

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Шашков Олег Владимирович

Простые правоальтернативные супералгебры

**Специальность 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория
чисел и дискретная математика**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2026

Диссертация подготовлена на кафедре математики и анализа данных факультета информационных технологий и анализа больших данных
Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

Научный консультант	—	Пчелинцев Сергей Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты	—	Белов Алексей Яковлевич, доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений, главный научный сотрудник. Пожидаев Александр Петрович, доктор физико-математических наук, доцент, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория алгебры, ведущий научный сотрудник Шестаков Иван Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, Университет Сан-Паулу, Институт математики и статистики, профессор сениор

Защита диссертации состоится «25» сентября 2026 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/4007>

Автореферат разослан «__» июля 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук

В.А. Кибкало

Общая характеристика работы

Работа посвящена исследованиям в области теории колец. В диссертации автор разработал новый метод построения простых конечномерных правоальтернативных супералгебр по их подсупералгебрам. Метод позволил провести классификацию простых унитарных и сингулярных супералгебр в широких классах супералгебр.

Актуальность темы

Проблема классификации простых алгебр является одной из центральных в структурной теории колец. В 1954 году А. А. Алберт¹ доказал, что всякая простая конечномерная правоальтернативная алгебра альтернативна. Замечательные результаты о бесконечномерных простых правоальтернативных алгебрах принадлежат И. М. Михееву² и В. Г. Скосырскому³: приведен пример простой правоальтернативной алгебры с тождеством $x^3 = 0$; доказано, что невырожденная правоальтернативная алгебра альтернативна, в частности, простая унитарная правоальтернативная алгебра альтернативна.

В последние полвека значительный интерес алгебраистов был связан с изучением супералгебр. Интерес к изучению супералгебр связан как с построением содержательной структурной теории, так и с применением супералгебр к решению трудных теоретико-кольцевых проблем. С одной стороны, активно изучаются простые супералгебры и их представления. С другой, супералгебры использовались при решении известных проблем.

Первое применение супералгебр в теории колец было указано в работах А. Р. Кемера^{4, 5}, посвященных положительному решению проблемы Шпехта.

¹ Albert A. A. The structure of right alternative algebras // Ann. Math. — 1954. — Vol. 59, no. 3. — P. 408–417.

² Михеев И. М. О простых правоальтернативных кольцах // Алгебра и Логика. — 1977. — Т. 16, № 6. — С. 682–710.

³ Скосырский В. Г. Правоальтернативные алгебры // Алгебра и Логика. — 1984. — Т. 23, № 2. — С. 185–192.

⁴ Кемер А. Р. Многообразия и Z_2 -градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1984. — Т. 48, № 5. — С. 1042–1059.

⁵ Кемер А. Р. Конечная базисуемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и Логика. — 1987. — Т. 26, № 5. — С. 597–641.

Важные применения супералгебр в теории альтернативных и йордановых алгебр указаны в работах Е. И. Зельманова и И. П. Шестакова^{6, 7} — решение проблемы Ширшова о разрешимости йордановой ниль-алгебры ограниченной степени и проблемы Жевлакова о нильпотентности радикала свободной альтернативной алгебры.

В ряде статей^{8, 9, 10} указано использование супералгебр для построения контрпримеров.

В теории йордановых и $(-1, 1)$ -алгебр важную роль играют супералгебры векторного типа $J(\Gamma, \delta)$ и $B(\Gamma, D, \gamma)$, введенные К. Маккриммоном¹¹ и И. П. Шестаковым¹². Была указана связь супералгебр векторного типа с алгебрами Грассмана и первичными монстрами¹³ и применение супералгебр к изучению относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством Ли-нильпотентности степени 5 и 6¹⁴.

В 1964 г. Ч. Т. К. Уолл¹⁵ описал строение простых ассоциативных супералгебр, в частности, доказал, что всякая простая конечномерная ассоциативная унитарная супералгебра A над алгебраически замкнутым полем изоморфна либо супералгебре $M_n[\sqrt{1}]$, либо $M_{m|n}$.

Простые супералгебры Ли над алгебраически замкнутым полем

⁶ Зельманов Е. И. О разрешимости йордановых ниль-алгебр // Исследования по теории колец и алгебр, Тр. Ин-та матем. СО АН СССР. — 1989. — Т. 16. — С. 37–54.

⁷ Зельманов Е. И., Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1990. — Т. 54, № 4. — С. 676–693.

⁸ Medvedev Yu. A., Zelmanov E. I. Some counterexamples in the theory of Jordan algebras // Nonassociative algebraic models (Zaragoza, 1989). — 1992. — P. 1–16.

⁹ Скосырский В. Г. Первичные йордановы алгебры и конструкции Кантора // 23 Алгебра и Логика. — 1994. — Т. 33, № 3. — С. 301–316.

¹⁰ Шестаков И. П. Супералгебры и контрпримеры // Сиб. матем. журн. — 1991. — Т. 32, № 6. — С. 187–196.

¹¹ McCrimmon K. Speciality and non-speciality of two Jordan superalgebras // J. Algebra. — 1992. — Vol. 149, no. 2. — P. 326–351.

¹² Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и Логика. — 1997. — Т. 36, № 6. — С. 675–716.

¹³ Pchelintsev S., Shestakov I. Prime $(-1, 1)$ and Jordan monsters and superalgebras of vector type // J. Algebra. — 2015. — Vol. 423. — P. 54–86.

¹⁴ Гришин А. В., Пчелинцев С. В. Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6 // Матем. сб. — 2016. — Т. 207, № 12. — С. 54–72.

¹⁵ Wall C. T. C. Graded Brauer groups // J. Reine Angew. Math. — 1964. — Vol. 213. — P. 187–199.

характеристики 0 были классифицированы В. Г. Кацем^{16, 17}. Детальному изложению теоремы Каца посвящена книга М. Шейнерта¹⁸.

Простые йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 были классифицированы В. Г. Кацем¹⁶ и И. Л. Кантором¹⁹.

