

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

**О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый  
актив**

Антипов Виктор Алексеевич

Специальность

1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
Кабанов Юрий Михайлович

Москва – 2026

## Оглавление

Стр.

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| Введение . . . . .                                                | 4  |
| <b>Глава 1. Вероятность разорения в модели типа</b>               |    |
| <b>Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив</b>          | 16 |
| 1.1 Описание модели и формулировка основного результата . . . . . | 16 |
| 1.2 Анализ интегро-дифференциального уравнения . . . . .          | 19 |
| 1.3 Вероятность неразорения и решение ИДУ . . . . .               | 23 |
| 1.4 Численное решение ИДУ . . . . .                               | 25 |
| <b>Глава 2. Асимптотика вероятности разорения в модели с</b>      |    |
| <b>инвестициями в рисковый актив и двусторонними</b>              |    |
| <b>скачками</b> . . . . .                                         | 29 |
| 2.1 Описание модели и формулировка основного результата . . . . . | 29 |
| 2.2 Интегро-дифференциальное уравнение . . . . .                  | 31 |
| 2.3 Асимптотический анализ вероятности разорения . . . . .        | 33 |
| <b>Глава 3. Вероятность разорения в модели Крамера–Лундберга</b>  |    |
| <b>с инвестициями в рисковый актив в случайной среде</b> .        | 37 |
| 3.1 Описание модели и формулировка основного результата . . . . . | 37 |
| 3.2 Гладкость вероятности неразорения . . . . .                   | 40 |
| 3.2.1 Гладкость функции $\Upsilon^2$ . . . . .                    | 41 |
| 3.2.2 Гладкость функции $\Upsilon^1$ . . . . .                    | 45 |
| 3.3 Интегро-дифференциальное уравнение . . . . .                  | 48 |
| <b>Глава 4. Вероятность разорения в общей модели с</b>            |    |
| <b>инвестициями на конечном временном интервале</b> . . . . .     | 51 |
| 4.1 Описание модели . . . . .                                     | 51 |
| 4.2 Вероятность разорения как вязкостное решение . . . . .        | 53 |
| 4.3 Единственность вязкостного решения . . . . .                  | 56 |
| 4.3.1 Параболические джеты . . . . .                              | 56 |
| 4.3.2 Принцип максимума и теорема единственности . . . . .        | 59 |
| 4.4 Непрерывность вероятности разорения . . . . .                 | 66 |
| 4.4.1 Модель Крамера–Лундберга . . . . .                          | 66 |

|                                       | Стр.      |
|---------------------------------------|-----------|
| 4.4.2 Модели с инвестициями . . . . . | 67        |
| <b>Заключение . . . . .</b>           | <b>69</b> |
| <b>Список литературы . . . . .</b>    | <b>72</b> |

## Введение

В работе рассматриваются модели страховой компании, инвестирующей свой капитал (или его часть) в рисковый актив. Основным предметом исследования является вероятность разорения как функция начального капитала компании. Особое внимание уделяется вопросу гладкости вероятности разорения и ее асимптотическому поведению при больших значениях начального капитала.

Первая модель резерва страховой компании была предложена в 1903 году шведским математиком и актуарием Ф. Лундбергом [1], а позже изучена другим шведским математиком Х. Крамером [2; 3]. В модели рассматривалась страховая компания, получающая со скоростью  $c > 0$  страховые взносы и выплачивающая в случае наступления страховых случаев величины  $\xi_i$ , где  $(\xi_i)_{i \geq 1}$  есть последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.) с функцией распределения  $F$ . Моменты наступления страховых требований подчиняются пуассоновскому процессу  $N_t$  интенсивности  $\lambda$ , независимому от страховых выплат. Динамика капитала компании задается процессом

$$X_t^u = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \quad t > 0,$$

где  $u \geq 0$  есть начальный капитал компании. Основным предметом исследования в данной теории является вероятность, что капитал компании станет отрицательным (неположительным). Определим момент разорения компании  $\tau^u = \inf\{t \geq 0 : X_t^u < 0\}$  и вероятность разорения  $\Psi(u) = \mathbb{P}(\tau^u < \infty)$ . С точки зрения теории случайных процессов, вероятность разорения есть вероятность выхода случайного процесса  $X_t^u$  из области  $\mathbb{R}_+$  за конечное время. Используя мартингальный подход, нетрудно показать (см. [4], гл. VII, п. 10), что вероятность разорения удовлетворяет неравенству Лундберга (см. также [5], гл. I, п. 4)

$$\Psi(u) \leq e^{-\gamma u}, \quad (1)$$

где  $\gamma$  является решением уравнения  $\lambda(\mathbb{E}e^{\gamma \xi} - 1) = c\gamma$ . В частности, в случае экспоненциально распределенных скачков известен точный вид вероятности разорения. Дополнительно, если потребовать непрерывность функции распределения  $F$ , нетрудно показать (см., например [6], гл. I), что она удовлетворяет

интегро-дифференциальному уравнению (ИДУ)

$$c\Psi'(u) - \lambda\Psi(u) + \lambda \int_0^u \Psi(u-y)dF(y) = 0.$$

Важно отметить, что одним из основных свойств вероятности разорения является экспоненциальное убывание (1) при стремлении начального капитала к бесконечности. Оказывается, что характер поведения вероятности разорения при больших значениях капитала меняется качественным образом при добавлении в модель рискованных инвестиций.

В современном мире предположение об отсутствии инвестиций капитала страховых компаний является нереалистичным – компании держат часть своих резервов в таких инструментах, как фонды акций или облигаций. Данная инвестиционная активность позволяет покрывать расходы, выплачивать дивиденды акционерам и формировать резервы для будущих выплат по страховым случаям, но также приводит к увеличению риска дефолта компании. В одной из первых работ [7], рассматривающих модель с инвестициями, предполагалось, что страховая компания инвестирует весь свой капитал в рискованный актив, динамика цены которого задается геометрическим броуновским движением (ГБД) с параметрами сноса  $a$  и волатильности  $\sigma$ . Капитал страховой компании в данной модели задан процессом

$$X_t^u = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i + \int_0^t X_s^u (ads + \sigma dW_s), \quad t > 0, \quad (2)$$

где  $W_t$  есть стандартный винеровский процесс. Было показано, что асимптотическое поведение вероятности разорения существенным образом отличается от поведения в модели Крамера-Лундберга – вероятность разорения ведёт себя как степенная функция при стремлении начального капитала к бесконечности. Более строгий и полный анализ данной модели представлен в [8]. Используя оценки Калашникова (см. [9]) для линейных разностных уравнений со случайными коэффициентами, показано, что при  $2a > \sigma^2$  вероятность разорения убывает не быстрее, чем степенная функция, а в случае большой волатильности ( $2a < \sigma^2$ ) разорение происходит с вероятностью единица. Применение формулы Ито к вероятности разорения (в предположении достаточной гладкости) позволяет получить интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) (см. [10], [8])

$$\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \Psi''(u) + (au + c)\Psi'(u) - \lambda\Psi(u) + \lambda \int_0^u \Psi(u-y)dF(y) = 0.$$

Дифференцирование полученного интегро-дифференциального уравнения достаточное число раз позволяет свести ИДУ к дифференциальному уравнению (ДУ), для которого возможно применение асимптотической теории решений ДУ (см., например, [11]) для исследования поведения вероятности разорения при больших значениях начального капитала. Так, например, в случае экспоненциально распределенных скачков найдена точная асимптотика – вероятность разорения убывает как степенная функция с показателем  $\beta = 2a/\sigma^2 - 1$

$$\Psi(u) = Cu^{-\beta}(1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

Пограничный случай  $2a = \sigma^2$  исследован в [12; 13], где показано, что для данных параметров модели вероятность разорения также равна единице для любого начального капитала. В другой работе [14] был представлен подход, основанный на постановке краевой задачи для ИДУ и доказательстве верификационной теоремы, показывающей, что вероятность неразорения, в предположении гладкости как функции начального капитала, является решением поставленной краевой задачи. Результат о гладкости вероятности разорения был получен в дальнейшем в работах [15] и [16], где рассматривались скачки вверх (модель страхования жизни) и скачки в обе стороны (модель со стохастическими премиями) процесса, соответствующего страховой деятельности компании. Показано, что при выполнении условий регулярности плотности  $f$  скачков  $\xi$

$$f', f'' \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad (3)$$

вероятность разорения является дважды непрерывно-дифференцируемой на  $(0, \infty)$  функцией с ограниченными первой и второй производными. Численные исследования дифференциальных уравнений, возникающих в задачах разорения, представлены в работах [17–19]. Существует и альтернативный подход, не использующий технику анализа решений ИДУ для исследования асимптотических свойств вероятности разорения и основанный на неявной теории восстановления Голди [20]. Так, например, некоторые оценки вероятности разорения в моделях с дискретным временем были получены в работах [21] и [22].

**Первая глава** настоящей работы посвящена исследованию вероятности разорения в модели типа Крамера–Лундберга с рисковыми инвестициями (2) с дополнительным предположением, что страховая компания инвестирует долю  $\kappa$  своего капитала в рисковый актив. Поставлена краевая задача для ИДУ,

описывающего вероятность неразорения, и показано, что решение поставленной задачи является гладкой и монотонной функцией, имеющей степенную асимптотику с показателем  $\gamma - 1$ , где  $\gamma := 2((a-r)\kappa + r)/(\kappa^2\sigma^2)$ . Следуя рассуждениям из [14], показано, что вероятность неразорения является решением поставленной краевой задачи. Данный результат обобщает результаты, полученные в [8] и [14] на случай произвольных размеров страховых выплат  $\xi$  и требует лишь предположений о непрерывности функции распределения  $F$  и ограниченности моментов  $\mathbb{E}\xi^{\gamma-1} < \infty$ . Кроме того, полученный результат не требует выполнения условий регулярности (3) плотности скачков. В конце главы приведено описание численных экспериментов, подтверждающих полученные теоретические результаты для случаев «легких» и «тяжелых» хвостов распределения.

Другой подход нахождения асимптотики решения ДУ основан на применении преобразования Лапласа и тауберовых теорем. В задачах разорения с инвестициями в рисковый актив, рассматриваемых в [8], [15], [16] и др., ДУ для вероятности разорения имеет на бесконечности иррегулярную особенность и такие классические методы асимптотического анализа, как метод Фробениуса, неприменимы. Взятие преобразования Лапласа позволяет убрать данную особенность и применить асимптотический анализ для функции изображения. Обратный переход к асимптотике вероятности разорения (функции-оригинала) осуществляется с помощью тауберовой теоремы. Так, например, с использованием данного подхода в работе [23] проведен анализ асимптотического поведения вероятности разорения в модели типа Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив, цена которого моделируется ГБД.

**Вторая глава** данной работы посвящена изучению асимптотического поведения вероятности разорения в модели с инвестициями в рисковый актив, допускающей как положительные, так и отрицательные страховые выплаты с плотностями распределений, имеющими дробно-рациональное преобразование Лапласа. Данная модель обобщает модель из [16] на более общий случай распределения страховых выплат. Основной результат заключается в том, что при  $\beta \in (0, 1)$  вероятность разорения убывает как степенная функция с показателем  $\beta$ .

Развитие моделей страховой компании связано не только с рассмотрением более общих процессов, отвечающих за страховую деятельность, но и исследованием более общих процессов цены актива, в который страховая компания инвестирует свой капитал. Так, например, в [24] и, далее, в [25] была рассмот-

рена модель, где цена актива задана ГБД с параметрами, подчиняющимися марковскому процессу с конечным числом состояний. Стоимость капитала компании в данной модели задана процессом

$$X_t^{u,i} = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i + \int_0^t X_s^u (a_{\theta_s} ds + \sigma_{\theta_s} dW_s), \quad t > 0, \quad (4)$$

где марковский процесс  $\theta_s$  принимает значения на конечном множестве  $E := \{0, 1, \dots, K-1\}$  и  $\theta_0 = i$ . Данный подход позволяет описать различные режимы финансового рынка, на котором данный базовый актив торгуется (например, рынок, переходящий из состояния высокой волатильности в состояние низкой волатильности). В упомянутых выше работах основным инструментом исследования является неявная теория восстановления, позволяющая получить оценки для вероятности разорения при больших значениях начального капитала. Вероятность разорения здесь понимается как вероятность разорения при заданном начальном состоянии процесса  $\theta_0 = i$ . В [24] для случая двух состояний ( $K = 2$ ) получены «неточные» оценки вероятности разорения

$$0 < \liminf_{u \rightarrow \infty} u^\beta \Psi_i(u) \leq \limsup_{u \rightarrow \infty} u^\beta \Psi_i(u) < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Другой подход основан на получении ИДУ (см. [26]), описывающего вероятность разорения, и дальнейшем анализе асимптотических свойств решения. В частности, вывод ИДУ, понимаемого в классическом смысле и описывающего вероятность разорения, требует достаточной гладкости исследуемого функционала, что в данной работе предполагается данным.

