

Отзыв официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Гармановой Татьяны Алексеевны
на тему: «Константы вложения в пространствах Соболева»
по специальности 1.1.1 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Работа Т. А. Гармановой «Константы вложения в пространствах Соболева» посвящена важной и активно развивающейся области анализа — теории вложений в пространствах Соболева, в частности, получению точных оценок промежуточных производных через норму старшей производной.

Целью диссертационного исследования является нахождение точных значений констант вложения в пространствах Соболева с краевыми условиями Дирихле.

Отметим актуальность избранной темы. Еще до появления понятия констант вложения вопросы, связанные с оценками производных, возникали в работах многих авторов. Первые результаты с краевыми условиями Дирихле были получены В. А. Стекловым в 1901 году и Г. Х. Харди в 1934 году, а в 1940 году Э. Шмидту удалось получить полное решение задачи в случае $n = 1$, $k = 0$. С тех пор эта тематика получила широкое распространение, но дальнейшие существенные продвижения по вложениям в пространства с равномерной нормой появились только в XXI веке. Изучение вложений в пространство $\dot{W}_{\infty}^k[0, 1]$ при $n > 1$ началось с работы Г. А. Калябина (2010) и получило развитие в работах А. И. Назарова (2014, 2020). Различные частные случаи параметров пространств рассматривались также рядом зарубежных авторов, в частности, К. Ватанабе, Ю. Каметака, А. Нагаи, Х. Ямагиши, К. Такемура (2008, 2009), а также С. Цяо, Ж. Чень, Т. Кумагаи (2023). Вычисление констант вложения тесно связано с теорией спектральных задач и теорией приближений. Точные значения констант вложения часто играют важную роль в приложениях, в том числе в некоторых задачах вычислительной математики.

Таким образом, тема диссертации актуальна и находится в центре внимания специалистов, работающих в области теории функциональных пространств и их приложений.

Структуре работы следующая. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Во введении кратко изложена история вопроса, обозначены цели исследования и сформулированы основные достижения автора.

В первой главе изучаются константы вложения и точные оценки производных при вложении пространств $\mathring{W}_2^n[0, 1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0, 1]$, где $0 \leq k < n$. Центральным объектом изучения становятся величины $A_{n,k,p} = A_{n,k}(a)$ при $p = 2$, являющиеся наименьшими возможными в неравенствах вида

$$|f^{(k)}(a)| \leq A_{n,k}(a) \|f^{(n)}\|_{L_2[0,1]}.$$

Структура точек локальных экстремумов функции $A_{n,k}$ имеет принципиальное значение, так как глобальный максимум этой функции дает точную величину константы вложения

$$\Lambda_{n,k,2,\infty} = \max_{a \in [0,1]} A_{n,k}(a).$$

До появления результатов, представленных в диссертации, подобные оценки были известны лишь для некоторых частных значений параметра k .

В рамках первой главы получены значимые результаты, среди которых отметим следующие.

1. На основе рекуррентных соотношений для $A_{n,k}$ и модифицированной теоремы Сони́на–По́йа описано поведение $A_{n,k}(a)$ в точках локальных максимумов: на отрезке $[0, 1]$ до $1/2$ значения функции возрастают, а после — убывают.
2. Используя свойства локальных максимумов функций $A_{n,k}$, установлено, что при четных k глобальный максимум достигается в середине отрезка, тогда как при нечетных k — в ближайшей к $1/2$ точке локального максимума.

3. Получено явное представление функций $A_{n,k}$ через обобщенные гипергеометрической функции типа ${}_3F_2$.
4. С помощью представления $A_{n,k}$ через гипергеометрические функции найдены явные формулы для констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ в случае четных k . Также при нечетных k получены двусторонние оценки для $\Lambda_{n,k,2,\infty}$.

Эти результаты представляют собой важный вклад в развитие теории вложений в пространствах Соболева.

Во второй главе изучаются вложения пространств $\mathring{W}_p^n[0, 1]$ в пространства $\mathring{W}_\infty^k[0, 1]$ для произвольных значений $p \in [1, +\infty]$. Существенным достижением является установление связи между функциями $A_{n,k,p}(a)$ и задачей о наименьшем уклонении сплайна специального вида в $\mathcal{P}_{n-1}$ — пространстве многочленов степени не выше $n - 1$. А именно, доказана следующая формула

$$A_{n,k,p}(a) = \inf_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\| \frac{(-1)^{n-k-1}(x-a)^{n-k-1}\chi_{[0,a]}}{(n-k-1)!} - u \right\|_{L_{p'}[0,1]},$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Предложенный подход позволяет применять развитый аппарат теории приближений для вычисления или оценки констант вложения. Так автору удалось вычислить значения $\Lambda_{n,n-1,1,\infty}$ и получить оценки для $\Lambda_{n,n-1,\infty,\infty}$, что представляет самостоятельный интерес.

В третьей главе вычислены скалярные произведения для первообразных многочленов Лежандра фиксированного порядка в пространстве $L_2[0, 1]$. Эти соотношения применяются к некоторым спектральным задачам для дифференциальных операторов, в частности, показано, что спектральная задача для линейного пучка

$$(-1)^n y^{(2n)} = \lambda (-1)^k y^{(2k)}$$

с областью определения $\mathring{W}_2^n[0, 1]$ равносильна спектральной задаче в l_2 для оператора, заданного $(2n - 2k + 1)$ -диагональной матрицей Якоби. Указана связь между точной константой вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$ и первым собственным значением

рассмотренной задачи, а также показано, что с помощью конечных матриц Якоби можно приближенно вычислять константы вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$.

Полученные результаты являются новыми, содержательными, значимыми для теории пространств Соболева, теории гипергеометрических функций и теории приближений. Все результаты диссертации приведены с полными математическими доказательствами. Автор свободно владеет современными методами функционального анализа, теории обобщенных гипергеометрических функций и спектральной теории операторов.

Результаты диссертации опубликованы в 7 научных статьях автора в журналах «Доклады РАН», «Труды Московского математического общества», «Математические заметки», «Функциональный анализ и его приложения», «Вестник Московского Университета», индексируемых в международных базах данных Web of Science, Scopus и RSCI, что подтверждает их достоверность и соответствие научным стандартам. Доклады по теме диссертации неоднократно представлялись на международных конференциях и научно-исследовательских семинарах.

В тексте диссертации имеется незначительное количество опечаток. В некоторых фрагментах текста можно было добавить номера формул, а затем использовать ссылки на них. Данные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертация оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Гарманова Татьяна Алексеевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,

профессор РАН, член-корреспондент РАН,

главный научный сотрудник

Федерального государственного учреждения

«Федеральный исследовательский центр

«Информатика и управление» Российской академии наук»

Безродных Сергей Игоревич

30.04.2025

Контактные данные:

тел. +7 (916) 826-60-30, email: sbezrodnykh@mail.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:

01.01.03 — Математическая физика.

Адрес места работы: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН

Тел. +7 (499) 135-62-60, email: frecsc@frccsc.ru

Подпись сотрудника Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН С.И. Безродных удостоверяю: