathcal{M}(\varepsilon)+1)\varepsilon.$$

Следовательно, характер R ограничен. Поэтому он унитарен.

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon < 1/3$ выполняется неравенство

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+\varepsilon_k) \leqslant 1+\varepsilon+\sum_{k=2}^{\infty}3^{k-1}\varepsilon^k \leqslant 1+\varepsilon/(1-3\varepsilon) = (1-2\varepsilon)/(1-3\varepsilon). \qquad \square$$

Замечание 4.7. В рассматриваемом здесь одномерном случае, количественный результат леммы 4.10 улучшает результаты [132], также относящиеся к одномерному случаю, где рассматривалось условие $\varepsilon \leqslant 0{,}01$, и весьма общий результат [133], где получена оценка, существенно зависящая от выбора аппроксимативной диагонали [131] в групповой алгебре данной аменабельной группы и, в одномерном случае, заведомо требующая выполнения условия $\varepsilon < 1/12$.

Следствие 4.3. *Пусть G — группа, а f — одномерное псевдопредставление группы G. Ограничение псевдопредставления f на каждую аменабельную подгруппу в G является гомоморфизмом этой подгруппы в $\mathbb{C}$, так что f — чистое псевдопредставление.*

Доказательство. Пусть f — одномерное псевдопредставление группы G. Из определения псевдопредставления и одномерности пространства псевдопредставления следует, что $f(g^n) = f(g)^n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, так что ограничение f на каждую циклическую подгруппу в G является гомоморфизмом Кроме того, по лемме 4.10, ограничение f на каждую аменабельную подгруппу H в G отличается от некоторого обычного характера подгруппы H меньше, чем на $\sqrt{3}/2$.

Ограничение этого характера группы H на каждую циклическую подгруппу в H отличается от характера этой циклической подгруппы, определяемого ограничением псевдопредставления f на ту же циклическую подгруппу, меньше чем на $\sqrt{3}$. Следовательно, эти ограничения совпадают для любой циклической подгруппы по лемме 4.7, и тем самым ограничение отображения f на каждую аменабельную подгруппу H в G является обычным характером подгруппы H. Таким образом, f — чистое псевдопредставление. $\square$

Как мы увидим в следующей главе, любое конечномерное локально ограниченное псевдопредставление вещественной простой связной группы Ли с конечным центром является обычным непрерывным представлением, а конечномерное локально ограниченное псевдопредставление вещественной простой эрмитово симметрической связной группы Ли с бесконечным центром, не являющееся представлением, является чистым и может быть описано в терминах обычных представлений, псевдохарактеров и их экспонент (которые являются чистыми одномерными псевдопредставлениями), что свидетельствует об особой роли псевдохарактеров и одномерных чистых псевдопредставлений в теории конечномерных квазипредставлений связных групп Ли.

Наспомним теорему о дополнении Донг Хуна Ли [148, теорема 2.13]): всякая почти связная локально компактная группа G со связной компонентой G_0 (т.е. локально компактная группа G, для которой факторгруппа G/G_0 компактна) допускает вполне несвязную компактную подгруппу D такую, что $G = G_0 D$.

Теорема 4.22. *Одномерное псевдопредставление π с дефектом $\varepsilon < q_0 = 1$ почти связной локально компактной группы G со связной компонентой G_0 равно экспоненте псевдохарактера на G, совпадающей с π на G_0 и на дополнительной подгруппе Ли D группы G тогда и только тогда, когда π тривиальна на D.*

Доказательство. Псевдохарактер на почти связной локально компактной группе равен нулю на любой дополнительной подгруппе Ли D, поскольку D компактна (см. [255, 267]). Это доказывает часть “только если”. Пусть одномерное псевдопредставление π с дефектом $\varepsilon < q_0$ почти связной локально компактной группы G тривиально на дополнительной подгруппе Ли G. Ограничение π на связную компоненту G_0 является одномерным псевдопредставлением связной локально компактной группы G_0, и, следовательно, это ограничение является мнимой экспонентой вещественного псевдохарактера φ на G_0 [268], дефект которого меньше $\ln(1+\varepsilon)$. Следовательно, $\pi(g)=1\in\mathbb{C}$ для всех $g\in G_0\cap D$, что согласуется с предположением, что $\pi(g)=1\in\mathbb{C}$ для всех $g\in D$. Рассмотрим сечение $s\colon D/G_0\cap D\to D$, переводящее e_{D/G_0} в e_D, и такое, что канонический гомоморфизм ρ из D на $D/G_0\cap D$ переводит $s(x)$ в x для всех $x\in D/G_0\cap D$. Определим отображение $f\colon G\to\mathbb{C}$ по формуле $f(g_0d)=\varphi(g_0')$ для всех $g_0\in G_0$ и $d\in D$, где g_0' определяется условием, что $g_0's(\rho(d))=g_0d$, т. е., $g_0^{-1}g_0'=ds(\rho(d))^{-1}$, что означает, что $ds(\rho(d))^{-1}\in G_0\cap D$. Если $g_0d=g_0^{(1)}d_1$, то $dd_1^{-1}=g_0^{-1}g_0^{(1)}$, и, следовательно, d и d_1 принадлежат одному и тому же смежному классу по G_0, и, следовательно, $\rho(d)=\rho(d_1)$ и $s(\rho(d))=s(\rho(d_1))$ и $g_0'=g_0'^{(1)}$, и, таким образом, отображение f определено корректно. Тогда

$$f(g_0^{(1)}d_1g_0^{(2)}d_2)=f(g_0^{(1)}d_1g_0^{(2)}d_1^{-1}d_1d_2)=\varphi((g_0^{(1)}d_1g_0^{(2)}d_1^{-1})')=\varphi(g_0^{(1)}d_1g_0^{(2)}d_1^{-1}d_0)$$

для некоторого $d\in D$. Следовательно, $f(g_0^{(1)}d_1g_0^{(2)}d_1^{-1})$ отличается от $f(g_0^{(1)})+$ $+f(d_1g_0^{(2)}d_1^{-1})=f(g_0^{(1)})+f(g_0^{(2)})$ дефектом псевдохарактера φ (поскольку каждый псевдохарактер инвариантен относительно внутренних автоморфизмов). Таким образом, f является квазихарактером на G, ограничение которого на G_0, очевидно, совпадает с φ. Тогда псевдохарактер σ на G, связанный с f (см. 4.1) совпадает с φ на G_0, равен нулю на D (так как D конечно), и имеет дефект, не превышающий $4\ln(1+\varepsilon)$. Более того, он является единственным псевдохарактером с этими свойствами, так как любой псевдохарактер, имеющий эти свойства, отличается от σ на ограниченный псевдохарактер, и потому равен нулю. Соответствующая мнимая экспонента σ, которая является унитарным одномерным псевдопредставлением G, совпадает с π на G_0 и на D, а дефект σ не превосходит $4\ln(1+\varepsilon)$ [268]. Так как $|\pi(g_0d)-\pi(g_0)|\leqslant\varepsilon$, то

$$|\exp(i\sigma(g_0d))-\exp(i\sigma(g_0))|=|\exp(i(\sigma(g_0d)-\sigma(g_0))-1|\leqslant$$
$$\leqslant|\sigma(g_0d)-\sigma(g_0)|\leqslant 4\ln(1+\varepsilon)\leqslant 4\varepsilon,$$

и $\pi(g_0)=\exp(i\sigma(g_0))$, откуда $|\pi(g_0d)-\exp(i\sigma(g_0d))|\leqslant 5\varepsilon<\sqrt{3}$. Тогда ограничения псевдопредставлений π и $\exp(i\sigma)$ на каждую циклическую подгруппу равны по лемме 4.7, так что $\pi(g_0d)=\exp(i\sigma(g_0d))$ для всех $g=g_0d\in G$, что и требовалось доказать. $\square$

4.13. Класс аппроксимируемых не обязательно ограниченных квазипредставлений аменабельных групп

Обсудим теперь необходимые условия существования такого ограниченного возмущения (сопряженными операторами) данного неограниченного представления группы в сопряженном банаховом пространстве сопряженными операторами, которое является квазипредставлением.

4.13.1. Возмущенияя неограниченных представлений, являющиеся квазипредставлениями

Теорема 4.23. *Пусть τ — неограниченное представление локально компактной группы G в банаховом пространстве E, сопряженном к банахову пространству E_*, сопряженными операторами. Пусть $\delta>0$, пусть $d\colon G\to\mathcal{L}(E)$ — такое ограниченное отображение группы G в $\mathcal{L}(E)$, что $\|d(g)\|\leqslant\delta$ для всех $g\in G$ и все операторы $d(g)$, $g\in G$, являются сопряженными, и пусть отображение $\pi\colon G\to\mathcal{L}(E)$, определенное формулой $\pi(g)=\tau(g)+\delta(g)$, $g\in G$, является ε-квазипредставлением для некоторого $\varepsilon>0$. Тогда область значений каждого оператора $d(g)$, $g\in G$, лежит в векторном подпространстве L* (*см. лемму* 4.6).

Доказательство. По условию, $\|\pi(g)\pi(h)-\pi(gh)\|\leqslant\varepsilon$ для всех $g,h\in G$, или

$$\|(\tau(g)+d(g))(\tau(h)+d(h))-\tau(gh)-d(gh)\|\leqslant\varepsilon\quad\text{для всех}\quad g,h\in G.$$

Так как $\tau(g)\tau(h)=\tau(gh)$, то это неравенство можно переписать в виде

$$\|d(g)\tau(h)+\tau(g)d(h)+d(g)d(h)-d(gh)\|\leqslant\varepsilon\quad\text{для всех}\quad g,h\in G,$$

откуда

$$\|d(g)\tau(h)+\tau(g)d(h)\|\leqslant\varepsilon+\delta+\delta^2\quad\text{для всех}\quad g,h\in G.$$

Таким образом, сумма $d(g)\tau(h)+\tau(g)d(h)$ ограничена как функция от $g,h\in G$. Рассмотрим второе слагаемое. При любом фиксированном $h\in G$ и любом векторе $\xi\in E$ слагаемое $d(g)(\tau(h)\xi)$ ограничено как функция $g\in G$, поэтому $\tau(g)(d(h)\xi)$ ограничено как функция $g\in G$, так что вектор $d(h)\xi$ принадлежит L. $\square$

По теореме 4.23, каждый элемент $h \in H$ определяет ограниченный оператор $D(h)$ из пространства E в пространство ограниченных равномерно непрерывных функций на G со значениями в $\mathcal{L}(E)$: $D(h)\xi = f_h\xi$, $f_h(g)\xi = \tau(g)(d(h)\xi)$, $g,h \in G$, $\xi \in E$.

4.13.2. Основные определения и простейшие свойства почти ограниченных квазипредставлений

Определение 4.8. Пусть G — группа; δ-квазипредставление π группы G называется *почти ограниченным* (или, точнее, *C-почти ограниченным*), если существует такое $C > 0$, что $\|\pi(ghk) - \pi(g)\pi(h)\pi(k)\| \leqslant C\delta$ для любых $g,h,k \in G$.

Очевидно, что этот класс содержит неограниченные квазипредставления; например, он содержит все неограниченные обычные представления. Каждое конечномерное квазипредставление почти ограничено, это доказано в следующей теореме (ср. [264]).

Теорема 4.24. *Каждое конечномерное квазипредставление произвольной группы автоматически почти ограничено.*

Доказательство. Представим данное квазипредставление π группы G в виде стандартной матрицы четвертого порядка. Тогда из части 2) теоремы 4.19 следует, что разность $\pi(g)\pi(h)\pi(k) - \pi(ghk)$ имеет матричную форму

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta\sigma(g,h,k) & \Delta\tau(g,h,k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\gamma(g,h,k) & \Delta\chi(g,h,k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g,h,k \in G,$$

и из ограниченности матричных подфункций следует, что $\Delta\sigma(g,h,k)$, $\Delta\gamma(g,h,k)$, и $\Delta\chi(g,h,k)$, $g,h,k \in G$, ограничены. Осталось доказать, что функция $\Delta\tau(g,h,k)$, $g,h,k \in G$, ограничена. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\Delta\tau(g,h,k) =$$
$$= \alpha(g)\alpha(h)\tau(k) + \big(\alpha(g)\varphi(h) + \varphi(h)\beta(h)\big)\rho(k) + \big(\alpha(g)\sigma(h) + \sigma(h)\gamma(h)\big)\chi(k) +$$
$$+ \big(\alpha(g)\tau(h) + \varphi(g)\rho(h) + \sigma(g)\chi(h) + \tau(h)\delta(h)\big)\delta(k) - \tau(ghk), \quad g,h,k \in G. \quad (4.47)$$

Поскольку π является квазипредставлением, то выражение

$$\alpha(gh)\tau(k)+\varphi(gh)\rho(k)+\sigma(gh)\chi(k)+\tau(gh)\delta(k)-\tau(ghk), \quad g,h,k \in G, \quad (4.48)$$

ограничено. Вычитая (4.48) из (4.47) и используя утверждение 2) теоремы 4.19, видим, что нам нужно доказать ограниченность выражения

$$\begin{gathered}\big(\alpha(g)\sigma(h)+\sigma(h)\gamma(h)\big)\chi(k)-\sigma(gh)\chi(k)+\\ +\big(\alpha(g)\tau(h)+\varphi(g)\rho(h)+\sigma(g)\chi(h)+\tau(h)\delta(h)-\tau(gh)\big)\delta(k), \quad g,h,k\in G.\end{gathered}$$

Однако выражение $(\alpha(g)\sigma(h)+\sigma(h)\gamma(h))\chi(k)-\sigma(gh)\chi(k)$, $g,h,k \in G$, ограничено, поскольку функции α, γ, σ и χ являются ограниченными, в то время как сумма

$$(\alpha(g)\tau(h)+\varphi(g)\rho(h)+\sigma(g)\chi(h)+\tau(h)\delta(h)-\tau(gh))\delta(k), \quad g,h,k\in G,$$

ограничена, поскольку ограничена компонента δ и выражение

$$\alpha(g)\tau(h)+\varphi(g)\rho(h)+\sigma(g)\chi(h)+\tau(h)\delta(h)-\tau(gh), \quad g,h\in G,$$

ограничено, поскольку π является квазипредставлением. Это завершает доказательство теоремы. □

Конечно, класс почти ограниченных квазипредставлений группы G является подклассом класса всех квазипредставлений группы G. Совпадение этих классов является открытой проблемой до сих пор. Однако класс почти ограниченных квазипредставлений обладает свойствами, аналогичными свойствам ограниченных квазипредставлений.

Теорема 4.25. *Пусть G — группа, а π — δ-квазипредставление группы G в банаховом пространстве E. Следующие условия эквивалентны*:

1) *π почти ограничено*;

2) *существует константа C_2' такая, что $\|\pi(g)(\pi(hk)-\pi(h)\pi(k))\|\leqslant C_2'\delta$ для любых $g,h,k\in G$*;

3) *существует константа C_2'' такая, что $\|(\pi(hk)-\pi(h)\pi(k))\pi(g)\|\leqslant C_2''\delta$ для любых $g,h,k\in G$*;

4) *существуют такие константы C_n и C_n', $n\geqslant 2$, что*

$$\left\|\pi\left(\prod_{i=1}^{n} g_i\right)-\prod_{i=1}^{n}\pi(g_i)\right\|\leqslant C_n\delta \quad \text{и} \quad \left\|\pi(g)\left(\pi\left(\prod_{i=1}^{n} g_i\right)-\prod_{i=1}^{n}\pi(g_i)\right)\right\|\leqslant C_n'\delta$$

для любых $g_i\in G$, $i=1,\dots,n$.

Доказательство. Очевидно, 1) $\Rightarrow$ 2) и 1) $\Rightarrow$ 3). Заметим, что

$$\pi(ghk)-\pi(gh)\pi(k)+\pi(gh)\pi(k)-\pi(g)\pi(h)\pi(k)+\pi(g)\pi(h)\pi(k)-\pi(ghk)=0,$$

откуда сразу следует, что

$$\|\pi(gh)\pi(k)-\pi(g)\pi(h)\pi(k)\|\leqslant\delta+C\delta=(C+1)\delta,$$

где C — число из определения 4.8 почти ограниченности. Аналогичное рассуждение показывает, что

$$\|\pi(g)\pi(h)\pi(k)-\pi(g)\pi(hk)\|\leqslant(C+1)\delta.$$

В частности, $C_2'\leqslant C+1$.

2) $\Rightarrow$ 1). Заметим, что

$$\pi(g)\pi(h)\pi(k)-\pi(ghk)=\pi(g)\pi(h)\pi(k)-\pi(g)\pi(hk)+\pi(g)\pi(hk)-\pi(ghk),$$

откуда сразу следует, что

$$\|\pi(g)\pi(h)\pi(k)-\pi(ghk)\|\leqslant(C_2'+1)\delta.$$

В частности, $C\leqslant C_2'+1$.

3) $\Rightarrow$ 1). Заметим, что

$$\pi(g)\pi(h)\pi(k)-\pi(ghk)=\pi(g)\pi(h)\pi(k)-\pi(gh)\pi(k)+\pi(gh)\pi(k)-\pi(ghk),$$

откуда сразу следует, что

$$\|\pi(g)\pi(h)\pi(k)-\pi(ghk)\|\leqslant(C_2''+1)\delta.$$

Далее, 4) $\Rightarrow$ 1). Положим $g_i=e$ при $i>2$.

Колме того, 1) $\Rightarrow$ 4). Заметим, что 1) $\Rightarrow$ 2) и 1) $\Rightarrow$ 3). При $n=2$ утверждение следует из эквивалентности условий 1), 1) и 1). Пусть утверждение верно для некоторого $n>2$. Рассмотрим произведение $n+1$ элемента группы G:

$$\pi\left(\prod_{i=1}^{n+1}g_i\right)-\prod_{i=1}^{n+1}\pi(g_i)=$$
$$=\left(\pi\left(g_1\prod_{i=2}^{n+1}g_i\right)-\pi(g_1)\pi\left(\prod_{i=2}^{n+1}g_i\right)\right)+\left(\pi(g_1)\pi\left(\prod_{i=2}^{n+1}g_i\right)-\pi(g_1)\prod_{i=2}^{n+1}\pi(g_i)\right).$$

Норма выражения в первых скобках не превосходит δ, поскольку π — δ-представление. Норма выражения во вторых скобках не превосходит $C'_n\delta$. Следовательно, $C_n \leqslant C'_n + 1$. В частности, как и выше, $C = C_3 \leqslant C'_2 + 1$ и $C_4 \leqslant C+1 \leqslant C'_2+2$.

Рассмотрим теперь произведение

$$\pi(g)\left(\pi\left(\prod_{i=1}^{n+1} g_i\right) - \prod_{i=1}^{n+1}\pi(g_i)\right) =$$
$$= \pi(g)\left(\pi\left(g_1\prod_{i=2}^{n+1} g_i\right) - \pi(g_1)\pi\left(\prod_{i=2}^{n+1} g_i\right)\right) + \pi(g)\left(\pi(g_1)\pi\left(\prod_{i=2}^{n+1} g_i\right) - \pi(g_1)\prod_{i=2}^{n+1}\pi(g_i)\right)$$

Норма первого слагаемого не превосходит $C'_2\delta$ по части 2). Норма второго слагаемого не превосходит суммы

$$\|\pi(g)\pi(g_1)-\pi(gg_1)\|\left\|\pi\left(\prod_{i=2}^{n+1} g_i\right) - \pi(g_1)\prod_{i=2}^{n+1}\pi(g_i)\right\|$$

и

$$\left\|\pi(gg_1)\left(\pi\left(\prod_{i=2}^{n+1} g_i\right) - \prod_{i=2}^{n+1}\pi(g_i)\right)\right\|.$$

Первое слагаемое не превосходит $C_{n-1}\delta^2$, а второе — $C'_{n-1}\delta$, так что

$$C'_n \leqslant C'_2 + C_{n-1}\delta + C'_{n-1},$$

что завершает доказательство. □

Следствие 4.4. *Можно считать, что* $C''_2 \leqslant C'_2+2$.

Доказательство. Очевидно,

$$(\pi(hk)-\pi(h)\pi(k))\pi(g) =$$
$$= (\pi(hk)\pi(g)-\pi(hkg)) + (\pi(hkg)-\pi(h)\pi(kg)) + \pi(h)(\pi(kg)-\pi(k)\pi(g)),$$

поэтому

$$\|(\pi(hk)-\pi(h)\pi(k))\pi(g)\| \leqslant 2\varepsilon + C'_2\varepsilon = (C'_2+2)\varepsilon.$$

Поэтому в качестве C''_2 можно взять C'_2+2. □

4.13.3. Основные результаты теории почти ограниченных квазипредставлений

Теорема 4.26. *Если G — аменабельная группа, π — почти ограниченное квазипредставление группы G в банаховом пространстве E, двойственном к некоторому банаховому пространству E_*, I — левоинвариантное среднее на G, $\rho(g)$ определяется правилом $(\rho(g)\xi)(f)=I_{\{h\in G\}}(\pi(gh)\pi(h^{-1})\xi)(f)$ для любых $f\in E_*$, $\xi\in E$, и $g\in G$, и $\Sigma_\pi(g)=\Sigma(g)=\rho(g)-\pi(g)\rho(e)+\pi(g)$, $g\in G$, то Σ является ε-квазипредставлением G в E с $\varepsilon=3\delta^2+2C_2'\delta^2+{C_2'}^2\delta^2=(3+2C_2'+{C_2'}^2)\delta^2$.*

Замечание 4.8. Применение инвариантного среднего по $h\in G$ к неравенствам

$$\|\pi(gh)\pi(h^{-1})-\pi(g)\|\leqslant\delta,\quad \|\pi(g)(\pi(hh^{-1})-1_E)\|\leqslant C_2'\delta,$$
$$\|(1_E-\pi(h)\pi(h^{-1}))\pi(g)\|\leqslant C_2''\delta,$$
$$\|\pi(ghh^{-1}l)-\pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1})\pi(k)\|\leqslant C_4\delta\leqslant(C_2'+2)\delta$$

для любых $g,h,k\in G$ в теореме 4.25 дает

$$\|\rho(g)-\pi(g)\|\leqslant\delta,\quad \|\pi(g)(\rho(e)-1_E)\|\leqslant C_2'\delta,$$
$$\|(\rho(e)-1_E)\pi(g)\|\leqslant C_2''\delta,\quad \|\pi(g)(\rho(e)-1_E)\pi(k)\|\leqslant C_3\delta$$

для любых $g,k\in G$.

Заметим теперь, что

$$\rho(g)=I_h(\pi(gh)\pi(h^{-1}))=I_h(\pi(gkh)\pi((kh)^{-1}))=I_h(\pi(gkh)\pi(h^{-1}k^{-1}))=$$
$$=I_h\big((\pi(gkh)-\pi(gk)\pi(h))(\pi(h^{-1}k^{-1})-\pi(h^{-1})\pi(k^{-1}))+$$
$$+\pi(gk)\pi(h)(\pi(h^{-1}k^{-1})-\pi(h^{-1})\pi(k^{-1}))+\pi(gkh)\pi(h^{-1})\pi(k^{-1})\big)=$$
$$=\Delta_1+\pi(gk)I_h\big(\pi(h)(\pi(h^{-1}k^{-1})-\pi(h^{-1})\pi(k^{-1}))\big)+\rho(gk)\pi(k^{-1})$$

для всех $g,k\in G$, где $\Delta_1=\Delta_1(gk,k^{-1})$ обозначает оператор

$$I_h\big((\pi(gkh)-\pi(gk)\pi(h))(\pi(h^{-1}k^{-1})-\pi(h^{-1})\pi(k^{-1}))\big),$$

норма которого не превосходит ε^2. Поскольку $I_{h\in G}(\pi(h)\pi(h^{-1}))=\rho(e)$, также следует, что

$$I_h\big(\pi(h)(\pi(h^{-1}k^{-1})-\pi(h^{-1})\pi(k^{-1}))\big)=I_h(\pi(h)\pi(h^{-1}k^{-1}))-\rho(e)\pi(k^{-1})$$

и

$$I_h(\pi(h)\pi(h^{-1}k^{-1}))-\rho(e)\pi(k^{-1})=I_l(\pi(k^{-1}l)\pi(l))-\rho(e)\pi(k^{-1})$$

(путём замены переменных $h \mapsto kl$ и перехода к левоинвариантному среднему по l), где правая часть, очевидно, равна $\rho(k^{-1}) - \rho(e)\pi(k^{-1})$. Это даёт

$$\rho(g) = \Delta_1 + \pi(gk)(\rho(k^{-1}) - \rho(e)\pi(k^{-1})) + \rho(gk)\pi(k^{-1})$$

или, в другой форме,

$$\pi(gk)\rho(e)\pi(k^{-1}) - \pi(gk)\rho(k^{-1}) - \rho(gk)\pi(k^{-1}) + \rho(g) = \Delta_1 \tag{4.49}$$

для любых $g,k \in G$. С другой стороны, произведение $\rho(gk) - \pi(gk)$ и $\rho(k^{-1}) - -\pi(k^{-1})$ равно

$$\rho(gk)\rho(k^{-1}) - \pi(gk)\rho(k^{-1}) - \rho(gk)\pi(k^{-1}) + \pi(gk)\pi(k^{-1}) \tag{4.50}$$

для всех $g,k \in G$, и мы можем вычесть (4.50) из (4.49). Получаем

$$\begin{gathered}\rho(g) - \rho(gk)\rho(k^{-1}) = \\ = \Delta_1 - (\rho(gk) - \pi(gk))(\rho(k^{-1}) - \pi(k^{-1})) + \pi(gk)(1 - \rho(e))\pi(k^{-1}) = \\ = \Delta_1(gk,k^{-1}) + \Delta_2(gk,k^{-1}) + \pi(gk)(1 - \rho(e))\pi(k^{-1}),\end{gathered}$$

где $\Delta_2 = \Delta_2(gk,k^{-1}) = -(\rho(gk) - \pi(gk))(\rho(k^{-1}) - \pi(k^{-1}))$ (очевидно, $\|\Delta_2\| \leqslant \varepsilon^2$). Наконец,

$$\rho(gh) - \rho(g)\rho(h) = \Delta_1(g,h) + \Delta_2(g,h) + \pi(g)(1 - \rho(e))\pi(h), \qquad g,h \in G. \tag{4.51}$$

Мы видим, что ρ является квазипредставлением тогда и только тогда, когда существует $\tau > 0$, для которого

$$\|\pi(g)(\rho(e) - 1)\pi(h)\| \leqslant \tau \quad \text{для любых} \quad g, h \in G. \tag{4.52}$$

Таким образом, отображение ρ удовлетворяет тождеству

$$\rho(gh) - \rho(g)\rho(h) = \Delta_1(g,h) + \Delta_2(g,h) + \pi(g)(1_E - \rho(e))\pi(h), \quad g,h \in G, \tag{4.53}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta_1(g,h) &= I_k((\pi(gk) - \pi(g)\pi(k))(\pi(k^{-1}h) - \pi(k^{-1})\pi(h))) = \\ &= \pi(g)\rho(e)\pi(h) - \pi(g)\rho(h) - \rho(g)\pi(h) + \rho(gh), \qquad g,h \in G,\end{aligned}$$

и

$$\Delta_2(g,h) = -(\rho(g) - \pi(g))(\rho(h) - \pi(h)), \qquad g,h \in G,$$

причем $\|\Delta_1(g,h)\| \leqslant \delta^2$ и $\|\Delta_2(g,h)\| \leqslant \delta^2$ для всех $g,h \in G$. Это означает, что для почти ограниченного квазипредставления π выражение $\|\rho(gh) - \rho(g)\rho(h)\|$

ограничено, поскольку

$$\|\rho(gh)-\rho(g)\rho(h)\| \leqslant 2\delta^2+\|\pi(g)(\rho(e)-1_E)\pi(k)\| \leqslant (C_3+2\delta)\delta. \tag{4.54}$$