**Третья глава** настоящей работы посвящена исследованию вопроса гладкости вероятности разорения в модели (4) типа Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив и марковским процессом с конечным числом состояний, модулирующим параметры цены базового актива. Показано, что если плотность скачков составного пуассоновского процесса имеет непрерывные и интегрируемые производные вплоть до второго порядка, то есть  $f', f'' \in L^1(\mathbb{R}_+)$ , то вероятность разорения является дважды непрерывно дифференцируемой функцией начального капитала. Наличие гладкости позволяет получить ИДУ второго порядка для вероятности разорения

$$\frac{1}{2} \sigma_i^2 u^2 \Psi_i''(u) + (a_i u + c) \Psi_i'(u) - \alpha \Psi_i(u) + \alpha \int_0^u \Psi_i(u-y) dF(y) + \sum_{j \in E} \lambda_{ij} \Psi_j(u) = 0,$$

где  $i \in E$ ,  $\alpha$  есть интенсивность пуассоновского процесса  $N_t$ , величина  $\lambda_{ij}$  задает интенсивность переключения процесса  $\Theta$  между состояниями  $i$  и  $j$ .

Дальнейшее изучение данной теории приводит к рассмотрению более общих моделей, где процесс капитала компании подчиняется обобщенному процессу Орнштейна–Уленбека

$$X_t^u = u + P_t + \int_0^t X_{s-}^u dR_s, \quad t > 0, \quad (5)$$

драйверами которого являются два независимых процесса Леви  $P_t$  и  $R_t$  (см. [10; 27]). В частности, процесс цены базового актива в данной постановке подчиняется геометрическому процессу Леви. В силу того, что гладкость вероятности разорения является нетривиальным результатом даже в случае классической модели типа Крамера–Лундберга, вероятность разорения может рассматриваться как решение ИДУ, понимаемое в вязкостном смысле. Так, например, в работе [28] рассматривалась модель Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив, заданный геометрическим процессом Леви. Капитал компании подчиняется процессу

$$X_t^u = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i + \int_0^t X_{s-}^u dR_s, \quad t > 0,$$

где  $R_s$  есть процесс Леви с параметрами сноса  $a$ , волатильности  $\sigma$  и мерой Леви  $\Pi$ , сосредоточенной на  $(-1, \infty)$ . Показано, что вероятность разорения удовлетворяет в вязкостном смысле ИДУ

$$\mathcal{L}\Psi(u) + \lambda \int_{[0,u]} \Psi(u-y) dF(y) + \int_{\mathbb{R}} [\Psi(u(1+y)) - \Psi(u) - \Psi'(u)uy] \Pi(dy) = 0,$$

где  $\mathcal{L}\Psi(u) := \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \Psi''(u) + (au + c)\Psi'(u) - \lambda\Psi(u)$ . Кроме того, в предположении

$$\int (|x|^2 \wedge |x|) \Pi(dx) < \infty \quad (6)$$

доказана теорема единственности, гарантирующая, что два непрерывных ограниченных вязкостных решения с совпадающими граничными условиями в 0 и  $\infty$  совпадают всюду. Другие результаты для более общих моделей, использующие неявную теорию восстановления, представлены в работах [29] и [30]. Большая часть существующих результатов в теории разорения посвящена исследованию асимптотического поведения вероятности разорения на бесконечном временном

промежутке (см. также работу [31], использующую неявную теорию восстановления). Несмотря на то, что с практической точки зрения исследование вероятности разорения с инвестициями в рисковый актив на конечном временном интервале имеет преобладающее значение, соответствующих исследований практически нет. В качестве исключения можно отметить работу [32], в которой исследована краевая задача для ИДУ в частных производных. Предполагалось, что цена следует геометрическому броуновскому движению, а страховая деятельность компании подчиняется сумме составного пуассоновского процесса и винеровского процесса. Было показано, что задача допускает классическое решение, кроме единственной точки на границе. В [33] были предложены численные подходы для решения задачи в случае, когда процесс цены имеет скачковую компоненту, заданную составным пуассоновским процессом. В другой работе [34] рассматривалась более общая семимартингальная модель (5) Орнштейна–Уленбека, где процесс относительного изменения цены  $R_t$  есть семимартингал, а процесс  $P_t$ , отвечающий за страховую деятельность, задан процессом Леви. В работе показано, что в предположении интегрируемости хвостов меры Леви

$$\int_{|x|>1} |x|^\alpha \Pi_P(dx) < \infty$$

для некоторого  $\alpha > 0$  и при выполнении некоторых условий ограниченности экспоненциальных функционалов процесса  $\ln \mathcal{E}(R)_t$ , где  $\mathcal{E}(X)$  есть стохастическая экспонента процесса  $X$ , справедлива оценка для вероятности разорения

$$\mathbb{P}(\tau^u < T) \leq C u^{-\alpha},$$

где  $C > 0$  зависит от процесса  $R_t$ . Кроме того, при некоторых дополнительных предположениях доказана оптимальность полученной оценки.

**Четвертая глава** данной работы посвящена исследованию ИДУ в частных производных для вероятности разорения на конечном временном интервале для модели Орнштейна–Уленбека с драйверами, заданными процессами Леви. Важнейшим отличием рассматриваемой модели от большинства предшествующих является конечный временной горизонт  $[0, T]$ , на котором рассматривается деятельность компании. Капитал страховой компании на промежутке  $[t, T]$ , где  $t \in [0, T)$ , задается процессом

$$X_r^{t,u} = u + P_r - P_t + \int_{(t,r]} X_s^{t,u} dR_s, \quad r \in [t, T], \quad t < T.$$

Бизнес-процесс  $P_t$ , задающий страховую деятельность компании, и процесс относительного изменения цены рискового актива  $R_s$  являются процессами Леви с заданными триплетами  $(a, \sigma^2, \Pi)$  и  $(a_P, \sigma_P^2, \Pi_P)$ . Момент разорения компании и вероятность разорения определим как  $\tau^{t,u} := \inf\{r > t : X_r^{t,u} \leq 0\}$  и  $\Psi(t, u) := \mathbb{P}(\tau^{t,u} < T)$ . Последняя величина отражает вероятность разорения страховой компании до момента  $T$ , имеющей в момент времени  $t$  начальный капитал  $u$ . Показано, что вероятность разорения является непрерывной функцией времени  $t$  и начального капитала  $u$ . Кроме того, получено ИДУ в частных производных на вероятность разорения

$$\Psi_t(t, u) + \mathcal{L}\Psi(t, u) = 0,$$

где  $\mathcal{L}$  есть интегро-дифференциальный оператор. Полученное ИДУ в частных производных понимается в вязкостном смысле, что позволяет обойти вопрос о гладкости вероятности разорения. Используемый подход развивает дальше идеи статьи [28]. Важно отметить, что полученные результаты не требуют выполнения условия (6). Достаточно лишь выполнения классических условий интегрируемости

$$\int (|x|^2 \wedge 1) \Pi(dx) < \infty, \quad \int (|x|^2 \wedge 1) \Pi_P(dx) < \infty.$$

Доказана теорема единственности, утверждающая, что два непрерывных вязкостных решения совпадают, если они имеют одинаковое поведение на границе. Ключевую роль в доказательстве единственности играет лемма Ишии (см. Лемму 1, [35]).

**Цель работы.** Исследование гладкости вероятности разорения и её асимптотического поведения при больших значениях начального капитала в модели типа Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив; асимптотический анализ вероятности разорения страховой компании в модели с инвестициями в рисковый актив и двусторонними скачками; исследование гладкости вероятности разорения страховой компании в модели с инвестициями в рисковый актив в случайной среде, вывод ИДУ для вероятности разорения; анализ непрерывности вероятности разорения в общей модели Орнштейна–Уленбека на конечном временном интервале, вывод ИДУ в частных производных для вероятности разорения в вязкостном смысле, исследование единственности вязкостного решения; численное моделирование полученных результатов для ряда моделей.

**Научная новизна работы.** Получены новые результаты в вопросах гладкости вероятности разорения и ее асимптотического поведения при больших значениях капитала в различных моделях страховой компании, инвестирующей свой капитал в рисковый актив. Получены результаты численного моделирования вероятности разорения для ряда моделей.

**Методы исследования.** В работе использованы методы теории вероятностей, теории случайных процессов, теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, а также численные методы. В теоретической части основными инструментами были теория семимартингалов, асимптотическая теория (интегро-)дифференциальных уравнений, формула Ито, преобразование Лапласа и тауберовы теоремы, теория интегральных уравнений Вольтерры, а также теория вязкостных решений для параболических ИДУ в частных производных. Методы численного анализа используют теорию построения разностных схем для (интегро-)дифференциальных задач. Численное моделирование проведено при помощи языка Python.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории разорения с инвестициями, в том числе для задач оптимального управления, а также для получения практических результатов в области численного моделирования вероятности дефолта страховой компании.

**Соответствие паспорту научной специальности.** В диссертации изучаются различные модели разорения страховой компании, инвестирующей свой капитал в рисковый актив, поэтому тема диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.4 «Теория вероятностей и математическая статистика» по направлениям исследований: стохастические процессы, стохастические дифференциальные уравнения, марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели, стохастический анализ.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. Доказано существование единственного классического решения краевой задачи для ИДУ, совпадающего с вероятностью неразорения

- страховой компании в модели типа Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив. Получен результат о степенной асимптотике вероятности разорения при больших значениях начального капитала.
2. Найдена асимптотика вероятности разорения при стремлении начального капитала к бесконечности в модели с инвестициями в рисковый актив и двусторонними скачками.
  3. Установлено достаточное условие гладкости вероятности разорения в модели с инвестициями в рисковый актив в случайной среде. Получена система ИДУ для вероятностей разорения.
  4. Доказано существование единственного вязкостного решения ИДУ, совпадающего с вероятностью разорения в общей модели Орнштейна–Уленбека.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

- Совместный семинар Кафедры теории вероятностей МГУ им. М.В. Ломоносова и Фонда «Институт «Вега», Москва, 7 декабря 2022, «О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый актив».
- XXX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», 10-21 апреля 2023, «О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый актив».
- 16th Bachelier Colloquium 2024, Mathematical Finance and Stochastic Calculus, Métabief, France, 5-19 January 2024, “Ruin probabilities with investments in random environment: smoothness”.
- «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании», ЦЭМИ РАН, Москва, 12 марта 2024. «О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый актив».
- XXXII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», 11-25 апреля 2025, «О применении преобразования Лапласа для задачи разорения со случайными платежами и инвестициями в рисковый актив».
- «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании», ЦЭМИ РАН, Москва, 31 марта 2026.

«Об интегро-дифференциальном уравнении, возникающем в задаче разорения страховой компании с инвестициями в рисковый актив».

- Международная научная конференция «Ломоносовские чтения». Подсекция «Новые вызовы экономики: цифровая трансформация, финансовые рынки и качество жизни». Раздел «Математические финансы», 3 апреля 2026. Доклад «Об интегро-дифференциальном уравнении, возникающем в задаче разорения с инвестициями в рисковый актив».
- Большой семинар кафедры теории вероятностей МГУ, 8 апреля 2026, «О вероятностях разорения с инвестициями в рисковый актив».

**Публикации.** Все основные результаты по теме диссертации изложены в четырех статьях, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности и отрасли наук. Список работ автора приведен в конце диссертации.

**Личный вклад автора.** Диссертантом совместно с научным руководителем проводился выбор темы, а также осуществлялось планирование всей работы. Профессору Ю.М. Кабанову принадлежит постановка задач и общий подход к их решению. Автору диссертации принадлежит доказательство теорем и лемм, а также проведение численного моделирования.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 77 страниц, включая 2 рисунка. Список литературы содержит 45 наименований.

В работу вошли результаты, выполненные при поддержке гранта РНФ 20-68-47030, рук. — проф. Д. Фантаццини.