Первичные альтернативные супералгебры характеристики отличной от 2 и 3 описаны Е. И. Зельмановым и И. П. Шестаковым⁷. Простые альтернативные супералгебры произвольной характеристики описаны И. П. Шестаковым²⁰. Он же получил описание простых $(-1, 1)$ -супералгебр²¹.

М. Расин и Е. Зельманов²² классифицировали конечномерные простые йордановы супералгебры характеристики $\neq 2$ с полупростой четной частью. К. Мартинес и Е. Зельманов²³ дали описание конечномерных простых унитарных йордановых супералгебр, четная часть которых имеет ненулевой нильпотентный идеал. Простые йордановы супералгебры произвольной размерности с ассоциативной ниль-полупростой четной частью изучал В. Н. Желябин^{24, 25}. В. Н. Желябин и И. П. Шестаков²⁶ в одном важном частном случае получили описание йордановых супералгебр абелева типа без каких-либо ограничений на размерность. Ими было доказано, что при некоторых ограничениях специальная йорданова супералгебра является

¹⁶ Kac V. Classification of simple $\mathbb{Z}$ -graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Commun. Algebra. — 1977. — Vol. 5, no. 13. — P. 1375–1400.

¹⁷ Kac V. Lie superalgebras // Adv. Math. — 1977. — Vol. 26, no. 1. — P. 8–96.

¹⁸ Scheunert M. The Theory of Lie Superalgebras: An Introduction. Lecture Notes in Mathematics. — Springer Berlin Heidelberg, 2006. — ISBN: 9783540352860.

¹⁹ Кантор И. Л. Йордановы и лиевы супералгебры, определенные алгеброй Пуассона // Вторая сибирская школа «Алгебра и анализ». — Томск : Изд-во Томск. ун-та, 1989. — С. 55–80.

²⁰ Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и Логика. — 1997. — Т. 36, № 6. — С. 675–716.

²¹ Шестаков И. П. Простые $(-1, 1)$ -супералгебры // Алгебра и Логика. — 1998. — Т. 37, № 6. — С. 721–739.

²² Racine M. L., Zelmanov E. I. Simple Jordan superalgebras. // Non-associative 21 algebra and its applications. 3rd international conference, Oviedo, Spain, July 12th–17th, 1993. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. — P. 344–349.

²³ Martinez C., Zelmanov E. Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic // J. Algebra. — 2001. — Vol. 236, no. 2. — P. 575–629.

²⁴ Желябин В. Н. Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью // Алгебра и Логика. — 2002. — Т. 41, № 3. — С. 276–310.

²⁵ Желябин В. Н. Простые йордановы супералгебры с ассоциативной ниль полупростой четной частью // Сиб. матем. журн. — 2016. — Т. 57, № 6. — С. 1262–1279.

²⁶ Желябин В. Н., Шестаков И. П. Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т. 45, № 5. — С. 1046–1072.

центральным порядком в йордановой супералгебре векторного типа $J(\Gamma, \delta)$, где δ — ненулевое дифференцирование унитарной ассоциативно-коммутативной δ -простой алгебры Γ . А.П. Пожидаев и И.П. Шестаков^{27, 28} описали простые конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры над полем характеристики нуль.

В 1993 г. Н.А. Писаренко²⁹ доказал, что для конечномерных альтернативных супералгебр при определенных ограничениях на типы простых компонент полупростой части справедлив аналог теоремы Веддербёрна об отщеплении радикала. Там же доказано, что всякая полупростая альтернативная супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2 и 3, разлагается в прямую сумму суперидеалов (градуированных идеалов), являющихся простыми супералгебрами.

Задача описания простых конечномерных правоальтернативных супералгебр была сформулирована И.П. Шестаковым в Днестровской тетради³⁰. Д.П. да Силва, Л.С.И. Мураками и И.П. Шестаковым³¹ были приведены первые примеры простых правоальтернативных супералгебр размерности 2, 5 и 8, четная часть которых является одной из алгебр: а) основное поле, б) 2-мерная алгебра с нулевым умножением, в) алгебра матриц 2-го порядка.

При изучении супералгебр естественным образом возникают бимодули. Понятия бимодуля (бипредставления) для произвольного класса алгебр были введены С. Эйленбергом³². Наряду с ассоциативными алгебрами и алгебрами

²⁷ Пожидаев А. П., Шестаков И. П. Некоммутативные йордановы супералгебры степени $n > 2$ // Алгебра и Логика. — 2010. — Т. 49, № 1. — С. 26–59.

²⁸ Пожидаев А. П., Шестаков И. П. Простые конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры характеристики 0 // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 2. — С. 389–406.

²⁹ Писаренко Н. А. Веддерберново разложение в конечномерных альтернативных супералгебрах // Алгебра и Логика. — 1993. — Т. 32, № 4. — С. 428–440.

³⁰ Филипов В. Т., Харченко В. К., Шестаков И. П. Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. — 4-е изд. — Новосибирск : Ин-т математики СО РАН, 1993.

³¹ da Silva J. P., Murakami L. S. I., Shestakov I. P. On right alternative superalgebras // Commun. Algebra. — 2016. — Vol. 44, no. 1. — P. 240–252.

³² Eilenberg S. Extensions of general algebras // Ann. Soc. Polonaise Math. — 1948. — Vol. 21. — P. 125–134.

Ли теория бипредставлений была развита для других классов алгебр; так для альтернативных алгебр результаты получил Р. Д. Шафер³³, для йордановых алгебр Н. Свартхольм³⁴ и Н. Джекобсон³⁵, для алгебр Мальцева — Р. Карлссон³⁶ и Е. Н. Кузьмин³⁷. Теория правых представлений правоальтернативных алгебр была разработана А. М. Слинько и И. П. Шестаковым³⁸. Неприводимые правоальтернативные бимодули над алгеброй $M_2(\Phi)$ матриц 2-го порядка изучали Л. И. Мураками и И. П. Шестаков³⁹. Ими было доказано, что над алгеброй $M_2(\Phi)$ существует бесконечно много неизоморфных неприводимых правоальтернативных бимодулей и доказано, что не всякий бимодуль над алгеброй $M_2(\Phi)$ вполне приводим.