Далее, $\|\pi(g)(\pi(hk)\pi(k^{-1})-\pi(h))\| \leqslant C_2'\delta$, и, после усреднения по $k\in G$, получаем $\|\pi(g)(\rho(h)-\pi(h))\| \leqslant C_2'\delta$. Из части 1) теоремы 4.25 следует также, что $\|\pi(ghh^{-1})-\pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1})\| \leqslant C_3\delta$, и, следовательно,

$$\|\Sigma(g)-\pi(g)\| = \|\rho(g)-\pi(g)\rho(e)\| \leqslant \|\rho(g)-\pi(g)\|+\|\pi(g)-\pi(g)\rho(e)\| \leqslant (C_2'+1)\delta.$$

Доказательство теоремы 4.26. Ясно, что $\Sigma(e)=1_E$, и из замечания 4.8 непосредственно следует, что

$$\|\Sigma(g)-\rho(g)\| \leqslant (C_2'+1)\delta \quad \text{и} \quad \|\Sigma(g)-\pi(g)\| = \|\rho(g)-\pi(g)\rho(e)\| \leqslant (C_2'+1)\delta$$

для любого $g\in G$. Найдем дефект Σ. Из неравенства $\|\pi(h)\pi(h^{-1})-1_E\| \leqslant \delta$ вытекают неравенства $\|\rho(e)-1_E\| \leqslant \delta$ и $\|\rho(e)\| \leqslant 1+\delta$. Аналогично,

$$\|\pi(g)(\pi(h)\pi(h^{-1})-1_E)\| \leqslant C_2'\delta.$$

Согласно определению отображения Σ и уже использованному выше соотношению 4.53, получаем

$$\begin{gathered}
\Sigma(gh)-\Sigma(g)\Sigma(h) = \rho(gh)-\pi(gh)(\rho(e)-1)-\rho(g)\rho(h)+\rho(g)\pi(h)(\rho(e)-1)+\\
+\pi(g)(\rho(e)-1)\rho(h)-\pi(g)(\rho(e)-1)\pi(h)(\rho(e)-1)=\\
=\Delta_1(g,h)+\Delta_2(g,h)+\pi(g)(1-\rho(e))\pi(h)+\pi(gh)(1-\rho(e))-\\
-\rho(g)\pi(h)(1-\rho(e))-\pi(g)(1-\rho(e))\rho(h)-\pi(g)(\rho(e)-1)\pi(h)(\rho(e)-1)=\\
=\Delta_1(g,h)+\Delta_2(g,h)+(\pi(gh)-\pi(g)\pi(h))(1-\rho(e))+\\
+(\pi(g)-\rho(g))\pi(h)(1-\rho(e))+\pi(g)(1-\rho(e))(\pi(h)-\rho(h))-\\
-\pi(g)(\rho(e)-1)\pi(h)(\rho(e)-1).
\end{gathered}$$

где, как и выше,

$$\Delta_1 = I_{l\in G}((\pi(gl)-\pi(g)\pi(l))(\pi(l^{-1}h^{-1})-\pi(l^{-1})\pi(h^{-1})))$$

и

$$\Delta_2(g,h)=\Delta_2=(\rho(g)-\pi(g))(\rho(h)-\pi(h)),$$

и, следовательно, $\|\Delta_1\| \leqslant \delta^2$ и $\|\Delta_2\| \leqslant \delta^2$. Поэтому получаем неравенство

$$\begin{gathered}
\|\Sigma(gh)-\Sigma(g)\Sigma(h)\| \leqslant 3\delta^2+\|\pi(g)-\rho(g)\|\,\|\pi(h)(1-\rho(e))\|+\\
+\|\pi(g)(\rho(e)-1)\|\,\|\rho(h)-\pi(h)\|+\|\pi(g)(\rho(e)-1)\|\,\|\pi(h)(\rho(e)-1)\|.
\end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$\|\Sigma(gh)-\Sigma(g)\Sigma(h)\| \leqslant 3\delta^2+2C_2'\delta^2+{C_2'}^2\delta^2.$$

В частности, это неравенство доказывает, что Σ — квазипредставление группы G в E, что завершает доказательство теоремы 4.26. □

Теорема 4.27. *Пусть π — почти ограниченное квазипредставление (не обязательно ограниченное) аменабельной группы G в сопряженном банаховом пространстве E с дефектом δ и заданной константой C. Если дефект δ достаточно мал $\left(\delta_0=\min\left(1/18,1/\sqrt{18\left(3+2C_2'+{C_2'}^2\right)}\right)\right)$, то существует обычное представление τ группы G, близкое к π. А именно, существует функция $\sigma(\delta)>0$, $0<\delta<\delta_0$, для которой $\|\pi(g)-\tau(g)\|\leqslant\sigma(\delta)$, и, для заданного C, $\sigma(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.*

Доказательство. Убедимся, что основные свойства квазипредставления π наследуются квазипредставлением Σ и, в частности, Σ является почти ограниченным квазипредставлением. С этой целью оценим нормы операторов вида $\Sigma(g)(\Sigma(hk)-\Sigma(h)\Sigma(k))$. По теореме 4.26 имеем

$$\begin{aligned}\Sigma(hk)-\Sigma(h)\Sigma(k)=\Delta_1(h,k)+\Delta_2(h,k)+(\pi(hk)-\pi(h)\pi(k))(1-\rho(e))+\\+(\pi(h)-\rho(h))\pi(k)(1-\rho(e))+\pi(h)(1-\rho(e))(\pi(k)-\rho(k))-\\-\pi(h)(\rho(e)-1)\pi(k)(\rho(e)-1),\end{aligned}\tag{4.55}$$

где

$$\Delta_1(h,k)=I_{l\in G}((\pi(hl)-\pi(h)\pi(l))(\pi(l^{-1}k^{-1})-\pi(l^{-1})\pi(k^{-1})))$$

и

$$\Delta_2(h,k)=(\rho(h)-\pi(h))(\rho(k)-\pi(k)),\quad h,k\in G.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Sigma(g)(\Sigma(hk)-\Sigma(h)\Sigma(k))=\\=\rho(g)(\Sigma(hk)-\Sigma(h)\Sigma(k))-\pi(g)(\rho(e)-1)(\Sigma(hk)-\Sigma(h)\Sigma(k)),\end{aligned}$$

и, согласно замечанию 4.8, выполняется соотношение

$$\|\pi(g)(\rho(e)-1)\|\leqslant(C_2'+1)\delta,$$

так что

$$\begin{aligned}\|\Sigma(g)(\Sigma(hk)-\Sigma(h)\Sigma(k))\|\leqslant\\\leqslant\|\rho(g)(\Sigma(hk)-\Sigma(h)\Sigma(k))\|+\|\pi(g)(\rho(e)-1)\|\,\|(\Sigma(hk)-\Sigma(h)\Sigma(k))\|\leqslant\\\leqslant\|\rho(g)(\Sigma(hk)-\Sigma(h)\Sigma(k))\|+(C_2'+1)(3+2C_2'+{C_2'}^2)\delta^3\leqslant\end{aligned}$$

$$\leqslant \|\pi(g)\Delta_1(h,k)\| + \|\pi(g)\Delta_2(h,k)\| + \|\pi(g)(\pi(hk)-\pi(h)\pi(k))\|\,\|(1-\rho(e))\| +$$
$$+\|\pi(g)(\pi(h)-\rho(h))\|\,\|\pi(k)(1-\rho(e))\| + \|\pi(g)\pi(h)-\pi(gh)\|\,\|1-\rho(e)\|\,\|\pi(k)-\rho(k)\| +$$
$$+\|\pi(gh)(1-\rho(e))\|\,\|(\pi(k)-\rho(k))\| + \|\pi(h)(\rho(e)-1)\|\,\|\pi(k)(\rho(e)-1)\| +$$
$$+(C_2'+1)(3+2C_2'+C_2'^2)\delta^3. \tag{4.56}$$

Первые три слагаемых в правой части (4.56) начинаются множителем вида $\|\pi(g)(\pi(hk)-\pi(h)\pi(k))\|$ или его усреднением. Поэтому соответствующий множитель δ в нормах этих слагаемых в формуле (4.55) нужно заменить в формуле (4.56) на $C_2'\delta$, и вклад первых трех слагаемых в формуле (4.55) в оценку (4.56) не превосходит $3C_2'\delta^2$. В четвертом слагаемом, согласно замечанию 4.8, получаем $\|\pi(g)(\pi(h)-\rho(h))\|\|\pi(k)(1-\rho(e))\| \leqslant C_2'\delta C_2'\delta$. В следующем слагаемом получаем $\|\pi(g)\pi(h)-\pi(gh)\|\,\|1-\rho(e)\|\,\|\pi(k)-\rho(k)\| \leqslant \delta^3$. В шестом слагаемом выполняется неравенство $\|\pi(gh)(1-\rho(e))\|\,\|(\pi(k)-\rho(k))\| \leqslant C_2'\delta^2$. В седьмом слагаемом, очевидно, $\|\pi(h)(\rho(e)-1)\|\|\pi(k)(\rho(e)-1)\| \leqslant (C_2'\delta)^2$. Суммируя, получаем

$$\|\Sigma(g)(\Sigma(hk)-\Sigma(h)\Sigma(k))\| \leqslant$$
$$\leqslant 3C_2'\delta^2 + (C_2'\delta)^2 + \delta^3 + C_2'\delta^2 + (C_2'\delta)^2 + (3+5C_2'+3C_2'^2+C_2'^3)\delta^3 =$$
$$= (4C_2'+2C_2'^2)\delta^2 + (3+5C_2'+3C_2'^2+C_2'^3)\delta^3,$$

что завершает доказательство почти ограниченности квазипредставления Σ.

Таким образом, $\delta_\Sigma = \delta_1 = (3+2C_2'+C_2'^2)\delta^2$ и

$$C_\Sigma = C(1) = \frac{(4C_2'+2C_2'^2)\delta^2 + (3+5C_2'+3C_2'^2+C_2'^3)\delta^3}{(3+2C_2'+C_2'^2)\delta^2} =$$
$$= \frac{4C_2'+2C_2'^2}{3+2C_2'+C_2'^2} + \delta\frac{3+5C_2'+3C_2'^2+C_2'^3}{3+2C_2'+C_2'^2}.$$

Положим $\pi_0 = \pi$, $\delta_0 = \delta$, $\pi_{n=1} = \Sigma_{\pi_n}$ для $n \in \mathbb{N}$ и обозначим через δ_n и D_n такие константы, что

$$\|\pi_n(gh) - \pi_n(g)\pi_n(h)\| \leqslant \delta_n \quad \text{и} \quad \|\pi_n(g)(\pi_n(hk)-\pi_n(h)\pi_n(k))\| \leqslant D_n\delta_n$$

($D_0 = C_2'$). Очевидно, естественно считать, что $C_2' \geqslant 1$.

Как было отмечено выше, $\delta_{n+1} \leqslant D_n^2 + 2D_n + 3)\delta_n^2$ и

$$D_{n+1} \leqslant \frac{4D_n+2D_n^2}{3+2D_n+D_n^2} + \delta_n\frac{3+5D_n+3D_n^2+D_n^3}{3+2D_n+D_n^2} = 2 - \frac{6}{3+2D_n+D_n^2} + \delta_n(D_n+1). \tag{4.57}$$

Предположим, что $0\leqslant\delta<\delta_0=\min\Big(1/18, 1/\sqrt{18\big(6+4C_2'+{C_2'}^2\big)}\Big)$. Отсюда следует, что $\delta\cdot C_2'<1/4$. Тогда, согласно (4.57), видим, что $\delta_1=(3+2C_2'+{C_2'}^2)\delta_0^2<1/18$, и получим

$$D_1\leqslant 2-0+\delta_0(C_2'+1)\leqslant 2+1/4+1/18<2{,}31;$$

продолжая, получим

$$\delta_2=(3+2D_1+D_1^2)\delta_1^2<(3+4{,}62+5{,}34)\delta_1^2<12{,}96\delta_1^2=1/25$$

и

$$D_2\leqslant 2-6/12{,}96+\delta_1(D_1+1)\leqslant 2-6/12{,}96+3{,}31/18<1{,}73. \tag{4.58}$$

Далее,

$$\delta_3=(3+2D_2+D_2^2)\delta_2^2<(9{,}46)(1/625)<1/66$$

и

$$D_3\leqslant 2-6/(9{,}46)+\delta_2(D_2+1)\leqslant 2-0{,}633+0{,}11<1{,}48. \tag{4.59}$$

На следующем шаге

$$\delta_4=(3+2D_3+D_3^2)\delta_3^2<(3+2{,}96+2{,}20)(1/4356)<1/500$$

и

$$D_4\leqslant 2-6/(8{,}16)+\delta_3(D_3+1)\leqslant 2-0{,}735+(1/66)\cdot 2?48<1{,}302. \tag{4.60}$$

Предположим, что $D_n<1{,}4$ и $\delta_n<1/500$. Тогда

$$\begin{aligned}\delta_{n+1}&=(3+2D_n+D_n^2)\delta_n^2<(3+2{,}87+2)(1/500)\delta_n<\\&<7{,}8/500)\cdot\delta_n<(1/64)\cdot\delta_n\end{aligned} \tag{4.61}$$

и

$$D_{n+1}\leqslant 2-(6/7{,}8)+\delta_n(D_n+1)\leqslant 2-0{,}769+(1/500)\cdot(2{,}4)<1{,}231+0{,}005<1{,}3<1{,}4.$$

Таким образом, по индукции, при $n>4$ выполняется неравенство

$$\delta_n<(1/500)(64)^{-(n-4)}. \tag{4.62}$$

Отсюда следует, что для любого $g\in G$ ряд из операторов

$$\pi_0(g)+\sum_{n=1}^{\infty}(\pi_n(g)-\pi_{n-1}(g)),$$

в котором $\|\pi_n(g)-\pi_{n-1}(g)\| < (1/500)(64)^{-n+4}$, сходится по норме оператора и его сумма, которую мы обозначим $\tau(g)$, удовлетворяет условию

$$\|\pi_n(g)-\tau(g)\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\pi_k(g)-\pi_{k-1}(g)\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (1/500)(64)^{-(n-4)} =$$
$$= (1/500)\cdot (64)^{-n+5}/(63)$$

при $n>4$ и $g\in G$, так что $\lim_{n\to\infty}\pi_n(g)=\tau(g)$, $g\in G$, в смысле нормы оператора. Переходя к пределу по n в равенстве $\pi(e)=1_E$ и неравенстве $\|\pi_n(gh)-\pi_n(g)\pi_n(h)\| \leqslant \delta_n$, получим, что $\|\tau(gh)-\tau(g)\tau(h)\|=0$, т.е. τ — представление группы G в E.

Из формулы (4.61) для δ_{n+1}, $n\in\mathbb{N}$, следует, что для $\delta=t\cdot\delta_0$, $0<t\leqslant 1$, выполняется неравенство $\|\pi_n(g)-\tau(g)\| \leqslant (\delta/\delta_0)(1/500)\cdot(64)^{-n+4}/(63)$, $g\in G$. Правую часть этого равенства можно рассматривать как искомую функцию $\sigma(\delta)$, $0<\delta\leqslant\delta_0$.

Это завершает доказательство теоремы 4.27. □

Замечание 4.9. Поскольку конечномерные квазипредставления групп автоматически почти ограничены по теореме 4.24, эти квазипредставления удовлетворяют основному условию теоремы 4.20 и, если группа аменабельна, при достаточной малости дефекта имеют близкое обычное представление известной структуры (см. теорему 4.20).

Замечание 4.10. Из неравенств для δ_0–δ_4 и δ_n, $n>4$, приведенных выше, сразу следует, что

$$\|\pi(g)-\tau(g)\| \leqslant \delta_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4+\sum_{n=5}^{\infty}\delta_n \leqslant$$
$$\leqslant \delta+\delta+(18/25)\delta+(18/64)\delta+(18/533)\delta+(18/500)\cdot 64/63\delta < 1/2$$

для всех $g\in G$.

Теорема 4.28. *Пусть G — отделимая топологическая группа, аменабельная как дискретная группа. Пусть π — почти ограниченное (не обязательно ограниченное) непрерывное в слабой* операторной топологии квазипредставление группы G в сопряженном банаховом пространстве E с дефектом δ и заданной константой C. Если дефект δ достаточно мал $\Big(\delta_0=\min\Big(1/18, 1/\sqrt{18(3+2C_2'+C_2'^2)}\Big)\Big)$, то существует обычное слабо* непрерывное представление τ группы G, близкое к π. А именно, существует функция*

$\sigma(\delta) > 0,\ 0 < \delta < \delta_0$, *для которой* $\|\pi(g) - \tau(g)\| \leqslant \sigma(\delta)$, *и, для заданного* C, $\sigma(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство. По теореме 4.27 и замечанию 4.10, существует обычное представление τ группы G в E, удовлетворяющее условию $\|\pi(g) - \tau(g)\| < 1/2$ для всех $g \in G$, где π непрерывна в слабой* операторной топологии. Согласно [242], отсюда следует непрерывность представления τ в слабой* операторной топологии. □

Глава 5. Конечномерные квазипредставления групп Ли

В заключительной главе излагается один из основных результатов работы, а именно, описывается структура конечномерных локально ограниченных квазипредставлений произвольной связной группы Ли (это утверждение является и своего рода классификацией рассматриваемых квазипредставлений). Одним из инструментов этого описания является “теорема тривиальности” для конечномерных унитарных квазипредставлений с достаточно малым дефектом для произвольной компактной группы Ли, которую можно также рассматривать как утверждение об устойчивости для теоремы Ван дер Вардена о непрерывности конечномерных локально ограниченных представлений компактных групп Ли. “Теорема тривиальности” доказывается в § 5.3, в котором изучается также и структура квазигомоморфизмов полупростых компактных групп Ли, а подготовительные сведения (свойства коммутаторов в компактных группах Ли и банаховых алгебрах) приводятся в § 5.2. Основные результаты собраны в § 5.4. Здесь устанавливаются специальные свойства одномерных псевдопредставлений и вещественных псевдохарактеров на группах Ли, включая автоматическую непрерывность этих отображений на связных полупростых группах Ли и другие свойства автоматической непрерывности конечномерных квазипредставлений связных групп Ли и даётся полное описание всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных полупростых групп Ли и связных групп Ли общего вида. Одним из наиболее запоминающихся утверждений этого параграфа является утверждение о возможности аппроксимировать любое локально ограниченное конечномерное квазипредставление связной группы Ли некоторым чистым псевдопредставлением этой группы (и ошибка аппроксимации, грубо говоря, мала при малом дефекте). Здесь также высказан ряд замечаний и описаны некоторые нерешённые задачи.

Классификационные проблемы (описание структуры отображений того или иного класса) можно надеяться решить и в некоторых классах отображений, строго содержащих класс квазипредставлений. Одна из более широких постановок задачи возникла в работах Конна и Хигсона [64, 65] и Громова [105] (см. также [14, 63, 104, 156]). В них речь идет об отображениях, удовлетворяющих условию ограниченности или малости не на всей группе, а на некотором компакте (в частности, на множестве образующих конечно порожденной дискретной группы). Эта точка зрения оказалась чрезвычайно продуктивной в K-теории, в частности, в различных вариантах K-теории для C^*-алгебр [7, 14–20, 31, 36, 66–68, 77, 79, 99, 100, 111, 116, 117, 144, 151, 193, 194, 198, 199, 208, 209, 223]. Конном и Хигсоном [65] были введены понятия асимптотического и аппроксимативного представления, которые затем были развиты и эффективно использованы в указанных выше работах В. М. Мануйлова, А. С. Мищенко и К. Томсена по фредгольмовым представлениям дискретных групп и теории расширений C^*-алгебр.

Таким образом, помимо класса всех отображений группы в алгебры линейных операторов или в топологические группы, есть содержательные классы почти представлений, существенно более широкие, чем класс квазипредставлений, и многие из этих классов представляют бо́льший интерес для геометрии. Тем самым, здесь сделан лишь первый шаг к уяснению истинного богатства и роли класса отображений, “выглядящих как представления”.

5.1. Коммутаторы в компактных группах Ли

В этом параграфе напоминаются свойства коммутаторов в банаховых алгебрах и компактных группах Ли.

5.1.1. Определения

Определение 5.1 (см. [122]). Пусть A — банахова алгебра с единичным элементом e, пусть A^{-1} — множество обратимых элементов A, пусть $B_1(e)$ — открытый шар единичного радиуса с центром в e, пусть $\exp\colon A \to A^{-1}$ — отображение, определенное формулой

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \cdot x^n, \qquad x \in A,$$

пусть $\ln\colon B_1(e) \to A$ — отображение, определенное формулой

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} x^n, \qquad x \in B_1(e),$$

и пусть D — множество всех пар $(x,y) \in A \times A$, удовлетворяющих условию $\exp x \exp y \in B_1(e)$. Отображение $D \to A$, определяемое формулой

$$(x,y) \mapsto x * y = \ln(\exp x \exp y), \qquad (x,y) \in D,$$

называется *CH-умножением* (или *умножением Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа–Дынкина*) на A.

Определение 5.2. (1) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$. Обозначим через $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ линейную оболочку элементов $[a,b]$, $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Пусть $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ — так называемый коммутаторный идеал в $\mathfrak{g}$.

(2) Пусть G — группа, $A, B \subset G$, $a \in A$, $b \in B$. Положим $\mathrm{comm}(a,b) = aba^{-1}b^{-1}$. Обозначим через $\mathrm{comm}(A,B)$ подгруппу, порожденную всеми элементами вида $\mathrm{comm}(a,b)$, $a \in A$, $b \in B$, и положим $G' = \mathrm{comm}(G,G)$. Отметим, что построение $(A,B) \to \mathrm{comm}(A,B)$ не содержит операции замыкания.

5.1.2. Лемма о коммутаторах в банаховых алгебрах

Лемма 5.1 (предложение 5.59 в [122]). *Пусть A — банахова алгебра, $\mathfrak{g}$ — замкнутая конечномерная подалгебра Ли в A, а B — такой открытый шар с центром в 0, что произведение $B * B * B * B$ определено и содержится в шаре радиуса π.*[1] *Пусть размерность коммутаторной алгебры $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ равна n. Положим $\mathrm{comm}_*(x,y) = x * y * (-x) * (-y)$, $x,y \in \mathfrak{g} \cap B$. Тогда*

1) $\mathrm{comm}_*(x,y) \in \overline{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ *для любых $x,y \in \mathfrak{g} \cap B$;*

2) *существуют такие элементы $X_j,Y_j \in \mathfrak{g}$, $j = 1,\ldots,n = \dim \mathfrak{g}'$, что для любого набора $(r_1,\ldots,r_n)$ вещественных чисел, удовлетворяющих условию $0 < |r_j| < 1$ для всех $j = 1,\ldots,n$, существует такое $\varepsilon > 0$, что функция $\varphi\colon (-\varepsilon,\varepsilon)^n \to B \cap \mathfrak{g}$, определяемая формулой*

$$\varphi(s_1,\ldots,s_n) =$$
$$= (r_1 \cdot X_1 * s_1 \cdot Y_1 * -r_1 \cdot X_1 * -s_1 \cdot Y_1) * \cdots * (r_n \cdot X_n * s_n \cdot Y_n * -r_n \cdot X_n * -s_n \cdot Y_n) =$$
$$= \mathrm{comm}(r_1 \cdot X_1, s_1 \cdot Y_1) * \cdots * \mathrm{comm}(r_n \cdot X_n, s_n \cdot Y_n),$$

является гомеоморфизмом на некоторую окрестность нуля в $\mathfrak{g}'$;

[1] Как известно, достаточно предположить, что $\|x\| < (1/2)\ln(2 - \sqrt{1/2})$ для любого $x \in B$.

3) *Любой элемент некоторой окрестности нуля в* $\mathfrak{g}'$ *является *-произведением не более чем* n *экземпляров *-коммутаторов. В частности, существует такой открытый шар* B' *с центром в нуле в* $\mathfrak{g}'$*, что* $B' \cap \mathfrak{g}'$ *— наименьшая локальная подгруппа относительно* B'*, содержащая все *-коммутаторы* $\mathrm{comm}_*(X,Y) \in B'$, $X,Y \in B'$.

5.2. Теорема о квазигомоморфизмах полупростых компактных групп Ли. Решение проблемы Каждана–Мильмана

5.2.1. Квазипредставления полупростых компактных групп Ли

Теорема 5.1. *Пусть* G *— связная полупростая компактная группа Ли. Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$*, что для любого конечномерного унитарного* δ*-квазипредставления* T *группы* G *существует непрерывное представление* S *(в том же векторном пространстве),* ε*-близкое к* T.

Доказательство. Пусть n — размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G. Пусть ε и δ — положительные числа. Условия малости на величины ε и δ будут постепенно наложены в ходе доказательства.

Пусть E — конечномерное гильбертово пространство представления, U — окрестность единицы в группе $\mathrm{U}(E)$ унитарных операторов в E. Ввиду непрерывности операции умножения, существует такая окрестность единицы W в $\mathrm{U}(E)$, что

$$\mathrm{comm}(\{h_1\} \times \mathrm{U}(E)) \cdots \mathrm{comm}(\{h_n\} \times \mathrm{U}(E)) \subseteq U \tag{5.1}$$

для любых $h_1, \ldots, h_n \in W$ (см. лемму 5.63 в [122]). При этом, согласно утверждению леммы 5.1, существуют такие векторы $X_j \in \mathfrak{g}$, $j = 1, \ldots, n$, что для любого набора $r_1, \ldots, r_n$ ненулевых вещественных чисел r_j с $0 < |r_j| < 1$ множество

$$\mathrm{comm}(\{\exp(r_1 \cdot X_1)\} \times G) \cdots \mathrm{comm}(\{\exp(r_n \cdot X_n)\} \times G)$$

содержит некоторую окрестность V единицы в группе G. Очевидно, что это свойство сохранится при любом достаточно малом шевелении векторов X_j,

$j=1,\ldots,n$, а в результате сколь угодно малого шевеления этих векторов можно добиться того, чтобы семейство этих векторов было линейно независимым.

Рассмотрим замкнутую однопараметрическую подгруппу G_j в G, порождённую элементом X_j алгебры Ли группы Ли $\mathfrak{g}$. Подгруппа G_j компактна и коммутативна, и поэтому аменабельна как дискретная группа. Ограничение T_j отображения T на подгруппу G_j является квазипредставлением подгруппы G_j. Если δ достаточно мало́, то, по теореме 4.15, примененной к подгруппе G_j, где G_j рассматривается в дискретной топологии, существует обычное (конечно, не обязательно непрерывное) представление S_j группы G_j в том же пространстве E, равномерно близкое к квазипредставлению T_j. Пусть $\sigma > 0$ — такое число, что

$$\|S_j(g)-T_j(g)\|\leqslant\sigma \quad \text{для всех} \quad g\in G_j \quad \text{и для всех} \quad j=1,\ldots,n. \tag{5.2}$$

По той же теореме 4.15 мы вправе считать, что число σ мало́ вместе с δ.

Пусть H_j — образ группы G_j в представлении S_j. Покажем, что для любого j, $j=1,\ldots,n$, существует такое вещественное число r_j, $0<|r_j|<1$, что элемент $S_j(\exp(r_j\cdot X_j))$ принадлежит множеству W. Если H_j — единичная группа, то достаточно взять $r_j=\frac{1}{2}$, и тогда $S_j(\exp(r_j\cdot X_j))=1\in W_H$. Пусть теперь группа H_j неединична. По построению, группа H_j — гомоморфный образ делимой группы $\mathbb{R}$. Поэтому сама группа H_j делима. По предположению, группа H_j неединична; следовательно, она бесконечна, а потому недискретна в $\mathrm{U}(E)$. Но тогда и образ любой проколотой окрестности нуля в группе $\mathbb{R}$ не может быть конечным множеством, поскольку образ каждой проколотой окрестности непуст, а пересечение всех этих образов пусто. Таким образом, множество $M_{1/2}=\{S_j(\exp(r\cdot X_j)),0<|r|<1/2\}$ бесконечно, а потому и недискретно, т.е. имеет точку накопления. Рассматривая отношения двух сколь угодно близких различных элементов коммутативного семейства $M_{1/2}$, видим, что множество $M_1=\{S_j(\exp(r\cdot X_j)),0<|r|<1\}$ содержит неединичные элементы, сколь угодно близкие к единичному элементу $e_H\in H$. Таким образом, в любом случае множество всевозможных элементов вида

$$S(\exp(r_1\cdot X_1))h_1S(\exp(-r_1\cdot X_1))h_1^{-1}\cdots S(\exp(r_n\cdot X_n))h_nS(\exp(-r_n\cdot X_n))h_n^{-1},$$

где $h_1,\ldots,h_n$ — любые элементы группы $\mathrm{U}(E)$, содержится в выбранной ранее окрестности U единичного элемента в $\mathrm{U}(E)$. В частности, и множество всевозможных элементов группы $\mathrm{U}(E)$, допускающих представление в виде произведения

$$S(\exp(r_1\cdot X_1))T(g_1)S(\exp(-r_1\cdot X_1))T(g_1)^{-1}\times\cdots$$
$$\cdots\times S(\exp(r_n\cdot X_n))T(g_n)S(\exp(-r_n\cdot X_n))T(g_n)^{-1},$$

где $g_1,\dots,g_n$ — любые элементы группы G, содержится в той же выбранной ранее окрестности U единичного элемента в $\mathrm{U}(E)$.

Воспользуемся теперь неравенством

$$\|S(\exp(r_1\cdot X_1))T(g_1)S(\exp(-r_1\cdot X_1))T(g_1)^{-1}\times\cdots$$
$$\cdots\times S(\exp(r_n\cdot X_n))T(g_n)S(\exp(-r_n\cdot X_n))T(g_n)^{-1}-$$
$$-T(\exp(r_1\cdot X_1))T(g_1)T(\exp(-r_1\cdot X_1))T(g_1)^{-1}\times\cdots$$
$$\cdots\times T(\exp(r_n\cdot X_n))T(g_n)T(\exp(-r_n\cdot X_n))T(g_n)^{-1}\|\leqslant 2n\sigma,$$

которое следует индукцией по n из неравенства (5.2), унитарности отображений S_j и T, и неравенством

$$\|T(\exp(r_1\cdot X_1))g_1\exp(-r_1\cdot X_1))(g_1)^{-1}\times\cdots$$
$$\cdots\times\exp(r_n\cdot X_n))(g_n)\exp(-r_n\cdot X_n)(g_n)^{-1})-$$
$$-T(\exp(r_1\cdot X_1))T(g_1)T(\exp(-r_1\cdot X_1))T(g_1)^{-1}\times\cdots$$
$$\cdots\times T(\exp(r_n\cdot X_n))T(g_n)T(\exp(-r_n\cdot X_n))T(g_n)^{-1}\|\leqslant 2n\delta, \quad (5.3)$$

которое, ввиду унитарности отображения T, следует из неравенства

$$\|T(g_1g_2\cdots g_m)-T(g_1)\cdots T(g_m)\|=$$
$$=\|T(g_1g_2\cdots g_m)-T(g_1g_2\cdots g_{m-1})T(g_m)+$$
$$+T(g_1g_2\cdots g_{m-1})T(g_m)-T(g_1g_2\cdots g_{m-2})T(g_{m-1})T(g_m)+\cdots$$
$$\cdots+T(g_1g_2)T(g_3)\cdots T(g_m)-T(g_1)T(g_2)T(g_3)\cdots T(g_m)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|T(g_1g_2\cdots g_m)-T(g_1g_2\cdots g_{m-1})T(g_m)\|+\cdots$$
$$\cdots+\|T(g_1g_2)T(g_3)\cdots T(g_m)-T(g_1)\cdots T(g_m)\|\leqslant m\delta,$$
$$g_i\in G,\quad i=1,\dots,m,\quad m\in\mathbb{N}.$$

Пусть окрестность U имеет вид $\{h\in\mathrm{U}(E),\ \|h-1_E\|\leqslant\theta\}$ для достаточно малого $\theta>0$. Объединяя это неравенство и неравенства (5.2) и (5.3), получаем, что при всех $g\in G$, допускающих представление в виде произведения (ср. (5.1)),

$$(\exp(r_1\cdot X_1))g_1(\exp(-r_1\cdot X_1))(g_1)^{-1}\cdots(\exp(r_n\cdot X_n))g_n(\exp(-r_n\cdot X_n))(g_n)^{-1},$$
$$r_1,\dots,r_n\in\mathbb{R},\quad g_1,\dots,g_n\in G,$$

и, в частности, в указанной выше окрестности V единичного элемента группы G, выполняется неравенство

$$\|T(g)-1_E\|=\|T\big((\exp(r_1\cdot X_1))g_1(\exp(-r_1\cdot X_1))(g_1)^{-1}\times\cdots$$
$$\cdots\times(\exp(r_n\cdot X_n))g_n(\exp(-r_n\cdot X_n))(g_n)^{-1}\big)-1_E\|\leqslant$$
$$\leqslant\|T\big((\exp(r_1\cdot X_1))g_1(\exp(-r_1\cdot X_1))(g_1)^{-1}\cdots(\exp(r_n\cdot X_n))g_n(\exp(-r_n\cdot X_n))(g_n)^{-1}\big)\times$$
$$\times T(\exp(r_1\cdot X_1))T(g_1)\cdots T(\exp(-r_1\cdot X_1))T((g_1)^{-1})\times\cdots$$
$$\cdots\times T(\exp(r_n\cdot X_n))T(g_n)T(\exp(-r_n\cdot X_n))T((g_n)^{-1})\|+$$
$$+T(\exp(r_1\cdot X_1))T(g_1)T(\exp(-r_1\cdot X_1))T((g_1)^{-1})\times\cdots$$
$$\cdots\times T(\exp(r_n\cdot X_n))T(g_n)T(\exp(-r_n\cdot X_n))T((g_n)^{-1}))\times$$
$$\times S_1(\exp(r_1\cdot X_1))T(g_1)S_1(\exp(-r_1\cdot X_1))T((g_1)^{-1})\times\cdots$$
$$\cdots\times S_n(\exp(r_n\cdot X_n))T(g_n)S_n(\exp(-r_n\cdot X_n))T((g_n)^{-1}))\|+$$
$$+\|S_1(\exp(r_1\cdot X_1))T(g_1)S_1(\exp(-r_1\cdot X_1))T((g_1)^{-1})\times\cdots$$
$$\cdots\times S_n(\exp(r_n\cdot X_n))T(g_n)S_n(\exp(-r_n\cdot X_n))T((g_n)^{-1}))-1_E\|\leqslant 2n\delta+2n\sigma+\theta.$$

Тогда каждое из представлений S_j группы $G_j\subset G$ удовлетворяет условиям $\|S_j(g)-1_E\|\leqslant\|S_j(g)-T(g)\|+\|T(g)-1_E\|\leqslant 2n\delta+(2n+1)\sigma+\theta$, и можно считать числа δ, σ и θ столь малыми, что правая часть неравенства меньше числа, меньшего двух. По теореме 2.7, каждое представление S_j непрерывно.

Напомним, что в соответствии с построением набора элементов $X_1,\ldots$ $\ldots,X_n$, примененным в [122] в доказательстве утверждения леммы 5.1 (т.е. предложения 5.69 в [122]), можно считать, что система $X_1,\ldots,X_n$ образует базис алгебры Ли группы G. Рассмотрим отображение Φ_1 произведения групп $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ в группу G, определяемое умножением $\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}\mapsto$ $\mapsto g_1g_2\cdots g_n$, $g_i\in G_i$, $i=1,\ldots,n$, и отображение Φ_2 произведения групп $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ в группу H, определяемое формулой $\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}\mapsto$ $\mapsto S_1(g_1)S_2(g_2)\cdots S_n(g_n)$, $g_i\in G_i$, $i=1,\ldots,n$. Отображения Φ_1 и Φ_2 непрерывны, и, по теореме о неявной функции, отображение Φ_1 является гомеоморфизмом на некоторой окрестности O единичного элемента в произведении групп. Ограничим оба отображения Φ_1 и Φ_2 на эту окрестность. Очевидно, отображение $\rho\colon\Phi_1(O)\to\Phi_2(O)$, определенное формулой $\rho(g_1g_2\cdots g_n)=$ $=S_1(g_1)S_2(g_2)\cdots S_n(g_n)$ для всех $\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}\in O$, корректно определено, непрерывно, унитарно и удовлетворяет условию

$$\|\rho(g)-T(g)\|=\|\rho(g_1g_2\cdots g_n)-T(g_1g_2\cdots g_n)\|=$$

$$
\begin{aligned}
&= \|S_1(g_1)S_2(g_2)\cdots S_n(g_n) - T(g_1g_2\cdots g_n)\| = \\
&= \|S_1(g_1)S_2(g_2)\cdots S_n(g_n) - T(g_1)T(g_2)\cdots T(g_n) + \\
&\qquad + T(g_1)T(g_2)\cdots T(g_n) - T(g_1g_2\cdots g_n)\| \leqslant \\
&\leqslant \|S_1(g_1)S_2(g_2)\cdots S_n(g_n) - T(g_1)T(g_2)\cdots T(g_n)\| + \\
&\qquad + \|T(g_1)T(g_2)\cdots T(g_n) - T(g_1g_2\cdots g_n)\| \leqslant n\sigma + n\delta, \quad g \in O.
\end{aligned}
$$

Как обычно, для любого $g_0 \in G$ введем окрестность $O_{g_0} \subset G$ точки g_0, рассмотрим конечное подпокрытие группы G окрестностями $O_{g_k} \subset G$, $k = 1, \ldots, K$, и положим

$$
R(g_k g) = T(g_k)\rho(g), \qquad g \in g_k^{-1}\left(O(g_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} O(g_j)\right)\right),
$$

где подразумевается, что символ $\bigcup_{j=1}^{0} O(g_j)$ означает пустое множество. Очевидно, что R — борелевская операторнозначная функция на G и

$$
\begin{gathered}
\|T(g) - R(g)\| = \|T(g_k w) - T(g_k)\rho(w)\| \leqslant \\
\leqslant \|T(g_k w) - T(g_k)T(w)\| + \|T(g_k)T(w) - T(g_k)\rho(w)\| \leqslant (n+1)\delta + n\sigma
\end{gathered}
$$

для любого $g \in G$, если k — такой индекс, что

$$
g \in g_k^{-1}\left(O(g_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} O(g_j)\right)\right),
$$

и, если $\delta > 0$ (и тем самым и $\sigma > 0$) достаточно мало́, то достаточно доказать утверждение теоремы для борелевского (и потому измеримого) отображения R, которое является унитарным квазипредставлением группы G с

$$
\begin{gathered}
\|R(gg_1) - R(g)R(g_1)\| \leqslant \delta + \|R(gg_1) - T(gg_1)\| + \|R(g) - T(g)\| + \|R(g_1) - T(g_1)\| \leqslant \\
\leqslant (3n+4)\delta + 3n\sigma, \quad g, g_1 \in G.
\end{gathered}
$$

Согласно теореме 4.16, формула $R(f) = \int_G f(g)R(g)\,dg$, $f \in L^1(G)$, определяет непрерывное квазипредставление групповой алгебры $L^1(G)$ группы G в E. Эта алгебра аменабельна [130].

Тогда, с учетом малости величины σ при малом δ, из теоремы 4.15 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ (в связи с тем, что $(3n+4)\delta + 3n\sigma$ можно считать достаточно малым при малом δ; точный смысл условия малости можно найти в соответствующем неравенстве на стр. 299

в [133]), что существует обычное непрерывное представление V групповой алгебры $L^1(G)$ в том же пространстве E, удовлетворяющее условию $\|R(f)-V(f)\| \leqslant \varepsilon\|f\|$ для всех $f \in L^1(G)$.

В свою очередь, это непрерывное представление V групповой алгебры $L^1(G)$ в пространстве E определяет непрерывное представление U группы G в пространстве E, в свою очередь определяющее исходное представление V групповой алгебры $L^1(G)$, и норма разности $R(g)-U(g)$, $g \in G$, существенно ограничена величиной ε. Поскольку компактная топологическая группа G аменабельна, а представление U в конечномерном пространстве E непрерывно, то, не уменьшая общности, можно считать пространство E гильбертовым (вообще говоря, относительно скалярного произведения, которое может отличаться от исходного), а представление U — унитарным относительно этой гильбертовой структуры. Тогда из условия унитарности отображения T относительно "старого" скалярного произведения, равномерной близости квазипредставления T и представления R и унитарности представления R относительно нового скалярного произведения следует (см., например, [157]), что оператор, осуществляющий изоморфизм гильбертовых пространств относительно этих двух скалярных произведений, мало отличается от единичного оператора (в каждой из норм).

Итак, $\operatorname{ess\,sup}_{g\in G}\|R(g)-U(g)\| \leqslant \varepsilon$. Так как на окрестности O разность $R-U$ непрерывна, то функция $g \mapsto \|R(g)-U(g)\|$, $g \in O$, непрерывна на O и поэтому ограничена на O величиной ε. Тогда из построения отображения R следует, что в рассматриваемом нами разбиении можно использовать открытую окрестность с нулевой мерой границы и учитывать только слагаемые, имеющие внутренние точки. Отсюда сразу следует, что норма разности $R(g)-U(g)$ не превосходит ε на всей группе G. Это завершает доказательство теоремы 5.1. $\square$

Эта теорема допускает почти очевидное усиление, в котором условие унитарности заменено условием ограниченности рассматриваемого отображения.

Теорема 5.2. *Пусть G — связная полупростая компактная группа Ли. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого конечномерного ограниченного δ-квазипредставления T группы G существует непрерывное представление S (в том же векторном пространстве), ε-близкое к T.*

Доказательство. Если $\|T(g)\| \leqslant C$ для всех $g \in G$, то доказательство предыдущей теоремы применимо полностью; в правых частях содердательных неравенств появляется постоянный сомножитель C^n или C^{2n}, который влияет только на выбор δ при переходе к близкому борелевскому квазипредставлению, и полностью сохраняется структура рассуждения. □

Эта теорема является решением проблемы, которую Каждан в [141] приписал вопросу Мильмана. В работе [141] 1982 года предпринята попытка рещить задачу для непрерывных отображений, но по умолчанию предполагается, что для аменабельных локально компактных групп инвариантное среднее от непрерывной ограниченной функции двух переменных является непрерывной функцией оставшегося переменного, что не так даже для почти периодических функций. Результаты работы [141] верны для компактных (что было известно по работе [108] 1974 года) и дискретных аменабельных групп.

5.2.2. Квазигомоморфизмы полупростых компактных групп Ли

Теорема 5.3. *Пусть H — компактная группа Ли, а G — связная полупростая компактная группа Ли. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого δ-квазигомоморфизма групп $T\colon G \to H$ существует непрерывный гомоморфизм $S\colon G \to H$, ε-близкий к T.*

Доказательство. Как и любая компактная группа Ли, группа H допускает точное линейное представление (ср. [122, теорема XI.8.3.I]), и тем самым можно считать группу H компактной подгруппой некоторой унитарной группы $\mathrm{U}(E)$. Поэтому, переходя при необходимости от компактной группы Ли H к её образу в точном непрерывном унитарном представлении, мы вправе считать, что H — (замкнутая) подгруппа группы унитарных операторов в некотором конечномерном гильбертовом пространстве E и рассматривать квазигомоморфизм T как квазипредставление T группы G в пространстве E.

Напомним следующий результат Монтгомери и Циппина, полученный в 1942г. в [157] (таким образом, это — один из первых результатов теории возмущений для групп Ли) и приведенный с полным доказательством в [158, теорема V.5.3]. *Если G — группа Ли, K — компактная подгруппа в G, то су-*

ществует такое открытое множество O в G, содержащее K, что, если H — компактная подгруппа в G, содержащаяся в O, то существует элемент $g \in G$, удовлетворяющий условию $g^{-1}Hg \subset K$ и при данной окрестности W единицы в G открытое множество O можно выбрать так, что для любой подгруппы $H \subset O$ элемент g, осуществляющий указанное подобие, можно выбрать в окрестности W. Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, что $\varepsilon/3$-окрестность подгруппы H в $\mathrm{U}(E)$ содержится в O. Пусть W — $\varepsilon/3$-окрестность единичного элемента в $\mathrm{U}(E)$.

Воспользуемся результатом предыдущей теоремы и для выбранного ε найдем число δ, удовлетворяющее условию теоремы 5.1 для числа $\varepsilon/3$. Рассмотрим δ-квазигомоморфизм $T\colon G \to H$. Согласно утверждению теоремы 5.1, существует обычное непрерывное унитарное представление S группы G в пространстве E, $\varepsilon/3$-близкое к T. Образ $S(G)$ этого отображения является подгруппой группы $\mathrm{U}(E)$, содержащейся в O, и, тем самым, по приведенной выше теореме Монтгомери–Циппина [157], существует такой элемент $a \in W \subset \mathrm{U}(E)$, что $a^{-1}S(G)a \subset H$. Тем самым отображение $S'\colon G \to H$, определенное формулой $S'(g) = a^{-1}S(g)a$, $g \in G$, является непрерывным гомоморфизмом группы G в $\mathrm{U}(E)$, и образ этого гомоморфизма содержится в группе, которую мы отождествили с H. Очевидная выкладка показывает, что $\|T(g) - S'(g)\| \leqslant \varepsilon$ для всех $g \in G$, что завершает доказательство основной теоремы этого раздела, теоремы 5.3. $\square$

5.3. Структура конечномерных локально ограниченных квазипредставлений групп Ли

5.3.1. Автоматическая непрерывность псевдохарактеров

Напомним, что если G — связная или почти связная локально компактная группа, то семейство нормальных подгрупп $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_G$ группы G, для которых факторгруппа G/N является группой Ли, образует фильтр на G, и

$$\bigcup_{N \in \mathfrak{N}} N = \{e_G\}.$$

Пусть G — локально компактная группа, O — открытая проективно-лиева подгруппа в G, пусть $\mathfrak{N}$ — семейство компактных нормальных подгрупп N в O, для которых O/N — группа Ли, и пусть π — (не обязательно непрерывное) локально ограниченное квазипредставление группы G в конечномерном нормированном пространстве E. Введём обозначение

$$\mathrm{FDG}(\pi) = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} \overline{\pi(N)}.$$

Квазипредставление π называется *финально непрерывным*, если $\mathrm{FDG}(\pi) = \{1_E\}$ и *финально преднепрерывным*, если множество $\mathrm{FDG}(\pi)$ содержится в открытом шаре радиуса $< \sqrt{3}$ с центром в единичном операторе в пространстве $\mathcal{L}(E)$.

Напомним, что разрывное конечномерное представление π группы Ли (например, разрывный унитарный характер неодномерного тора) может иметь тривиальное множество $\mathrm{FDG}(\pi)$. Таким образом, условие тривиальности множества $\mathrm{FDG}(\pi)$ не обеспечивает непрерывности локально ограниченного представления локально компактной группы в конечномерном нормированном пространстве.

В то время как вопросы непрерывности представлений групп многократно изучались с различных точек зрения (как в предположении измеримости или борелевости этих представлений, если речь шла о представлениях локально компактных или метрических групп (см. исторический обзор в [96]), так и без этого предположения, в том числе для более общих классов топологических групп [35, 42, 241–245, 247, 248, 251, 253]), аналогичный вопрос для квазипредставлений практически не исследован. Сложность этого вопроса связана с тем, что он не индивидуален. Вопрос относится, собственно, не к объекту, а к классу и ставится следующим образом: есть ли непрерывное отображение среди малых возмущений данного квазипредставления π?

Простейшим классом групп, в котором этот вопрос заслуживает изучения, является класс связных групп Ли. Если группа разрешима, то она не имеет нетривиальных квазипредставлений, и поэтому следует начинать с полупростых групп Ли. Поскольку каждая полупростая группа Ли является факторгруппой прямого произведения простых групп Ли, рассмотрим условия автоматической непрерывности для простых групп Ли, и начнём с одномерных квазипредставлений.

В отличие от общего случая, любое одномерное квазипредставление определяет класс эквивалентности (класс отображений, получаемых ограниченным возмущением данного квазипредставления), допускающий выделенный элемент, а именно, в одномерном случае псевдопредставление, связанное с данным квазипредставлением (с достаточно малым дефектом), определено однозначно (см. теорему 2, следствие 4.2 и следствие 4.3). Таким образом, следующее утверждение можно рассматривать как первый шаг в изучении проблемы автоматической непрерывности для квазипредставлений (в форме, поставленной выше).

Теорема 5.4. *Любое одномерное псевдопредставление простой группы Ли непрерывно.*

Мы докажем теорему 5.4 в разделе 5.4.3. Следующее утверждение является первым шагом к доказательству теоремы 5.4.

Теорема 5.5. *Пусть G — связная простая группа Ли. Если G не является эрмитово симметрической группой или если центр группы G конечен, то любой псевдохарактер на G тождественно равен нулю. Если G — эрмитово симметрическая группа с бесконечным центром, то любой псевдохарактер на G кратен псевдохарактеру Гишарде–Вигнера на G. В частности, любой псевдохарактер на простой группе Ли непрерывен.*

Перейдем к доказательству. Начнем с вспомогательных утверждений.

Лемма 5.2. *Если G — полупростая связная группа Ли, не являющаяся эрмитово симметрической, то единственным вещественным псевдохарактером на G является нулевой характер.*

Доказательство. Из нашего предположения следует, что центр группы G конечен. Пусть f — псевдохарактер на G. Из теоремы 3 следует, что ограничение f на каждую однопараметрическую подгруппу в G является ее гомоморфизмом. Кроме того, псевдохарактер f инвариантен относительно внутренних автоморфизмов, так что его ограничения на торы (которые являются обычными гомоморфизмами по теореме 3) инвариантны относительно соответствующих групп Вейля.

Воспользуемся теперь разложением Ивасавы $G = KAN$, где группа K компактна (поскольку центр группы G конечен), а группы A, N и AN аменабельны (поскольку A абелева, N нильпотентна, а AN разрешима). Из нашего предположения следует, что компактная группа Ли K полупроста. Если f — псевдохарактер на G, то его ограничения на подгруппы K и AN являются соответственно псевдохарактерами $\varkappa_K$ и $\varkappa_{AN}$ на этих группах. По теореме 3, псевдохарактер $\varkappa_{AN}$ является обычным характером. Но любой характер группы AN тривиален на нильпотентной части N (поскольку каждый элемент группы N является коммутатором, см., например, [116, гл. I, Лемма 5.4]), так что для $g = kan$ разность

$$f(g) - \varkappa_K(k) - \varkappa_{AN}(a)$$

должна быть ограничена. С другой стороны, характер $\varkappa_{AN}$ должен быть инвариантен относительно группы Вейля, связанной с A. Эта группа Вейля содержит семейство отражений в элементах некоторого базиса, так что характер $\varkappa_{AN}$ должен принимать равные значения в точках, симметричных относительно соответствующих плоскостей. Гиперплоскостей, проходящих через эти орбиты относительно группы Вейля, не существует. Следовательно, характер $\varkappa_{AN}$ должен быть нулевым. Наконец, любой элемент некоторой окрестности единичного элемента полупростой компактной группы Ли может быть представлен в виде произведения ограниченного числа элементов, принадлежащих подгруппам, изоморфным группе $\mathrm{SU}(2)$ [122, 6.45 и 6.46]. Но любой элемент в группе $\mathrm{SU}(2)$ сопряжён своему обратному, и поэтому любой псевдохарактер на группе $\mathrm{SU}(2)$ равен нулю. Следовательно, любой псевдохарактер на полупростой компактной группе Ли ограничен на некоторой окрестности единичного элемента. Из компактности группы G следует тогда, что рассматриваемый псевдохарактер ограничен на всей группе, и поэтому равен нулю. В частности, псевдохарактер $\varkappa_K$ — нулевой. Таким образом, псевдохарактер f ограничен, так что $f = 0$, что завершает доказательство леммы 5.2. □

Лемма 5.3. *Если G — эрмитово симметрическая простая связная группа Ли, то любой псевдохарактер на G является одним из псевдохарактеров Гишарде–Вигнера на G. В частности, если центр группы G конечен, то любой псевдохарактер на G равен нулю.*

Установим сначала следующее вспомогательное предложение.

Лемма 5.4. *Пусть G — односвязная эрмитово симметрическая простая группа Ли, K — аналитическая подгруппа группы G, отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли G. Рассмотрим разложение Ивасавы*

$$g = k(g)an, \qquad g \in G, \quad k \in K,$$

связанное с группой K. Рассмотрим композицию отображения $g \mapsto k(g)$, $g \in G$, и непрерывной проекции, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$. Существует класс сопряжённых элементов, на котором эта композиция не принимает постоянного значения.

Доказательство леммы 5.4. Достаточно убедиться в этом для группы $\mathrm{SL}(2)$, для которой этот факт устанавливается прямой проверкой. □

Доказательство леммы 5.3. Пусть G — эрмитово симметрическая полупростая связная группа Ли и пусть f — псевдохарактер на G. Пусть $Q \subset K$ — компактная подгруппа, образованная элементами с тривиальной центральной компонентой в группе K (с $z(k) = e_K$). По существу повторяя рассуждения, примененные в доказательстве леммы 5.2, мы видим, что ограничения псевдохарактера f на Q и AN равны нулю. Таким образом, достаточно доказать, что ограничение псевдохарактера f на центр Z_K компактной группы K, которое является обычным характером центра Z_K по теореме 3, непрерывно. Действительно, если это ограничение непрерывно, то ограничения псевдохарактера f на K и на AN совпадают с ограничениями некоторого псевдохарактера Гишарде–Вигнера на эти подгруппы. Тогда разность этих псевдохарактеров ограничена и является псевдохарактером, и поэтому равна нулю, так что рассматриваемый псевдохарактер действительно совпадает с некоторым псевдохарактером Гишарде–Вигнера.

Итак, нам осталось доказать, что обычный вещественный характер центра Z_K группы K, получаемый при ограничении псевдохарактера f на Z_K, непрерывен. Воспользуемся леммой 5.4. Согласно этой лемме, существует класс сопряжённых элементов, на котором композиция отображения $g \mapsto k(g)$, $g \in G$, и непрерывной проекции, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$ не принимает постоянного значения. Таким образом, образ ограничения этого вещественно-аналитического отображения на класс сопряжённых элементов, содержащий некоторый нетривиальный элемент вида an, $a \in A$, $n \in N$, не является одноточечным множеством и, следовательно, содержит некоторый интервал V в силу теоремы о сохранении области. Ограничение рассматриваемого характера на окрестность V ограничено, поскольку произведение любого элемента z окрестности V на произведение некоторого элемента $q \in Q$ и некоторого элемента $an \in AN$ принадлежит выделенному классу сопряжённых элементов, содержащем некоторый фиксированный элемент $z_0 \in K_T$, так что на произведении $zqan$ псевдохарактер f принимает то же значение, что и на построенном элементе z_0 группы Z_K, причем

$$|f(z)| \leqslant |f(z) - f(zqan)| + |f(zqan)| =$$
$$= |f(z) - f(z) - f(q) - f(an)| + |f(z_0)| + 2C \leqslant |f(z_0)| + 2C$$

при $z \in V$, так что псевдохарактер f, а потому и характер, определяемый ограничением псевдохарактера f на Z_K, ограничен на V. Однако, как хорошо известно, любой характер группы $\mathbb{R}$, ограниченный на некоторой окрестности, непрерывен. То же верно, если вещественный характер ограничен на множестве A положительной меры в локально компактной группе G, так как он ограничен и на AA^{-1}, а такое множество содержит непустое открытое подмножество по теореме о непрерывности свертки двух суммируемых функций на группе. Это завершает доказательство леммы 5.3. □

Доказательство теоремы 5.5 непосредственно следует из определения 4.2 и лемм 5.2 и 5.3.

5.3.2. Одномерные квазипредставления групп Ли

В этом пункте мы доказываем теорему 5.4. Кроме того, мы убедимся, что теорема 5.4 позволяет описать структуру любых одномерных квазипредставлений групп Ли, откуда, в свою очередь, будет следовать, что любое одномерное псевдопредставление полупростой группы Ли является экспонентой от псевдохарактера этой группы.

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение ("лемма о подобии", ср. теорему 4.18).