Первая глава посвящена исследованию гладкости вероятности разорения и ее асимптотическому поведению в модели типа Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив. Основной результат данной главы заключается в доказательстве гладкости вероятности разорения и нахождении ее асимптотики при больших значениях начального капитала в предположении непрерывности функции распределения  $F$  и ограниченности моментов страховых выплат. Кроме того, проведено численное моделирование, подтверждающее полученные

результаты для скачков с «тяжелыми» и «легкими» хвостами распределений. Вторая глава посвящена исследованию асимптотического поведения вероятности разорения в модели с инвестициями в рисковый актив с двусторонними скачками, плотность которых имеет дробно-рациональное преобразование Лапласа. Основной результат заключается в получении асимптотики вероятности разорения при больших значениях начального капитала. Разработанный подход с применением преобразования Лапласа и тауберовых теорем позволяет находить асимптотику вероятности разорения для различных моделей и широкого класса скачков. Третья глава посвящена исследованию вероятности разорения в модели с инвестициями в рисковый актив в случайной среде. Основным результатом главы — достаточное условие гладкости вероятности разорения как функции начального капитала и вывод системы ИДУ для вероятностей разорения. Четвертая глава направлена на исследование вероятности разорения в общей модели Орнштейна–Уленбека на конечном временном интервале, где процесс относительного изменения цены базового актива и процесс, отвечающий за страховую деятельность компании, заданы процессами Леви. Доказана непрерывность вероятности разорения как функции начального капитала и времени. Получено ИДУ в частных производных для вероятности разорения. Показано, что вероятность разорения является единственным вязкостным решением данного ИДУ.

**Благодарности.** Автор благодарит научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Юрия Михайловича Кабанова, за постановки и обсуждение задач, а также за постоянное внимание к работе. Автор благодарит весь коллектив кафедры теории вероятностей, заведующего кафедрой теории вероятностей, доктора физико-математических наук, академика РАН Альберта Николаевича Ширяева и доктора физико-математических наук, профессора Елену Борисовну Яровую за поддержку и ценные указания.

# Глава 1. Вероятность разорения в модели типа Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив

Рассматривается модель страховой компании, инвестирующей долю  $\kappa$  своего капитала в рисковый актив, динамика цены которого подчиняется ГБД с параметрами  $a$  и  $\sigma$ . Страховая деятельность компании задана составным пуассоновским процессом с положительным сносом  $c$  и скачками вниз, имеющими функцию распределения  $F$ . Основными результатами являются постановка краевой задачи для ИДУ, описывающего вероятность неразорения как функцию начального капитала, доказательство существования гладкого решения поставленной задачи, а также степенной характер поведения вероятности разорения при больших значениях начального капитала с показателем степени  $\gamma := 2((a - r)\kappa + r)/(\kappa^2\sigma^2) - 1$ . Полученные результаты справедливы в предположении, что  $F$  является непрерывной функцией, а размеры скачков имеют ограниченный момент степени  $\gamma - 1$ . Кроме того, предложен алгоритм численного решения поставленной краевой задачи, подтверждающий полученные результаты для случаев «легких» и «тяжелых» хвостов распределения.

## 1.1 Описание модели и формулировка основного результата

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с фильтрацией  $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  заданы независимые винеровский процесс  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  и составной пуассоновский процесс  $P = (P_t)_{t \geq 0}$  со сносом  $c > 0$ . Определим пуассоновскую случайную меру  $p_P(dt, dx)$  процесса  $P$  с компенсатором  $q_P(ds, dx) = \Pi_P(dx)dt$ , где  $\Pi_P(\mathbb{R}_-) < \infty$  и  $\Pi_P(\mathbb{R}_+) = 0$ . Рассмотрим модель страховой компании, инвестирующей долю  $\kappa$  своего резерва в рисковый актив, цена которого описывается геометрическим броуновским движением

$$S_t = S_0 e^{(a - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

Оставшуюся долю капитала  $1 - \kappa$  компания хранит на безрисковом счете с процентной ставкой  $r$ , стоимость которого определяется процессом

$$B_t = B_0 e^{rt}.$$

Динамика резерва компании описывается процессом  $X = X^u$  вида

$$X_t = u + \int_0^t X_s dR_s + P_t, \quad t \geq 0,$$

где

$$R_t = ((a - r)\kappa + r)t + \kappa\sigma W_t,$$

процесс  $P$  отражает «страховую» деятельность компании, величина  $u > 0$  задает начальный капитал компании. Процесс капитала  $X$  можно также представить в «дифференциальной» форме  $dX_t = X_t dR_t + dP_t$ ,  $X_0 = u$ , где

$$dP_t = cdt + \int x p_P(dt, dx), \quad P_0 = 0.$$

В актуарной литературе процесс  $P$  обычно представляется в более наглядном виде как

$$P_t = ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i,$$

где  $N_t := p_P([0, t] \times \mathbb{R})$  есть пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda = \Pi_P(\mathbb{R}_-)$ , случайные величины  $\xi_i > 0$  являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения  $F(x) = \Pi_P((-x, 0])/\lambda$ .

Положим  $\tau^u := \inf\{t \geq 0 : X_t^u < 0\}$  (момент разорения),  $\Psi(u) := \mathbb{P}(\tau^u < \infty)$  (вероятность разорения),  $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$  (вероятность неразорения).

Известно, что если вероятность неразорения является гладкой функцией начального капитала, то есть  $\Phi \in C^2$ , то, применяя стандартные рассуждения с формулой Ито, получаем, что  $\Phi$  удовлетворяет ИДУ

$$\frac{1}{2}\kappa^2\sigma^2u^2\Phi''(u) + \tilde{a}u\Phi'(u) + c\Phi'(u) + \lambda \int_0^\infty (\Phi(u - y) - \Phi(u)) dF(y) = 0; \quad (1.1)$$

где  $\tilde{a} := ((a - r)\kappa + r)$  (см., например, [8]). То же самое уравнение справедливо и для вероятности разорения  $\Psi$ . Достаточным условием на  $F$ , гарантирующим гладкость  $\Phi$ , является существование плотности  $f \in C^2((0, \infty))$  такой, что  $f'' \in L^1(\mathbb{R}_+)$  (см. [16]). Сформулируем основной результат данной главы.

**Теорема 1.** *Положим  $\gamma := 2((a - r)\kappa + r)/(\kappa^2\sigma^2) > 1$  и предположим, что  $F$  непрерывна и  $\mathbb{E}\xi_1^{\gamma-1} < \infty$ . Тогда существует  $G \in C([0, \infty)) \cap C^2((0, \infty))$ , являющаяся единственным решением ИДУ*

$$\frac{1}{2}\kappa^2\sigma^2u^2G''(u) + \tilde{a}uG'(u) + cG'(u) + \lambda \int_0^\infty (G(u - y) - G(u)) dF(y) = 0 \quad (1.2)$$

с граничными условиями  $G(0+) = \Phi(0+)$  и  $G(\infty) = 1$ . Данное решение совпадает с вероятностью неразорения  $\Phi$ . Более того, существует  $C_\infty > 0$  такая, что  $\Psi(u) \sim C_\infty u^{-\gamma+1}$  при  $u \rightarrow \infty$ .

**Замечание 1.** Нетрудно заметить, что с математической точки зрения рассматриваемая задача эквивалентна задаче с параметрами  $\tilde{a} := (a-r)\kappa + r$ ,  $\tilde{\sigma} = \kappa\sigma$ . Однако, выбранная постановка имеет явное преимущество при рассмотрении задачи оптимального управления, где страховая компания выбирает долю  $\kappa$ , инвестируемую в рисковый актив (см., например, работы [36] и [37]).

Изложим идею доказательства данного результата. Первый шаг заключается в сведении рассматриваемого ИДУ к интегральному уравнению (ИУ). Действительно, вводя новую функцию  $g = G'$ , интегрируя по частям и применяя интегрирующий множитель к заданному ИДУ, получаем требуемое ИУ для функции  $g$  с условием в нуле  $g(0) = \lambda G(0+)/c$ . Далее, используя теорему Банаха о неподвижной точке в пространстве непрерывных функций, находим классическое решение ИУ  $g_* \geq 0$  на интервале  $[0, u_0]$ . Наконец, используя полученное решение как начальное значение для уравнения Вольтерра второго рода на  $[u_0, \infty)$  для функции  $\tilde{g}(u) = u^\gamma g(u)$ , находим классическое решение данного уравнения на  $[u_0, \infty)$ . Таким образом, получено полное решение  $\hat{g}$ , совпадающее с  $g_*$  на  $[0, u_0]$  и  $u^{-\gamma} \tilde{g}(u)$  на  $[u_0, \infty)$ . Данное решение однозначно определяется начальным значением  $\hat{g}(0) = g^*(0) = \lambda G(0+)/c$ . Кроме того, решение является непрерывно дифференцируемым, если функция распределения  $F$  непрерывна. Краевое условие на бесконечности  $G(\infty) = 1$  однозначным образом определяет значение  $G(0+)$ . Таким образом, для рассматриваемого ИДУ второго порядка требуется лишь одно граничное условие на бесконечности. Последний шаг доказательства заключается в применении формулы Ито и отождествлении полученного решения с вероятностью разорения (следуя рассуждениям теоремы 3.1 из [14]).

## 1.2 Анализ интегро-дифференциального уравнения

Используя формулу интегрирования по частям, получаем для дифференцируемой на  $(0, \infty)$  функции  $G$  тождество

$$\int_0^u G(u-y)F(dy) + \int_0^u G'(u-y)\bar{F}(y)dy = G(u) - \bar{F}(u)G(0+),$$

где  $\bar{F} := 1 - F$ . Уравнение (1.1) можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{1}{2}\kappa^2\sigma^2u^2G''(u) + \tilde{a}uG'(u) + cG'(u) = \lambda G(0+)\bar{F}(u) + \lambda \int_0^u G'(u-y)\bar{F}(y)dy, \quad (1.3)$$

Предметом исследования является классическое решение этого уравнения с граничными условиями  $G(0+) = \Phi(0+)$  и  $G(\infty) = 1$ .

Приведенное выше уравнение сводится к неоднородному интегро-дифференциальному уравнению первого порядка относительно производной  $g(u) := G'(u)$ . Вводя обозначения

$$\gamma := \frac{2((a-r)\kappa + r)}{\kappa^2\sigma^2}, \quad \alpha := \frac{2c}{\kappa^2\sigma^2}, \quad \mu := \frac{2\lambda}{\kappa^2\sigma^2},$$

получаем следующее ИДУ для функции  $g$ :

$$u^2g'(u) + (\gamma u + \alpha)g(u) = \mu G(0+)\bar{F}(u) + Bg(u), \quad (1.4)$$

где

$$Bg(u) := \mu \int_0^u g(u-z)\bar{F}(z)dz = \mu \int_0^u g(y)\bar{F}(u-y)dy \leq \mu u \sup_{y \leq u} g(y). \quad (1.5)$$

**Лемма 1.** *Предположим, что  $\gamma > 0$ ,  $u_0 \in (0, c/\lambda)$  и  $F$  непрерывна. Тогда для любого  $G(0+) \in [0, 1]$  ИДУ (1.4) имеет единственное решение  $g_* > 0$  на  $[0, u_0]$ , непрерывно дифференцируемое на  $(0, u_0)$ , такое что  $g_*(0) = \lambda G(0+)/c$ .*

*Доказательство.* Уравнение (1.4) можно записать в эквивалентной форме как

$$(u^\gamma e^{-\alpha/u} g(u))' = u^{\gamma-2} e^{-\alpha/u} (\mu G(0+)\bar{F}(u) + Bg(u)). \quad (1.6)$$

Таким образом, будем искать на интервале  $[0, u_0]$  решение интегрального уравнения

$$u^\gamma e^{-\alpha/u} g(u) = \int_0^u t^{\gamma-2} e^{-\alpha/t} (\mu G(0+)\bar{F}(t) + Bg(t))dt \quad (1.7)$$

которое удобно переписать в виде

$$g(u) = \mu G(0+)u^{-\gamma}e^{\alpha/u} \int_0^u t^{\gamma-2}e^{-\alpha/t}\bar{F}(t) dt + u^{-\gamma}e^{\alpha/u} \int_0^u t^{\gamma-2}e^{-\alpha/t}Bg(t) dt.$$

Обозначим через  $g_0(u)$  первый член и через  $Tg(u)$  второй член в правой части выше. Замечая, что

$$\int_0^u t^{-2}e^{-\alpha/t} dt = \int_{1/u}^{\infty} e^{-\alpha s} ds = e^{-\alpha/u}/\alpha,$$

и используя соотношение  $\mu/\alpha = \lambda/c$ , получаем

$$g_0(u) \leq \mu G(0+)e^{\alpha/u} \int_0^u t^{-2}e^{-\alpha/t} dt = \lambda G(0+)/c.$$

Функция  $g_0$  непрерывна на  $(0, \infty)$ . Применяя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{u \downarrow 0} g_0(u) = \mu G(0+) \lim_{u \downarrow 0} \frac{u^{\gamma-2}e^{-\alpha/u}\bar{F}(u)}{e^{-\alpha/u}(\gamma u^{\gamma-1} + \alpha u^{\gamma-2})} = \lambda G(0+)/c.$$

Следовательно,  $g_0(u)$  непрерывна на  $[0, \infty)$ . Аналогично,

$$\lim_{u \downarrow 0} Tg(u) = \lim_{u \downarrow 0} \frac{u^{\gamma-2}e^{-\alpha/u}Bg(u)}{e^{-\alpha/u}(\gamma u^{\gamma-1} + \alpha u^{\gamma-2})} = 0,$$

и  $Tg(u)$  также является непрерывной функцией на  $[0, \infty)$ .