Изучение простых объектов тесно связано с их автоморфизмами и дифференцированиями, поэтому задача описания автоморфизмов, как и дифференцирований, простых алгебр и супералгебр представляет несомненный интерес^{40, 41}. В частности, простые исключительные алгебры Ли типа G_4 и типа F_2 возникали как алгебры дифференцирований алгебр Кэли—Диксона C (Картан—Джекобсон) и исключительных алгебр Алберта $H_3(C)$ (Шевалье—Шафер). Общие результаты в этом направлении принадлежат Дж. Титсу⁴².

³³ Schafer R. D. Representations of alternative algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1952. — Vol. 72, no. 1. — P. 1–17.

³⁴ Svartholm N. On the algebras of relativistic quantum mechanics // Proc. Royal Phys. Soc. of Lund. — 1942. — Vol. 12. — P. 94–108.

³⁵ Jacobson N. Structure of alternative and Jordan bimodules // Osaka J. Math. — 1954. — Vol. 6. — P. 1–71.

³⁶ Carlsson R. Malcev-moduln // J. Reine Angew. Math. — 1976. — Vol. 281. — P. 199–210.

³⁷ Кузьмин Е. Н. Алгебры Мальцева и их представления // Алгебра и Логика. — 1968. — Т. 7, № 4. — С. 48–69.

³⁸ Слинько А. М., Шестаков И. П. Правые представления алгебр // Алгебра и Логика. — 1974. — Т. 13, № 5. — С. 544–588.

³⁹ Murakami L. S. I., Shestakov I. P. Irreducible unital right alternative bimodules // J. Algebra. — 2001. — Vol. 246, no. 2. — P. 897–914.

⁴⁰ Schafer R. D. An introduction to nonassociative algebras. Pure and applied mathematics. — Academic Press, 1966.

⁴¹ Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

⁴² Tits J. Algebres alternatives, algebres de Jordan et algebres de Lie exceptionnelles: I. Construction // Indagationes Mathematicae (Proceedings) / Elsevier. — Vol. 69. — 1966. — P. 223–237.

Цель работы

Основной целью работы является изучение простых конечномерных правоальтернативных супералгебр. Доказательство классификационных теорем, изучение автоморфизмов и дифференцирований простых супералгебр.

Научная новизна

Новизна теоретических результатов, полученных в диссертации, заключается в следующем:

1. Указан новый класс супералгебр, названный супералгебрами абелева типа. В результате изучения конечномерных супералгебр этого класса было установлено, что в него входят не только известные ассоциативные и альтернативные простые супералгебры, но также и новые серии простых супералгебр, ранее не описанные в литературе. При этом полученные серии супералгебр вместе с ранее известными супералгебрами полностью исчерпывают объекты этого класса. Таким образом, была доказана классификационная теорема о супералгебрах абелевого типа — о простых конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебрах, нечетная часть которых является ассоциативным бимодулем над ассоциативно-коммутативной четной частью;

2. В рамках исследования простых супералгебр абелевого типа изучены бесконечномерные супералгебры, четная часть которых является полем. Построены новые серии супералгебр этого типа и доказано, что других таких супералгебр нет. Таким образом, была получена классификация простых супералгебр абелева типа бесконечной размерности, четная часть которых является полем (расширением основного поля);

3. При исследовании строения простых супералгебр с ассоциативно-коммутативной четной частью доказано, что все они исчерпываются супералгебрами абелевого типа. Тем самым получена полная классификация всех простых конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебр с ассоциативно-коммутативной четной частью;

4. При изучении конечномерных правоальтернативных супералгебр с полупростой сильно альтернативной четной частью впервые в истории исследования супералгебр такого класса удалось полностью описать строение произвольной (не простой) супералгебры. Был предложен новый процесс ветвления супералгебр и доказано, что всякая исследуемая супералгебра является прямой суммой простых абелевых супералгебр и некоторых их ветвлений;

5. Исследованы простые конечномерные супералгебры с простой и полупростой четной частью: определен новый класс супералгебр, названных асимметричными дублями; получены критерии простоты и правоальтернативности асимметричных дублей. Доказана основная классификационная теорема о простых конечномерных унитарных правоальтернативных супералгебрах с полупростой четной частью: они исчерпываются супералгебрами абелевого типа и асимметричными дублями;

6. Проведено полное изучение строения групп автоморфизмов и супералгебр дифференцирований построенных простых супералгебр;

7. Получены результаты о строении ниль-унитарных и сингулярных правоальтернативных супералгебр малых размерностей.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для дальнейших исследований в теории супералгебр, а также при построении контрпримеров. Кроме того, они могут быть включены в программы спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в различных областях алгебры.

Методы исследования

В работе применяются два основных метода исследования. Во-первых, изучается строение пирсовых компонент нечетной части и радикала четной части супералгебры по полной системе ортогональных идемпотентов. Во-вторых, исследуется строение мультипликативной обертывающей алгебры для присоединенной йордановой алгебры. Кроме того, применяются методы

структурной теории алгебр, линейной алгебры и теории графов.

Положения, выносимые на защиту

1. Простые унитарные правоальтернативные конечномерные супералгебры абелевого типа над полем характеристики 0 имеют полупростую четную часть. Все простые унитарные правоальтернативные конечномерные супералгебры абелевого типа с полупростой четной частью исчерпываются сериями композиционных и циклических дублей.

2. Простые унитарные правоальтернативные конечномерные супералгебры с ассоциативно-коммутативной четной частью имеют абелевый тип.

3. Унитарные правоальтернативные конечномерные супералгебры с полупростой сильно альтернативной четной частью распадаются в сумму простых супералгебр абелевого типа, их ветвлений и слабого аннулятора супералгебры.