Лемма 5.5. *Пусть G — аменабельная группа, а π и ρ — унитарные представления группы G в конечномерном евклидовом пространстве E, удовлетворяющие условию $\|\pi(g) - \rho(g)\| \leqslant q$ для некоторого $q < 1$ и всех $g \in G$. Тогда представления π и ρ подобны с помощью оператора A, удовлетворяющего условию $\|1_E - A\| \leqslant q$.*

Утверждение леммы допускает обобщение на бесконечномерный случай (и даже на случай представлений в пространствах Фреше).

Доказательство. Применяя левоинвариантное среднее к ограниченной функции $g \mapsto \pi(g)\rho(g^{-1})$, $g \in G$, и обозначая результат усреднения через A, получаем $\pi(h)A\rho(h^{-1}) = A$ для всех $h \in G$ как следствие левой инвариантности и $\|1_E - A\| \leqslant q$ как следствие неравенства $\|\pi(g)\rho(g^{-1}) - 1_E\| \leqslant q$ для всех $g \in G$. Отсюда следует обратимость оператора A. □

Следствие 5.1. *Пусть G — группа, а f — одномерное псевдопредставление группы G.*

(1) *Ограничение псевдопредставления f на каждую циклическую подгруппу в G является гомоморфизмом.*

(2) *При достаточно малом дефекте псевдопредставление f инвариантно относительно внутренних автоморфизмов группы G.*

Доказательство. Утверждение (1) очевидно, так как в одномерном случае отображение f либо неограничено, и тогда оно — представление (характер) по лемме 4.8. либо ограничено, и тогда его можно считать унитарным и применить лемму 5.5, причём подобие означает равенство ввиду одномерности. Утверждение (2) справедливо по той же причине, так как, если f неограничено, то f — представление, а если f ограничено, то ограничение $h \mapsto f(h)$, $h \in H$, на любую циклическую подгруппу H мало отличается от представления $h \mapsto f(ghg^{-1})$, $h \in H$, для любого $g \in G$, и снова подобие означает равенство, $f(h) = f(ghg^{-1})$ для всех $h \in H$ и $g \in G$. □

Следствие 5.2. *Пусть G — группа, а f — одномерное псевдопредставление группы G. Ограничение псевдопредставления f на каждую аменабельную подгруппу в G является гомоморфизмом, так что f — чистое псевдопредставление.*

Доказательство. Пусть f — одномерное псевдопредставление группы G. Согласно следствию 5.1, ограничение f на каждую циклическую подгруппу в G является гомоморфизмом. Кроме того, ограничение f на каждую аменабельную подгруппу H в G мало отличается от некоторого обычного характера подгруппы H. Ограничение этого характера группы H на каждую циклическую подгруппу в H мало отличается от характера этой циклической подгруппы, определяемого ограничением псевдопредставления f на ту же циклическую подгруппу. Следовательно, эти ограничения равны для любой циклической подгруппы, следовательно, они равны, и тем самым ограничение отображения f на каждую аменабельную подгруппу H в G является обычным характером подгруппы H. Таким образом, f — чистое псевдопредставление. $\square$

Доказательство теоремы 5.4 будет дано после нескольких вспомогательных утверждений, являющимися вариантами вспомогательных утверждений из предыдущего пункта.

Лемма 5.6. *Если G — полупростая связная группа Ли, не являющаяся эрмитово симметрической, то единственным вещественным одномерным псевдопредставлением группы G является единичное представление.*

Доказательство. Напомним, что из нашего предположения следует, что центр группы G конечен. Пусть f — одномерное псевдопредставление группы G. Согласно следствию 5.2, ограничение f на каждую однопараметрическую подгруппу в G является представлением этой подгруппы. Согласно следствию 5.1, при достаточно малом дефекте одномерное псевдопредставление f инвариантно относительно внутренних автоморфизмов, так что его ограничения на торы (которые являются обычными гомоморфизмами по следствию 5.2) инвариантны относительно соответствующих групп Вейля.

Воспользуемся разложением Ивасавы $G = KAN$, где группа K компактна (поскольку центр группы G конечен), а группы A, N и AN аменабельны (поскольку A абелева, N нильпотентна, а AN разрешима). Из нашего предположения следует, что компактная группа K полупроста. Если f — одномерное псевдопредставление группы G, то его ограничения на подгруппы K и AN являются соответственно одномерными псевдопредставлениями $\varkappa_K$ и $\varkappa_{AN}$ этих групп. По следствию 5.2 и определению 4.3, одномерное псевдопредставление $\varkappa_{AN}$ является обычным одномерным представлением (комплексным характером). Но любой характер группы AN тривиален на нильпотентной части N (поскольку каждый элемент группы N является коммутатором, см., например, [126, гл. I, Следствие VI.4.8]), так что для $g = kan$ разность

$$f(g) - \varkappa_K(k)\varkappa_{AN}(a)$$

должна быть ограничена (и не превосходит дефекта псевдопредставления F). С другой стороны, характер $\varkappa_{AN}$ должен быть инвариантен относительно группы Вейля, связанной с A. Эта группа Вейля содержит семейство отражений в элементах некоторого базиса, так что характер $\varkappa_{AN}$ должен принимать равные значения в точках, симметричных относительно соответствующих плоскостей. Гиперплоскостей, проходящих через эти орбиты относительно группы Вейля, не существует. Следовательно, характер $\varkappa_{AN}$ должен быть единичным. Наконец, любой элемент полупростой компактной группы Ли может быть представлен в виде произведения ограниченного числа элементов, принадлежащих подгруппам, изоморфным группе $\mathrm{SU}(2)$ [122, 6.45 и 6.46]. Но любой элемент в группе $\mathrm{SU}(2)$ сопряжён своему обратному, и поэтому любое одномерное псевдопредставление группы $\mathrm{SU}(2)$ с малым дефектом единично. Следовательно, любое одномерное псевдопредставление полупростой компактной группы Ли с малым дефектом является малым возмущением единичного представления и потому единично. В частности, одномерное псевдопредставление $\varkappa_K$ единично. Таким образом, отображение f единично, что завершает доказательство леммы 5.6. □

Лемма 5.7. *Если G — эрмитово симметрическая полупростая связная группа Ли, то любое одномерное псевдопредставление группы G с достаточно малым дефектом является экспонентой от некоторого псевдохарактера Гишарде–Вигнера на G. В частности, если центр группы G конечен, то любое одномерное псевдопредставление группы G с достаточно малым дефектом определяется чисто мнимой экспонентой от псевдохарактера Гишарде–Вигнера* (*на универсальной накрывающей группе $\tilde{G}$ группы G*), *равной единице на ядре канонического отображения $\tilde{G}\to G$.*

Очевидно, не все непрерывные одномерные псевдопредставления такой группы тривиальны. Даже если G — группа без центра (присоединённая), формула

$$\varphi_n(g)=\exp(2in\pi\theta(\widetilde{g})/\theta(z_0)), \qquad g\in G, \quad n\in\mathbb{Z},$$

где z_0 — образующий элемент центра универсальной накрывающей $\widetilde{G}$ группы G (см., например, [167]), $\widetilde{g}$ – любой прообраз элемента $g\in G$ в $\widetilde{G}$, а θ — псевдохарактер Гишарде–Вигнера на $\widetilde{G}$, корректно определяет (нетривиальное при $n\neq 0$) одномерное псевдопредставление группы G (ср. [246, 250]).

Доказательство. Пусть G — эрмитово симметрическая полупростая связная группа Ли и пусть f — одномерное псевдопредставление группы G. Достаточно рассмотреть случай, в котором группа G проста. Пусть $Q\subset K$ — компактная подгруппа, образованная элементами с тривиальной центральной компонентой в группе K (с $z(k)=e_K$). По существу повторяя рассуждения, применённые в доказательстве леммы 5.6, мы видим, что ограничения одномерного псевдопредставления f на Q и AN единичны. Таким образом, как и в доказательстве леммы 5.3, достаточно доказать, что ограничение F одномерного псевдопредставления f на одномерный центр Z_K группы K, которое является обычным комплексным характером центра по следствию 5.2, непрерывно.

Действительно, пусть ограничение F непрерывно. Пусть одномерный центр Z_K группы K компактен и тем самым изоморфен одномерному тору $\mathbb{T}$. Ограничение представления F на Z_K является унитарным характером тора Z_K. Соответствующий характер является экспонентой некоторого мнимого кратного псевдохарактера Гишарде–Вигнера, ограниченного на Z_K. Тогда экспонента этого псевдохарактера совпадает с псевдопредставлением на K и AN и потому на всей G, если эта экспонента равна 1 на ядре отображения $\tilde{G}$ в G.

Пусть теперь одномерный центр Z_K группы K некомпактен и тем самым изоморфен $\mathbb{R}$. Любой непрерывный характер этой группы есть экспонента от некоторого вещественного характера группы $\mathbb{R}$ (умноженного на чисто мнимое число). Таким образом, ограничения f на K и AN совпадают с ограничениями такой экспоненты от некоторого псевдохарактера Гишарде–Вигнера на эти подгруппы. Обратно, экспонента от псевдохарактера является одномерным псевдопредставлением. Но два одномерных псевдопредставления с достаточно малым дефектом, совпадающие на порождающем семействе подгрупп, равномерно мало отличаются на подгруппах, порождённых всеми элементами группы, так что они подобны и потому совпадают на всех однопорождённых подгруппах и потому на всех элементах. Таким образом, в этом случае рассматриваемое одномерное псевдопредставление действительно совпадает с экспонентой от некоторого псевдохарактера Гишарде–Вигнера.

Итак, нам осталось доказать, что обычный комплексный характер центра Z_K группы K, получаемый при ограничении одномерного псевдопредставления f на Z_K, непрерывен. Воспользуемся леммой 5.4. Согласно этой лемме, существует класс сопряжённых элементов, на котором композиция отображения $g \mapsto k(g)$, $g \in G$, и непрерывной проекции, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$, не принимает постоянного значения. Таким образом, образ ограничения этого вещественно-аналитического отображения на класс сопряжённых элементов, содержащий некоторый нетривиальный элемент вида an, $a \in A$, $n \in N$, не является одноточечным множеством и, следовательно, содержит некоторый интервал V в Z_K в силу автоматической связности. Ограничение рассматриваемого характера на окрестность V ограничено, поскольку произведение любого элемента z из окрестности V на произведение некоторого элемента $q \in Q$ и некоторого элемента $an \in AN$ принадлежит выделенному классу сопряжённых элементов, содержащем некоторый фиксированный элемент $z_0 \in Z_K$, так что на произведении $zqan$ одномерное псевдопредставление f принимает то же значение, что и на построенном элементе z_0 группы Z_K, причем

$$|f(z)-f(z_0)| \leqslant |f(z)-f(zqan)|+|f(zqan)-f(z_0)| =$$
$$= |f(z)-f(z)f(q)f(an)|+|f(z_0)-f(z_0)|+C \leqslant C$$

при $z \in V$, так что одномерное псевдопредставление f, а потому и характер, определяемый ограничением одномерного псевдопредставления f на Z_K, имеет малую вариацию на V, если C мало́. Но любой характер группы $\mathbb{R}$, вариация которого на некоторой окрестности меньше двух, непрерывен.[2] Это завершает доказательство леммы 5.7. □

Доказательство теоремы 5.4 непосредственно следует из теоремы 5.5 и лемм 5.7 и 5.6. В частности, как мы видим, любое одномерное псевдопредставление полупростой группы Ли является экспонентой от псевдохарактера на универсальной накрывающей этой группы.

5.3.3. Автоматическая непрерывность и другие свойства квазипредставлений групп Ли

Следующая теорема, которая может рассматриваться как свидетельство физической осмысленности понятия неприводимого неограниченного конечномерного представления совершенной группы Ли, объединяет результаты теорем 3.5 и 4.11.3.

Теорема 5.6. *Любое неограниченное локально ограниченное неприводимое конечномерное квазипредставление совершенной группы Ли G есть обычное непрерывное представление этой группы.*

[2] То же верно, если вариация комплексного характера ограничена числом, меньшим единицы, на множестве A положительной меры в локально компактной группе G, так как тогда вариация строго меньше двойки на AA^{-1}, а такое множество содержит непустое открытое подмножество по теореме о непрерывности свертки двух квадратично интегрируемых функций на группе.

Случай ограниченных отображений в утверждении такого вида должен быть исключён, поскольку экспоненты от мнимых кратных псевдохарактера Гишарде–Вигнера на эрмитово симметрических полупростых группах Ли являются нетривиальными непрерывными одномерными унитарными чистыми псевдопредставлениями этих полупростых групп Ли (и их расширений), и малые возмущения нетривиальных прямых сумм таких экспонент могут быть неприводимыми.

В отличие от представлений, непрерывное конечномерное квазипредставление полупростой группы Ли может быть не вполне приводимым. Например, таково отображение $g \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & \varphi(g) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $g \in G$, где G — простая эрмитово симметрическая группа Ли с бесконечным центром, а φ — псевдохарактер Гишарде–Вигнера на G.

5.3.4. Локально ограниченные конечномерные квазипредставления полупростых групп Ли

Нам понадобится следующая техническая лемма о псевдохарактерах на прямых произведениях групп.

Лемма 5.8. *Пусть G — группа, представимая в виде прямого произведения своих подгрупп $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, $n \in \mathbb{N}$, пусть f — псевдохарактер на G, и пусть f_i — ограничение псевдохарактера f на подгруппу G_i. Если $g = \{g_1, \ldots, g_n\}$, $g \in G$, $g_i \in G_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, то*

$$f(g) = \sum_{i=1}^{n} f_i(g_i). \tag{5.4}$$

Доказательство. Правая часть формулы (5.4) определяет квазихарактер на G. Так как разность

$$f(g) - \sum_{i=1}^{n} f_i(g_i) = f(g_1, \ldots, g_n) - \sum_{i=1}^{n} f_i(g_i)$$

ограничена по определению псевдохарактера, то псевдохарактер f является ограниченным возмущением квазихарактера, определённого правой частью соотношения (5.4). Кроме того, очевидно, что ограничение этого квазихарактера на любую циклическую подгруппу является характером, и, следовательно, левая и правая части формулы (5.4) являются псевдохарактерами, разность которых ограничена. Следовательно, она равна нулю, что завершает доказательство. □

Мы также введём следующее определение псевдохарактера Гишарде–Вигнера на полупростой группе Ли.

Определение 5.3. Пусть G — связная полупростая группа Ли и пусть f — псевдохарактер на G. Поскольку при необходимости группу G можно заменить её универсальной накрывающей группой (и обозначить эту группу тем же символом G), мы вправе считать, что группа G односвязна (и, таким образом, является произведением односвязных простых групп Ли) и рассматривать псевдохарактер f как псевдохарактер (который мы снова обозначим через f) на этой односвязной группе, или, иначе говоря, как псевдохарактер на указанном выше произведении простых групп Ли. По лемме 5.8, этот псевдохарактер является суммой тривиальных продолжений его ограничений на простые факторы. Эти ограничения либо равны нулю (например, если рассматриваемый фактор компактен или некомпактен, но не эрмитово симметричен) либо являются соответствующими псевдохарактерами Гишарде–Вигнера, которые продолжены нулём на всю группу, т.е. равны нулю на всех остальных простых факторах. В дальнейшем, любая линейная комбинация этих продолжений псевдохарактеров Гишарде–Вигнера на эрмитово симметрических факторах G_i группы G (в обозначениях леммы 5.8) называется *псевдохарактером Гишарде–Вигнера* на группе G.

Теорема 5.7. *Пусть G — связная полупростая группа Ли, T — квазипредставление группы G в конечномерном векторном пространстве E_T. Пусть E_T^* — пространство, сопряжённое к E_T. Пусть L — множество таких векторов $\xi \in E_T$, что орбита $\{T(g)\xi \mid g \in G\}$ ограничена; пусть M — множество таких функционалов $f \in E_T^*$, что орбита $\{T(g)^* f \mid g \in G\}$ ограничена в E_T^*. Множества L и M — векторные подпространства в E_T и $E_T^* = E_{T^*}$, инвариантные относительно T и T^*, соответственно, где $T^*(g)$ — оператор, сопряжённый к $T(G)$ для всех $g \in G$. Рассмотрим возрастающий набор подпространств $\{0\}$, $L \cap M^\perp$, $M^\perp$, $L + M^\perp$, $E = E_T$, где $M^\perp$ — аннулятор векторного подпространства $M \subset E_T^*$, и запишем матрицу $t(g)$ оператора $T(g)$, $g \in G$, в блочной форме, отвечающей разложению пространства E в прямую сумму подпространств $L \cap M^\perp$, $M^\perp \setminus (L \cap M^\perp)$, $L \setminus (L \cap M^\perp)$, и $E \setminus (L + M^\perp)$, где символ “$\setminus$” означает* *взятие дополнительного подпространства*:

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & 0 & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G. \tag{5.5}$$

Здесь нули означают соответствующие нулевые операторы, а α и δ — матричнозначные отображения, определяемые представлениями максимальной компактной факторгруппы группы G в соответствующих пространствах; кроме того, справедливы следующие утверждения.

(i) *Если группа G имеет нетривиальную эрмитово симметрическую факторгруппу, то отображение γ является возмущением прямой суммы Γ (обычных) произведений непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной факторгруппы группы G на одномерные псевдопредставления Гишарде–Вигнера (они введены в определении 5.3), т.е. на отображения вида $g \to \exp(ir\theta(g))$, $g \in G$, для некоторых $r \in \mathbb{R}$, где θ означает соответствующие псевдохарактеры Гишарде–Вигнера. Если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических факторгрупп, то отображение γ является возмущением прямой суммы Γ (обычных) непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной факторгруппы группы G, которое мы в этом случае тоже обозначим символом Γ.*

(ii) *Если группа G имеет нетривиальную эрмитово симметрическую факторгруппу, то отображение τ является возмущением некоторого отображения $\psi\colon G \to \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp)$, имеющего вид*

$$\psi(g) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(g) A_i, \qquad g \in G,$$

где

$$A_i \in \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp)$$

— некоторые линейные операторы, и каждая функция вида θ_i является продолжением нулём на все факторы, отличные от G_i (где группа G рассматривается как прямое произведение конечного числа простых односвязных групп Ли G_i), псевдохарактера Гишарде–Вигнера на G_i (если такой псевдохарактер на G_i существует). (Таким образом, в частности, если G — связная односвязная эрмитово симметрическая группа Ли, то

$$\psi(g) = \theta(g) A, \qquad g \in G,$$

где θ — псевдохарактер Гишарде–Вигнера на G, а A — линейный оператор между пространствами $E \setminus (L + M^{\perp})$ и $L \cap M^{\perp}$.) Если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических факторгрупп, то отображение τ является возмущением нулевого отображения, которое мы в этом случае тоже обозначим символом ψ.

(iii) *Величина возмущений (в равномерной норме на группе G), упомянутых в пунктах* (i) *и* (ii), *и величина этих возмущений определяется нормой ограниченного отображения γ, нормами отображений σ и χ и дефектом исходного квазипредставления t и, при данной оценке норм γ, σ и χ, сколь угодно мала при достаточно малом дефекте.*

(iv) *Аппроксимирующее отображение*

$$\Theta(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & 0 & 0 & \psi(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G, \tag{5.6}$$

мало отличающееся от T в эквивалентной норме, является чистым псевдопредставлением группы G, и отображение Θ (или, что равносильно, представление β) непрерывно тогда и только тогда, когда оно локально ограничено.

Обратно, формула (5.5) *определяет конечномерное представление группы G, если выполнены условия, перечисленные в теореме.*

Это утверждение является частным случаем основного утверждения следующего пункта 5.3.4 и используется в его доказательстве.

Доказательство. Пусть G — связная полупростая группа Ли. Если группа G компактна, то любое локально ограниченное конечномерное квазипредставление группы G ограничено. Отсюда следует, что $L = E_T$ и $M = E_T^* = E_{T^*}$. Таким образом, $E_T = L + M^{\perp}$ и $T = \gamma$. Согласно теореме 5.1, любое ограниченное квазипредставление группы G с достаточно малым дефектом является шевелением обычного непрерывного представления группы G.

Пусть группа G некомпактна. Переходя при необходимости к универсальной накрывающей группе и рассматривая квазипредставления как отображения этой накрывающей группы, мы вправе считать, что группа G односвязна. Тогда группа G — прямое произведение простых односвязных полупростых групп Ли.

Согласно общему утверждению в теореме 4.19, отображения t_1 и t_2, определенные матричнозначными функциями

$$t_1(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad t_2(g) = \begin{pmatrix} \beta(g) & \rho(g) \\ 0 & \delta(g) \end{pmatrix},$$

$g \in G$, являются представлениями группы G. Так как группа G полупроста по условию, то (при правильном выборе дополнительных подпространств $M^\perp \setminus (L \cap M^\perp)$ и $E \setminus (L + M^\perp)$) представления t_1 и t_2 являются прямыми суммами неприводимых представлений. Так как единственными конечномерными унитарными представлениями любой полупростой односвязной группы Ли являются представления максимальной компактной факторгруппы, то отображения α и δ являются представлениями максимальной компактной факторгруппы группы G в соответствующих пространствах (в частности, их ограничения на максимальное слагаемое в G, не содержащее компактных слагаемых, тривиально (является единичным отображением)) и, кроме того, отображения φ и ρ можно считать нулевыми. Здесь представление β группы Ли G не имеет ограниченных подпредставлений. Остаётся изучить поведение ограниченных отображений γ, σ и χ и неограниченного отображения τ.

Напомним, что группа G предполагается некомпактной. Рассмотрим разложение Ивасавы $G = KAN$ группы G. По теореме 4.15, ограничение ограниченного квазипредставления γ на разрешимую подгруппу AN является малым возмущением ограниченного представления Γ группы AN. Это аппроксимирующее представление Γ можно считать унитарным (см., например, [103, теорема 3.4.1] или [175, Problem 0-34]). Следовательно, можно считать, что Γ — конечная прямая сумма неприводимых унитарных представлений группы AN. По теореме 2.13, каждое из этих неприводимых унитарных представлений одномерно, т.е. является унитарным характером группы AN, который заведомо тривиален на N (поскольку каждый элемент группы N является коммутатором, см., например, [126, гл. I, Следствие VI.4.8]). Таким образом, ограничение квазипредставления γ на подгруппу N является шевелением некоторого кратного тривиального представления группы N, а малость этого шевеления определяется малостью дефекта квазипредставления γ.

Поскольку это рассуждение можно также применить к ограничению квазипредставления γ на любую подгруппу D, отвечающую некоторой $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-тройке (см. [46, гл. VIII, § 11]), то ограничение квазипредставления γ на верхнюю треугольную подгруппу (подгруппу, отвечающую верхней треугольной подалгебре Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-подалгебры Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G) в группе Ли D, ограниченное затем в свою очередь на нильпотентную часть треугольной подгруппы, является малым шевелением тривиального представления этой нильпотентной части. Однако в самой группе $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ элементы

$$w=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad u(b)=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix},\quad b\in\mathbb{R},\quad \text{и}\quad s(a)=\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix},\quad a\in\mathbb{R}^{+},$$

удовлетворяют условию

$$s(a)=wu(a^{-1})wu(a)wu(a^{-1})\quad \text{для любого}\quad a\in\mathbb{R}^{+}.$$

Следовательно, если W — элемент подгруппы D, накрывающий элементы $\pm w\in\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, и если однопараметрические подгруппы S и U в D накрывают подгруппы s и u, соответственно, то $S(a)$ — произведение элемента $WU(a^{-1})WU(a)WU(a^{-1})$ на некоторый элемент центра группы D, и этот центральный элемент не зависит от a при $a>0$, что вытекает из соображений связности и из непрерывности умножения. Таким образом, ограничение квазипредставления γ на данную треугольную подгруппу группы Ли D близко к постоянному отображению на подполугруппе, составляющей половину дополнений единицы в группе, откуда немедленно следует, что это ограничение является малым шевелением представления этой треугольной подгруппы, кратного тривиальному.

Семейство корней полупростой группы Ли порождает пространство, сопряжённое к алгебре Ли $\mathfrak{a}$ подгруппы A (действительно, если существует такой элемент $a\in\mathfrak{a}$, что $\alpha(a)=0$ для всех корней α, то $\operatorname{ad}a=O$; отсюда следует, что $a=0$, поскольку центр полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равен нулю). Следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{a}$ подгруппы A порождена диагональными подалгебрами Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-троек как векторное пространство, и представление Γ кратно единичному.

Отсюда следует, что квазипредставление γ мало отличается (при малом дефекте) от отображения, определяемого ограничением квазипредставления γ на аналитическую группу K, входящую в разложение Ивасавы, т.е. норма

$$\|\gamma(kan)-\gamma(k)\|$$

равномерно мала́ при любых $k\in K$, $a\in A$, $n\in N$. Группа K либо полупроста (если группа G не содержит эрмитово симметрических сомножителей), либо является прямым произведением полупростой компактной группы Ли K' и нетривиальной конечномерной векторной группы (если группа G содержит нетривиальные эрмитово симметрические сомножители). По теореме 5.1, ограничение квазипредставления γ на полупростую компактную группу Ли K' является малым возмущением обычного непрерывного представления группы K'.[3] Ограничение этого представления на любой тор является унитарным представлением этого тора. Если оно не единично, то колебание соответствующего характера в данной окрестности единичного элемента группы G ограничено снизу. С другой стороны, поскольку, ввиду ограниченности γ, для любого $g \in G$ норма

$$\|\gamma(gng^{-1}) - \gamma(g)\gamma(n)\gamma(g^{-1})\|$$

малá равномерно по $n \in N$, а $\gamma(n)$ мало отличается от единичного оператора для любого $n \in N$, то $\gamma(gng^{-1})$ мало отличается от единичного оператора для любого $n \in N$ и любого $g \in G$. Отсюда легко следует, что есть окрестность единичного элемента группы G, на которой отклонение γ от единичного оператора мало́ вместе с дефектом. Следовательно, при достаточно малом дефекте квазипредставления γ непрерывное по теореме 1 представление группы K', определяемое ограничением этого квазипредставления на полупростую компактную группу Ли K', не содержит унитарных подпредставлений, нетривиальных на компактных частях некомпактных простых факторов группы G, поскольку они связаны с неограниченными представлениями соответствующих некомпактных подгрупп, и поэтому рассматриваемое представление может считаться представлением максимальной компактной факторгруппы (или, что равносильно, максимального компактного слагаемого) группы G. (Универсальная накрывающая группа компактной группы Ли компактна, см., напр. [167, XI.7.2.I]).

Отсюда, в свою очередь, следует, что квазипредставление γ мáло (при малом дефекте) отличается от отображения, определяемого ограничением квазипредставления γ на произведение максимального компактного слагаемого группы G и связной компоненты единицы C центра Z_K группы K, входящей в разложение Ивасавы, т.е., норма

$$\|\gamma(zk'k''an) - \gamma(zk')\|$$

[3] Это наблюдение позволяет избежать отдельного рассмотрения случая, в котором группа G не имеет нетривиальных компактных факторгрупп.

равномерно малá при $z \in C$, $k', k'' \in K'$, $a \in A$, и $n \in N$, где k' принадлежит максимальному компактному слагаемому группы G, а k'' максимальному слагаемому в G, не содержащему нетривиальных компактных слагаемых.

Поскольку группа C абелева (как подгруппа центра Z_K), то она аменабельна (как дискретная группа). В частности, ограничение квазипредставления γ на C является малым возмущением обычного ограниченного представления ϖ группы C, и, как и выше, мы можем считать представление ϖ унитарным. Следовательно, представление ϖ определяется прямой суммой унитарных характеров группы C.

Предположим сначала, что группа G имеет нетривиальную эрмитово симметрическую факторгруппу. В этом случае, согласно лемме 5.7, каждый из характеров, входящих в разложение представления τ, определяет одномерное псевдопредставление группы G, это псевдопредставление непрерывно и является экспонентой от некоторого псевдохарактера Гишарде–Вигнера. Таким образом, ограничение отображения γ на максимальное слагаемое в группе G, не содержащее компактных слагаемых, является шевелением прямой суммы одномерных псевдопредставлений Гишарде–Вигнера, т.е. отображением вида

$$g \to \exp(ir\theta(g)), \qquad g \in G, \quad \text{для некоторого} \quad r \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что это псевдопредставление автоматически непрерывно.