Обозначим через  $\|\cdot\|_u$  равномерную норму на  $C([0, u])$ . Для произвольной функции  $f \in C([0, u])$ , используя оценку (1.5), имеем

$$|Tg(u)| \leq \mu u \|g\|_u e^{\alpha/u} \int_0^u t^{-2}e^{-\alpha/t} dt \leq \frac{\lambda u}{c} \|g\|_u.$$

Отсюда следует, что  $\|Tf\|_{u_0} \leq \theta \|f\|_{u_0}$ , где  $\theta = \lambda u_0/c$ . Выберем  $u_0 < c/\lambda$ , гарантируя, что  $T$  является сжимающим отображением на  $C([0, u_0])$ .

Рассмотрим уравнение  $g(u) = g_0(u) + Tg(u)$  как интегральное уравнение в банаховом пространстве  $C([0, u_0])$ . По теореме Банаха о сжимающем отображении, примененной к  $g \mapsto g_0 + Tg$ , существует неподвижная точка  $g_*$ , откуда и вытекает требуемое.

□

**Замечание 2.** Решение  $g_*$  зависит от  $G(0+)$  и может быть записано как  $g_*(u) := g_*(u, G(0+))$ . Выбор  $G(0+)$  будет сделан в дальнейшем.

**Замечание 3.** Переходя к пределу  $u \downarrow 0$  в ИДУ (1.3), получаем соотношение  $cG'(0) = \lambda G(0+)$ , которое влечет начальное условие  $g_*(0)$ , полученное выше.

Считаем далее, что функция  $g$  на интервале  $(0, u_0]$  известна и равна  $g_*$ . Остается построить решение уравнения на  $[u_0, \infty)$ .

**Лемма 2.** Предположим, что  $\gamma > 1$ ,  $F$  непрерывна,  $\mathbb{E}\xi_1^{\gamma-1} < \infty$  и  $G(0+) > 0$ . Тогда ИДУ (1.4) имеет единственное решение  $g^* > 0$  на  $[u_0, \infty)$ , непрерывно дифференцируемое на  $(u_0, \infty)$  и такое, что  $g^*(u_0) = g_*(u_0)$  и  $u^\gamma g^*(u) \rightarrow C_\infty$  при  $u \rightarrow \infty$  для некоторой константы  $C_\infty > 0$ . Функция  $\hat{g} = g_* I_{[0, u_0)} + g^* I_{[u_0, \infty)}$  является классическим решением (1.4) на всей полупрямой.

*Доказательство.* Пусть  $\tilde{g}(u) := u^\gamma g(u)$  и рассмотрим на  $[u_0, \infty)$  уравнение

$$\tilde{g}(u)e^{-\alpha/u} = u_0^\gamma e^{-\alpha/u_0} g_*(u_0) + \int_{u_0}^u t^{\gamma-2} e^{-\alpha/t} (\mu G(0+) \bar{F}(t) + Bg(t)) dt.$$

Определим функцию

$$\Upsilon(u) := u_0^\gamma e^{-\alpha/u_0} g_*(u_0) + \int_{u_0}^u t^{\gamma-2} e^{-\alpha/t} \mathfrak{v}(t) dt,$$

где

$$\mathfrak{v}(t) := \mu G(0+) \bar{F}(t) + \mu \int_0^{u_0} g_*(y) \bar{F}(t-y) dy,$$

Тогда

$$\tilde{g}(u)e^{-\alpha/u} = \Upsilon(u) + \mu \int_{u_0}^u t^{\gamma-2} e^{-\alpha/t} \int_{u_0}^t y^{-\gamma} \tilde{g}(y) \bar{F}(t-y) dy dt.$$

Применяя теорему Фубини,

$$\int_{u_0}^u t^{\gamma-2} e^{-\alpha/t} \int_{u_0}^t y^{-\gamma} \tilde{g}(y) \bar{F}(t-y) dy dt = \int_{u_0}^u \tilde{g}(y) y^{-\gamma} \int_y^u t^{\gamma-2} e^{-\alpha/t} \bar{F}(t-y) dt dy.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\tilde{g}(u) = e^{\alpha/u} \Upsilon(u) + \int_{u_0}^u K(u, y) \tilde{g}(y) dy, \quad (1.8)$$

где

$$K(u, y) := \mu e^{\alpha/u} y^{-\gamma} \int_y^u t^{\gamma-2} e^{-\alpha/t} \bar{F}(t-y) dt.$$

Вышеприведенное соотношение представляет собой интегральное уравнение Вольтерры второго рода. Согласно теореме 2.1.1 из [38], уравнение имеет на интервале  $[u_0, \infty)$  единственное непрерывное решение  $\tilde{g}$ , которое является

дифференцируемым, и в случае, когда  $F$  непрерывна, оно непрерывно дифференцируемо. Тот же вывод справедлив и для функции  $g$ .

В силу того, что  $\mathbb{E}\xi_1^{\gamma-1} < \infty$ , имеем оценку

$$\int_{u_0}^{\infty} t^{\gamma-2} \bar{F}(t) dt < \infty. \quad (1.9)$$

Используя оценку

$$\mathbf{v}(t) \leq \mu G(0+) \bar{F}(t) + \mu u_0 \|g_*\|_{u_0} \bar{F}(t - u_0), \quad (1.10)$$

получаем, что

$$\int_{u_0}^{\infty} t^{\gamma-2} e^{-\alpha/t} \mathbf{v}(t) dt < \infty.$$

Таким образом,  $\Upsilon$  является непрерывной ограниченной возрастающей функцией на  $[u_0, \infty)$  с конечным пределом на бесконечности. Кроме того,

$$\int_{u_0}^u K(u, y) \tilde{g}(y) dy \leq \mu e^{\alpha/u_0} \int_{u_0}^u \tilde{g}(y) y^{-\gamma} \int_y^{\infty} t^{\gamma-2} e^{-\alpha/t} \bar{F}(t - y) dt dy.$$

Следовательно,

$$\tilde{g}(u) \leq e^{\alpha/u_0} \Upsilon(u) + \mu e^{\alpha/u_0} \int_{u_0}^u \tilde{g}(y) V^{\gamma}(y) dy,$$

где

$$V^{\gamma}(y) := y^{-\gamma} \int_y^{\infty} t^{\gamma-2} e^{-\alpha/t} \bar{F}(t - y) dt.$$

По лемме Гронуолла–Беллмана,

$$\tilde{g}(u) \leq e^{\alpha/u_0} \Upsilon(u) \exp \left\{ \mu e^{\alpha/u_0} \int_{u_0}^u V^{\gamma}(y) dy \right\}.$$

Используя оценку (1.9) получаем, что  $V^{\gamma}(y) = O(y^{-\gamma})$ , следовательно  $V^{\gamma}(y)$  интегрируема на  $[u_0, \infty)$  и  $\tilde{g}$  является непрерывной ограниченной функцией на  $[u_0, \infty)$ . Более того,  $\tilde{g}(u)$  стремится к константе при  $u \rightarrow \infty$ . Действительно,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} K(u, y) = \mu V^{\gamma}(y).$$

Таким образом,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{g}(u) = \mu \Upsilon(\infty) + \mu \int_{u_0}^{\infty} \tilde{g}(y) V^{\gamma}(y) dy =: C_{\infty}.$$

Полагая  $g^* = u^{-\gamma} \tilde{g}$ , получаем требуемое

Отметим, что функция  $\hat{g} = g_* I_{[0, u_0)} + g^* I_{[u_0, \infty)}$  непрерывно дифференцируема и в точке склейки  $u_0$ , которая может быть выбрана произвольным образом.  $\square$

**Замечание 4.** Стоит отметить, что свойство непрерывной дифференцируемости функции  $g^*$  ( $u$ , следовательно, решения уравнения  $\hat{g}$ ) не требует выполнения условия ограниченности момента  $\mathbb{E}\xi_1^{\gamma-1} < \infty$  и основывается лишь на непрерывности  $F$ .

**Замечание 5.** Дальнейшие рассуждения об отождествлении решения ИДУ  $G$  и вероятности неразорения  $\Phi$  требуют выполнения граничного условия  $G(\infty) = 1$  (в частности,  $G$  должна быть ограниченной функцией на  $[0, \infty)$ ). Для этого достаточно потребовать, чтобы  $\mathbb{E}\xi_1^\varepsilon < \infty$  для некоторого параметра  $\varepsilon \in (0, \gamma - 1)$ . Действительно, нетрудно видеть, что, вводя обозначение  $g^\varepsilon(u) := u^{\varepsilon+1}g(u)$ , уравнение (1.8) принимает вид

$$g^\varepsilon(u) = e^{\alpha/u} u^{-\gamma+\varepsilon+1} \Upsilon(u) + u^{-\gamma+\varepsilon+1} \int_{u_0}^u K(u, y) y^{\gamma-\varepsilon-1} g^\varepsilon(y) dy. \quad (1.11)$$

Повторяя в точности рассуждения из доказательства леммы 2 к уравнению (1.11), заменяя условие  $\mathbb{E}\xi^{\gamma-1} < \infty$  на  $\mathbb{E}\xi^\varepsilon < \infty$ , получаем, что

$$u^{-\gamma+\varepsilon+1} \Upsilon(u) \leq C, \quad C > 0,$$

$u$ , следовательно,

$$g^\varepsilon(u) \leq C e^{\alpha/u_0} \exp \left\{ \mu e^{\alpha/u_0} \int_{u_0}^u V^{\varepsilon+1}(y) dy \right\}.$$

Нетрудно видеть, что  $V^{\varepsilon+1}(y) = O(y^{-1-\varepsilon})$  интегрируема на  $[u_0, \infty)$ , откуда следует, что  $g^\varepsilon(u)$  ограничена при  $u \rightarrow \infty$ ,  $u$ , следовательно,  $G(\infty) < \infty$ .

**Замечание 6.** Если  $G(0+) = 0$ , то  $g_* \equiv 0$ ,  $\hat{g} \equiv 0$  и  $G \equiv G(0+) = 0$ . Следовательно, для такого начального значения  $G \neq \Phi$ , поскольку  $\Phi(\infty) = 1$ .

### 1.3 Вероятность неразорения и решение ИДУ

Найденное решение  $\hat{g}$  уравнения (1.4) зависит от  $G(0+)$ , то есть  $\hat{g}(u) = \hat{g}(u, G(0+))$ . Отсюда следует, что

$$G(u) := G(0+) + \int_0^u \hat{g}(s; G(0+)) ds$$

является решением уравнения (1.2), эквивалентного (1.3). Выберем значение  $G(0+)$  так, чтобы выполнялось равенство

$$G(0+) + \int_0^\infty \hat{g}(s; G(0+)) ds = 1.$$

Заметим, что  $\hat{g}(s; G(0+))$  является линейной функцией от  $G(0+)$  и приведенное выше уравнение имеет решение на  $[0,1]$ .