4. Простые унитарные правоальтернативные, не альтернативные конечномерные супералгебры, четная часть которых — матрицы порядка 2, являются асимметричными дублями. Для асимметричных дублей имеется классификация изоморфизмов, автоморфизмов и дифференцирований.

5. Простые унитарные правоальтернативные конечномерные супералгебры с полупростой четной частью являются супералгебрами абелевого типа и асимметричными дублями.

6. Простые сингулярные супералгебры, размерности ≤ 6 исчерпываются построенным классом пятимерных супералгебр.

Степень достоверности

Все основные результаты диссертации являются оригинальными, обоснованными с помощью строгих математических доказательств и опубликованы как в международных, так и в российских рецензируемых журналах. Результаты других авторов, использованные в диссертации, снабжены соответствующими ссылками.

Апробация и доклады по теме диссертации

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях.

1. XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, Россия, 2015 г.
2. XIV Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная 70-ти летию со дня рождения С. М. Воронина и Г. И. Архипова, Саратов, Россия, 2016 г.
3. Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, посвященная юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых, Казань, Россия, 2016 г.
4. Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, Россия, 21–25 ноября 2016 г.
5. Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, Россия, 20–23 ноября 2017 г.
6. Семинар «Lie and Jordan algebras and their Representations» в институте Математики и Статистики университета Сан-Пауло (Бразилия) 2018 г.
7. Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, Россия, 19–22 ноября 2018 г.
8. Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, Россия, 19–23 августа 2019 г.
9. Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры МГУ, 7 октября 2019 г.

10. Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, Россия, 20–24 сентября 2021 г.

Кроме того, результаты неоднократно докладывались на семинаре «Избранные вопросы алгебры» МГУ.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертационной работы изложены в 16 работах, которые опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты из списка в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 9 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 260 страниц, из них 248 страниц текста, включая 2 рисунка. Библиография включает 79 наименований на 6 страницах.

Основное содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава работы носит предварительный характер. В ней приводятся основные определения, доказываются несколько предварительных лемм, анализируется строение правых правоальтернативных модулей и йордановых бимодулей над простыми алгебрами, перечисляются известные примеры простых правоальтернативных супералгебр.

В главе 2 классифицированы центральные простые супералгебры абелева типа над полем характеристики нуль. Глава состоит из шести параграфов.

В § 2.1 приводятся критерии правой альтернативности, ассоциативности,

простоты и центральности супералгебр вида $B(A, \tau, \chi)$. Кроме того, в этом параграфе вводятся основные центральные простые правоальтернативные супералгебры абелева типа:

- а) ω -дубль $B(A, \tau, R_\omega)$,
- б) композиционные дубли $B_{2|2}(\nu)$ и $B_{2|2}(\Gamma, *, \lambda, \mu)$,
- в) циклические дубли $B(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i)$ и $B_{n|n}$.

В § 2.2 приводятся основные свойства пирсовых разложений супералгебры относительно полной ортогональной системы идемпотентов четной части. В частности, доказано, что нечетная часть является «циклической» относительно полной ортогональной системы идемпотентов четной части.

§§ 2.3–2.5 посвящены доказательству классификационных теорем. Сначала доказывается

Теорема 2.1. *Пусть Φ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Если супералгебра $B = A \oplus M$ проста, то алгебра A полупроста.*

Попутно доказана

Теорема 2.2. *Супералгебра $B = A \oplus M$ над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики 0 изоморфна одной из супералгебр: $M_{1|1}(\Phi)$, $B_{2|2}(\nu)$, $B_{n|n}$ ($n \geq 1$).*

В § 2.4 доказано, что если четная часть супералгебры B является полем, то B является либо ω -дублем, либо композиционным дублем.

В § 2.5 завершается доказательство основной теоремы

Теорема 2.3. *Конечномерная центральная простая правоальтернативная супералгебра $B = A \oplus M$ абелева типа над полем Φ характеристики 0 изоморфна одной из следующих супералгебр:*

$$\Phi[\sqrt{1}], M_{1|1}(\Phi), B(\Gamma, *, \omega), B_{2|2}(\nu), B_{2|2}(\Gamma, *, \lambda, \mu), B\left(\Gamma^n, \sum_i \tau_i, \sum_i \omega_i\right) \quad (n \geq 2),$$

где Γ — подходящее поле конечной степени над Φ .

В § 2.6 изучаются центральные простые унитарные правоальтернативные

супералгебры $B = \Gamma \oplus M$ абелева типа произвольной размерности, у которых чётная часть Γ является полем. Доказано, что всякая такая супералгебра $B = \Gamma \oplus M$, за исключением супералгебры $B_{1|2}$, является дублем, т.е. нечетная часть представима в виде $M = \Gamma x$ для подходящего x .

Если порождающий элемент x коммутирует с чётной частью Γ , то B изоморфна скрученной супералгебре векторного типа $B(\Gamma, D, \gamma)$; если же x коммутирует с нечётной частью M , то B изоморфна ω -дублю $B(\Gamma, *, R_\omega)$.

Доказано также, что если основное поле алгебраически замкнуто, то B изоморфна одной из супералгебр $B_{1|2}$, $B(\Gamma, D, \gamma)$ или $B(\Gamma, *, R_\omega)$.

В главе 3 изучаются простые конечномерные правоальтернативные унитарные супералгебры над полем характеристики нуль. И доказывається

Теорема 3.1. *Пусть $B = A \oplus M$ — простая конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра над полем Φ характеристики 0. Если A — ассоциативно-коммутативная алгебра, то B является супералгеброй абелева типа.*

Глава состоит из шести параграфов. Первые два параграфа носят предварительный характер; в них доказано несколько предварительных лемм о структуре супералгебры, в частности, доказаны простейшие свойства йордановых пирсовых компонент в правоальтернативной супералгебре. В § 3.3 обсуждается вопрос о представлении идемпотента в виде произведения нечетных элементов. В § 3.4 вводится понятие ростка йордановой компоненты, и доказываются две леммы о строении компонент, имеющих один или два ростка соответственно (всякая компонента имеет 1 или 2 ростка). В § 3.4 описана структура 1-ростковой компоненты. § 3.5 целиком посвящен описанию структуры 2-ростковой компоненты. В последнем § 3.6 завершается доказательство теоремы.