По той же причине, если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических факторов, то ограничение отображения γ на максимальное слагаемое в G, не содержащее нетривиальных компактных слагаемых, является шевелением (малым, если дефект мал) прямой суммы одномерных псевдопредставлений Гишарде–Вигнера, ядро которых содержит ядро универсального накрытия группы G, если G не односвязна. Заметим, что это псевдопредставление тоже автоматически непрерывно.

Согласно "теореме тривиальности" (см. теореиы 5.3 и 5.1), ограничение квазипредставления γ на максимальное компактное полупростое слагаемое W группы G является шевелением некоторого непрерывного унитарного представления группы W.

Рассмотрим теперь произведение группы W и связной компоненты C центра Z_K группы K. По построению, эта группа аменабельна как дискретная группа. Снабдим группу $W \times C$ топологией прямого произведения компактной группы W, рассматриваемой в её обычной топологии, и группы Z_K, которую мы снабдим дискретной топологией. Оба сомножителя — аменабельные топологические группы. Следовательно, их произведение $W\times Z_K$ — тоже аменабельная топологическая группа ([103, 175]). Как и выше, отсюда следует, что ограничение квазипредставления γ на $W\times Z_K$ является шевелением обычного непрерывного ограниченного представления группы $W\times Z_K$. Как обычно, это представление можно считать унитарным представлением. Следовательно, оно является прямой суммой неприводимых унитарных представлений. Однако, как хорошо известно, любое неприводимое унитарное представление прямого произведения компактной группы Ли и локально компактной абелевой группы является произведением (тензорным, которое в данном случае — ввиду одномерности одного из сомножителей — сводится к обычному произведению) некоторого неприводимого непрерывного унитарного представления группы W на характер группы Z_K. Как мы видели выше, это означает, что квазипредставление γ является возмущением (малым, если дефект представления γ мал) суммы соответствующих произведений тех же неприводимых представлений группы W на экспоненты от псевдохарактеров на G (или, что равносильно, на слагаемом Σ, дополняющем W в G), отвечающих полученным характерам-сомножителям группы Z_K. Как нам известно, эти псевдохарактеры могут быть либо нулевыми характерами, либо (если нетривиальные эрмитово симметрические факторы группы G существуют) псевдохарактерами Гишарде–Вигнера на G. Следовательно, все эти одномерные сомножители-псевдопредставления автоматически непрерывны на G, и поэтому произведения непрерывны, а с ними и их сумма непрерывна. Таким образом, аппроксимирующее отображение, которое мы обозначим символом Γ, в любом случае является непрерывным псевдопредставлением группы G.

Так как это рассуждение, касающееся отображения γ, можно также применить к отображениям, определённым операторными матрицами по формулам

$$g\mapsto\begin{pmatrix}\alpha & \sigma\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad g\mapsto\begin{pmatrix}\gamma & \chi\\ 0 & \delta\end{pmatrix},\qquad g\in G,$$

то оба эти отображения оказываются шевелениями произведений некоторых непрерывных неприводимых унитарных представлений группы W на экспоненты от некоторых псевдохарактеров Гишарде–Вигнера на G, и, следовательно, отображения σ и χ можно считать малыми, если дефект отображения T мал.

Ограничение отображения τ на компактную подгруппу W ограничено и к тому же может считаться малым при малом дефекте по теореме 5.1. С другой стороны, согласно теореме 4.19, поскольку отображения α и δ тривиальны на некомпактной части Σ группы G (т.е. на наибольшем слагаемом, не содержащем нетривиальных компактных слагаемых в G), то ограничение любого матричного элемента матрицы τ на подгруппу Σ определяет вещественный квазихарактер на G. Если группа G имеет нетривиальный эрмитово симметрический фактор, то матричнозначное отображение τ является шевелением отображения

$$\Psi\colon G \to \mathcal{L}(E\setminus(L+M^{\perp}), L\cap M^{\perp})$$

каждый из матричных элементов которого является псевдохарактером на группе G. Как нам уже известно, этот псевдохарактер является псевдохарактером Гишарде–Вигнера на G. Если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических факторгрупп, то матричнозначное отображение τ является шевелением нулевого отображения, которое мы в этом случае тоже обозначим тем же символом Ψ.

Эти рассуждения показывают, что (в обозначениях леммы 5.8) отображение Ψ определенно формулой

$$\Psi(g) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(g) A_i, \qquad g \in G,$$

для некоторых линейных операторов

$$A_i \in \mathcal{L}(E\setminus(L+M^{\perp}), L\cap M^{\perp}),$$

где символом θ_i обозначен псевдохарактер Гишарде–Вигнера на G_i, а суммирование распространено только на эрмитово симметрические слагаемые группы G.

Это завершает доказательство утверждения (ii).

Утверждение (iii) было фактически установлено в ходе доказательства утверждения (ii).

Первая часть утверждения (iv) следует из того факта, что все обычные представления, все одномерные псевдопредставления и все псевдохарактеры являются чистыми отображениями, т.е. их ограничения на любую аменабельную подгруппу являются гомоморфизмами подгруппы (см. п. 3 теоремы 4.1

и следствие 4.3). Вторая часть утверждения (iv) непосредственно следует из теоремы 4.19. Утверждение об эквивалентной норме достигается умножением нормы третьей компоненты (в $M^{\perp}\setminus(L\cap M^{\perp})$) на достаточно малое число.

Обратное утверждение проверяется непрсредственно.

Это завершает доказательство теоремы 5.7. □

В следующей теореме, которая может рассматриваться как свидетельство физической осмысленности понятия неприводимого конечномерного представления простой группы Ли, выделены важные частные случаи результатов теорем 4.19, 5.7 и 5.3.

Теорема 5.8. *Любое неприводимое локально ограниченное конечномерное неодномерное чистое псевдопредставление простой группы Ли есть обычное непрерывное представление этой группы. Любое неприводимое неограниченное локально ограниченное конечномерное квазипредставление полупростой группы Ли есть обычное непрерывное представление этой группы.*

Это утверждение не может быть распространено на случай общих квазипредставлений (как бы мал ни был положительный дефект). Сколь угодно малое возмущение представления, кратного единичному, может оказаться неприводимым.

Отметим простейший и важнейший частный случай теоремы 5.7.

Следствие 5.3. *Пусть G — некомпактная связная простая группа Ли, T — квазипредставление группы G в конечномерном векторном пространстве E_T. Пусть E_T^* — пространство, сопряжённое к E_T. Пусть L — множество таких векторов $\xi\in E_T$, что орбита $\{T(g)\xi\,|\,g\in G\}$ ограничена; пусть M — множество таких функционалов $f\in E_T^*$, что орбита $\{T(g)^*f\mid g\in G\}$ ограничена в E_T^*. Множества L и M — векторные подпространства в E_T и $E_T^*=E_{T^*}$, инвариантные относительно T и T^*, соответственно, где $T^*(g)$ — оператор, сопряжённый к $T(G)$ для всех $g\in G$. Рассмотрим возрастающий набор подпространств $\{0\}$, $L\cap M^{\perp}$, $M^{\perp}$, $L+M^{\perp}$, $E=E_T$, где $M^{\perp}$ — аннулятор векторного подпространства $M\subset E_T^*$, и запишем матрицу $t(g)$ оператора $T(g)$, $g\in G$, в блочной форме, отвечающей разложению пространства E в прямую сумму подпространств $L\cap M^{\perp}$, $M^{\perp}\setminus(L\cap M^{\perp})$, $L\setminus(L\cap M^{\perp})$, и $E\setminus(L+M^{\perp})$, где символ "$\setminus$" означает взятие дополнительного под-*

пространства:

$$t(g)=\begin{pmatrix} 1_{L\cap M^\perp} & 0 & \sigma(g) & \tau(g)\\ 0 & \beta(g) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g)\\ 0 & 0 & 0 & 1_{E\setminus(L+M^\perp)}\end{pmatrix}, \qquad g\in G. \tag{5.7}$$

Здесь нули означают соответствующие нулевые операторы, а $1_{L\cap M^\perp}$ *и* $1_{E\setminus(L+M^\perp)}$ *— единичные операторы в соответствующих пространствах*; *кроме того*, *справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если группа* G *— эрмитово симметрическая, то отображение* γ *является возмущением прямой суммы* Γ *одномерных псевдопредставлений Гишарде–Вигнера, т.е. отображений вида* $g\to\exp(ir\theta(g))$, $g\in G$, *для некоторых* $r\in\mathbb{R}$. *Если группа* G *не является эрмитово симметрической, то отображение* γ *является возмущением единичного отображения* $g\mapsto 1_{L\setminus(L\cap M^\perp)}$, $g\in G$, *которое мы в этом случае тоже обозначим символом* Γ.

(ii) *Если группа* G *— эрмитово симметрическая, то отображение* τ *является возмущением отображения* $\psi\colon G\to\mathcal{L}(E\setminus(L+M^\perp),L\cap M^\perp)$, *каждый матричный элемент которого кратен псевдохарактеру Гишарде–Вигнера* θ *на группе* G, *т.е.*

$$\psi(g)=\theta(g)A, \qquad g\in G,$$

для некоторого линейного оператора $A\in\mathcal{L}(E\setminus(L+M^\perp),L\cap M^\perp)$. *Если группа* G *не является эрмитово симметрической, то отображение* τ *является возмущением нулевого отображения, которое мы в этом случае тоже обозначим символом* ψ.

(iii) *Величина возмущений* (*в равномерной норме на группе* G), *упомянутых в пунктах* (i) *и* (ii), *определяется нормой ограниченного отображения* γ, *нормами отображений* σ *и* χ *и дефектом исходного квазипредставления* t *и*, *при данной оценке норм* γ, σ *и* χ, *сколь угодно мала при достаточно малом дефекте.*

(iv) *Аппроксимирующее отображение*

$$\Theta(g)=\begin{pmatrix} 1_{L\cap M^\perp} & 0 & 0 & \psi(g)\\ 0 & \beta(g) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Gamma(g) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1_{E\setminus(L+M^\perp)}\end{pmatrix}, \qquad g\in G, \tag{5.8}$$

является чистым псевдопредставлением группы G, и отображение Θ (или, что равносильно, представление β) непрерывно тогда и только тогда, когда оно локально ограничено.

Обратно, формула 5.7 определяет квазипредставление группы G, если выполнены условия, перечисленные в теореме.

Упростим модель для конечномерных квазипредставлений аменабельных групп

Теорема 5.9. *Пусть G — аменабельная группа. Каждое конечномерное λ-квазипредставление T группы G является возмущением обычного представления. Более того, при специальном выборе нормы в пространстве квазипредставлений группы T для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\lambda>0$, что если T — λ-квазипредставление, то норма упомянутого выше возмущения может быть выбрана меньшей, чем ε. Наконец, аппроксимирующее представление можно выбрать в виде виде*

$$t'(g)=\begin{pmatrix}\alpha(g) & \varphi(g) & 0 & \tau(g)\\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g)\\ 0 & 0 & \gamma(g) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta(g)\end{pmatrix}, \qquad g\in G, \tag{5.9}$$

где отображения t_1' и t_2' определяются как $t_1'(g)=\left(\begin{smallmatrix}\alpha(g) & \varphi(g)\\ 0 & \beta(g)\end{smallmatrix}\right)$ и $t_2'(g)=\left(\begin{smallmatrix}\beta(g) & \rho(g)\\ 0 & \delta(g)\end{smallmatrix}\right)$, являются обычными представлениями группы G, представления α и δ унитарны, отображение γ является ε-возмущением обычного представления группы G унитарными матрицами соответствующего размера, а τ — ε-возмущением квазикоцикла относительно представлений t_1' и t_2', т.е.

$$\|\tau(g)-\psi(g)\|\leqslant\varepsilon \tag{5.10}$$

для некоторого отображения ψ с тем же диапазоном значений и такого, что

$$\psi(gh)-\alpha(g)\psi(h)-\phi(g)\rho(h)-\psi(g)\,\delta(h)=0 \tag{5.11}$$

для любых $g,h\in G$.

Можно явно оценить λ в теореме 5.9 через C и ε.

Доказательство. Из теоремы 4.19 непосредственно следует, что α и δ являются ограниченными представлениями аменабельной группы G. Однако любое ограниченное конечномерное представление аменабельной группы эквивалентно унитарному представлению, а это означает, что существуют базисы в соответствующих подпространствах, для которых матрицы, представляющие α и δ, унитарны. Более того, по той же теореме, отображения t_3 и t_4, определяемые формулами

$$t_3'(g)=\begin{pmatrix}\alpha(g) & \sigma(g)\\ 0 & \gamma(g)\end{pmatrix},\quad t_4'(g)=\begin{pmatrix}\gamma(g) & \chi(g)\\ 0 & \delta(g)\end{pmatrix},\qquad g\in G, \tag{5.12}$$

являются ограниченными квазипредставлениями аменабельной группы G. Следовательно, по указанной выше причине эти квазипредставления близки к обычным ограниченным представлениям, подпространства и факторпространства могут быть сохранены при переходе к аппроксимирующим представлениям, и это означает, что рассматриваемые квазипредставления можно рассматривать как (малые) ε-возмущения соответствующих унитарных прямых сумм, что означает как то, что нормы функций σ и χ не превосходят ε, так и то, что γ является возмущением, норма которого не превосходит ε, обычного представления унитарными матрицами. Теперь осталось доказать утверждения теоремы для квазикоцикла τ.

Поскольку компоненты σ и χ ε-малы, в нашем доказательстве можно предположить, что эти компоненты равны нулю (поскольку эта модификация является ε-возмущением исходного отображения). Как было доказано выше, компонента γ является ε-возмущением обычного унитарного матричного представления. Если подпространство $L\cap M^{\perp}$ тривиально, то из перечисленных выше свойств отображения t' немедленно следует, что t' является ограниченным возмущением обычного представления. Таким образом, достаточно доказать, что τ является ограниченным возмущением соответствующего $\{t_1,t_2\}$-коцикла в предположении, что исходное отображение имеет вид

$$t(g)=\begin{pmatrix}\alpha(g) & \varphi(g) & 0 & \tau(g)\\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g)\\ 0 & 0 & \gamma(g) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta(g)\end{pmatrix},\qquad g\in G.$$

Пусть I — правоинвариантное среднее на G. Применим среднее I по аргументу $g\in G$ к правой части отображения

$$g\to\alpha(g^{-1})\tau(gh)-\tau(h)-\alpha(g^{-1})\varphi(g)\rho(h)-\alpha(g^{-1})\tau(g)\,\delta(h),\quad g\in G,$$

для заданного $h \in G$; как мы видели выше, α унитарна, и, следовательно, рассматриваемая функция ε-ограничена. Таким образом, если ввести величину ψ по формуле

$$\psi(h) = I_g\big((\alpha(g)^{-1})(\tau(gh) - \phi(g)\rho(h) - \tau(g)\delta(h))\big), \qquad h \in G, \tag{5.13}$$

то разность $\tau(g) - \psi(g)$, $g \in G$, является ε-ограниченной величиной. Остаётся показать, что ψ является коциклом относительно представлений t_1 и t_2, т.е. что

$$\psi(gh) = \alpha(g)\psi(h) + \phi(g)\rho(h) + \tau(g)\delta(h), \qquad g,h \in G \tag{5.14}$$

(ср. (5.11)).

Для доказательства формулы 5.14 находим левую часть:

$$\psi(gh) = I_k\big((\alpha(k)^{-1})(\tau(kgh) - \phi(k)\rho(gh) - \tau(k)\delta(gh))\big), \qquad g,h \in G,$$

и используем формулу

$$\psi(h) = I_k\big((\alpha(kg)^{-1})(\tau(kgh) - \phi(kg)\rho(h) - \tau(kg)\delta(h))\big), \qquad g,h \in G,$$

которая верна, поскольку среднее значение I инвариантно. Преобразования легко дают

$$\alpha(g)^{-1}\psi(gh) - \psi(h) =$$
$$= I_k\big((\alpha(kg)^{-1})(\phi(kg)\rho(h) + \tau(kg)\delta(h) - \phi(k)\rho(gh) - \tau(k)\delta(gh))\big), \qquad g,h \in G.$$

Поскольку t_1 и t_2 являются представлениями группы G, получаем

$$\alpha(g)^{-1}\psi(gh) - \psi(h) = I_k\big((\alpha(kg)^{-1})((\phi(k)\beta(g) + \alpha(k)\phi(g))\rho(h) +$$
$$+ \tau(kg)\delta(h) - \phi(k)(\rho(g)\delta(h) + \beta(g)\rho(h)) - \tau(k)\delta(g)\delta(h))\big), \qquad g,h \in G.$$

что даёт

$$\alpha(g)^{-1}\psi(gh) - \psi(h) = I_k\big(\alpha(kg)^{-1}\phi(k)\beta(g)\rho(h) + \alpha(g^{-1})\phi(g)\rho(h) +$$
$$+ \alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h) - \alpha(kg)^{-1}\phi(k)\beta(g)\rho(h)\big) =$$
$$= I_k\big(\alpha(g^{-1})\phi(g)\rho(h) + \alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)\big) =$$
$$= \alpha(g^{-1})\phi(g)\rho(h) + I_k\big(\alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)\big).$$

Более того,

$$I_k\big(\alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)\big) =$$
$$= I_k\big(\alpha(g)^{-1}\alpha(k)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)\big) =$$
$$= \alpha(g)^{-1}I_k\big(\alpha(k)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\big)\delta(h) = \alpha(g)^{-1}\psi(g)\delta(h), \quad g,h \in G,$$

где мы использовали определение отображения ψ из 5.13. Это завершает доказательство нужной нам формулы 5.14.

Обратное утверждение проверяется непосредственно и, таким образом, завершается доказательство теоремы. □

Как мы видели выше, в отличие от представлений, приводимое непрерывное конечномерное квазипредставление полупростой группы Ли может быть не вполне приводимым. Поэтому вопросы непрерывности квазипредставлений связаны с более богатым классом отображений.

Пусть G — связная группа Ли, π — её конечномерное ε-квазипредставление с достаточно малым ε. Переходя при необходимости к универсальной накрывающей группе группы G и рассматривая квазипредставление группы G как отображение её универсальной накрывающей, мы можем предполагать, что группа G односвязна. Ограничение квазипредставления π на радикал группы G близко к обычному представлению (см. теорему 4.15), а ограничение квазипредставления на полупростую часть, которая является в рассматриваемом случае прямым произведением связных односвязных простых групп Ли (и квазипредставление полупростой группы определяется ограничениями на эти простые сомножители), описано выше в теореме 5.7. Это позволяет дать описание локально ограниченных конечномерных квазипредставлений связных односвязных групп Ли, чему и посвящён следующий раздел.

5.3.5. Локально ограниченные конечномерные квазипредставления связных групп Ли

Теорема 5.10. *Пусть G — связная односвязная группа Ли, а T — локально ограниченное квазипредставление группы G с достаточно малым дефектом в конечномерном векторном пространстве E_T. По теореме Леви–Мальцева, группу G можно представить в виде полупрямого произведения односвязного радикала R группы G и полупростой подгруппы Леви S (связной односвязной полупростой группы Ли). Пусть E_T^* — пространство, сопряжённое к E_T. Пусть L — множество таких векторов $\xi \in E_T$, что орбита $\{T(g)\xi \mid g \in G\}$ ограничена; пусть M — множество таких функционалов $f \in E_T^*$, что орбита $\{T(g)^* f \mid g \in G\}$ ограничена в E_T^*. Множества L и M — векторные* *подпространства в* E_T *и* $E_T^* = E_{T^*}$, *инвариантные относительно* T *и* T^*, *соответственно, где* $T^*(g)$ — *оператор, сопряжённый к* $T(g)$ *для всех* $g \in G$. *Рассмотрим возрастающий набор подпространств*

$$\{0\}, \quad L \cap M^{\perp}, \quad M^{\perp}, \quad L + M^{\perp}, \quad E = E_T,$$

где $M^{\perp}$ — *аннулятор векторного подпространства* $M \subset E_T^*$, *и запишем матрицу* $t(g)$ *оператора* $T(g)$, $g \in G$, *в блочной форме, отвечающей разложению пространства* E *в прямую сумму подпространств* $L \cap M^{\perp}$, $M^{\perp} \setminus (L \cap M^{\perp})$, $L \setminus (L \cap M^{\perp})$, *и* $E \setminus (L + M^{\perp})$, *где символ "*$A \setminus B$*" для векторных подпространств* B *и* A, $B \subset A$, *означает переход к подпространству в* A, *дополнительному к* B:

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G. \tag{5.15}$$

Нули в формулах (5.15) *означают соответствующие нулевые операторы; кроме того, справедливы следующие утверждения.*

(i) *Ограниченные представления* α *и* δ *эквивалентны прямым суммам произведений* G*-центральных унитарных характеров группы* R (G*-центральность означает, что эти характеры инвариантны относительно внутренних автоморфизмов группы* G) *на непрерывные неприводимые унитарные представления компактных факторгрупп группы* S. *Отображения* φ *и* ρ *удовлетворяют условиям* $\varphi(sr) = \alpha(s)\varphi(r)$ *и* $\rho(rs) = \rho(r)\delta(s)$ *для любых* $s \in S$ *и* $r \in R$ *и, таким образом, при данных* α *и* δ, *определяются своими ограничениями на радикал* R.

(ii) *Если группа* G (*или* S) *имеет нетривиальную эрмитово симметрическую факторгруппу, то отображение* γ *является шевелением прямой суммы* Γ (*обычных*) *произведений некоторых непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной факторгруппы* W *группы* G, *некоторого одномерного псевдопредставления Гишарде–Вигнера* (*т.е. отображения вида* $g \to \exp(ir\theta(g))$, $g \in G$, *для некоторого* $r \in \mathbb{R}$, *где* θ — *псевдохарактер Гишарде–Вигнера на* G, *см. определение* 5.3), *и некоторых* G*-центральных унитарных характеров группы* R (*понятие* G*-центральности характера радикала напоминается в теореме* 5.7, (i)). *Если группа* G *не имеет нетривиальных эрмитово симметрических факторгрупп, то отображение* γ *является шевелением* *прямой суммы (обычных) произведений некоторых непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной факторгруппы группы G и некоторых G-центральных унитарных характеров группы R, и в этом случае мы обозначим аппроксимирующее представление тем же символом* Γ.

(iii) *Если группа S имеет нетривиальную эрмитово симметрическую факторгруппу и если $S = S_1 \times \cdots \times S_n$, где каждая из групп S_i проста, то отображение τ является шевелением некоторого отображения*

$$\varpi\colon G \to \mathcal{L}(E \setminus (L + M^{\perp}), L \cap M^{\perp}),$$

удовлетворяющего условию

$$\varpi(rs) = \alpha(r) \sum_{i=1}^{n} \theta_i(s) A_i + \varpi(r)\delta(s), \qquad r \in R, \quad s \in S,$$

где

$$A_i \in \mathcal{L}(E \setminus (L + M^{\perp}), L \cap M^{\perp})$$

— такие линейные операторы, что пересечение их ядер в подпространстве $E \setminus (L + M^{\perp})$ тривиально,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker A_i = \{0\} \subset E \setminus (L + M^{\perp}),$$

а каждая функция θ_i является продолжением псевдохарактера Гишарде–Вигнера на G_i (если он есть) на всю группу G (рассматриваемую как прямое произведение конечного числа простых односвязных групп Ли G_i) нулём на все простые сомножители, отличные от G_i. В частности, если группа S — простая односвязная эрмитово симметрических группа, то

$$\varpi(g) = \theta(g) A, \qquad g \in G,$$

где θ — псевдохарактер Гишарде–Вигнера на G, а A — некоторый линейный изоморфизм

$$A \in \mathcal{L}(E \setminus (L + M^{\perp}), L \cap M^{\perp}).$$

Если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических факторгрупп, то отображение τ является шевелением некоторого отображения $\varpi\colon G \to \mathcal{L}(E \setminus (L + M^{\perp}), L \cap M^{\perp})$ (которое мы, таким образом, также обозначим символом ϖ) вида

$$\varpi(rs) = \varpi(r)\delta(s), \qquad r \in R, \quad s \in S,$$

где ограничение отображения τ на R является шевелением $\alpha|_R$-$\delta|_R$-коцикла ϖ, т.е.

$$\varpi(r_1r_2)=\alpha(r_1)\varpi(r_2)+\varpi(r_1)\delta(r_2), \qquad r_1,r_2\in R,$$

и, кроме того, норма разности $\varpi(s^{-1}rs)-\delta(s^{-1})\varpi(r)\delta(s)$ равномерно мала для $s\in S$ и $r\in R$.

(iv) *Величина возмущений (в равномерной норме на группе G), упомянутых в пунктах* (ii) *и* (iii), *определяется нормой ограниченного отображения γ, величиной отображений σ и χ в той же норме и дефектом исходного квазипредставления T и, при данной оценке норм γ, σ и χ, сколь угодно мала при достаточно малом дефекте квазипредставления T.*

(v) *Отображение*

$$\Theta(g)=\begin{pmatrix}\alpha(g) & \varphi(g) & 0 & \varpi(g)\\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g)\\ 0 & 0 & \Gamma(g) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \delta(g)\end{pmatrix}, \qquad g\in G, \tag{5.16}$$

аппроксимирующее квазипредставление T, является чистым псевдопредставлением группы G, и отображение Θ непрерывно тогда и только тогда, когда оно локально ограничено.

Запись квазипредставления π в виде (5.15) мы будем называть реализацией квазипредставления π.

Доказательство. Применим теорему 4.19. Ограничение квазипредставления T на разрешимую подгруппу R является возмущением (малым при малом дефекте) обычного представления по теореме 4.15, и его форма по отношению к структуре матрицы, в которой мы записываем квазипредставления, описана в теореме 5.9. Структура ограничения квазипредставления T на полупростую подгруппу Леви S описана в теореме 5.7. Объединение этих двух фактов приводит к утверждению теоремы 5.10, а именно, если $G\ni g=sr$, где $s\in S$ и $r\in R$, то $t(g)$ мало отличается от $t|_S(s)t|_R(r)$, и тем самым

$$\alpha(g)=\alpha(sr)=\alpha(s)]\alpha(r), \quad \beta(g)=\beta(sr)=\beta(s)]\beta(r),$$

$$\varphi(g)=\varphi(sr)=\alpha(s)\varphi(r)+\varphi(s)\beta(r)=\alpha(s)\varphi(r),$$

$$\rho(g)=\rho(sr)=\beta(s)\rho(r)+\rho(s)\delta(r)=\beta(s)\rho(r), \quad \delta(g)=\delta(sr)=\delta(s)\delta(r),$$

где величины в правых частях описаны в теоремах 5.7 и 5.9. Это доказывает утверждения (i), (ii), (iv) и (v) теоремы 5.10. Остается доказать (iii).

Квазипредставление γ ограничено по построению. Пусть G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических некомпактных простых подгрупп. Рассмотрим некомпактное полупростое слагаемое H группы S. Ограничение γ на максимальную компактную подгруппу K в H имеет близкое представление. Если оно неединично, то его продолжение на H неограничено. Если близкое представление единично, то его продолжение на H единично. Следовательно, ограничение γ на любое некомпактное полупростое слагаемое H группы S есть малое возмущение единичного представления этой подгруппы, и γ мало отличается от ограничения γ на подгруппу $S_1R \subset G$, где S_1 образована семейством компактных факторов группы S. Группа S_1R аменабельна, и, следовательно, ограничение отображения γ на подгруппу S_1R имеет близкое обычное ограниченное представление, которое можно считать унитарным. Рассмотрим ограничение этого представления на радикал. Конечномерные унитарные представления разрешимой группы Ли имеют треугольную и потому диагональную форму. При этом диагональные элементы определяют одномерные представления, которые автоматически тривиальны на коммутанте и поэтому инвариантны относительно внутренних автоморфизмов, т.е. центральны. Как и выше, неприводимые подпредставления группы S_1R являются произвелениями неприводимых представлений группы S_1 и центральных характеров группы R.