**Лемма 3.** *Функция  $G$  совпадает с  $\Phi$ .*

*Доказательство.* Пусть  $h > 0$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что  $u \in (\varepsilon, 1/\varepsilon)$ . Положим  $\tau^{u,\varepsilon} := \inf\{t \geq 0 : X_t^u \notin (\varepsilon, 1/\varepsilon)\}$ . Применим формулу Ито к  $(X_{t \wedge \tau^{u,\varepsilon}}^u)$ , где  $G$  есть классическое решение (1.1) с  $G(\infty) = 1$ . Получим

$$G(X_{t \wedge \tau^{u,\varepsilon}}^u) = G(u) + M_{t \wedge \tau^{u,\varepsilon}} + \int_0^{t \wedge \tau^{u,\varepsilon}} (\mathcal{A}G)(X_s^u) ds,$$

где

$$M_{t \wedge \tau^{u,\varepsilon}} := \int_0^{t \wedge \tau^{u,\varepsilon}} G'(X_s^u) \tilde{\sigma} X_s^u dW_s + \int_0^{t \wedge \tau^{u,\varepsilon}} \int (G(X_{s-}^u + x) - G(X_{s-}^u))(p_P - q_P)(ds, dx),$$

оператор  $\mathcal{A}$  есть интегро-дифференциальный оператор из (1.1). Заметим, что в силу (1.1) интегральный член по  $ds$  равен нулю. Кроме того, нетрудно видеть, что процесс  $(M_{t \wedge \tau^{u,\varepsilon}})_{t \geq 0}$  является ограниченным мартингалом, начинающимся из нуля. Следовательно,  $\mathbb{E}[M_{t \wedge \tau^{u,\varepsilon}}] = 0$  и  $G(u) = \mathbb{E}[G(X_{t \wedge \tau^{u,\varepsilon}}^u)]$ . Устремляя  $t \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем, что  $G(u) = \mathbb{E}[G(X_{\tau^u}^u)]$ .

Покажем, что предположение  $\gamma > 1$  гарантирует, что  $X_t^u \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$  п.н. на множестве  $\{\tau^u = \infty\}$ , то есть  $X_\infty^u = \infty$  п.н. на этом множестве. Действительно, по стохастической версии формулы Коши  $X_t = Z_t Y_t^u$ , где

$$Z_t := \exp\{(\tilde{a} - \tilde{\sigma}^2/2)t + \tilde{\sigma} W_t\} = \exp\{(2/\tilde{\sigma}^2)t(\tilde{\beta} + \sigma W_t/t)\}, \quad Y_t^u := u + \int_0^t Z_s^{-1} dP_s.$$

По закону больших чисел  $W_t/t \rightarrow 0$  (почти наверное) при  $t \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $Z$  экспоненциально возрастает. На множестве  $\{\tau^u = \infty\}$  процесс  $Y$  строго положителен. Кроме того,

$$Y_t^u = u + \int_0^t Z_s^{-1} dP_s \rightarrow Y_\infty^u := u + c \int_0^\infty Z_s^{-1} ds - \sum_{n=1}^\infty \xi_n Z_{T_n}^{-1}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Заметим, что  $Y_\infty^u = 0$  влечет за собой равенство

$$\xi_1 = Z_{T_1} \left( u + c \int_0^\infty Z_s^{-1} ds - \sum_{n=2}^\infty \xi_n Z_{T_n}^{-1} \right) \quad \text{п.н..}$$

В силу независимости и непрерывности случайных величин  $\xi_i$  и  $W$ , данное событие имеет нулевую вероятность. Таким образом, на множестве  $\{\tau^u = \infty\}$  выполнено  $Y_t^u > 0$  и, следовательно,  $X_t^u \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Кроме того, на множестве  $\{\tau^u < \infty\}$  выполнено  $X_{\tau^u}^u < 0$  и  $G(X_{\tau^u}^u) = 0$ . Отсюда следует, что

$$G(u) = \mathbb{E}[G(X_{\tau^u}^u)I_{\{\tau^u=\infty\}}] + \mathbb{E}[G(X_{\tau^u}^u)I_{\{\tau^u<\infty\}}] = G(\infty)\mathbb{P}(\tau^u = \infty) = \Phi(u)$$

и получаем требуемое.  $\square$

В силу того, что  $\Phi = G$  и, применяя правило Лопиталя,  $1 - G(u) \sim Cu^{-\gamma+1}$  при  $u \rightarrow \infty$ , получаем требуемую асимптотику для  $\Psi$  из 1.

**Замечание 7.** Без предположения о непрерывности  $F$  можно утверждать только, что  $G \in C([0, \infty)) \cap C^1((0, \infty))$ , вторая производная существует и непрерывна за исключением счетного множества  $\Gamma$ , где  $F$  имеет разрывы, уравнение (1.1) выполняется во всех точках вне  $\Gamma$ .

## 1.4 Численное решение ИДУ

В первую очередь, предложим алгоритм вычисления вероятности неразложения  $\Phi$  для классической модели Крамера—Лундберга, где  $a = \sigma = r = 0$ . Напомним, что

$$\mathcal{I}g(u) := \int_0^u g(u-z) \bar{F}(z) dz = \int_0^u g(z) \bar{F}(u-z) dz$$

и уравнение (1.3) может быть записано в эквивалентной форме как

$$g(u) = \frac{\lambda}{c} \left( G(0+) \bar{F}(u) + \int_0^u g(z) \bar{F}(u-z) dz \right) \quad (1.12)$$

с  $g = G'$ .

Рассмотрим равномерную сетку

$$\mathcal{U} = \{u_k : u_k = kh, h = u_{\max}/N, k = 0, \dots, N\}$$

на интервале  $[0, u_{max}]$ , где  $u_{max}$  и  $N$  — достаточно большие числа. Интегральный член можно аппроксимировать с помощью метода трапеций на  $\mathcal{U}$  следующим образом:

$$\mathcal{I}g(u_k) \approx h \left( \frac{g(0)\bar{F}(u_k) + g(u_k)}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} g(u_i)\bar{F}(u_k - u_i) \right), \quad k \geq 1,$$

и  $\mathcal{I}g(u_0) = 0$ . Следовательно, уравнение (1.12) может быть аппроксимировано конечно-разностной схемой:

$$g_k = \frac{\lambda}{c} \left( G(0+)\bar{F}(u_k) + h \frac{g_0\bar{F}(u_k) + g_k}{2} + h \sum_{i=1}^{k-1} g_i\bar{F}(u_k - u_i) \right) \quad (1.13)$$

с  $g_0 = \lambda G(0+)/c$ , где  $g_k$  находятся рекуррентно. Далее, находим

$$G_{k+1} = G_k + g_k h, \quad k \geq 0, \quad (1.14)$$

с  $G_0 = G(0+)$ .

Окончательный алгоритм выбора начального значения  $G_0$  и нахождения решения  $G$  можно описать в два этапа:

1. Задаем произвольное  $\tilde{G}_0^1 \in (0, 1)$  и вычисляем  $G_k^1$ ,  $k \geq 1$ , применяя схемы (1.13) и (1.14) с  $G_0^1 = \tilde{G}_0^1$ .
2. Полагаем  $\tilde{G}_0^2 = \tilde{G}_0^1/G_N^1$  и вычисляем  $G_k^2$ ,  $k \geq 1$  с  $G_0^2 = \tilde{G}_0^2$ .

Для случая экспоненциально распределенных страховых выплат с  $F(x) = 1 - e^{-x/\theta}$ ,  $x \geq 0$ , при положительной нагрузке безопасности  $c - \lambda\theta > 0$ , вероятность неразорения  $\Phi$  может быть найдена аналитически как

$$\Phi(u) = 1 - (\lambda\theta/c)e^{-(c-\lambda\theta)/(\theta c)u}, \quad u \geq 0$$

(см., например, [5], следствие 3.2). На первом графике Рисунка 1.1 показано, что численное решение, полученное из (1.13) и (1.14), совпадает с аналитическим.

Обобщая данную схему на случай инвестиций в рисковый актив, нетрудно заметить, что уравнение (1.6) может быть записано в эквивалентной форме

$$(u^\gamma e^{-\alpha/u} g(u))' = u^{\gamma-2} e^{-\alpha/u} \left( \mu G(0+)\bar{F}(u) + \mu \int_0^u g(z)\bar{F}(u-z)dz \right). \quad (1.15)$$

Пусть  $v(u) = u^{\gamma-2} e^{-\alpha/u}$ . Уравнение (1.15) можно приблизить конечно-разностной схемой

$$(u_k + h/2)^2 \frac{v_{k+1}g_{k+1} - v_k g_k}{h} = \frac{1}{2} ((\mathcal{I}g)_{k+1} + (\mathcal{I}g)_k), \quad k \geq 0,$$

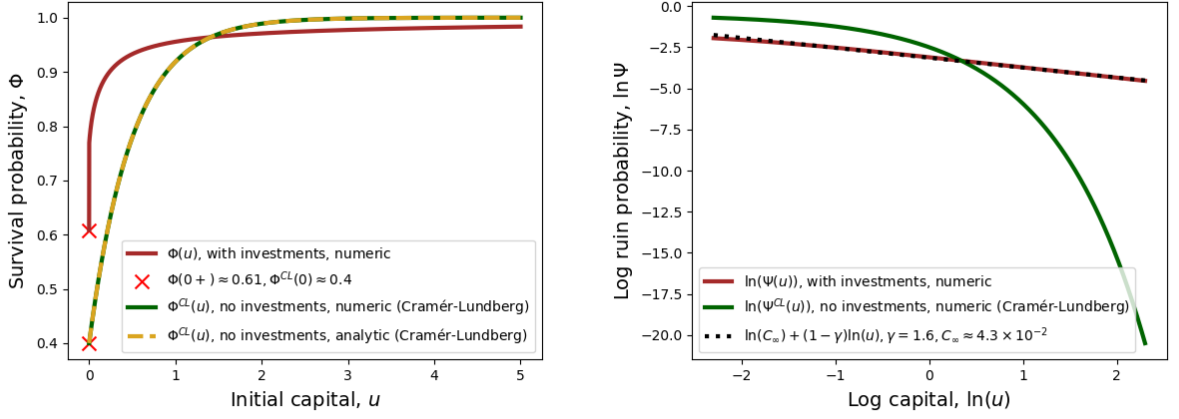


Рисунок 1.1 — Вероятности неразорения и разорения, асимптотики в модели с экспоненциальными страховыми выплатами;  $a = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0$ ,  $\kappa = 1$ ,  $c = 0.001$ ,  $\lambda = 0.003$ ,  $\theta = 0.2$  и  $\gamma = 1.6$ .

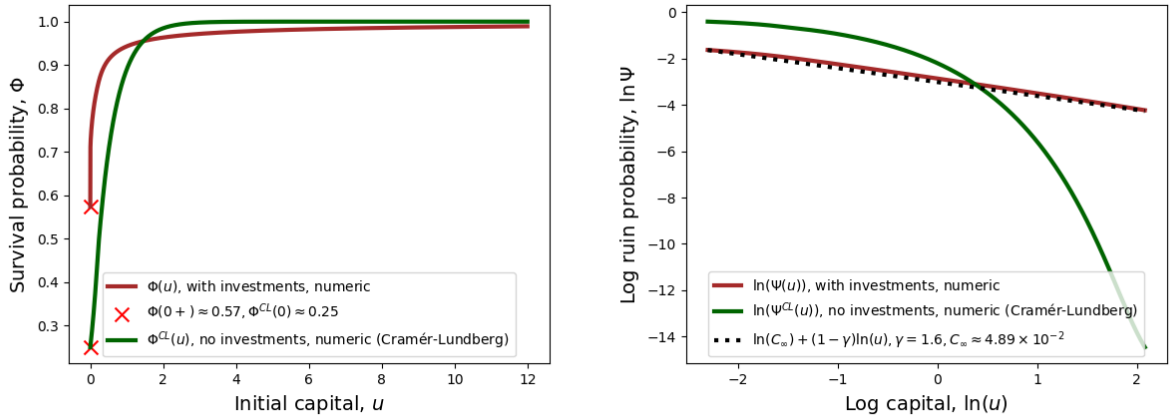


Рисунок 1.2 — Вероятности неразорения и разорения, асимптотики в модели со страховыми выплатами, распределенными по степенному закону;  $a = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $r = 0$ ,  $\kappa = 1$ ,  $c = 0.001$ ,  $\lambda = 0.003$ ,  $\delta = 5$ ,  $x_m = 0.2$  и  $\gamma = 1.6$ .

с  $g_0 = \lambda G(0+)/c$ ,  $v_0 = 0$ ,  $(\mathcal{J}g)_0 = 0$  и

$$(\mathcal{J}g)_k = \mu v_k \left( G(0+) \bar{F}(u_k) + h \frac{g_0 \bar{F}(u_k) + g_k}{2} + h \sum_{i=1}^{k-1} g_i \bar{F}(u_k - u_i) \right), \quad k \geq 1.$$

Аналогично,  $g_k$  находятся рекуррентно и, применяя (1.14), находим  $G_k$  для  $k \geq 1$ . Приведенная выше схема гарантирует сходимость порядка  $O(h)$ .