Глава 4 посвящена изучению конечномерных сильно альтернативных унитарных правоальтернативных супералгебр (*сильно альтернативной* называется супералгебра, являющаяся альтернативным бимодулем над четной частью). Кроме того, всюду в ней предполагается, что четная часть

супералгебры полупроста, значит, по теореме Алберта альтернативна⁴³.

В главе вводится понятие слабого аннулятора супералгебры (см. п. 4.1.1) и доказывается, что он является суперидеалом, а сама супералгебра является прямой суммой слабого аннулятора и супералгебры с нулевым слабым аннулятором (теорема 4.5). Кроме того, в теореме 4.6 описана структура супералгебр с нулевым слабым аннулятором. Также описано строение супералгебр, в которых четная часть либо проста, либо является прямой суммой двух простых алгебр (теоремы 4.1–4.5). Оказалось, что таких супералгебр «на удивление мало»; в теореме 4.1 доказано, что всякая ассоциативная супералгебра с простой четной частью либо сама проста, либо *тривиально расщепляема*, т.е. произведение любых нечетных элементов равно 0.

Отметим, что результаты главы 4 представляют собой обобщение результатов главы 2, в частности, доказано следствие 4: всякая простая правоальтернативная супералгебра, являющаяся альтернативным бимодулем над полупростой альтернативной четной частью либо альтернативна, либо имеет абелев тип.

Глава 5 состоит из 3 параграфов. В § 5.1 положено начало описания *супералгебр емкости 1*, то есть таких супералгебр, четная часть которых содержит одно простое слагаемое в своем веддерберновском разложении. В частности, доказано, что если простая компонента четной части такой супералгебры является алгеброй Кэли—Диксона, то квадрат нечетной части содержится в радикале четной, следовательно супералгебра не может быть простой. Если же это простое слагаемое является алгеброй матриц порядка $n \geq 2$, то супералгебра является суммой простой супералгебры $S_{4|2}$ или $M_n[\sqrt{1}]$ и некоторого своего суперидеала. В § 5.2 доказано, что этот идеал нильпотентен:

Теорема 5.2. Пусть $B = A \oplus M$ — правоальтернативная супералгебра с

⁴³ Albert A. A. The structure of right alternative algebras // Ann. Math. — 1954. — Vol. 59, no. 3. — P. 408–417.

сильно альтернативной четной частью ёмкости 1 над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики не 2; S — простая конечномерная некоммутативная компонента алгебры A , причем единица алгебры S является единицей в B ; B — альтернативный унитарный бимодуль над A . Тогда $B = \check{B} \oplus \mathfrak{B}$, где $\check{B}$ — простая супералгебра, а $\mathfrak{B}$ — нильпотентный градуированный идеал супералгебры B .

§ 5.3 состоит из 5 пунктов, сначала в нем указаны пирсовы разложения нечетной части и радикала четной части; доказана инвариантность этого радикала относительно почти-дифференцирований. Далее приводятся простейшие свойства произведений пирсовых компонент нечетной части и радикала четной части. Затем последовательно обсуждаются свойства произведений пирсовых компонент нечетной части. Более точно, доказывается, что произведения вида $M * \mathfrak{A} * M$ содержатся в $\mathfrak{A} = \text{Nil } A$. Завершается параграф доказательством основной теоремы.

Теорема 5.3. *Четная часть конечномерной простой правоальтернативной унитарной супералгебры над алгебраически замкнутым полем Φ характеристики 0 полупроста в случае ее сильной альтернативности.*

В главе 6 изучаются унитарные правоальтернативные бимодули над простыми алгебрами (основное поле предполагается алгебраически замкнутым). Доказано, что всякий такой бимодуль над алгеброй Кэли—Диксона является прямой суммой регулярных бимодулей, в частности, он альтернативен. Для бимодулей над алгебрами матриц $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$, получены аналоги результатов Л. И. Мураками и И. П. Шестакова о структуре бимодулей над алгеброй $M_2(\Phi)$. Кроме того, построены примеры неприводимых неассоциативных бимодулей минимальной размерности над алгеброй $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$.

Глава состоит из четырех параграфов. В первом параграфе изучаются правоальтернативные бимодули над алгебрами Кэли—Диксона. Доказано, что всякий такой бимодуль альтернативен. В § 6.2 доказываются аналоги лемм

Мураками—Шестакова о йордановых компонентах бимодуля над алгебрами матриц $M_n(\Phi)$, $n \geq 3$. Отметим, что существенную роль при этом играет схема изучения правоальтернативных бимодулей, которую предложили Л.И. Мураками и И.П. Шестаков⁴⁴. Последние два параграфа посвящены поиску примеров неприводимых правоальтернативных бимодулей минимальной размерности. Результаты главы 6 используются далее для изучения структуры простых супералгебр.

В главе 7 завершается доказательство основной теоремы исследования о строении конечномерных простых унитарных правоальтернативных супералгебр с полупростой четной частью. Кроме того, в ней получен ряд результатов о строении супералгебр с простой четной частью. Глава состоит из шести параграфов.

В § 7.1 изучаются унитарные правоальтернативные супералгебры произвольной размерности с четной частью $M_2(\Phi)$, где Φ — основное поле. Опираясь на известные результаты Н. Свартхольма, Н. Джекобсона, А.М. Слинько и И.П. Шестакова, Л.И. Мураками и И.П. Шестакова, доказано, что если простая супералгебра неальтернативна, то нечетная часть является неприводимым 4-мерным бимодулем над четной частью; такие супералгебры мы называем асимметричными дублями. Над алгебраически замкнутым полем асимметричные дубли исчерпываются одной ранее известной супералгеброй⁴⁵.