Если G имеет нетривиальные эрмитово симметрические некомпактные простые подгруппы, то в добавление к отмеченному в предыдущем абзаце вкладу группы S_1R появляется вклад этих некомпактных групп. Рассмотрим ограничение отображения γ на максимальную “компактную” подгруппу C_i (отвечающую компактной части алгебры Ли) каждой эрмитово симметрической некомпактной простой подгруппы G_i. Если бы это ограничение содержало нетривиальное унитарное представление группы C_i, то его продолжение было бы неограниченным. Поэтому таких представлений рассматриваемое ограничение не содержит. Значит, оно содержит представление бесконечного центра группы C_i, изоморфного группе $\mathbb{R}$. Таким образом, речь идет об ограниченном квазипредставлении группы, изоморфной группе $\mathbb{R}$. Из аменабельности разрешимой группы $\mathbb{R}$ следует, что есть близкое ограниченное представление группы $\mathbb{R}$, и из ограниченности следует, что его можно считать унитарным. Как и выше, конечномерное унитарное представление разрешимой группы диагонально и потому разлагается в прямую сумму одномерных представлений.

Продолжение этого представления до представления рассматриваемой некомпактной подгруппы Ли невозможно, так как нетривиальные представления этой подгруппы неограничены. Следовательно, речь идет о квазипредставлении. Таким кваипредставлением является экспонента от кваихарактера Гишарде–Вигнера. Если есть другое продолжение до кваипредставления, умножим его на кваипредставление, обратное этой экспоненте. Мы получим квазипредставление, ограничение которого на центр “компактной” подгруппы является малым возмущением единичного представления, и близкое представление (существующее по теореме 5.7) оказывается тривиальным на центре “компактной” подгруппы. Следовательно, оно кратно единичному представлению, и единственным продолжением оказывается экспонента от псевдохарактера Гишарде–Вигнера.

Таким образом, мы получаем в качестве близкого к рассматриваемому ограничению представления γ прямую сумму одномерных отображений, и все они, как и γ, являются псевдопредставлениями. По следствию 5.1 и следствию 5.2, эти подпредставления являются чистыми и инвариантными относительно внутренних автоморфизмов группы G.

Завершение доказательства утверждения (iii) получается с помощью формулы для полупростых групп из утверждения (ii) теоремы 5.7 и применением формулы для матричных элементов произведения матриц.

Обратное утверждение проверяется непосредственно.

Это завершает доказательство теоремы 5.10. □

5.4. Заключительные замечания

5.4.1. Замечания о “теореме тривиальности”

Теорема 5.1, являющаяся своего рода “теоремой тривиальности”, автоматически дает полное описание конечномерных унитарных квазипредставлений (с малым дефектом) полупростых компактных групп Ли, рассматриваемых в дискретной топологии (это — первый пример описания конечномерных унитарных квазипредставлений с малым дефектом для неаменабельной группы) и показывает, что есть неаменабельные дискретные группы, представляющие собою простые компактные группы Ли в дискретной топологии, для которых все их конечномерные унитарные квазипредставления с малым дефектом являются возмущениями обычных представлений. С другой стороны, в 1994 г. автор высказал следующую гипотезу.

Гипотеза 5.1. *Локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда она устойчиво представима в смысле определения 4.4, т.е. тогда и только тогда, когда любое её слабо непрерывное унитарное квазипредставление с достаточно малым дефектом является малым возмущением обычного (сильно непрерывного) унитарного представления.*

Аналогичный вопрос задал Громов в 1995 г. в [105]: существуют ли неаменабельные группы, все квазипредставления которых являются возмущениями обычных представлений?

Теорема 5.7 показывает, что для проверки справедливости гипотезы 5.1 необходимо привлекать бесконечномерные унитарные представления группы.

5.4.2. Заключительные замечания и нерешённые задачи

Отметим непосредственное следствие теорем 3.16 и 3.19.

Следствие 5.4. *Если G — совершенная связная группа Ли и H — связная группа Ли, то любой гомоморфизм G в H, переводящий ограниченные множества в G в ограниченные множества в H, непрерывен. Образ любого такого гомоморфизма совершенен. В частности, любой изоморфизм совершенной связной группы Ли на связную группу Ли, переводящий ограниченные множества в ограниченные, непрерывен, и потому является топологическим изоморфизмом совершенных групп Ли.*

Отметим следующий критерий непрерывности конечномерных представлений связных групп Ли.

Следствие 5.5. *Пусть G — связная группа Ли. Данное локально ограниченное конечномерное представление группы G непрерывно тогда и только тогда, когда ограничение этого представления на радикал непрерывно.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда группа односвязна. В этом случае ограничение представления на подгруппу Леви непрерывно по теореме 3.4, а ограничение на радикал непрерывно по условию. □

Как мы видели выше (см. пример 4.3), аналогичный критерий непрерывности конечномерных представлений локально компактных групп не имеет места.

Отметим в заключение, что за пределами семейства локально компактных групп семейство разрывных представлений группы может быть устроено сложнее, чем в локально компактном случае, даже в классе групп, весьма близких к компактным, — например, в классе псевдокомпактных групп. В [251] приведён пример характера связной псевдокомпактной группы, для которого и группа разрывов, и группа финальных разрывов есть группа корней третьей степени из единицы. Изучение условий непрерывности представлений групп в более общих классах топологических групп и их гомоморфизмов представляет несомненный интерес.

Следующее утверждение описывает локально ограниченные псевдохарактеры на почти связных группах Ли.

Лемма 5.9. *Пусть G — почти связная локально компактная группа, и пусть π – локально ограниченный вещественный псевдохарактер группы G, не являющийся характером (автоматически непрерывный по теореме 4.1). Тогда π можно рассматривать как псевдохарактер некоторой факторгруппы Ли группы G.*

Доказательство. Пусть π ограничен на окрестности U единичного элемента e_G группы G. Пусть N — такая нормальная подгруппа в G, содержащаяся в U, что G/N — группа Ли. Ограничение $\pi|_N$ псевдохарактера π на N — ограниченный псевдохарактер N. Следовательно, он тривиален. Согласно [232] (см. также [265]), существует такой псевдохарактер ψ на G/N, что $\pi(g)=\psi(gN)$, $g\in G$. □

Лемма 5.10. *Пусть G — почти связная локально компактная группа, и пусть π — локально ограниченное финально преднепрерывное (не обязательно непрерывное) представление группы G в конечномерном нормированном пространстве E. Тогда π финально непрерывно, и π может рассматриваться как (не обязательно непрерывное) представление некоторой факторгруппы Ли группы G в том же пространстве E.*

Доказательство. Пусть ограничение $\pi|_N$ представления π на некоторую нормальную подгруппу N группы G, для которой факторгруппа G/N является группой Ли, содержится в замкнутом шаре с центром в единичном операторе в E и радиусом $<\sqrt{3}$. В этом шаре нет неединичных подгрупп группы обратимых операторов в E. Следовательно, ограничение $\pi|_N$ тривиально. Следовательно, существует такое представление ψ группы G/N, что $\pi(g)=\psi(gN)$, $g\in G$. □

Лемма 5.11. *Пусть G — почти связная локально компактная группа, и пусть π – ограниченное (не обязательно непрерывное) финально преднепрерывное квазипредставление G в конечномерном пространстве E. Если $C(\pi)$ — такое число, что $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant C(\pi)$, и если дефект $\varepsilon=\varepsilon(\pi)$ квазипредставления π достаточно мал, то квазипредставление π можно рассматривать как малое возмущение некоторого квазипредставления π' группы G, определённого квазипредставлением π'' (радиус и дефект которого мало отличаются от радиуса и дефекта квазипредставления π, соответственно) факторгруппы Ли G/N группы G по некоторой компактной нормальной подгруппе N.*

Доказательство. Пусть N — такая нормальная подгруппа в G, факторгруппа по которой является группой Ли, что $\|\pi(g)-1_E\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant q<\sqrt{3}$ для всех $g\in N$. По теореме 4.1 в [261], существует такая положительная монотонно возрастающая функция $\sigma(\varepsilon)$, что при достаточно малом ε, для любой коммутативной подгруппы $Q\subset N$ существует обычное представление ψ группы Q в E, удовлетворяющее условию $\|\psi(g)-\pi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \varepsilon\sigma(\varepsilon)$ для всех $g\in Q$, причем $\|\psi(g)-1_E\|_{\mathcal{L}(E)}<\sqrt{3}$ для всех $g\in Q$. Как и в лемме 5.10, отсюда следует, что $\psi(Q)\equiv 1_E$, и, следовательно, $\|1_E-\pi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \varepsilon\sigma(\varepsilon)$ для всех $g\in Q$. Так как Q — любая коммутативная подгруппа в N, то $\|1_E-\pi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \varepsilon\sigma(\varepsilon)$ для всех $g\in N$. Пусть $\theta\colon G/N\to G$ — некоторое сечение естественного гомоморфизма $\rho\colon G\to G/N$ (так что $\rho(\theta(gN))=gN$ и $\theta(\rho(gN))\in gN$ для всех $g\in G$), и пусть $\pi''(gN)=\pi(\theta(gN))$, $g\in G$, и $\pi'(g)=\pi''(gN)$, $g\in G$. Непосредственная проверка показывает, что π' и π'' удовлетворяют требованиям леммы. □

Обсудим одну из центральных теорем в статье Лоуренса (теорему 5 в [146]). В ней утверждается, что, если S — полугруппа и $f\colon S\to M_n(\mathbb{C})$ — её квазипредставление, то существует такая функция $h\colon S\to M_n(\mathbb{C})$, что $\|f(x)-h(x)\|<\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$ и всех $x\in S$, и $(h(xy)-h(x)h(y))^2=0$ для всех $x,y\in S$. Легко видеть, что для групп это утверждение непосредственно следует из теоремы 4.19 если взять h в форме

$$h(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & 0 & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & 1_E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \qquad g \in G.$$

Заменить условие $(h(g_1g_2) - h(g_1)h(g_2))^2 = 0$ условием $h(g_1g_2) - h(g_1)h(g_2) = 0$, как надеялся Лоуренс, нельзя, поскольку при $\alpha(g) \equiv 1_E$, $\delta(g) \equiv 1_E$, и при τ, являющемся нетривиальным псевдохарактером, получаем $h(g_1g_2) - h(g_1)h(g_2) \neq 0$ для некоторых $g_1, g_2 \in G$.

Сформулируем две теоремы. Первая из них описывает широкий класс (не обязательно аменабельных) связных локально компактных групп, любое локально ограниченное финально преднепрерывное квазипредставление которых с достаточно малым дефектом допускает аппроксимацию представлением в том же пространстве, и поправка аппроскмации мала, если дефект мал. Пример разрывного характера одномерного тора показывает, что аппроксимирующее представление может быть разрывным, но оно обязательно непрерывно на коммутанте группы в его внутренней топологии Ли. Вторая теорема даёт описание квазипредставлений того же класса для более общих групп в терминах представлений и квазихарактеров Гишарде–Вигнера.

Теорема 5.11. *Пусть G — связная локально компактная группа, K — наибольший компактный нормальный делитель группы G [129], $P = G/K$ — соответствующая связная факторгруппа Ли, S — подгруппа Леви группы Ли P, и пусть центр группы S конечен. Пусть π — локально ограниченное финально преднепрерывное конечномерное ε-квазипредставление группы G с достаточно малым значением ε (см. лемму 5.11). Примем обозначения теоремы 5.10. Пусть (5.15) — реализация квазипредставления π. Помимо утверждений (i)–(iii) теоремы 5.10, справедливы следующие утверждения.*

(iv) *Матричнозначные отображения t_1 и t_2, определяемые в теореме 5.10, являются представлениями группы G, тривиальными на некотором компактном нормальном делителе $N_1 \subset K$ группы G, для которого факторгруппа G/N_1 является группой Ли.*

(v) *Отображение τ является квазикоциклом относительно представлений t_1 и t_2, т.е. отображение $(g,h) \mapsto \tau(gh) - \alpha(g)\tau(h) - \varphi(g)\rho(h) - \tau(g)\delta(h)$,*

$g,h \in G$, ограничено; кроме того, на нормальной подгруппе N_1 в G отображение τ является квазихарактером, и соответствующий псевдохарактер тривиален на некоторой компактной нормальной подгруппе N_2 в G (для которой факторгруппа G/N_2 является группой Ли).

(vi) *Базис в цепочке пространств $\{0\}$, $L\cap M^\perp$, $M^\perp$, $L+M^\perp$, $E=E_\pi$ можно выбрать так, что отображения σ и χ малы вместе с дефектом ε.*

(vii) *Квазипредставление γ можно рассматривать как шевеление некоторого ограниченного псевдопредставления γ' группы G, определённого псевдопредставлением γ'' факторгруппы Ли G/N_3 по некоторой компактной нормальной подгруппе $N_3 \subset K$.*

(viii) *Если N — компактная нормальная подгруппа в G, $N=N_1\cap N_2\cap N_3$, R_N — радикал группы Ли G/N, S_N — подгруппа Леви в G/N, то квазипредставление π ограниченно (с поправкой, малой при малом дефекте) аппроксимируется псевдопредставлением $\widetilde{\pi}$ группы G, ядро которого содержит N, и $\widetilde{\pi}$ может рассматриваться как псевдопредставление π_N группы G/N, причем ограничение Θ_S псевдопредставления π_N на S_N имеет блочно-диагональный вид с единственным возможно нетривиальным блоком β, а ограничение π_N на R_N имеет вид*

$$\Theta_R(r)=\begin{pmatrix} \alpha(r) & \varphi(r) & 0 & \Pi_R(r) \\ 0 & \beta(r) & 0 & \rho(r) \\ 0 & 0 & \gamma'(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(r) \end{pmatrix}, \qquad g\in G, \tag{5.17}$$

и псевдопредставление $\Theta_N\colon G/N\to\mathcal{L}(E)$, $\Theta_N(sr)=\Theta_S(s)\Theta_R(r)$, $s\in S_N$, $r\in R_N$, аппроксимирующее квазипредставление π, непрерывно на коммутанте группы G во внутренней топологии группы Ли. В частности, любое локально ограниченное финально преднепрерывное квазипредставление группы G с достаточно малым дефектом допускает аппроксимацию псевдопредставлением в том же пространстве, и точность аппроксимации мала при малом дефекте.

Обратно, формула (5.15) определяет квазипредставление группы G, если выполнены условия, перечисленные в теореме.

Теорема 5.12. *Пусть G — связная локально компактная группа, а π — локально ограниченное финально преднепрерывное конечномерное ε-квазипредставление группы G с достаточно малым значением ε (см. лемму 5.11).*

Пусть E_π^* — *пространство, сопряжённое к* E_π. *Примем обозначения теоремы* 5.10. *Пусть* (5.15) — *реализация квазипредставления* π. *Помимо утверждений* (i)–(iii) *теоремы* 5.10, *справедливы следующие утверждения.*

(iv) *Матричнозначные отображения* t_1 *и* t_2, *определяемые в теореме* 5.10, *являются представлениями группы* G, *тривиальными на некотором компактной нормальной подгруппе* N_1 *группы* G.

(v) *Отображение* τ *является квазикоциклом относительно представлений* t_1 *и* t_2, *т.е. отображение* $(g,h)\mapsto\tau(gh)-\alpha(g)\tau(h)-\varphi(g)\rho(h)-\tau(g)\delta(h)$, $g,h\in G$, *ограничено*; *кроме того, на нормальной подгруппе* Q *в* G (*для которой факторгруппа* G/Q *является группой Ли*), *на которой представления* t_1 *и* t_2 *тривиальны, отображение* τ *является квазихарактером и, следовательно, соответствующий псевдохарактер тривиален на некоторой нормальной подгруппе* N_2 *в* G (*для которой факторгруппа* G/N_2 *является группой Ли*).

(vi) *Базис в цепочке пространств* $\{0\}$, $L\cap M^\perp$, $M^\perp$, $L+M^\perp$, $E=E_\pi$ *можно выбрать так, что отображения* σ *и* χ *малы вместе с дефектом* ε.

(vii) *Квазипредставление* γ *можно рассматривать как малое возмущение ограниченного квазипредставления* γ' *группы* G, *определённого квазипредставлением* γ'' (*дефект которого мало отличается от дефекта квазипредставления* π) *факторгруппы Ли* G/N_3 *группы* G *по компактной нормальной подгруппе* N_3.

(viii) *Пусть* N — *компактная нормальная подгруппа в* G, $N=N_1\cap N_2\cap N_3$, Γ — *представление, аппроксимирующее квазипредставление* γ' (*см.* [253]), Π — *матричнозначная функция на* G/N, *структура которого описана в пункте* (iii) *теоремы* 5.10. *Тогда отображение*

$$\Theta_N(g)=\begin{pmatrix}\alpha(g)&\varphi(g)&0&\Pi(g)\\0&\beta(g)&0&\rho(g)\\0&0&\Gamma(g)&0\\0&0&0&\delta(g)\end{pmatrix},\qquad g\in G,\tag{5.18}$$

аппроксимирующее квазипредставление π, *является чистым псевдопредставлением группы* G, *и отображение* Θ *непрерывно на коммутанте группы* G *в топологии, индуцированной топологией группы* G, *и непрерывно на подгруппе Леви группы* G/N *во внутренней топологии группы Ли.*

Чтобы получить весь список представителей семейства локально ограниченных финально преднепрерывных квазипредставлений группы G *с доста-*

точно малым дефектом, нужно рассматривать все такие компактные нормальные подгруппы N, что соответствующая факторгруппа G/N является группой Ли, и всевозможные чистые локально ограниченные псевдопредставления этих факторгрупп с малым дефектом.

Обратно, формула (5.15) определяет квазипредставление группы G, если выполнены условия, перечисленные в теореме.

Замечание 5.1. В связи с теоремой 5.11 заметим, что если группа S_N содержит эрмитово симметрическую подгруппу (с конечным центром), то существуют чисто мнимые экспоненты вещественных псевдохарактеров Гишарде–Вигнера на S_N, являющиеся чистыми псевдопредставлениями группы S_N и определяющие чистые псевдопредставления группы G. Однако нетрудно заметить, используя [238], что дефекты этих псевдопредставлений ограничены снизу константой, заведомо превосходящей 1/3.

Доказательство теоремы 5.11. Пусть G — связная локально компактная группа, пусть K — наибольший компактный нормальный делитель группы G [129], пусть $L=G/K$ — соответствующая связная факторгруппа Ли, пусть S — подгруппа Леви группы Ли L, и пусть центр группы S конечен. Пусть π — локально ограниченное финально преднепрерывное ε-квазипредставление с достаточно малым значением ε группы G в конечномерном пространстве E (см. лемму 5.11). Свойство (iv) следует из теоремы 5.10 и из леммы 5.10.

Для доказательства свойства (v) рассмотрим отображение τ. Оно локально ограничено. Из теоремы 4.19 (см. 4.36) следует, что отображение

$$(g,h)\mapsto\tau(gh)-\alpha(g)\tau(h)-\varphi(g)\rho(h)-\tau(g)\delta(h),\qquad g,h\in G, \tag{5.19}$$

ограничено. Это и означает, что τ — квазикоцикл относительно представлений t_1 и t_2. Кроме того, по (iv), представления t_1 и t_2 тривиальны на N_1. Тогда формула (5.19) показывает, что отображение $(g,h)\mapsto\tau(gh)-\tau(h)-\tau(g)$, $g,h\in G$, ограничено на N_0. Тем самым к отображению τ на N_1 можно применить лемму 5.9, согласно которой существует нормальная подгруппа N_2 в N_1, а потому и в G, на которой псевдохарактер, соответствующий τ, тривиален.

Как и в доказательстве теоремы 3.3.14 в [254], мы видим, что базис в цепочке пространств $\{0\}$, $L\cap M^{\perp}$, $M^{\perp}$, $L+M^{\perp}$, $E=E_{\pi}$ можно выбрать так, что отображения σ и χ малы вместе с дефектом ε, что доказывает утверждение (vi).

Утверждение (vii) и существование реализации отображения Θ_S, описанной в пункте (viii), и реализации отображения Θ_R в виде (5.17) следуют из теоремы 5.10 и из свойств S_N и R_N, а именно, S_N — полупростая группа с конечным центром, и, следовательно, не имеющая нетривиальных псевдохарактеров (см., например, [237]) и не имеет и неединичных конечномерных унитарных представлений, и все её конечномерные представления вполне приводимы, а группа R_N разрешима, и. следовательно, любое её конечномерное квазипредставление с малым дефектом имеет близкое обычное представление [254].

К ограниченному квазипредставлению γ можно применить лемму 5.11. Согласно этой лемме, ввиду малости дефекта, можно рассматривать γ как малое возмущение некоторого квазипредставления γ' группы G, определённого квазипредставлением γ'' (дефект которого мало отличается от дефекта квазипредставления π) факторгруппы Ли G/N_3 группы G по некоторой компактной нормальной подгруппе N_3, где G/N_3 — группа Ли. Тот факт, что Θ_N есть обычное представление, проверяется непосредственно, что доказывает (viii).

Объединение этих фактов с теоремой 5.10 завершает доказательство теоремы 5.11, поскольку обратное отображение проверяется непосредственно. □

Доказательство теоремы 5.12. Пусть G — связная локально компактная группа, а π — локально ограниченное финально преднепрерывное ε-квазипредставление с достаточно малым значением ε группы G в конечномерном пространстве E (см. лемму 5.11). Существование реализации (5.15) следует из теоремы 5.10. Свойство (iv) следует из теоремы 5.10 и из леммы 5.10.

Для доказательства свойства (v) рассмотрим отображение τ. Оно локально ограничено. Из теоремы 4.19 следует, что отображение

$$(g,h)\mapsto\tau(gh)-\alpha(g)\tau(h)-\varphi(g)\rho(h)-\tau(g)\delta(h),\qquad g,h\in G,$$

ограничено (см. 4.36). Это и означает, что τ — квазикоцикл относительно представлений t_1 и t_2. Кроме того, по лемме 5.10, представления t_1 и t_2 тривиальны на некоторой нормальной подгруппе N_1 группы G, для которой G/N_1 — группа Ли. Тогда формула 4.34 показывает, что отображение $(g,h)\mapsto\tau(gh)-\tau(h)-\tau(g)$, $g,h\in G$, ограничено на N_1. тем самым к отображению τ на N_0 можно применить лемму 5.9, согласно которой существует нормальная подгруппа N_2 в N_1, а потому и в G, на которой псевдохарактер, соответствующий τ, тривиален.

Как и в доказательстве теоремы 3.3.14 в [254], мы видим, что, за счёт выбора базиса в цепочке пространств $\{0\}$, $L\cap M^{\perp}$, $M^{\perp}$, $L+M^{\perp}$, $E=E_{\pi}$ можно выбрать так, что отображения σ и χ малы вместе с дефектом ε, что доказывает утверждение (vi).

К ограниченному квазипредставлению γ можно применить лемму 5.11. Согласно этой лемме, ввиду малости дефекта, можно рассматривать γ как малое возмущение некоторого квазипредставления γ' группы G, определённого квазипредставлением γ'' (дефект которого мало отличается от дефекта квазипредставления π) факторгруппы Ли G/N_3 группы G по некоторой компактной нормальной подгруппе N_3, где G/N_3 — группа Ли, что доказывает (vii).

Объединение этих фактов с теоремой 5.10 завершает доказательство и даёт описание локально ограниченных конечномерных финально преднепрерывных квазипредставлений связной локально компактной группы с малым дефектом в терминах аппроксимации отображениями, которые выражаются через локально ограниченные конечномерные представления связных локально компактных групп и псевдохарактеры Гишарде–Вигнера эрмитово симметрических полупростых связных односвязных групп Ли.

Обратное утверждение проверяется непосредственно. $\square$

Заключение

Таким образом, основные результаты работы заключаются в следующем.

В главе 1 двойственность Понтрягина мнжду компактными и дискретными объектами распространена на некоммутативные локально компактные группы, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны. Получена характеризация локально компактных групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны, и гильбертово представимых топологических групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны и имеют ограниченные размерности. Получена характеризация топологических групп, представимых в рефлексивных банаховых пространствах.

В главе 2 введено понятие вариации представления отделимой топологической группы в банаховом пространстве и показано, что если эта вариация представления меньше единицы, то она равна нулю, и представление непрерывно. Аналогичное утверждение получено для дуальных пространств Фреше. Для конечномерных представлений аналогичное свойство имеет число 2, а не 1. Теорема Ли о конечномерных прелставлениях разрешимых групп Ли распространена на не обязательно непрерывные представления и на более широкий коасс групп.

В главе 3 фактически вводится категория топологических групп с локально относительно компактными гомоморфизмами. В частности, доказывается, что локально ограниченные конечномерные представления связных групп Ли и гомомрфизмы связных групп Ли автоматически непрерывны нв коммутанте группы-источника. Для связных совешенных групп Ли локальная ограниченность гомоморфизма равносильна его непрерывности. Введено понятие группы разрывов гомоморфизма топологических групп и показано, что группа разрывов конечномерного локально ограниченного представления связной группы Ли есть конечномерный тор. Приведено полное доказательство гипотезы А. С. Мищенко о возможных значениях вариации конечномерных представлений групп Ли. Показано, что теорема Фрейденталя–Вейля верна без предположения непрерывности вложения связной локально компактной группы в компактную группу и указаны приложения к группам фон Неймана и Хохшильда локально компактных групп и их обобщениям.

В главе 4 вводятся квазипредставления (отображения группы в непрерывно обратимые непрерывные линейные операторы в метризуемом топологическом векторном пространстве с равномерно малой разностью образа произведения элементов и произведением их образов) и их специальный класс, пседопредставления, в том числе чистые. Родственными понятиями являются квазихарактеры (отображения группы в аддитивную группу вещественных чисел с ограниченной разностью между образом произведения и произведением образов) и псевдохарактеры (квазихарактеры, ограничения которых на циклические подгруппы являются их характерами). Указаны приложения к ограниченным вещественным группам когомологий связных локально компактных групп и доказана конечномерность этих групп для почти связных локально компактных групп. Описана структура конечномерных квазипредставлений групп и, в частности, одномерных псевдопредставлений. Введен класс бесконечноменых непрерывных квазипредставлений аменабельных локально компактных групп, которые, если их дефект мал, допускают наличие близкого непрерывного обычного представления группы.

В главе 5 получено полное решение проблемы Каждана–Мильмана (для компактных полупростых групп Ли и их не обязательно непрерывных квазипредставлений с малым дефектом существует близкое непрерывное псевдопредставление группы) и оиисана структура локально ограниченных конечномерных квазипредставлений связных групп Ли и, при дополнительном предположении финальной преднепрерывности квазипредставлений, также и связных локально компактных групп.

Каждая из глав ставит нерешенные задачи.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность администрации факультета и кафедры математического анализа в лице Виктора Антоновича Садовничего, Андрея Игоревича Шафаревича, Владимира Николаевича Чубарикова и Тараса Павловича Лукашенко за создание и поддержание благоприятной рабочей атмосферы в течение десятилетий и коллективу кафедры и факультета за поддержку, помощь и обсуждение результатов. Особая благодарность за 30-летнее стимулирование этой работы Александра Сергеевича Демидова. Автор глубоко благодарен Константину Евгеньевичу Панкратьеву за бесценную помощь при подготовке и оформлении текста данной работы, а также благодарит всех, кто сделал эту работу автора возможной.

Список литературы

[1] Вершик, А.М. Счетные группы, близкие к конечным (приложение к русскому переводу книги [103]) / А.М. Вершик. — С. 112–135.

[2] Гауэрс, У.Т. Теоремы обращения и теоремы устойчивости для аппроксимативных представлений конечных групп / У.Т. Гауэрс, О. Хатами // Мат. сб. — 2017. — Т. 208, № 12. — С. 70–108.

[3] Гельфанд, И.М. Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии. I / И.М. Гельфанд, М.И. Граев // Труды моск. матем. об-ва. — 1959. — Т. VIII. — С. 321–390.

[4] Гельфанд, И.М. Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп / И.М. Гельфанд, Д.А. Райков // Мат. сб. — 1943. — Т. 13 (55), № 2–3. — С. 301–316.

[5] Гиндикин, С.Г. Мера Планшереля для римановых симметрических пространств неположительной кривизны / С.Г. Гиндикин, Ф.И. Карпелевич // Докл. АН СССР. – 1962. — Т. 145, вып. 2. — С. 252–255.