Вычислим вероятности неразорения для моделей с инвестициями в рисковый актив и экспоненциально распределенными страховыми выплатами с

$F(x) = 1 - e^{-x/\theta}$ ,  $x > 0$ , и страховыми выплатами, распределенными по степенному закону, с  $F(x) = 1 - (x_m/x)^\delta$ ,  $x > x_m$ . Сравним полученные результаты с вероятностями неразорения для случаев безрисковых инвестиций. Результаты представлены на Рисунках 1.1 и 1.2.

- Вероятности выживания  $\Phi$  оказываются гладкими и монотонно возрастающими функциями, и в случае рискованных инвестиций они стремятся к единице медленнее, чем в случае отсутствия инвестиций. Последний факт подтверждает природу рискованных инвестиций, которые требуют дополнительного выделения капитала для покрытия более вероятных потерь.
- Для случая рискованных инвестиций асимптотическое поведение вероятностей разорения  $\Psi(u) = 1 - \Phi(u)$  для больших  $u$  следует степенному закону  $C_\infty/u^{\gamma-1}$ . Константа  $C_\infty$  может быть найдена численно, чтобы соответствовать асимптотическому поведению вероятности разорения в координатах логарифма капитала:

$$\ln \Psi(u) = \ln \left( C_\infty / u^{\gamma-1} (1 + o(1)) \right) = \ln C_\infty + (1 - \gamma) \ln(u) + o(1).$$

- Начальное значение  $\Phi(0+)$  может быть вычислено численно так, чтобы удовлетворять условию  $\Phi(\infty) = 1$ .

## Глава 2. Асимптотика вероятности разорения в модели с инвестициями в рисковый актив и двусторонними скачками

Рассматривается страховая компания, инвестирующая свой капитал в рисковый актив, динамика цены которого подчиняется ГБД с параметрами  $a$  и  $\sigma$ . Процесс, отвечающий за страховую деятельность компании, имеет как положительные, так и отрицательные скачки. Плотности скачков процесса являются решениями однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Основной результат заключается в том, что в предположении достаточной гладкости вероятности разорения и при  $\beta := 2a/\sigma^2 - 1 \in (0, 1)$  вероятность разорения убывает как степенная функция с показателем  $\beta$ .

### 2.1 Описание модели и формулировка основного результата

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  с фильтрацией  $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  заданы независимые винеровский процесс  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  и составной пуассоновский процесс  $P = (P_t)_{t \geq 0}$  со сносом  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Определим пуассоновскую случайную меру  $p_P(dt, dx)$  процесса  $P$  с компенсатором  $\Pi_P(dx)dt$ , где  $\Pi_P(\mathbb{R}) < \infty$ . Будем далее предполагать, что  $\Pi_P(\mathbb{R}_+) > 0$  и  $\Pi_P(\mathbb{R}_-) > 0$ .

Следуя [16], рассмотрим модель страховой компании, инвестирующей свой резерв в рисковые активы, цена которых описывается геометрическим броуновским движением

$$S_t = S_0 e^{(a - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

Динамика резерва компании описывается процессом  $X = X^u$  вида

$$X_t = u + \int_0^t X_s dR_s + P_t, \quad t \geq 0,$$

где  $R_t = at + \sigma W_t$  является процессом относительного изменения цены рискового актива, процесс  $P$  отражает «страховую» деятельность компании, величина  $u > 0$  задает начальный капитал компании. В данной главе будет более удобно

представить процесс  $P$  в виде

$$P_t = ct + \sum_{i=1}^{N_t^2} \xi_i^2 - \sum_{i=1}^{N_t^1} \xi_i^1,$$

где  $N^1, N^2$  суть пуассоновские процессы с интенсивностями  $\lambda_1 = \Pi_P(\mathbb{R}_-)$  и  $\lambda_2 = \Pi_P(\mathbb{R}_+)$  соответственно, случайные величины  $\xi_i^1, \xi_i^2$  положительны и имеют распределения  $F_1(x) := \Pi_P((-x, 0])/\lambda_1$  и  $F_2(x) := \Pi_P((0, x])/\lambda_2$  при  $x > 0$ .

Следуя [23], будем считать, что случайные величины  $\xi_i^1$  и  $\xi_i^2$  являются абсолютно непрерывными и их плотности распределения  $f_1$  и  $f_2$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\mathcal{P}_1 \left( \frac{d}{dx} \right) f_1(x) = 0, \quad \mathcal{P}_2 \left( \frac{d}{dx} \right) f_2(x) = 0, \quad (2.1)$$

где формальные дифференциальные операторы  $\mathcal{P}_i, i = 1, 2$  (см. [39, гл. 3, п. 6]), заданы в виде

$$\mathcal{P}_i \left( \frac{d}{dx} \right) = \sum_{j=0}^n \alpha_i^j \frac{d^j}{dx^j}, \quad \alpha_i^j \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i^0 \neq 0.$$

Также определим соответствующие им формальные сопряженные операторы  $\mathcal{P}_i^*, i = 1, 2$ ,

$$\mathcal{P}_i^* \left( \frac{d}{dx} \right) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_i^j \frac{d^j}{dx^j}.$$

Обозначим  $\widehat{f}$  одностороннее преобразование Лапласа функции  $f$ , заданное в виде

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx.$$

Иногда будет удобнее использовать одностороннее преобразование Лапласа-Стилтьеса

$$\widehat{U}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dU(x),$$

где  $U(dx)$  есть мера, заданная на  $\mathbb{R}_+$ .

Отметим, что плотности распределений  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , удовлетворяющие соотношениям (2.1), имеют преобразования Лапласа, представимые в виде рациональных дробей  $p(s)/q(s)$ , где  $p(s)$  и  $q(s)$  являются многочленами конечных

степеней (см. [5], гл. I). Данный класс распределений содержит распределения с плотностями вида

$$f(x) = \sum_{j=0}^{q_1} c_j x^j e^{\eta_j x} + \sum_{j=0}^{q_2} d_j x^j \cos(a_j x) e^{\delta_j x} + \sum_{j=0}^{q_3} e_j x^j \sin(b_j x) e^{\varepsilon_j x}.$$

Например, данному классу распределений принадлежит распределение Эрланга с параметрами  $n$  и  $\beta$

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \beta^n x^{n-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0,$$

где оператор  $\mathcal{P}$  задан в виде

$$\mathcal{P} \left( \frac{d}{dx} \right) = \left( \frac{d}{dx} + \beta \right)^n.$$

Другим примером является смесь экспоненциальных распределений

$$f(x) = \theta \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1 - \theta) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}, \quad x > 0,$$

где

$$\mathcal{P} \left( \frac{d}{dx} \right) = \left( \frac{d}{dx} + \lambda_1 \right) \left( \frac{d}{dx} + \lambda_2 \right).$$

Введем стандартные обозначения:  $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t^u < 0\}$  (момент разорения),  $\Psi(u) := \mathbb{P}(\tau < \infty)$  (вероятность разорения). Основной результат главы об асимптотическом поведении вероятности разорения  $\Psi(u)$  сформулирован в следующей теореме.

**Теорема 2.** Положим  $\beta = 2a/\sigma^2 - 1$ , где  $\beta \in (0, 1)$ . Пусть плотности распределений  $f_i, i = 1, 2$ , удовлетворяют соотношениям (2.1) и существует  $\beta' \in (0, \beta)$ , что  $\mathbb{E}(\xi_1^1)^{\beta'} < 1$ . Тогда  $\Psi(u) \sim C u^{-\beta}$ ,  $u \rightarrow \infty$  для некоторой  $C > 0$ .

## 2.2 Интегро-дифференциальное уравнение

Согласно утверждению 6.1 [16], вероятность разорения  $\Psi$  удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\mathcal{L}(\Psi)(u) + \mathcal{I}(\Psi)(u) = 0, \tag{2.2}$$

где

$$\mathcal{L}(\Psi)(u) = \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \Psi''(u) + (au + c)\Psi'(u) - (\lambda_1 + \lambda_2)\Psi(u),$$

$$\mathcal{I}(\Psi)(u) = \int \Psi(u+y)\Pi_P(dy).$$

Далее будет удобно работать со следующим представлением интегрального оператора

$$\mathcal{I}(\Psi)(u) = \lambda_1 \mathcal{I}_1(\Psi)(u) + \lambda_2 \mathcal{I}_2(\Psi)(u) = \lambda_1 \int \Psi(u-y)f_1(y)dy + \lambda_2 \int \Psi(u+y)f_2(y)dy.$$

Будем в дальнейшем предполагать, что для некоторого  $\beta' \in (0, \beta \wedge 1)$  верно  $\mathbb{E}(\xi_1^1)^{\beta'} < 1$ . Тогда для вероятности разорения выполняется условие регулярности

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) = 0 \quad (2.3)$$

(см. лемма 2.1 [16]).

Кроме того, будем считать в дальнейшем, что вероятность разорения  $\Psi \in C^{(n)}((0, \infty))$ .

**Утверждение 1.** Для  $\mathcal{I}_1(\Psi)(u)$  справедливо уравнение

$$\mathcal{P}_1 \left( \frac{d}{du} \right) \mathcal{I}_1(\Psi)(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \Psi^{(k)}(u) \sum_{i=k}^{n-1} \alpha_1^{i+1} f_1^{(i-k)}(0).$$

*Доказательство.* Нетрудно видеть, что

$$\int \Psi(u-y)f_1'(y)dy = \frac{d}{du} \mathcal{I}_1(\Psi)(u) - f_1(0)\Psi(u),$$

$$\int \Psi(u-y)f_1''(y)dy = \frac{d^2}{du^2} \mathcal{I}_1(\Psi)(u) - f_1(0)\Psi'(u) - f_1'(0)\Psi(u).$$

Следуя по индукции, получаем

$$\int \Psi(u-y)f_1^{(k)}(y)dy = \frac{d^k}{du^k} \mathcal{I}_1(\Psi)(u) - \sum_{i=1}^k f_1^{(i-1)}(0)\Psi^{(k-i)}(u), \quad 0 \leq k \leq n. \quad (2.4)$$

Домножая обе части (2.4) на  $\alpha_1^k$ , учитывая граничные условия и суммируя слагаемые,

$$\int \Psi(u-y)\mathcal{P}_1 \left( \frac{d}{du} \right) f_1(y)dy = \mathcal{P}_1 \left( \frac{d}{du} \right) \mathcal{I}_1(\Psi)(u) - \sum_{k=1}^n \alpha_1^k \sum_{i=1}^k f_1^{(i-1)}(0)\Psi^{(k-i)}(u).$$

В силу (2.1), слагаемое в левой части последнего равенства равно 0. После группировки слагаемых в правой части равенства, получаем требуемое соотношение.  $\square$

**Утверждение 2.** Для  $\mathcal{I}_2(\Psi)(u)$  справедливо соотношение

$$\mathcal{P}_2^* \left( \frac{d}{du} \right) \mathcal{I}_2(\Psi)(u) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \Psi^{(k)}(u) \sum_{i=k}^{n-1} \alpha_2^{i+1} f_2^{(i-k)}(0).$$

*Доказательство.* Следуя рассуждениям из утверждения 1, нетрудно видеть, что соотношение (2.4) переписывается в виде

$$\int \Psi(u+y) f_2^{(k)}(y) dy = (-1)^k \frac{d^k}{du^k} \mathcal{I}_2(\Psi)(u) - \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} f_2^{(i-1)}(0) \Psi^{(k-i)}(u).$$

Домножая обе части полученного равенства на  $\alpha_2^k$ , учитывая граничные условия и суммируя слагаемые,

$$\int \Psi(u+y) \mathcal{P}_2 \left( \frac{d}{du} \right) f_2(y) dy = \mathcal{P}_2^* \left( \frac{d}{du} \right) \mathcal{I}_2(\Psi)(u) - \sum_{k=1}^n \alpha_2^k \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} f_2^{(i-1)}(0) \Psi^{(k-i)}(u).$$

В силу (2.1), слагаемое в левой части последнего равенства равно 0. После группировки слагаемых в правой части равенства, получаем требуемое соотношение.  $\square$

### 2.3 Асимптотический анализ вероятности разорения

Вероятность разорения  $\Psi(u)$  удовлетворяет (2.2), которое будем записывать в виде

$$\frac{1}{2} \sigma^2 u^2 \Psi''(u) + (au + c) \Psi'(u) - (\lambda_1 + \lambda_2) \Psi(u) + \lambda_1 \mathcal{I}_1(\Psi)(u) + \lambda_2 \mathcal{I}_2(\Psi)(u) = 0.$$