В § 7.2 вводится понятие канонического базиса асимметричного дубля вида $B_{4|4}(w)$, зависящего от матрицы w с ненулевым следом, и указывается компактная запись умножения однородных элементов. Далее вводится общая конструкция построения дублей над M_2 , частным случаем которой являются дубли $B_{4|4}(w)$. Показано, что общий дубль является правоальтернативной супералгеброй и указан критерий её простоты.

⁴⁴ Murakami L. S. I., Shestakov I. P. Irreducible unital right alternative bimodules // J. Algebra. — 2001. — Vol. 246, no. 2. — P. 897–914.

⁴⁵ da Silva J. P., Murakami L. S. I., Shestakov I. P. On right alternative superalgebras // Commun. Algebra. — 2016. — Vol. 44, no. 1. — P. 240–252.

§ 7.3 начинается с перечисления свойств йордановых компонент нечетной части. Далее вводится понятие йордановой неприводимой компоненты нечетной части и рассматриваются некоторые общие свойства таких компонент, принадлежащих собственному значению $\frac{1}{2}$.

В § 7.4 изучается строение йордановой M_n -компоненты M_{11} при $n \geq 3$, принадлежащей собственному значению 1, и доказывается

Теорема 7.2. *Пусть $B = A \oplus M$ — унитарная правоальтернативная супералгебра с полупростой четной частью, если $A_1 = M_n$ при $n \geq 3$, тогда либо $M_{11}^2 = 0$, либо $A_1 \oplus M_{11}$ является простой супералгеброй $M_n[\sqrt{1}]$.*

В качестве следствия из этой теоремы получено описание простых унитарных правоальтернативных супералгебр произвольной размерности с четной частью M_n при $n \geq 3$. Это ассоциативные супералгебры Уолла $M_n[\sqrt{1}]$.

В § 7.5 изучается строение йордановой компоненты нечетной части M_{12} , принадлежащей собственному значению $\frac{1}{2}$. Доказываются свойства этой компоненты в зависимости от вида простых компонент четной части A_1 и A_2 . В § 7.6 завершается доказательство основной теоремы исследования.

Теорема 7.3. *Простая конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра с полупростой четной частью является либо одной из супералгебр $M_{m|n}$, $M_n[\sqrt{1}]$, $B_{4|4}(w)$, $S_{4|2}$, либо одной из абелевых супералгебр $B_{1|2}$, $B_{n|n}$, $B_{2|2}(\nu)$.*

Глава 8 посвящена описанию групп автоморфизмов и супералгебр дифференцирований построенных простых унитарных супералгебр. В параграфе § 8.1 указаны матричные представления супералгебр $B_{2|2}(\nu)$ и $B_{2|2}$. Доказано также, что все супералгебры из теоремы 2.2 неизоморфны. Показано также, что группы автоморфизмов простых супералгебр абелевы (с этим обстоятельством и связано название «супералгебры абелева типа»). Кроме того, эти супералгебры не имеют ненулевых дифференцирований.

В § 8.2 указаны основные специализации асимметричных дублей $B_{4|4}(w)$ в зависимости от спектра определяющей матрицы w : жорданов, диагональный (в частности, исключительный и вырожденный) и обобщенно жорданов. § 8.3

посвящен решению проблемы изоморфизма асимметричных дублей. Две матрицы w и w' , имеющие ненулевые следы, назовем *эквивалентными*, если существуют такие скаляр $\varepsilon \in \Phi$ и матрица $s \in \mathrm{SL}_2$, что $w' = \varepsilon^2 s^{-1} w s$. Доказано, что дубли $B_{4|4}(w)$ и $B_{4|4}(w')$ изоморфны тогда и только тогда, когда матрицы w' и w эквивалентны (теорема 8.1).

В § 8.4 найдены группы автоморфизмов асимметричных дублей. Доказано, что группа автоморфизмов скалярного дубля $B_{4|4}(\lambda)$ является прямым произведением $U_2 \times \mathrm{SL}_2$; группы автоморфизмов всех других дублей абелевы (см. теорему 8.2).

В §§ 8.5, 8.6 вычислены супералгебры дифференцирований. Доказано, что алгебра четных дифференцирований скалярного дубля $B_{4|4}(\lambda)$ изоморфна $\mathfrak{sl}_2$; нечетные дифференцирования имеют только вырожденные дубли, супералгебры дифференцирований которых абелевы (см. теоремы 8.3 и 8.4).

Последняя **глава 9** начинает новый этап исследования, в котором должны быть описаны простые правоальтернативные супералгебры, четная часть которых содержит ниль-радикал.

В § 9.1 рассматриваются супералгебры с унитарной четной частью над полем нулевой характеристики. Алгебра называется унитарной, если она получена внешним присоединением единицы к ниль-алгебре. Доказано, что всякая простая конечномерная правоальтернативная унитарная супералгебра с унитарной четной частью ассоциативна (теорема 9.1).

Супералгебру назовем *сингулярной*, если её чётная имеет нулевое умножение. В § 9.2 доказано, что не существует сингулярных супералгебр $B = A \oplus M$, в которых выполнено одно из ограничений: $\dim A = 1$ или $\dim M \leq 2$. Значит, наименьшая размерность простой сингулярной супералгебры равна 5.

В § 9.3 определяются супералгебры вида $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$ и доказывается

Теорема 9.2. *Всякая простая правоальтернативная сингулярная супералгебра размерности не выше 5 изоморфна супералгебре вида $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$.*

Схема доказательства этой теоремы такова. В силу известной леммы Алберта для любого четного a оператор L_a действует на нечетной части нильпотентно. Затем доказывается, что существует $a \in A$ такой, что $L_a^2 \neq 0$. Далее, можно подобрать элемент $b \in A$, не пропорциональный a , для которого операторы L_b и R_b вместе с операторами L_a и R_a имеют наиболее простой вид в подходящем базисе. После того как восстановлены умножения нечетных элементов на четные, удастся вычислить и произведения нечетных элементов. Тем самым, возникают супералгебры вида $B_{2|3}(\varphi, \xi, \psi)$.