[6] Глушков, В.М. Строение локально компактных групп и пятая проблема Гильберта / В.М. Глушков // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. XII, вып. 2. — С. 3–41.

[7] Каспаров, Г.Г. Операторный K-функтор и расширения C^*-алгебр / Г.Г. Каспаров // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1980. — Т. 44, № 3. — С. 571–636.

[8] Каждан, Д.А. О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп / Д.А. Каждан // Функц. анализ и его прил. – 1967. — Т. 1, вып. 1. — С. 71–74.

[9] Кац, Г.И. Обобщение группового принципа двойственности / Г.И. Кац // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 138, вып. 2. — С. 275–278.

[10] Кириллов, А.А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли / А.А. Кириллов // Успехи мат. наук. — 1962. — Т. XVII, вып. 4. — С. 57–110.

[11] Кириллов, А.А. Представления бесконечномерной унитарной группы / А.А. Кириллов // Докл. АН СССР. –1973. — Т. 212, вып. 2. — С. 288–290.

[12] Любич, Ю.И. Введение в теорию банаховых представлений групп / Ю.И. Любич. — Харьков : Вища школа, 1985.

[13] Мальцев, А.И. О линейных связных локально-замкнутых группах / А.И. Мальцев // Докл. АН СССР. — 1943. — Т. 40, № 3. — С. 108–110.

[14] Мануйлов, В.М. Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп / В.М. Мануйлов, А.С. Мищенко // Мат. сб. — 1998. — Т. 189, № 10. — С. 53–72.

[15] Мануйлов, В.М. О почти представлениях групп $\pi \times \mathbf{Z}$ / В.М. Мануйлов // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. — 1999. — Т. 225. — С. 257–263.

[16] Мануйлов, В.М. О C^*-алгебрах, связанных с асимптотическими гомоморфизмами / В.М. Мануйлов // Мат. заметки. — 2000. — Т. 68, № 3. — С. 377–384.

[17] Мануйлов, В.М. Почти представления и асимптотические представления дискретных групп / В.М. Мануйлов // Изв. РАН. Сер. матем. — 1999. — Т. 3, № 5. — С. 159–178.

[18] Мануйлов, В.М. Асимптотически расщепимые расширения и E-теория / В.М. Мануйлов, К. Томсен // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, № 5. — С. 142–157.

[19] Мануйлов, В.М. Отображение Конна–Хигсона является изоморфизмом / В.М. Мануйлов, К. Томсен // Успехи мат. наук. — 2001 — Т. 56, № 4. — С. 151–152.

[20] Мануйлов, В.М. Трансляционно инвариантные асимптотические гомоморфизмы и расширения C^*-алгебр / В.М. Мануйлов, К. Томсен // Функц. анал. и прилож. — 2005. — Т. 39, № 3. — С. 87–91.

[21] Наймарк, М.А. Об одной задаче теории колец с инволюцией / М.А. Наймарк // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. VI, вып. 6. — С. 162–164.

[22] Наймарк, М.А. Теория представлений групп / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1976.

[23] Ольшанский, Г.И. Построение унитарных представлений бесконечномерных классических групп / Г.И. Ольшанский // Докл. АН СССР — 1980. — Т. 250, вып. 2. — С. 284–288.

[24] Понтрягин, Л.С. Непрерывные группы / Л.С. Понтрягин. — М. : Гостехиздат, 1954. = Pontryagin, L.S. Topological Groups / L.S. Pontryagin. — New York ; London ; Paris : Gordon and Breach, 1966.

[25] Понтрягин, Л.С. Непрерывные группы / Л.С. Понтрягин. — 4-е изд. — М. : Наука, 1984.

[26] Ромм, Б.Д. Разложение на неприводимые представления тензорного произведения двух неприводимых представлений вещественной унимодулярной группы второго порядка / Б.Д. Ромм // Докл. АН СССР. – 1963. — Т. 153, № 2. — С. 276–277.

[27] Тихомиров, В.М. Радость математического открытия. К 120-летию со для рождения академика А.Н. Колмогорова / В.М. Тихомиров // Вестн. РАН. — 2023. — Т. 93, № 4. — С. 373–383.

[28] Файзиев, В.А. Псевдохарактеры на свободных произведениях полугрупп / В.А. Файзиев // Функцион. анализ и его прилож. — 1987. — Т. 21, № 1. — С. 86–87.

[29] Файзиев, В.А. Псевдохарактеры на свободных группах и некоторых групповых конструкциях / В.А. Файзиев // Успехи мат. наук. — 1988. — Т. 43, № 5. — С. 225–226.

[30] Фегин, Б.Л. Когомологии групп Ли и алгебр Ли / Б.Л. Фегин, Д.Б. Фукс // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальный направленияю. — 1988. — Т. 21. — С. 121–209.

[31] Хелемский, А.Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах / А.Я. Хелемский. — М. : Изд-во моск. ун-та, 1986.

[32] Ahdout, S. Maximal protori in compact topological groups / S. Ahdout, C. Hurwitz, G. Itzkowitz [et al.] // Papers on General Topology and Applications. Vol. 728. — New York : New York Acad. Sci, 1994. — P. 227–236.

[33] Baker, J.W. Representations and positive definite functions on topological semigroups / J.W. Baker, B.M. Lashkarizadeh // Glasgow Math. J. — 1996. — Vol. 38, iss. 1. — P. 99–111.

[34] Baker, J. The stability of equation $f(xy) = f(x)f(y)$ / J. Baker, J. Lawrence, F. Zorzitto // Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — Vol. 74, no. 2. — P. 242–246.

[35] Banach, S. Théorie des opérations linéaires / S. Banach. — Warszawa : Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, 1932.

[36] Beggs, E.J. Pointwise bounded asymptotic morphisms and Thomsen's nonstable k-theory / E.J. Beggs. — arXiv:math.OA 0201051.

[37] Bélanger, A. Geometric properties of some subspaces of $VN(G)$ / A. Bélanger, B.E. Forrest // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 122, no. 1. — P. 131–133.

[38] Besson, G. Sur la cohomologie bornée / G. Besson // Séminaire de Cohomologie Bornée. — Éc. Norm. Sup. Lyon, Report; Février 1988.

[39] Birkhoff, G. Lie groups simply isomorphic with no linear group / G. Birkhoff // Bull. Amer. Math. Soc. — 1936. — Vol. 42. — P. 883–888.

[40] Bourgain, J. Geometrical implications of certain finite-dimensional decompositions / J. Bourgain, H.P. Rosenthal // Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B. — 1980. — Vol. 32, iss. 1. — P. 57–82.

[41] Bourgin, R.D. Geometric aspects of convex sets with the Radon–Nikodým property / R.D. Bourgin. — Berlin : Springer-Verlag, 1983.

[42] Brown, L.G. Continuity of actions of groups and semigroups on Banach spaces / L.G. Brown // J. London Math. Soc. (2) — 2000. — Vol. 62, no. 1. — P. 107–116.

[43] Bruhat, F. Sur les représentations induites des groupes de Lie / F. Bruhat // Bull. Soc. Math. France. — 1956. — Vol. 84, no. 2. — P. 92–105.

[44] Bunce, L.J. The Dunford–Pettis property in the predual of a von Neumann algebra / L.J. Bunce // Proc. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 116, no. 1. — P. 99–100.

[45] Bourbaki, N. Éléments de Mathématique. Fascicule XXIX. Livre VI: Intégration. Chap. 7 et 8 / N. Bourbaki. — Paris : Hermann, 1963. = Бурбаки, Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления / Н. Бурбаки ; ред. М.М. Горячая. — М. : Наука, 1970. — 320 с.

[46] Bourbaki, N. Lie groups and Lie algebras. Chapters 7–9 / N. Bourbaki. — Berlin : Springer-Verlag, 2005. — 445 p.

[47] Bourbaki, N. Éléments de Mathématique. Première Partie. Livre III: Topologie Générale / N. Bourbaki. — Paris : Hermann, 1949. = Бурбаки, Н. Общая топология. Основные структуры / Н. Бурбаки ; пер. с франц. С.Н. Крачковского ; под ред. Д.А. Райкова ; с предисл. П.С. Александрова. — М. : Наука, 1975. — 220 с.

[48] Burger, M. Boundary maps in bounded cohomology / M. Burger, A. Iozzi // Geom. Funct. Anal. — 2002. — Vol. 12, no. 2. — P. 281–292.

[49] Burger, M. On and around the bounded cohomology of SL_2 / M. Burger, N. Monod // Rigidity in Dynamics and Geometry / M. Burger, A. Iozzi, eds. — Berlin : Springer-Verlag, 2002. — P. 19–37.

[50] Burger, M. Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory / M. Burger, N. Monod // Geom. Funct. Anal. — 2002. — Vol. 12, no. 2. — P. 219–280.

[51] Cabello-Sanchez, F. Pseudo-characters and almost multiplicative functionals / F. Cabello-Sanchez // J. Math. Anal. Appl. — 2000. — Vol. 248, iss. 1. — P. 275–289.

[52] Cartan, É. Les groupes réels simples, finis et continus / É. Cartan // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). — 1914. — Vol. 31. — P. 263–355.

[53] Cartan, É. Sur les représentations linéaires des groupes clos / É. Cartan // Comment. Math. Helv. — 1930. — Vol. 2, iss. 1. — P. 269–283.

[54] Chen, P.B. On a class of topological groups / P.B. Chen, T.-S. Wu // Math. Ann. — 1984. — Vol. 266, iss. 4. — P. 499–506.

[55] Chu, C.H. A note on scattered C^*-algebras and the Radon–Nikodym property / C.H. Chu // J. London Math. Soc. (2). — 1981. — Vol. 24, no. 3. — P. 533–536.

[56] Chu, C.H. C^*-algebras with the Dunford–Pettis property / C.H. Chu, B. Iochum, S. Watanabe // Lecture Notes Pure Appl. Math. — 1992. — Vol. 136. — P. 67–70.

[57] Chu, Cho-Ho. A note on scattered C^*-algebras and the Radon–Nikodým property / Cho-Ho. Chu // J. London Math. Soc. — 1981. — Vol. 24, iss. 3. — P. 533–536.

[58] Chevalley, C. Théorie des Groupes de Lie. Tome III. Théorèmes Généraux sur les Algèbres de Lie / C. Chevalley. — Paris : Hermann & Cie, 1955. = Шевалле К., Теория групп Ли. Т. III. Общая теория алгебр Ли / К. Шевалле ; пер. с франц. Л.А. Калужниной. – М. : Иностранная литература, 1958.

[59] Comfort, W.W. Topological groups / W.W. Comfort // Handbook of Set-Theoretic Topology. — Amsterdam ; New York : North-Holland, 1984. — P. 1143–1263.

[60] Comfort, W.W. Determining a weakly locally compact group topology by its system of closed subgroups / W.W. Comfort, T. Soundararajan, F.J. Trigos-Arrieta // Papers on General Topology and Applications, Annals of the New York Academy of Sciences / S. Andina, G. Itzkowitz, T.Y. Kong [et al.], eds. — New York : New York Acad. Sci., 1994. — P. 25–33.

[61] Comfort, W.W. Locally pseudocompact topological groups / W.W. Comfort, F.J. Trigos-Arrieta // Topology Appl. — 1995. — Vol. 62, no. 3. — P. 263–280.

[62] Comfort, W.W. Extending ring topologies / W.W. Comfort, D. Remus, H. Szambien // J. Algebra. — 2000 — Vol. 232, no. 1 — P. 21–47.

[63] Connes, A. Conjecture de Novikov et fibrés presque plats / A. Connes, M.L. Gromov, H. Moscovici // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 1990. — Vol. 310, no. 5. — P. 273–277.

[64] Connes, A. Almost homomorphisms and KK-theory / A. Connes, N. Higson // Unpublished manuscript. — 1989. — http://www.math.psu.edu/higson/Papers/ch1.pdf

[65] Connes, A. Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante / A. Connes, N. Higson // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 1990. — Vol. 311, no. 2. — P. 101–106.

[66] Cuntz, J. Bivariante K-Theorie für lokalkonvexe Algebren und der bivariante Chern–Connes Charakter / J. Cuntz // Doc. Math. — 1997. — Vol. 2. — P. 139–182.

[67] Cuntz, J. Bivariant K-theory and the Weyl algebra / J. Cuntz. — ArXiv math.KT 0401295.

[68] Dadarlat, M. Asymptotic unitary equivalence in KK-theory / M. Dadarlat, S. Eilers // K-Theory. — 2001. — Vol. 23. — P. 305–322.

[69] Day, M.M. Normed Linear Spaces / M.M. Day. — Berlin : Göttingen ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1958. = Дэй, М.М. Нормированные линейные пространства. — М. : Иностранная литература, 1961. — 233 с.

[70] Davis, W.J. Factoring compact operators / W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson, A. Pelczynski // J. Funct. Anal. — 1974. — Vol. 17, no. 3. — P. 311–327.

[71] Dixmier, J. Traces sur les C^*-algèbres / J. Dixmier // Ann. Inst. Fourier. — 1963. — Vol. 13, no. 1. — P. 219–262.

[72] Dixmier, J. Les C^*-algèbres et leurs représentations / J. Dixmier. — Paris : Gauthier-Villars, 1964.

[73] Dixmier, J. Les C^*-algèbres et leurs réprésentations / J. Dixmier. — 2e édition. — Paris : Gauthier-Villars, 1969. = Диксмье, Ж. C^*-алгебры и их

представления / Ж. Диксмье ; пер. с франц. А.И. Штерна ; под ред. А.А. Кириллова. — М. : Наука, 1974. — 400 с.

[74] Dixmier, J. Utilisation des facteurs hyperfinis dans la théorie des C^*-algebres / J. Dixmier // C. R. Acad. Sci. — 1964. — Vol. 258, no. 17. — P. 4184–4187.

[75] Dunford, N. Linear Operators. Part I. General Theory / N. Dunford, J.T. Schwartz. — New York ; London : Interscience Publ., 1958. = Данфорд, Н. Линейные операторы, том I / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц ; пер. с англ. Л.И. Головиной и Б.С. Митягина ; под ред. А.Г. Костюченко. — М. : Иностранная литература, 1962. — 895 с.

[76] Egghe, L. On the Radon–Nikodym-property, and related topics in locally convex spaces / L. Egghe // Vector Space Measures and Applications. II : Proc. Univ. Dublin, Dublin, 1977 / R.M. Aron, S. Dineen, eds. — Berlin ; New York : Springer-Verlag, 1978. — P. 77–90.

[77] Eilers, S. Computing contingencies for stable relations / S. Eilers, T.A. Loring // Internat. J. Math. — 1999. — Vol. 10, no. 3. — P. 301–326.

[78] Ellis, R. Locally compact transformation groups / R. Ellis // Duke Math. J. — 1957. — Vol. 24. — P. 119–125.

[79] Elliott, G.A. Cut-down method in the inductive limit decomposition of noncommutative tori / G.A. Elliott, Q. Lin // J. London Math. Soc. (2). — 1996. — Vol. 54, no. 1. — P. 121–134.

[80] Engelking, R. General Topology / R. Engelking. — Warzawa : Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1977. = Энгелькинг, Р. Общая топология / Р. Энгелькинг ; пер. с англ. [и предисл.] М.Я. Антоновского, А.В. Архангельского. — М. : Мир, 1986. — 744 с.

[81] Enock, M. Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups / M. Enock, J.-M. Schwartz. — Berlin : Springer, 1992.

[82] Entov, M. Commutator length of symplectomorphisms / M. Entov // Comment. Math. Helv. — 2004. — Vol. 79. — P. 58–104.

[83] Ernest, J. A new group algebra for locally compact groups / J. Ernest // Amer. J. Math. — 1964. — Vol. 86. — P. 467–492.

[84] Ernest, J. A new group algebra for locally compact groups. II / J. Ernest // Canad. J. Math. — 1965. — Vol. 17. — P. 604–615.

[85] Ernest J., Hopf-von Neumann algebras / J. Ernest // Functional Analysis (Proc. Conf. Univ. California, Irvine, 1966) / B.R. Gelbaum, ed. — Washington : Thompson Book, 1967. — P. 195–215.

[86] Ernest, J. A duality theorem for the automorphism group of a covariant system / J. Ernest // Comm. Math. Phys. — 1970. — Vol. 17. — P. 75–90.

[87] Exel, R. Continuous Fell bundles associated to measurable twisted actions / R. Exel, M. Laca // Proc. Amer. Math. Soc. — 1997. — Vol. 125, iss. 3. — P. 795–799.

[88] Eymard, R. L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact / R. Eymard // Bull. Soc. Math. France. — 1964. — Vol. 92. — P. 181–236.

[89] Fell, J.M.G. The dual spaces of C^*-algebras / J.M.G. Fell // Trans. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 94, no. 3. — P. 365–403.

[90] Fell, J.M.G. Weak containment and induced representations of groups, I / J.M.G. Fell // Canad. J. Math. — 1962. — Vol. 14, no. 2. — P. 237–268.

[91] Fell, J.M.G. Weak containment and induced representations of groups, II / J.M.G. Fell // Trans. Amer. MAth. Soc. – 1964. — Vol. 110, no. 3. — P. 424–447.

[92] Forti, G.L. The stability of homomorphisms and amenability, with applications to functional equations / G.L. Forti // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1987. — Vol. 57. — P. 215–226.

[93] Freudenthal, H. Topologische Gruppen mit genügend vielen fastperiodischen Funktionen / H. Freudenthal // Ann. of Math. — 1936. — Vol. 37. — P. 57–77.

[94] Freudenthal, H. Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomenon. I / H. Freudenthal // Ann. of Math. (2) — 1941. — Vol. 42. — P. 1051–1074.

[95] Freudenthal, H. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavebene. I / H. Freudenthal // Indag. Math. — 1954. — Vol. 16, no. 3. — P. 218–230.

[96] Gaal, S.A. Linear Analysis and Representation Theory / S.A. Gaal. — New York : Springer-Verlag, 1973.

[97] Ghoussoub, N. G_δ embeddings in Hilbert space. II / N. Ghoussoub, B. Maurey // Math. Scand. — 1984. — Vol. 54. — P. 70–78.

[98] Ghys, É. Groups acting on the circle / É. Ghys // Enseign. Math. (2). — 2001. — Vol. 47, no. 3–4. — P. 329–407.

[99] Gong, G. Almost multiplicative morphisms and K theory / G. Gong, H. Lin // Internat. J. Math. — 2000. — Vol. 11, no. 8. — P. 983–1000.

[100] Gong, G. Almost multiplicative morphisms and almost commuting matrices / G. Gong, H. Lin // J. Operator Theory. — 1998. — Vol. 40, no. 2. — P. 217–275.

[101] Gotô, M. Faithful representations of Lie groups. I / M. Gotô // Math. Japonicae. — 1948. — Vol. 1. — P. 107–119.

[102] Gotô, M. Faithful representations of Lie groups. II / M. Gotô // Nagoya Math. J. — 1950. — Vol. 1. — P. 91–107.

[103] Greenleaf, F.P. Invariant Means on Topological Groups and Their Applications / F.P. Greenleaf. — London : Van Nostrand Reinhold, 1969. = Гринлиф, Ф.П. Инвариантные средние на топологических группах и их приложениях / Ф.П. Гринлиф ; перевод с англ. В.Ф. Пахомова ; под ред. Я.Г. Синая. — М. : Мир, 1973.

[104] Gromov, M. Volume and bounded cohomology / M. Gromov // Publications mathématiques de l'I.H.É.S. — 1983. — Vol. 56 (1982). — P. 5–99.

[105] Gromov, M. Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures / M. Gromov // Functional Analysis on the Eve of the 21st Century. Vol. II. — Boston : Birkhäuser, 1996. — P. 1–213.

[106] Grønbæk, N. Amenability of weighted convolution algebras on locally compact groups / N. Grønbæk // Trans. Amer. Math. Soc. — 1990. — Vol. 319, no. 2. — P. 765–775.

[107] Grosser, S. Compactness conditions in topological groups / S. Grosser, M. Moskowitz // J. Reine Angew. Math. – 1971. — Vol. 246. — P. 1–40.

[108] Grove, K. Jacobi fields and Finsler metrics on a compact Lie group with an application to differential pinching problems / K. Grove, H. Karcher, E.A. Ruh // Math. Ann. — 1974. — Vol. 211, no. 1. — P. 7–21.

[109] Guichardet, A. Cohomologie des Groupes Topologiques et des Algèbres de Lie / A. Guichardet. — Paris : Cedic/Fernand Nathan, 1980. = Гишарде, А. Когомологии топологических групп и алгебр Ли / А. Гишарде ; пер. с франц. Г.С. Шмелева ; под ред. А.А. Кириллова. — М. : Мир, 1984. — 262 с.

[110] Guichardet, A. Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels / A. Guichardet, D. Wigner // Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Serie 4. — 1978. — Vol. 11, no. 2. — P. 277–292.

[111] Guentner, E. Equivariant E-theory for C^*-algebras / E. Guentner, N. Higson, J. Trout // Mem. Amer. Math. Soc. — 2000. — Vol. 148. — no. 703.

[112] Harish-Chandra. On faithful representations of Lie groups / Harish-Chandra // Proc. Amer. Math.-Soc. — 1950. — Vol. 1, no. 2. — P. 205–210.

[113] de la Harpe, P. Représentations approchées d'un groupe dans une algébre de Banach / P. de la Harpe, M. Karoubi // Manuscripta Math. — 1977. — Vol. 22, no. 3. — P. 293–310.

[114] Hewitt, E. Abstract Harmonic Analysis. Vol. 1: Structure of Topological Groups. Integration Theory. Group Representations / E. Hewitt, K.A. Ross. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1963. = Хьюитт, Э. Абстрактный гармонический анализ (в 2-х т.). Т. 1: Структура топологических групп. Теория интегрирования. Представления групп / Э. Хьюитт, К. Росс ; пер. с англ. А.А. Мальцева; под ред. М.Я. Антоновского. — М. : Наука, 1975. — 654 с.

[115] Heyer, H. Dualität lokalkompakter Gruppen / H. Heyer. — Berlin : Springer, 1970.

[116] Higson N.D. A primer on KK-theory / N.D. Higson // Operator Theory: Operator Algebras and Applications / W.B. Arveseon, R.G. Douglas, eds. — Providence : Amer. Math. Soc., 1990. — P. 239–283.

[117] Higson, N. Amenable group actions and the Novikov conjecture / N. Higson, J. Roe // J. Reine Angew. Math. — 2000. — Vol. 519. — P. 143–153.

[118] Hochschild, G.P. Complexification of real analytic groups / G.P. Hochschild // Trans. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 125. — P. 406–413.

[119] Hochschild, G.P. The Structure of Lie Groups / G.P. Hochschild. — San Francisco ; London ; Amsterdam : Holden-Day, 1965.

[120] Hochschild, G.P. The universal representation kernel of a Lie group / G.P. Hochschild // Proc. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 11. — P. 625–629.

[121] Hochschild, G.P. Extensions of representations of Lie groups and Lie algebras. I / G.P. Hochschild, G.D. Mostow // Amer. J. Math. — 1957. — Vol. 79. — P. 924–942.

[122] Hofmann, K.H. The Structure of Compact Groups / K.H. Hofmann, S.A. Morris. — Berlin : de Gruyter, 1998.

[123] Hofmann, K.H. The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups / K.H. Hofmann, S.A. Morris. — Berlin : European Math. Soc., 2007.

[124] Hofmann, K.H. Splitting in topological groups / K.H. Hofmann, P. Mostert // Mem. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 43. — P. 1–75.

[125] Howe, R.M. Multiplicity, invariants and tensor product decompositions of tame representations of $\mathrm{U}(\infty)$ / R.M. Howe, T. Ton-That // J. Math. Phys. — 2000. — Vol. 41, no. 2. — P. 991–1015.

[126] Helgason, S. Differential Geometry and Symmetric Spaces / S. Helgason. — New York : Academic Press, 1962. = Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон ; пер. с англ. А.Л. Онищика. — М. : Мир, 1964.

[127] Iório V.B. de M., Hopf C^*-algebras and locally compact groups / V.B. de M. Iório // Pacific J. Math. — 1980. — Vol. 87, no. 1. — P. 75–96.

[128] Isaacs, I.M. Groups with representations of bounded degree / I.M. Isaacs, D.S. Passman // Canad. J. Math. — 1964. — Vol. 16. — P. 299–309.

[129] Iwasawa, K. On some types of topological groups / K. Iwasawa // Ann. of Math. (2). — 1949. — vol 50. — P. 507–558.

[130] Johnson, B.E. Cohomology of Banach Algebras / B.E. Johnson. — Providence : Amer. Math. Soc., 1972.

[131] Johnson, B.E. Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras / B.E. Johnson // Amer. J. Math. — 1972. — Vol. 94. — P. 685–698.

[132] Johnson, B.E. Approximately multiplicative functionals / B.E. Johnson // J. London Math. Soc. (2). — 1986. — Vol. 34, no. 3. — P. 489–510.

[133] Johnson, B.E. Approximately multiplicative maps between Banach algebras / B.E. Johnson // J. London Math. Soc. (2). — 1988. — Vol. 37, iss. 2. — P. 294–316.

[134] Johnson, B.E. Continuity of generalized homomorphisms / B.E. Johnson // Bull. London Math. Soc. — 1987. — Vol. 19, no. 1. — P. 67–71.

[135] Johnson, B.E. Derivations from $L^1(G)$ into $L^1(G)$ and $L^\infty(G)$ / B.E. Johnson // Harmonic analysis / P. Eymard, J.-P. Pier, eds. — Berlin ; New York : Springer, 1988. — P. 191–198.

[136] Johnson, B.E. Near inclusions for subhomogeneous C^* algebras / B.E. Johnson // Proc. London Math. Soc. (3). — 1994. — Vol. 68, no. 2. — P. 399–422.

[137] Johnson, B.E. Perturbations of multiplication and homomorphisms / B.E. Johnson // Deformation theory of algebras and structures and applications / M. Hazewinkel, M. Gerstenhaber, eds. — Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1988. — P. 565–579.

[138] Johnson B.E. Weak amenability of group algebras / B.E. Johnson // Bull. London Math. Soc. — 1991. — Vol. 23, iss. 3. — P. 281–284.

[139] Kahng, B.-J. Haar measure on a locally compact quantum group / B.-J. Kahng // J. Ramanujan Math. Soc. — 2003. — Vol. 18, no. 4. — P. 384–414.

[140] Kaplansky, I. Groups with representations of bounded degree / I. Kaplansky // Canad. J. Math. — 1949. — Vol. 1, no. 1. — P. 105–112.

[141] Kazhdan, D. On ε-representations / D. Kazhdan // Israel J. Math. — 1982. — Vol. 43, iss. 4. — P. 315–323.

[142] Kuranishi M. On Non-Connected Maximally Almost Periodic Groups // Tôhoku Math. J. (2). — 1950. — Vol. 2. — P. 40–46.

[143] Kustermans, J. Locally compact quantum groups / J. Kustermans // Quantum Independent Increment Processes. I / M. Schürmann, U. Franz, eds. — Springer, Berlin, 2005. — P. 99–180.

[144] Landsman, N.P. Strict deformation quantization of a particle in external gravitational and Yang–Mills fields / N.P. Landsman // J. Geom. Phys. — 1993. — Vol. 12, no. 2. — P. 93–132.

[145] Lau, A.T.-M. Some geometric properties on the Fourier and Fourier–Stieltjes algebras of locally compact groups, Arens regularity and related problems / A.T.-M. Lau, A. Ülger // Trans. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 337, no. 1. — P. 321–359.

[146] Lawrence, J.W. The stability of multiplicative semigroup homomorphisms to real normed algebras / J.W. Lawrence // Aequationes Math. — 1985. — Vol. 28, no. 1–2. — P. 94–101.

[147] Lawson, J.D. Intrinsic topologies in topological lattices and semilattices / J.D. Lawson // Pacific J. Math. — 1973. — Vol. 44. — P. 593–602.

[148] Lee, D.H. Supplements for the identity component in locally compact groups / D.H. Lee // Math. Z. — 1968. — Vol. 104. — P. 28–49.