Определим формальный дифференциальный оператор

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2^* = \sum_{j,k=0}^n (-1)^k \alpha_1^j \alpha_2^k \frac{d^{j+k}}{dx^{j+k}}.$$

Применяя его к уравнению выше, получим

$$q_{2n+2}(u) \Psi^{(2n+2)}(u) + q_{2n+1}(u) \Psi^{(2n+1)}(u) + \dots + q_1(u) \Psi'(u) = 0, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned}
q_j(u) &= a_j u^2 + b_j u + c_j, \quad 0 \leq j \leq 2n+2, \\
a_j &= \frac{\sigma^2}{2} \sum_{\substack{k,m=0 \\ k+m=j-2}}^n \alpha_1^k \alpha_2^m (-1)^m, \\
b_j &= \sum_{\substack{k,m=0 \\ k+m=j-1}}^n (\sigma^2(k+m) + a) \alpha_1^k \alpha_2^m (-1)^m, \\
c_j &= d_j + g_j + \sum_{\substack{k,m=0 \\ k+m=j}}^n (k+m) \left( \frac{\sigma^2}{2}(k+m) + (a - \frac{\sigma^2}{2}) \right) \alpha_1^k \alpha_2^m (-1)^m, \\
d_j &= c \sum_{\substack{k,m=0 \\ k+m=j-1}}^n \alpha_1^k \alpha_2^m (-1)^m - (\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{\substack{k,m=0 \\ k+m=j}}^n \alpha_1^k \alpha_2^m (-1)^m, \\
g_j &= \lambda_1 \sum_{\substack{k,m=0 \\ k+m=j}}^{n-1,n} \alpha_2^m (-1)^m \sum_{i=k}^{n-1} \alpha_1^{i+1} f_1^{(i-k)}(0) \\
&\quad + \lambda_2 \sum_{\substack{k,m=0 \\ k+m=j}}^{n-1,n} \alpha_1^m (-1)^k \sum_{i=k}^{n-1} \alpha_2^{i+1} f_2^{(i-k)}(0).
\end{aligned}$$

В формулах выше и далее считаем, что  $\sum_{\emptyset} = 0$ .

Заметим, что

$$a_{2n+2} = \frac{\sigma^2}{2} \alpha_1^n \alpha_2^n (-1)^n > 0, \quad b_{2n+2} = c_{2n+2} = 0, \quad c_{2n+1} = \alpha_1^n \alpha_2^n (-1)^n \neq 0.$$

Функция  $uq_{2n+1}(u)/q_{2n+2}(u)$  не является голоморфной функцией в точке  $u = \infty$ . Следовательно, точка  $u = \infty$  является иррегулярной особой точкой уравнения (2.5) и метод Фробениуса неприменим (см. [11, гл. 1, п. 1-2]). Вводя обозначение  $G = \Psi'$  и применяя преобразование Лапласа к полученному уравнению, используя свойства

$$\begin{aligned}
\widehat{G^{(k)}}(s) &= s^k \widehat{G}(s) - \sum_{i=1}^k s^{k-i} G^{(i-1)}(0^+), \\
u \widehat{G^{(k)}}(s) &= -s^k \widehat{G}'(s) - k s^{k-1} \widehat{G}(s) + \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) s^{k-i-1} G^{(i-1)}(0^+),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{u^2 G^{(k)}}(s) &= s^k \widehat{G}''(s) + 2ks^{k-1} \widehat{G}'(s) + k(k-1)s^{k-2} \widehat{G}(s) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k-2} (k-i)(k-i-1)s^{k-i-2} G^{(i-1)}(0^+),\end{aligned}$$

приходим к уравнению

$$p_{2n+1}(s) \widehat{G}''(s) + l_{2n+1}(s) \widehat{G}'(s) + r_{2n+1}(s) \widehat{G}(s) = v_{2n}(s), \quad (2.6)$$

где

$$p_{2n+1}(s) = \sum_{i=1}^{2n+1} a_{i+1} s^i, \quad v_{2n}(s) = \sum_{i=0}^{2n} \widetilde{v}_{i+1} s^i, \quad (2.7)$$

$$l_{2n+1}(s) = \sum_{i=0}^{2n+1} \widetilde{b}_{i+1} s^i, \quad \widetilde{b}_i = \begin{cases} 2ia_{i+1} - b_i, & 1 \leq i \leq 2n+1, \\ -b_{2n+2}, & i = 2n+2, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$r_{2n+1}(s) = \sum_{i=0}^{2n+1} \widetilde{c}_{i+1} s^i, \quad \widetilde{c}_i = \begin{cases} i(i+1)a_{i+2} - 2ib_i + c_i, & 1 \leq i \leq 2n, \\ -2(2n+1)b_{2n+2}, & i = 2n+1, \\ c_{2n+1}, & i = 2n+2. \end{cases} \quad (2.9)$$

Отметим, что явные формулы коэффициентов  $\widetilde{v}_i$  достаточно громоздки и опущены, а их значения не влияют на ход дальнейших рассуждений. Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Утверждение 3.** Преобразование Лапласа  $\widehat{G}$  функции  $\Psi'$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.6), коэффициенты которого заданы соотношениями (2.7) - (2.9).

Предположим, что  $2a/\sigma^2 < 2$ . Заметим, что  $s = 0$  является регулярной особой точкой (2.6), так как

$$\widetilde{l}_0 := \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{l_{2n+1}(s)}{p_{2n+1}(s)} = \frac{\widetilde{b}_1}{a_2} = \frac{2a_2 - b_1}{a_2} = 2 - \frac{b_1}{a_2} = 2 - \frac{2a}{\sigma^2},$$

$$\widetilde{r}_0 := \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{r_{2n+1}(s)}{p_{2n+1}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\widetilde{c}_1}{a_2} = 0.$$

Применим метод Фробениуса [11, гл. 1, п. 2] для решения (2.6). Определяющее уравнение имеет вид

$$\rho(\rho - 1) + \widetilde{l}_0 \rho + \widetilde{r}_0 = 0.$$

Нетрудно видеть, что решениями определяющего уравнения являются

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \frac{2a}{\sigma^2} - 1.$$

Тогда при  $|s| < \delta$  фундаментальную систему решений (2.6) образуют

$$\widehat{G}_1(s) = s^{\rho_1} \gamma_1(s), \quad \widehat{G}_2(s) = s^{\rho_2} \gamma_2(s), \quad (2.10)$$

где  $\gamma_i(s)$  являются голоморфными функциями при  $|s| < \delta$  и  $\gamma_i(0) \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ .  
Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\widehat{G}^{\text{oo}}(s) = c_1 \widehat{G}_1(s) + c_2 \widehat{G}_2(s), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Применим метод вариации произвольных постоянных. Частное решение имеет вид

$$\widehat{G}^{\text{ch}}(s) = -\widehat{G}_1(s) \int_0^s \frac{\widehat{G}_2(t) v_{2n}(t)}{p_{2n+1}(t) W(t)} dt + \widehat{G}_2(s) \int_0^s \frac{\widehat{G}_1(t) v_{2n}(t)}{p_{2n+1}(t) W(t)} dt,$$

где  $W(s)$  есть вронскиан фундаментальной системы решений (2.10).

$$W(s) = \widehat{G}_1(s) \widehat{G}_2'(s) - \widehat{G}_2(s) \widehat{G}_1'(s) = s^{\rho_1 + \rho_2 - 1} \widehat{\gamma}(s),$$

где  $\widehat{\gamma}(s)$  голоморфная в окрестности 0 функция.

В силу оценок

$$\frac{\widehat{G}_2(s)}{p_{2n+1}(s) W(s)} \sim \tilde{c}_1 \frac{s^{\rho_2}}{s^{\rho_1 + \rho_2}} = \tilde{c}_1, \quad \frac{\widehat{G}_1(s)}{p_{2n+1}(s) W(s)} \sim \tilde{c}_2 \frac{s^{\rho_1}}{s^{\rho_1 + \rho_2}} = \tilde{c}_2 s^{-\rho_2}, \quad s \rightarrow 0,$$

где  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$ , следует, что

$$\widehat{G}^{\text{ch}}(s) = O(s), \quad s \rightarrow 0.$$

Заметим, что в силу условия регулярности (2.3) имеем  $c_1 = 0$ . Таким образом,

$$\widehat{G}(s) \sim \widetilde{C} s^{\rho_2}, \quad s \rightarrow 0,$$

откуда в силу тауберовой теоремы [40, гл. XIII, п. 5, теорема 2]

$$\Psi(u) \sim C u^{-\rho_2}, \quad u \rightarrow \infty,$$

где  $C > 0$ . Теорема 2 доказана.

### Глава 3. Вероятность разорения в модели Крамера-Лундберга с инвестициями в рисковый актив в случайной среде

Настоящая глава содержит результаты для модели страховой компании, инвестирующей свой капитал в рисковый актив, динамика цены которого задана геометрическим броуновским движением с параметрами, модулируемыми марковским процессом с конечным числом состояний. Основной результат главы заключается в доказательстве гладкости вероятности разорения как функции начального капитала в рассматриваемой модели и выводе ИДУ для вероятности разорения.

#### 3.1 Описание модели и формулировка основного результата

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$  заданы независимые процессы  $W$ ,  $P$ , и  $\theta^i$ , задающие фильтрацию  $F$ :

1. Стандартный винеровский процесс  $W = (W_t)$ , где  $W_0 = 0$ .
2. Составной пуассоновский процесс  $P = (P_t)$  со сносом:

$$P_t = ct + \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$$

где  $c$  является константой,  $N = (N_t)$  есть непрерывный справа пуассоновский процесс с интенсивностью  $\alpha > 0$ , и  $(\xi_k)$  являются н.о.р.с.в. с функцией распределения  $F_\xi = F_\xi(dx)$ . Иногда удобнее использовать другое обозначение

$$P_t = ct + x * \pi_t = ct + \int_0^t \int x \pi(ds, dx) \quad (3.1)$$

где  $\pi = \pi(dt, dx)$  является пуассоновской случайной мерой процесса  $P$  с компенсатором  $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}(dt, dx) = \Pi(dx)dt$  и мерой Леви  $\Pi(dx) = \alpha F_\xi(dx)$ . Обозначим  $T_n$ ,  $n \geq 1$ , моменты скачков процесса  $N_t = \pi([0, t] \times \mathbb{R})$ , где  $T_0 = 0$ .

3. Кусочно-постоянный непрерывный справа марковский процесс  $\theta^i = (\theta_t^i)$  со значениями в множестве  $E := \{0, 1, \dots, K-1\}$ , начальным значением  $\theta_0^i = i$ , и матрицей интенсивности  $(\lambda_{jk})$ . Также будем предполагать, что все состояния процесса являются сообщающимися.

Обозначим  $D_0$  пространство траекторий процессов  $\theta^i$ , символом  $Z$  будем обозначать элемент пространства  $D_0$ . Заметим, что  $D_0$  можно рассматривать как подпространство пространства Скорохода  $D$ .

Напомним, что  $\lambda_{jj} = -\sum_{k \neq j} \lambda_{jk}$  и  $\lambda_j := -\lambda_{jj} > 0$  для каждого  $j$ . Обозначим  $\tau_n^i$ ,  $n \geq 1$  моменты скачков процесса  $\theta^i$  и положим  $\tau_0^i = 0$ . Рассмотрим марковскую цепь  $\vartheta_n^i := \theta_{\tau_n^i}^i$  с переходными вероятностями  $p_{kl} = \lambda_{kl}/\lambda_k$ ,  $k \neq l$ , и  $p_{kk} = 0$ . Заметим, что условное распределение промежутка между скачками  $\tau_{k+1}^i - \tau_k^i$  при заданном значении  $\vartheta_k^i = j$  является экспоненциальным с параметром  $\lambda_j$ . Определим случайную меру  $p^i := \sum_n e_{(\tau_n^i, \vartheta_n^i)}$ , где  $e_x$  задает единичную массу в точке  $x$ . Данную меру можно также определить с помощью считающего процесса

$$p^i([0, t], k) := \sum_{\tau_n^i \leq t} \mathbb{I}_{\{\vartheta_n^i = k\}}, \quad k \in E.$$

Компенсатор  $\tilde{p}^i$  случайной меры  $p^i$  равен

$$\tilde{p}^i(dt, k) = \mathbb{I}_{\{\theta_t^i \neq k\}} \lambda_{\theta_t^i k} dt. \quad (3.2)$$

Для упрощения формул опустим индекс  $i$  там, где это возможно, и будем использовать далее стандартные обозначения процессов из теории семимартингалов (см., например, [41]), где под процессом  $L = (L_t)$  будем понимать детерминированный процесс  $L_t := t$ . Тогда процесс  $S$  может быть представлен как решение стохастического уравнения

$$S = 1 + S \cdot (a_\theta \cdot L + \sigma_\theta \cdot W),$$

где  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_k > 0$ ,  $k = 0, \dots, K-1$ . Используя традиционную форму записи исчисления Ито, данный процесс можно записать в виде решения уравнения

$$dS_t = S_t(a_{\theta_t} dt + \sigma_{\theta_t} dW_t), \quad S_0 = 1.$$

Положим  $\kappa_k := a_k - (1/2)\sigma_k^2$ . Решение данного уравнения может быть представлено в виде  $S = \mathcal{E}(R)$ , где  $\mathcal{E}$  есть стохастическая экспонента и  $R := a_\theta \cdot L + \sigma_\theta \cdot W$  есть процесс относительной цены. В более явной форме можно записать  $S = e^V$ , где

$$V := \kappa_\theta \cdot L + \sigma_\theta \cdot W$$

есть процесс лог-цены актива.