В § 9.4 доказан следующий критерий

Теорема 9.3. *Простые супералгебры $B = B(\varphi, \xi, \psi)$ и $B' = B(\varphi', \xi', \psi')$ изоморфны тогда и только тогда, когда эквивалентны квадратичные формы, заданные матрицами*

$$\begin{pmatrix} \varphi & \xi \\ \xi & -\psi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \varphi' & \xi' \\ \xi' & -\psi' \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ простые супералгебры вида $B_{2|3}(p, 0, 1)$, где p — простое целое число, попарно неизоморфны, а также, что всякая простая правоальтернативная сингулярная супералгебра размерности не выше 5 над алгебраически замкнутым полем изоморфна супералгебре $B_{2|3}$.

В последних трех параграфах главы доказывается, что не существует простых сингулярных супералгебр размерности 6 (теорема 9.5). Сначала в § 9.5 доказано, что не существует 6-мерных сингулярных супералгебр с трехмерной четной частью (теорема 9.4).

§§ 9.6 и 9.7 завершают доказательство теоремы 9.5. Сначала в § 9.6 доказано, что не существует 6-мерных сингулярных супералгебр, в которых существует такой $a \in A$, что для оператора левого умножения L_a выполнено $L_a^3 \neq 0$. Случай $\dim A = 2$, $\dim M = 4$ и для любого $a \in A$ выполнено $L_a^3 = 0$ рассматривается в § 9.7.

Заключение

В диссертации были получены новые важные результаты о строении простых правоальтернативных супералгебр.

Автором исследованы два важных класса супералгебр — унитарные и сингулярные супералгебры. Унитарные супералгебры изучались с ограничениями на четную и нечетную части. В качестве ограничений на четную часть рассматривалась ее полупростота, ассоциативность, альтернативность. На нечетную часть налагались дополнительные бимодульные свойства ассоциативности или альтернативности.

Исследование было начато с самыми жесткими ограничениями. Изучались супералгебры абелевого типа, то есть такие супералгебры, четная часть которых ассоциативно-коммутативна, а нечетная является ассоциативным бимодулем над четной частью.

В процессе исследования постепенно ослаблялись наложенные ограничения. В результате оно было закончено на супералгебрах с единственным ограничением — полупростоты четной части.

В процессе исследований сделано два важных ответвления от основного курса по снятию ограничений. Так, были изучены простые бесконечномерные унитарные супералгебры, четная часть которых является полем, и все конечномерные унитарные супералгебры (не обязательно простые) с сильно альтернативной четной частью.

Диссертационное исследование не только ответило на открытые вопросы по строению правоальтернативных супералгебр, но и предложило новые приемы и методы, применимые в дальнейших исследованиях. Так, представляются полезными в дальнейшем: метод ростков, метод изучения простых супералгебр по их подсупералгебрам, применение теории графов для описания ветвлений супералгебр.

В диссертации только затронуто начало изучения крайне интересного класса супералгебр — сингулярных супералгебр, то есть супералгебр с

нулевым произведением в четной части.

Результаты диссертации могут быть полезны специалистам по теории колец, геометрам, специалистам по квантовой физике, поскольку в ней получены новые простые объекты.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности и отрасли наук

1. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль* // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2015. Т. 79, № 3. С. 131–158.

1,75 п.л. EDN: UAJXIJ. Импакт-фактор: 0,624(РИНЦ).

Английский перевод Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Simple finite-dimensional right-alternative superalgebras of Abelian type of characteristic zero* // Izvestiya. Mathematics. 2015. vol. 79. № 3. pp. 554–580.

1,69 п.л. EDN: UFAMBB. Импакт-фактор: 0.9(JIF).

Шашковым О.В. были построены все примеры абелевых супералгебр. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0.88 п.л.

2. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые правоальтернативные супералгебры абелева типа, четная часть которых является полем* // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2016. Т. 80. № 6. С. 247–257.

0,7 п.л. EDN: XDLTVR. Импакт-фактор: 0,624(РИНЦ).

Английский перевод Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Simple right alternative superalgebras of Abelian type whose even part is a field* // Izvestiya. Mathematics. 2016. vol. 80. № 6. pp. 1231–1241.

0,69 п.л. EDN: YVBMKL. Импакт-фактор: 0.9(JIF).

Шашковым О.В. были построены все примеры абелевых супералгебр бесконечной размерности. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0.35 п.л.

3. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры с унитарной четной частью над полем характеристики 0* // Математические заметки. 2016. Т. 100. № 4. С. 577–585.

0,6 п.л. EDN: XAMYAF Импакт-фактор: 0,599(РИНЦ).

Английский перевод Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Simple Finite-Dimensional Right Alternative Superalgebras with Unitary Even Part over a Field of Characteristic 0* // Mathematical Notes. 2016. vol. 100. № 3–4. pp. 589–596.

0,5 п.л. EDN: XFLFKZ Импакт-фактор: 0,6(JIF).

Шашковым О.В. было получено отделение радикала в унитарных супералгебрах. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0.3 п.л.

4. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры с полупростой сильно ассоциативной четной частью* // Математический сборник. 2017. Т. 208, № 2. С. 55–69.

0,9 п.л. EDN: XSMTYX. Импакт-фактор: 0,611(РИНЦ).

Английский перевод Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Simple finite-dimensional right-alternative superalgebras with semisimple strongly associative even part* // Sbornik Mathematics. 2017. vol. 208. № 2. pp. 223–236.

0.88 п.л. EDN: MMDSLY. Импакт-фактор: 0.8(JIF).

Шашковым О.В. получены свойства пирсовых компонент сильно

ассоциативной четной части. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0,45 п.л.

5. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые конечномерные правоальтернативные унитарные супералгебры с сильно ассоциативной четной частью* // Математический сборник. 2017. Т. 208, № 4. С. 73–86.

0,88 п.л. EDN: YJCUGN. Импакт-фактор: 0,611(РИНЦ).