[149] de Leeuw, K. The decomposition of certain group representations / K. de Leeuw, I. Glicksberg // J. Anal. Math. — 1965. — Vol. 15. — P. 135–192.

[150] Lorentz, G.G. A contribution to the theory of divergent sequences / G.G. Lorentz. — Acta Math. — 1948. — Vol. 80. — P. 167–190.

[151] Loy, R.J. Amenable and weakly amenable Banach algebras with compact multiplication / R.J. Loy, C.J. Read, V. Runde, G.A. Willis // J. Funct. Anal. — 2000. — Vol. 171, no. 1. — P. 78–114.

[152] Luminet, D. Faithful uniformly continuous representations of Lie groups / D. Luminet, A. Valette // J. London Math. Soc. (2). — 1994. — Vol. 49, no. 1. — P. 100–108.

[153] Mackey, G.W. Borel structure in groups and their duals / G.W. Mackey // Trans. Amer. Math. Soc. — 1957. — Vol. 85. — P. 134–165.

[154] Mackey, G.W. Infinite-dimensional group representations / G.W. Mackey // Bull. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 69. — P. 628–686.

[155] Megrelishvili, M.G. Operator topologies and reflexive representability / M.G. Megrelishvili // Nuclear Groups and Lie Groups / E.M. Peinador, J.N. Garsia, eds. — Berlin : Heldermann, 2001. — P. 197–208.

[156] Mishchenko, A.S. Asymptotic representation of discrete groups / A.S. Mishchenko, N. Mohammad // Lie Groups and Lie Algebras: Their Representations, Generalisations and Applications / B.P. Komrakov, I.S. Krasil'shchik, G.L. Litvinov, A.B. Sossinsky, eds. — Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1998. — P. 299–312.

[157] Montgomery, D. A theorem on Lie groups / D. Montgomery, L. Zippin // Bull. Amer. Math. Soc. — 1942. — Vol. 48. — P. 448–452.

[158] Montgomery, D. Topological Transformation Groups / D. Montgomery, L. Zippin. — New York : Interscience Publ., 1955.

[159] Monod, N. Continuous Bounded Cohomology of Locally Compact Groups / N. Monod. — Berlin : Springer-Verlag, 2001.

[160] Monod, N. Boundedly generated groups with pseudocharacter(s) / N. Monod, B. Remy // arXiv:math. GR/0310065.

[161] Moore, C.C. Groups with finite dimensional irreducible representations / C.C. Moore // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 166. — P. 401–410.

[162] Moore, C.C. Group extensions and cohomology for locally compact groups. III / C.C. Moore // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 221, iss. 1. — P. 1–33.

[163] Moore, R.T. Measurable, Continuous and Smooth Vectors for Semi-Groups and Group Representations / R.T. Moore. — Providence : Amer. Math. Soc., 1968.

[164] Moskowitz, M. A Remark on Faithful Representations / M. Moskowitz // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8). — 1972. — Vol. 52. — P. 829–831.

[165] Moskowitz, M. Faithful Representations and a local property of Lie groups / M. Moskowitz // Math. Z. — 1975. — Vol. 143. — P. 193–198.

[166] Murakami, S. Remarks on the structure of maximally almost periodic groups / S. Murakami // Osaka Math. J. — 1950. — Vol. 2. — P. 119–129.

[167] Naimark, M.A. Theory of Group Representations / M.A. Naimark, A.I. Štern. — New York ; Heidelberg ; Berlin : Springer-Verlag, 1982.

[168] Namioka, I. Separate continuity and joint continuity / I. Namioka // Pacific J. Math. — 1974. — vol 51. — P. 515–531.

[169] Neeb, K.-H. On a theorem of S. Banach / K.-H. Neeb // J. Lie Theory. — 1997. — Vol. 7, iss. 2. — P. 293–300.

[170] Neeb. K.-H. Supplements to the papers entitled: “On a theorem of S. Banach” and “The separable representations of $U(H)$” / K.-H. Neeb, D. Pickrell // J. Lie Theory. — 2000. — Vol. 10, iss. 1. — P. 107–109.

[171] von Neumann, J. Almost periodic functions in a group. I / J. von Neumann // Trans. Amer. Math. Soc. — 1934. — Vol. 36. — P. 445–492.

[172] Ng, C.-K. Cohomology of Hopf C^{*}-algebras and Hopf von Neumann algebras / C.-K. Ng // Proc. London Math. Soc. (3). — 2001. — Vol. 83, no. 3. — P. 708–742.

[173] Olshanskii, G.I. Representations of infinite-dimensional classical groups, limits of enveloping algebras, and Yangians / G.I. Olshanskii // Topics in Representation Theory / A.A. Kirillov, ed. — Providence : Amer. Math. Soc., 1991. — P. 1–66.

[174] Palais,R.S. On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups / R.S. Palais // Ann. of Math. (2). — 1961. — Vol. 73, no. 2. — P. 295–323.

[175] Paterson, A.L.T. Amenability / A.L.T. Paterson . — Providence : Amer. Math. Soc., 1988.

[176] Pestov, V. Review of [169] / V. Pestov // Math. Rev. 98i:22003. — 1998.

[177] Pickrell, D. The separable representations of $\mathrm{U}(H)$ / D. Pickrell // Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 102, no. 2. — P. 416–420.

[178] Pickrell, D. Separable representations for automorphism groups of infinite symmetric spaces / D. Pickrell // J. Funct. Anal. – 1990. — Vol. 90, no. 1. — P. 1–26.

[179] Pontrjagin, L.S. The theory of topological commutative groups / L.S. Pontrjagin // Ann. Math. — 1934. — Vol. 35, no. 2. — P. 361–388.

[180] Rademacher, H. Zur Theorie der Modulfunktionen / H. Rademacher // J. Reine Angew. Math. — 1932. — Vol. 167. — S. 312–336.

[181] Robertson, L.C. A note on the structure of Moore groups / L.C. Robertson // Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 75. — P. 594–599.

[182] Rothman, S. The von Neumann kernel and minimally almost periodic groups / S. Rothman // Trans. Amer. Math. Soc. – 1980. — Vol. 259, iss. 2. — P. 401–421.

[183] Rothman, S. The von Neumann kernel of a locally compact group / S. Rothman, H.Strassberg // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. — 1984. — Vol. 36, iss. 2. — P. 279–286.

[184] Saab, E. Dentabilité et points extremaux dans les espaces localement convexes / E. Saab. — Paris : Secrétariat Math., 1975.

[185] Sakai, S. On a characterisation of type I C^*-algebras / S. Sakai // Bull. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 72. — P. 508–512.

[186] Sakai, S. C^*-Algebras and W^*-Algebras / S. Sakai. — Berlin : Springer-Verlag, 1971.

[187] Sanchis, M. Continuous functions on locally pseudocompact groups / M. Sanchis // Topology Appl. — 1998. — Vol. 86, no. 1. — P. 5–23.

[188] Sasvari, Z. Positive Definite and Definitizable Functions / Z. Sasvari. — Berlin : Akademie-Verlag, 1994.

[189] Schaefer, H.H. Topological Vector Spaces / H.H. Schaefer. — New York ; London : MacMillan, 1966. = Шефер, Х. Топологические векторные пространства / Х. Шефер ; пер. с англ. И.Н. Березанского ; под ред. Е.А. Горина. — М. : Мир, 1971. — 359 с.

[190] Schaefer, H.H. Topological Vector Spaces / H.H. Schaefer, M.P. Wolff. — 2nd ed. — New York : Springer-Verlag, 1999.

[191] Segal, I.E. The structure of a class of representations of the unitary group on a Hilbert space / I.E. Segal // Proc. Amer. Math. Soc. — 1957. — Vol. 8. — P. 197–203.

[192] Segal, G. Cohomology of topological groups / G. Segal. — Symposia Math. Vol. 4. — London ; New York : Academic Press, 1970. — P. 377–387.

[193] Šemrl, P. Almost multiplicative functions and almost linear multiplicative functionals / P. Šemrl // Aequationes Math. — 2002. — Vol. 63. — P. 180–192.

[194] Šemrl, P. Hyers–Ulam stability of isometries on Banach spaces / P. Šemrl // Aequationes Math. — 1999. — Vol. 58. — P. 157–162.

[195] Serre, J.-P. Trivialité des espaces fibrés. Applications / J.-P. Serre // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1950. — Vol. 230. — P. 916–918.

[196] Serre, J.-P. Extensions des groupes localement compacts / Serre J.-P. // Séminaire N. Bourbaki. — 1952. — no. 27. — P. 197–202

[197] Séminaire “Sophus Lie”. 1954–1955 Théorie des Algèbres de Lie. Topologie des Groupes de Lie. = Семинар Софус Ли, Теория алгебр Ли. Топология групп Ли / пер. с франц. Э.Б. Винберга ; под ред. Е.Б. Дынкина. — М. : Иностранная литература, 1962.

[198] Shalom, Y. Bounded generation and Kazhdan’s property (T) / Y. Shalom // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. (1999). — 2001. — Vol. 90. — P. 145–168.

[199] Shavgulidze, E.T. Some properties of quasi-invariant measures on groups of diffeomorphisms of the circle / E.T. Shavgulidze // Russ. J. Math. Phys. — 2000. — Vol. 7, no. 4. — P. 464–472.

[200] Stinespring, W.F. Integration theorems for gauges and duality for unimodular groups / W.F. Stinespring // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. — Vol. 90. — P. 15–56.

[201] Stroppel, M. Lie theory for non-Lie groups / M. Stroppel // J. Lie Theory. — 1994. — Vol. 4, iss. 2. — P. 257–284.

[202] Takesaki, M. A characterization of group algebras as a converse of Tannaka-Stinespring-Tatsuuma duality theorem / M. Takesaki // Amer. J. Math. – 1969. — Vol. 91. — P. 529–564.

[203] Takesaki, M. Theory of Operator Algebras. I / M. Takesaki. — New York : Springer-Verlag, 1979.

[204] Tatsuuma, N. A duality theorem for locally compact groups / N. Tatsuuma // J. Math. Kyoto Univ. — 1967. — Vol. 6. — P. 187–293.

[205] Teleman, S. Sur la représentatiom linéaire des groupes topologiques / S. Teleman // Annales scientifiques de l’É.N.S. 3e série. — 1957. — Vol. 74, no. 4. — P. 319–339.

[206] Terp, C. On locally compact groups whose set of compact subgroups is inductive / C. Terp // Seminar Sophus Lie. — 1991. — Vol. 1. — P. 73–80.

[207] Thoma, E. Eine Charakterisierung diskreter Gruppen vom Typ 1 / E. Thoma // Invent. Math. — 1968. — Vol. 6, no. 3. — S. 190–196.

[208] Thomsen, K. Asymptotic homomorphisms and equivariant KK-theory / K. Thomsen // J. Funct. Anal. — 1999. — Vol. 163, no. 2. — P. 324–343.

[209] Thomsen, K. Nonstable K-theory for operator algebras / K. Thomsen // Internat. J. Math. — 1991. — Vol. 4, no. 3. — P. 245–267.

[210] Vainerman, L. The bicrossed product construction for locally compact quantum groups / L. Vainerman. – Bull. Kerala Math. Assoc., Special Issue 2005. — 2007. — P. 99–136.

[211] Vallin, J.-M. C^*-algèbres de Hopf et C^*-algèbres de Kac / J.-M. Vallin // Proc. London Math. Soc. (3). — 1985. — Vol. 50, no. 1. — P. 131–174.

[212] Vaes, S. Hopf C^*-algebras / S. Vaes, A. van Daele // Proc. London Math. Soc. (3). — 2001. — Vol. 82, no. 2. — P. 337–384.

[213] Varadarajan, V.S. Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations / V.S. Varadarajan. — Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1974.

[214] van der Waerden, B.L. Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen / B.L. van der Waerden // Math. Z. — 1933. — Vol. 36. — S. 780–786.

[215] Waterhouse, W.C. Dual groups of vector spaces / W.C. Waterhouse // Pacific J. Math. — 1968. — Vol. 26, no. 1. — P. 193–196.

[216] Weil, A. L'intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications / Weil A. — Paris : Hermann, 1940. = Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его приложения / А. Вейль ; пер. с франц. Г.М. Адельсон-Вельского и М.И. Вишика ; под ред. Н.Я. Виленкина. – М. : Иностранная литература, 1950.

[217] Weil, A. Sur les Espaces à Structure Uniforme et sur la Topologie Génèrale / A. Weil. — Paris : Hermann, 1937.

[218] White, M.C. Characters on weighted amenable groups / M.C. White // Bull. London Math. Soc. — 1991. — Vol. 23, no. 4. — P. 375–380.

[219] Yamabe, H. A generalization of a theorem of Gleason / H. Yamabe // Ann. Math. – 1953. — Vol. 58, no. 2. — P. 351–365.

[220] Yamabe, H. On the conjecture of Iwasawa and Gleason / H. Yamabe // Ann. Math. — 1953. — Vol. 58, no. 1. — P. 48–54.

[221] Young, N. Periodicity of functionals and representations of normed algebras on reflexive spaces / N. Young // Proc. Edinbourgh Math. Soc. – 1976. — Vol. 20, iss. 2. — P. 99–120.

[222] Yost, D. Asplund spaces for beginners / D. Yost // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. – 1993. — Vol. 34, no. 2. — P. 159–177.

[223] Yu, G. The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension / G. Yu // Ann. Math. Second ser. — 1998. — Vol. 147, no. 2. — P. 325–355.

Статьи автора по теме диссертации

[224] Штерн, А.И. О группах с бикомпактным двойственным пространством / А.И. Штерн // Успехи мат. наук. — 1971. — Т. XXVI, вып. 3 (159). — С. 217–218.

[225] Штерн, А.И., О связи между топологиями локально бикомпактной группы и ее двойственного пространства / А.И. Штерн // Функц. анализ и его прил. — 1971. — Т. 5, вып. 4. — С. 56–63. = Shtern, A.I. Connection between the topologies of a locally bicompact group and its dual space / A.I. Shtern // Funct. Anal. Appl. — 1972. — Vol. 5. — P. 311–317.

[226] Штерн, А.И. Сепарабельные локально бикомпактные группы с дискретным носителем регулярного представления / А.И. Штерн // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 198, вып. 6. — С. 1287–1290. = Shtern, A.I. Separable locally compact groups with discrete support for the regular representation / A.I. Shtern // Sov. Math. Dokl. — 1971. — Vol. 12. — P. 994–998.

[227] Штерн, А.И. Локально бикомпактные группы с конечномерными неприводимыми представлениями / А.И. Штерн // Мат. сб. – 1973. — Т. 90, вып. 1. — С. 86–93. = Shtern, A.I. Locally bicompact groups with finite-dimensional irreducible representations / A.I. Shtern // Math. USSR Sb. — 1973. — Vol. 19, no. 1. — P. 85–94.

[228] Штерн, А.И. Псевдохарактер, определенный символом Радемахера / А.И. Штерн // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 3. — С. 197–198. =

Shtern, A.I. A pseudocharacter that is determined by the Rademacher symbol / A.I. Shtern // Russ. Math. Surv. — 1990. — Vol. 45, no. 3. — P. 224–226.

[229] Штерн, А.И. Квазипредставления и псевдопредставления / А.И. Штерн // Функц. анализ и его прил. — 1991. — Т. 25, № 2. — С. 87–91. = Shtern, A.I. Quasirepresentations and pseudorepresentations / A.I. Shtern // Funct. Anal. Appl. — 1991. — Vol. 25, no. 2. — P. 140–143.

[230] Штерн, А.И. Об операторах в пространствах Фреше, подобных изометриям / А.И. Штерн // Вестн. моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1991. — № 4. — С. 67–70.

[231] Shtern, A.I. Compact semitopological semigroups and reflexive representability of topological groups / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. – 1994. — Vol. 2, iss. 1. — P. 131–132.

[232] Shtern, A.I. Quasi-symmetry. I / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. — 1994. — Vol. 2, iss. 3. — P. 353–382.

[233] Shtern, A.I. Remarks on Pseudocharacters and the Real Continuous Bounded Cohomology of Connected Locally Compact Groups / A.I. Shtern // Sfb 288 Preprint no. 289. – Berlin : Humboldt University, 1997.

[234] Shtern, A.I. Triviality and continuity of pseudocharacters and pseudorepresentations / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. – 1997. — Vol. 5, iss. 1. — P. 135–138.

[235] Штерн, А.И. Жесткость и аппроксимация квазипредставлений аменабельных групп / А.И. Штерн // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, № 6. — С. 908–920. = Shtern, A.I. Rigidity and approximation of quasirepresentations of amenable groups / A.I. Shtern // Math. Notes. — 1999. — Vol. 65, no. 6. — P. 760–769.

[236] Shtern, A.I. Review of [51] / A.I. Shtern // Math. Rev. — 2001. — Art. 2001i:22008.

[237] Штерн, А.И. Структурные свойства и ограниченные вещественные непрерывные 2-когомологии локально компактных групп / А.И. Штерн // Функц. анализ и прил. — 2001. — Т. 35, № 4. — С. 67–80. = Shtern, A.I.

Structural properties and bounded real continuous 2-cohomology of locally compact groups / A.I. Shtern // Funct. Anal. Appl. — 2001. — Vol. 35, no. 4. — pp. 294–304.

[238] Shtern, A.I. Bounded continuous real 2-cocycles on simply connected simple Lie groups and their applications / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. — 2001. — Vol. 8, iss. 1. — P. 122–133.

[239] Shtern, A.I. Remarks on pseudocharacters and the real continuous bounded cohomology of connected locally compact groups / A.I. Shtern // Ann. Global Anal. Geom. — 2001. — Vol. 20, no. 3. — P. 199–221.

[240] Shtern, A.I. A criterion for the second real continuous bounded cohomology of a locally compact group to be finite-dimensional / A.I. Shtern // Acta Appl. Math. — 2001. — Vol. 68, no. 1–3. — P. 105–121.

[241] Shtern, A.I. Continuity of Banach representations in terms of point variations / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 9, iss. 2. — P. 250–252.

[242] Штерн, А.И. Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах / А.И. Штерн // Мат. сб. – 2002. — Т. 193, № 9. — С. 139–156. = Shtern, A.I. Criteria for weak and strong continuity of representations of topological groups in Banach spaces / A.I. Shtern // Sb. Math. — 2002. — Vol. 193, no. 9. — P. 1381–1396.

[243] Штерн, А.И. Критерии непрерывности конечномерных представлений групп / А.И. Штерн // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования. — М. : Наука, 2003. — С. 122–124.

[244] Shtern, A.I. Continuity criteria for finite-dimensional representations of compact connected groups / A.I. Shtern // Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang). — 2003. — Vol. 6, no. 2. — P. 141–156.

[245] Штерн, А.И. Критерии непрерывности конечномерных представлений связных локально компактных групп / А.И. Штерн // Мат. сб. – 2004. — Т. 195, вып. 9. — С. 145–159. = Shtern, A.I. Criteria for the continuity of finite-dimensional representations of connected locally compact groups / A.I. Shtern // Sb. Math. — 2004. — Vol. 195, no. 9. — P. 1377–1391.

[246] Shtern, A.I. Projective irreducible unitary representations of Hermitian symmetric simple Lie groups are generated by pure pseudorepresentations / A.I. Shtern // Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang). — 2004. — Vol. 9, no. 1. — P. 1–6.

[247] Shtern, A.I. Continuity conditions for finite-dimensional representations of some compact totally disconnected groups / A.I. Shtern // Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang). — 2004. — Vol. 8, no. 1. — P. 13–22.

[248] Shtern, A.I. Representations of topological groups in locally convex spaces: continuity properties and weak almost periodicity / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. — 2004. — Vol. 11, iss. 1. — P. 81–108.

[249] Штерн, А.И. Топологические группы с конечными групповыми алгебрами фон Неймана типа I / А.И. Штерн // Мат. сб. – 2005. — Т. 196, вып. 3. — С. 143–160. = Shtern, A.I. Topological groups with finite von Neumann algebras of type I / A.I. Shtern // Sb. Math. — 2005. — Vol. 196, iss. 3. — P. 447–463).

[250] Штерн, А.И. Проективные представления и чистые псевдопредставления эрмитово симметрических простых групп Ли / А.И. Штерн // Мат. заметки. — 2005. — Т. 78, № 1. — С. 140–146. = Shtern, A.I. Projective representations and pure pseudorepresentations of Hermitian symmetric simple Lie groups / A.I. Shtern // Math. Notes. — 2005. — Vol. 78, no. 1. — P. 128–133.

[251] Штерн, А.И. Сильная и слабая непрерывность представлений топологически псевдополных групп в локально выпуклых пространствах / А.И. Штерн // Мат. сб. — 2006. — Т. 197, № 3. — С. 155–167. = Shtern, A.I. Weak and strong continuity of representations of topologically pseudocomplete groups in locally convex spaces / A.I. Shtern // Sb. Math. — 2006. — Vol. 197, no. 3. — P. 453–473.

[252] Штерн, А.И. Автоматическая непрерывность псевдохарактеров на полупростых группах Ли / А.И. Штерн // Мат. заметки. — 2006. — Т. 80, № 3. — С. 456–464. = Shtern, A.I. Automatic continuity of pseudocharacters on semisimple Lie groups / A.I. Shtern // Math. Notes. — 2006. — Vol. 80, no. 3. — P. 435–441.

[253] Штерн, А.И. Проблема Каждана–Мильмана для полупростых компактных групп Ли / А.И. Штерн // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 1. — С. 123–190. Shtern, A.I. Kazhdan–Mil'man problem for semisimple compact Lie groups / A.I. Shtern // Russ. Math. Surv. — 2007. — Vol. 62, no. 1. — P. 123–190.

[254] Штерн, А.И. Конечномерные квазипредставления связных групп Ли и гипотеза Мищенко / А.И. Штерн // Фунд. прикл. математика. – 2007. — Т. 13, вып. 7. — С. 85–225. = Shtern, A.I. Finite-dimensional quasirepresentations of connected Lie groups and Mishchenko's conjecture / A.I. Shtern // J. Math. Sci. (N.Y.) — 2009. — Vol. 159, no. 5. — P. 653–751.

[255] Штерн, А.И. Вариант теоремы Ван дер Вардена и доказательство гипотезы Мищенко для гомоморфизмов локально компактных групп / А.И. Штерн // Изв. РАН. Сер. математическая. — 2008. — Т. 72, № 1. — С. 183–224. = Shtern, A.I. A version of the van der Waerden theorem and the proof of the Mishchenko conjecture for homomorphisms of locally compact groups / A.I. Shtern // Izv. Math. — 2008. — Vol. 72, no. 1. — P. 169–205.

[256] Штерн, А.И. Непрерывные вложения топологических групп в локально компактные группы / А.И. Штерн // Современные проблемы математики и механики. Том II, Вып. 1. — М. : Мех.-мат. ф-т МГУ, 2009. — С. 89–98.

[257] Shtern, A.I. Applications of automatic continuity results to analogs of the Freudenthal–Weil and Hochschild theorems / A.I. Shtern // Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang). — 2010. — Vol. 20, iss.2. — P. 203–212.

[258] Shtern, A.I. Von Neumann kernels of connected Lie groups, revisited and refined / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. — 2010. — Vol. 17, iss. 2. — P. 262–266.

[259] Штерн, А.И. Двойственность компактности и дискретности за пределами двойственности Понтрягина / А.И. Штерн // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. — 2010. — Т. 271. — С. 224–240. = Shtern, A.I. Duality between compactness and discreteness beyond Pontryagin duality / A.I. Shtern // Proc. of the Steklov Institute of Math. — 2010 — Vol. 271. — P. 212–227.

[260] Shtern, A.I. A simplified model for finite-dimensional quasirepresentations of amenable groups / A.I. Shtern // Proc. Jangjeon Math. Soc. – 2012. — Vol. 15, iss. 4. — P. 355–360.

[261] Shtern, A.I. Unbounded tame quasirepresentations with commutative discrepancies for amenable groups / A.I. Shtern // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2013. — Vol. 16, iss. 3. — Art. 1350025.

[262] Shtern, A.I. Corrected automatic continuity conditions for finite-dimensional representations of connected Lie groups / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. — 2014. — Vol. 21, iss. 4. — P. 133–134.

[263] Shtern, A.I. On a class of quasirepresentations / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. — 2014. — Vol. 21, iss. 4. — P. 549–552.

[264] Shtern, A.I. Finite-dimensional quasirepresentations are almost bounded / A.I. Shtern // Proc. Jangjeon Math. Soc. – 2015. — Vol. 18, iss. 1. — P. 1–5.

[265] Shtern, A.I. Extension of pseudocharacters from normal subgroups / A.I. Shtern // Proc. Jangjeon Math. Soc. – 2015. — Vol. 18, iss. 4. — P. 427–433.

[266] Shtern, A.I. Freudenthal-Weil theorem for pro-Lie groups / A.I. Shtern / Russ. J. Math. Phys. — 2016. — Vol. 23, iss. 1. P. 115–117.

[267] Штерн, А.И. Локально ограниченные финально преднепрерывные конечномерные квазипредставления связных локально компактных групп / А.И. Штерн // Мат. сб. — 2017. — Т. 208, № 10. — С. 149–170. = Shtern, A.I. Locally bounded finally precontinuous finite-dimensional quasirepresentations of connected locally compact groups / A.I. Shtern // Sb. Math. — 2017. — Vol. 208, iss. 10. — P. 1557–1576.

[268] Shtern, A.I. Specific properties of one-dimensional pseudorepresentations of groups / A.I. Shtern // J. Math. Sci. (N.Y.) – 2018.– Vol. 233, iss. 5. — P. 770–776.

[269] Shtern, A.I. Continuity criterion for the restriction to the commutator subgroup of a locally bounded finite-dimensional representation of a connected Lie group / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. – 2019. — Vol. 26, iss. 2. — P. 206–207.

[270] Shtern, A.I. Sufficiently close one-dimensional pseudorepresentations are equal / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. – 2021. — Vol. 28, iss. 2. — P. 263–264.

[271] Shtern, A.I. A revised formula for a locally bounded pseudocharacter on an almost connected locally compact group / A.I. Shtern // Adv. Studies Contemp. Math. (Kyungshang) – 2022. — Vol. 32, iss. 4. — P. 539 — 544.

[272] Штерн, А.И. Критерии непрерывности локально ограниченных гомоморфизмов некоторых групп Ли / А.И. Штерн // Фундам. прикл. математика. — 2023. — Т. 24, № 4. — С. 213–216. = Shtern, A.I. Continuity criteria for locally bounded homomorphisms of certain Lie groups / A.I. Shtern // J. Math. Sci. — 2024. — Vol. 284, no. 4. — P. 554–556.

[273] Штерн, А.И. Автоматическая непрерывность локально ограниченного гомоморфизма групп Ли на коммутанте / А.И. Штерн // Мат. сб. — 2024. — Т. 215, № 6. — С. 151–158. = Shtern, A.I. Automatic continuity of a locally bounded homomorphism of Lie groups on the commutator subgroup / A.I. Shtern // Sb. Math. — 2024. — Vol. 215, no. 6. — P. 861–868.

[274] Штерн, А.И. Критерий сильной непрерывности представлений топологических групп в рефлексивных пространствах Фреше / А.И. Штерн // Мат. сб. — 2025. — Т. 216, № 1. — С. 144–152. = Shtern, A.I. A criterion for the strong continuity of representations of topological groups in reflexive Fréchet spaces / A.I. Shtern // Sb. Math. — 2025. — Vol. 216, no. 1. — P. 861–868.

[275] Shtern, A.I. Continuously irreducibly representable groups with irreducible representations of bounded degree / A.I. Shtern // Russ. J. Math. Phys. — 2025. — Vol. 32, iss. 3. — P. 583–584.

[276] Штерн, А.И. Критерий слабой непрерывности представлений топологических групп в дуальных пространствах Фреше / А.И. Штерн // Изв. РАН. Сер. математическая. — 2025. — Т. 89, № 3. — С. 230–240. = Shtern, A.I. A criterion for the weak continuity of representations of topological groups in dual Fréchet spaces / A.I. Shtern // Izv. Math. — 2025. — Vol. 89, no. 3. — P. 644–653.