Английский перевод Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Simple finite-dimensional right-alternative unital superalgebras with strongly associative even part* // Sbornik Mathematics. 2017. vol. 208. № 4. pp. 531–545.

0,94 п.л. EDN: XNFPLK. Импакт-фактор: 0,8(JIF).

Шашковым О.В. получены свойства радикала сильно ассоциативной четной части. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0,44 п.л.

6. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые 5-мерные правоальтернативные супералгебры с тривиальной четной частью* // Сибирский математический журнал. 2017. Т. 58, № 6(346). С. 1387–1400.

0,9 п.л. EDN: ZSRGBH. Импакт-фактор: 0,451(РИНЦ).

Английский перевод Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Simple 5-dimensional right alternative superalgebras with trivial even part* // Siberian Mathematical Journal. 2017. vol. 58. № 6. pp. 1078–1089.

0,75 п.л. EDN: XYESVN. Импакт-фактор: 0,7(JIF).

Шашковым О.В. разобран случай ниль-индекса 3. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0,45 п.л.

7. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые конечномерные правоальтернативные унитарные супералгебры с ассоциативно-коммутативной чётной частью над полем*

характеристики нуль // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2018. Т. 82, № 3. С. 136–153.

1,13 п.л. EDN: XNRTUL. Импакт-фактор: 0,624(РИНЦ).

Английский перевод Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Simple finite-dimensional right-alternative unital superalgebras with associative-commutative even part over a field of characteristic zero* // Izv. Math. 2018. vol. 82. № 3. pp. 578–595.

1,13 п.л. EDN: YCAJBZ. Импакт-фактор: 0,9(JIF).

Шашковым О.В. разработана теория ростков. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0,57 п.л.

8. Пчелинцев С. В., Шашков О. В.. *Сингулярные 6-мерные супералгебры* // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 92–105.

0,9 п.л. EDN: YXSONZ. Импакт-фактор: 0,355(РИНЦ), 0,5(JIF).

Шашковым О.В. разобраны случаи ниль-нидексов 3 и 4. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0,45 п.л.

9. Murakami L. S. I., Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Finite-dimensional right alternative superalgebras with a semisimple strongly alternative even part* // Journal of Algebra. 2019. vol. 528. pp. 150–176.

1,69 п.л. EDN: GWTCOS. Импакт-фактор: 0,8(JIF).

Шашковым О.В. разработана теория ветвлений. Общая доля диссертанта составляет 33%, 0,56 п.л.

10. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые конечномерные унитарные правоальтернативные супералгебры над алгеброй матриц порядка 2* // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 1. С. 108–131.

1,5 п.л. EDN: SPKFVT. Импакт-фактор: 0,196(РИНЦ).

Английский перевод Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Simple*

right-alternative unital superalgebras over an algebra of matrices of order 2 // Algebra and Logic. 2019. vol. 58. № 1. pp. 77–94.

1,13 п.л. EDN: WNGERX. Импакт-фактор: 0,6(JIF).

Шашковым О.В. определено строение асимметричных дублей. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0,75 п.л.

11. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые асимметричные дубли, их автоморфизмы и дифференцирования* // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 5. С. 627–649.

1,44 п.л. EDN: UODGRB. Импакт-фактор: 0,196(РИНЦ).

Английский перевод Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Simple asymmetric doubles, their automorphisms and derivations* // Algebra and Logic. 2019. vol. 58. № 5. pp. 417–433.

1,06 п.л. EDN: WHNIAP. Импакт-фактор: 0,6(JIF).

Шашковым О.В. автоморфизмов и дифференцирований асимметричных дублей. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0,72 п.л.

12. Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры с полупростой четной частью* // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 61, № 2. С. 385–407.

1,44 п.л. EDN: UZQDVB. Импакт-фактор: 0,451(РИНЦ).

Английский перевод Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Simple right-alternative superalgebras with semisimple even part* // Siberian Mathematical Journal. 2020. vol. 61. № 2. pp. 304–321.

1,125 п.л. EDN: PFOAPW. Импакт-фактор: 0,7(JIF).

Шашковым О.В. выявлено строение $1/2$ -бимодулей. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0,72 п.л.

13. Шашков О. В. *Правоальтернативные супералгебры ёмкости 1 с сильно*

альтернативной четной частью // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 2. С. 260–281.

1,4 п.л. EDN: OZHHPV. Импакт-фактор: 0,196(РИНЦ).

Английский перевод Shashkov O. V. *Right alternative superalgebras of capacity 1 with strongly alternative even part* // Algebra and Logic. 2020. vol. 59. № 2. pp. 180–195.

1 п.л. EDN: GJYAIH. Импакт-фактор: 0.6(JIF).

14. Шашков О. В. *Конечномерные правоальтернативные унитарные супералгебры с сильно альтернативной четной частью* // Сибирский математический журнал. 2020. Т. 61, № 5. С. 1159–1176.

1,1 п.л. EDN: ECDTHN. Импакт-фактор: 0,451(РИНЦ).

Английский перевод Shashkov O. V. *Finite-dimensional unital right alternative superalgebras with strongly alternative even part* // Siberian Mathematical Journal. 2020. vol. 61. № 5. pp. 926–940.

0,94 п.л. EDN: RUNLWV. Импакт-фактор: 0,7(JIF).

15. Шашков О. В. *Об основной теореме Веддерберна для правоальтернативных супералгебр емкости 1* // Сибирские электронные математические известия. 2020. Т. 17. С. 1571–1579.

0,6 п.л. EDN: CFQDME. Импакт-фактор: 0,355(РИНЦ), 0,5(JIF).

16. Pchelintsev S. V., Shashkov O. V. *Linearly generated singular superalgebras* // Journal of Algebra. 2020. vol. 546. pp. 580–603.

1,5 п.л. EDN: ZXSEGY. Импакт-фактор: 0,8(JIF).

Шашковым О.В. получено строение $1/2$ -бимодулей. Общая доля диссертанта составляет 50%, 0,75 п.л.