Процесс капитала  $X = X^{u,i}$  определим как

$$X = u + X \cdot R + P, \quad (3.3)$$

где  $u > 0$ . С точки зрения актуарной теории, данный процесс можно интерпретировать как резерв страховой компании, полностью реинвестируемый в рисковый актив, цена которого задается геометрическим броуновским движением  $S^i$ , модулируемым марковским процессом  $\theta^i$ .

Определим  $\tau^{u,i} := \inf\{t > 0: X_t^{u,i} \leq 0\}$  (момент разорения, соответствующий начальному капиталу  $u$  и начальному состоянию  $i$ ),  $\Psi_i(u) := \mathbb{P}(\tau^{u,i} < \infty)$  (вероятность разорения) и  $\Phi_i(u) := 1 - \Psi_i(u)$  (вероятность неразорения).

Основной результат заключается в достаточном условии гладкости вероятности неразорения как функции начального капитала.

**Теорема 3.** Пусть случайная величина  $\xi < 0$  имеет дважды непрерывно дифференцируемую на  $(0, \infty)$  плотность распределения  $f$ , такую, что  $f', f'' \in L^1(\mathbb{R}_+)$ . Тогда функции  $\Phi_i(u)$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми при  $u > 0$ .

Изложим, для начала, идею доказательства данного результата. Пусть  $G(u) := \mathbb{E}g(u + W_1)$ , где  $g$  есть ограниченная борелевская функция. Заметим, что функция  $G$  является гладкой. Действительно, запишем  $G$  в терминах распределения случайной величины  $W_1$ ,

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}} g(y) \varphi_{0,1}(y - u) dy, \quad \varphi_{0,t}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad t > 0.$$

Так как производная функции  $\varphi_{0,1}$  есть полином, домноженный на саму функцию  $\varphi_{0,1}$ , дифференцируя достаточное число раз под знаком интеграла, имеем  $G \in C^\infty$ .

Рассмотрим теперь функцию  $G(u) := \mathbb{E}g(u + W_\varsigma + \zeta)$ , где винеровский процесс  $W$  и случайные величины  $\varsigma > 0$  и  $\zeta$  с плотностями распределений  $f_\varsigma$  и  $f_\zeta$  независимы. Тогда

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[g(z + W_\varsigma) \mathbb{I}_{\{\varsigma \leq t\}}] f_\zeta(z - u) dz + \int_2^\infty \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[g(y + \zeta)] \varphi_{0,t}(y - u) f_\varsigma(t) dy dt.$$

Второй интеграл в правой части соотношения принадлежит к классу  $C^\infty((0, \infty))$  в силу оценок  $\sup_x |(\partial^n / \partial t^n) \varphi_{0,t}(x)| \leq C_n t^{3/2}$  при  $t \in [2, \infty)$  для каждого  $n \geq 1$  и некоторых констант  $C_n$ . Гладкость первого интеграла гарантируется гладкостью  $f_\zeta$  и интегрируемостью ее производных.

Первый шаг доказательства заключается в построении интегрального представления для вероятности разорения, используя строго марковское свойство для процесса  $(X^{u,i}, \theta^i)$ . Дальнейшие рассуждения связаны с получением необходимых оценок на рост производных плотности скачков.

### 3.2 Гладкость вероятности неразорения

Определим непрерывный процесс

$$Y_t^{u,i} := e^{V_t^i} \left( u + c \int_0^t e^{-V_s^i} ds \right), \quad (3.4)$$

совпадающий с  $X^{u,i}$  на  $[0, T_1)$ . Используя строго марковское свойство для процесса  $(X^{u,i}, \theta^i)$ ,

$$\Phi_i(u) = \sum_{j \in E} \mathbb{E} \left[ \Phi_j(X_{T_1}^{u,i}) \mathbb{I}_{\{\theta_{T_1}^i = j\}} \right] = \sum_{j \in E} \mathbb{E} \left[ \Phi_j(X_{T_1-}^{u,i} + \Delta X_{T_1}^{u,i}) \mathbb{I}_{\{\theta_{T_1}^i = j\}} \right].$$

На интервале  $[0, T_1)$  процесс  $X^{u,i}$  совпадает с  $Y^{u,i}$ . Положим  $\mathbf{v}(dt) := \alpha e^{-\alpha t} \mathbb{I}_{\{t > 0\}} dt$ . Тогда

$$\Phi_i(u) = \sum_{j \in E} \mathbb{E} \left[ \mathbb{I}_{\{\theta_{T_1}^i = j\}} \Phi_j(Y_{T_1}^{u,i} + \xi_1) \right] = \sum_{j \in E} (\Upsilon_j^{1i}(u) + \Upsilon_j^{2i}(u)), \quad (3.5)$$

где

$$\Upsilon_j^{1i}(u) := \int_0^2 \mathbb{E} \left[ \mathbb{I}_{\{\theta_t^i = j\}} \Phi_j(Y_t^{u,i} + \xi_1) \right] \mathbf{v}(dt), \quad (3.6)$$

$$\Upsilon_j^{2i}(u) := \int_2^\infty \mathbb{E} \left[ \mathbb{I}_{\{\theta_t^i = j\}} \Phi_j(Y_t^{u,i} + \xi_1) \right] \mathbf{v}(dt). \quad (3.7)$$

Нетрудно видеть, что

$$\Upsilon_j^{1i}(u) := \int_0^2 \int_0^\infty \int_{D_0} \mathbb{E} \left[ \Phi_j(Y_t^u(Z) - w) \right] \mathbb{I}_{\{Z_t = j\}} m^i(dZ) F_{|\xi_1|}(dw) \mathbf{v}(dt), \quad (3.8)$$

$$\Upsilon_j^{2i}(u) := \int_2^\infty \int_{D_0} \mathbb{E} \left[ \tilde{\Phi}_j(Y_t^u(Z)) \right] \mathbb{I}_{\{Z_t = j\}} m^i(dZ) \mathbf{v}(dt), \quad (3.9)$$

где  $m^i(dZ)$  есть функция распределения процесса  $\theta^i$  в пространстве  $D_0$ , состоящем из непрерывных справа с левосторонним пределом функций, принимающих значения в множестве  $E$ , и  $\tilde{\Phi}_j(y) := \mathbb{E} \Phi_j(y - |\xi_1|)$ . Напомним,

что рассматривается случай модели типа Крамера–Лундберга, то есть  $\xi_1 = -|\xi_1|$ . Обозначение  $Y_t^u(Z) = Y_t^{u,i}(Z)$  используется для процесса, соответствующего заданной траектории  $Z$  процесса  $\theta$ . В частности, считаем, что процесс относительной цены  $R(Z)$  удовлетворяет СДУ  $dR_t(Z) = a_{Z_t}dt + \sigma_{Z_t}dW_t$  с детерминированными параметрами, и, следовательно,  $Y_t^u = Y_t^u(\theta)$ . Аналогичным образом определяются и другие обозначения  $S(Z)$ ,  $V(Z)$ , и т.д.

### 3.2.1 Гладкость функции $\Upsilon^2$

Отметим, что функция  $\Upsilon^2(u)$  не зависит от распределения скачков  $\xi$ . Гладкость данной функции следует напрямую из следующей леммы.

**Лемма 4.** Пусть  $G : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  есть борелевская функция, такая, что  $G(y) = 0$  для  $y \leq 0$ . Положим  $J(u,t,Z) := \mathbb{E}[G(Y_t^u(Z))]$ ,  $t \geq 2$ . Тогда,  $J(.,t,Z) \in C^\infty((0,\infty))$  и для каждого  $n \geq 1$  существует константа  $C(n)$  такая, что

$$(\partial^n / \partial u^n) J(u,t,Z) \leq C(n) \quad \forall t \geq 2, \quad Z \in D_0, \quad u > 0.$$

*Доказательство.* 1. Для ясности изложения будем использовать следующие обозначения:  $Y_t^u$  вместо  $Y_t^u(Z)$ ,  $V_t$  вместо  $V_t(Z)$ , и т.д., а также  $a_s$ ,  $\sigma_s$ , и  $\kappa_s$  вместо  $a_{Z_s}$ ,  $\sigma_{Z_s}$ , и  $\kappa_{Z_s}$ . Используя представление

$$Y_t^u = e^{V_t - V_1} Y_1^u + c \int_1^t e^{V_t - V_s} ds, \quad t \geq 1,$$

и независимость  $(V_s - V_1)_{s \geq 1}$  и случайной величины  $Y_1^u$ , получаем, что

$$\mathbb{E}[G(Y_t^u) | Y_1^u] = G(t, Y_1^u),$$

где

$$G(t,y) := \mathbb{E} \left[ G \left( e^{V_t - V_1} y + c \int_1^t e^{V_t - V_s} ds \right) \right].$$

Подставляя выражение для  $Y_1^u$  из (3.4) и используя следующие обозначения для интегралов

$$\kappa \cdot L_t := \int_0^t \kappa_s ds, \quad \sigma \cdot W_t = \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad M_t := c e^{-\kappa \cdot L} \cdot L_t = c \int_0^t e^{-\int_0^s \kappa_r dr} ds,$$

приходим к

$$\begin{aligned} J(u, t) &:= \mathbb{E} [G(t, Y_1^u)] = \mathbb{E} \left[ G \left( t, e^{\kappa \cdot L_1 + \sigma \cdot W_1} (u + e^{-\sigma \cdot W} \cdot M_1) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \tilde{G} \left( t, e^{\sigma \cdot W_1} (u + e^{-\sigma \cdot W} \cdot M_1) \right) \right], \end{aligned}$$

где  $\tilde{G}(t, y) := G(t, e^{\kappa \cdot L_1} y)$ .

**2.** Следующий шаг заключается в сведении к случаю постоянных коэффициентов. Функция  $A = \sigma^2 \cdot L$  является строго возрастающей. Обозначим  $A^{-1}$  обратную к ней функцию. Распределение непрерывного процесса с независимыми приращениями  $(\sigma \cdot W_s)_{s \geq 0}$  совпадает с распределением процесса  $(W_{A_s})_{s \geq 0}$ . Положим  $m(s) := c e^{-\kappa \cdot L_s}$ ,  $\tilde{m}(r) := m(A_r^{-1}) / \sigma_{A_r^{-1}}^2$ . Имеем

$$\int_0^1 e^{-W_{A_s}} dM_s = \int_0^1 e^{-W_{A_s}} m(s) ds = \int_0^{A_1} e^{-W_r} \tilde{m}(r) dr.$$

Отсюда получаем, что

$$J(u, t) = \mathbb{E} \left[ \tilde{G} \left( t, e^{W_{A_1}} (u + e^{-W} \tilde{m} \cdot L_{A_1}) \right) \right].$$

Положим  $U_1(s) := A_{A_1 s}^{-1}$  и  $\bar{\sigma} := \sqrt{A_1}$ . Тогда  $(\bar{\sigma} W_{t/\bar{\sigma}^2})_{t \geq 0}$  является винеровским процессом и

$$J(u, t) = \mathbb{E} \left[ \tilde{G} \left( t, e^{\bar{\sigma} W_1} (u + e^{-\bar{\sigma} W} \bar{m} \cdot L_1) \right) \right],$$

где  $\bar{m}(s) := \tilde{m}(A_1 s) A_1 = m(U_1(s)) A_1 / \sigma_{U_1(s)}^2$ .

Распределение процесса  $(W_t)_{t \in [0, 1]}$  при условии  $W_1 = x$  совпадает с распределением процесса  $W_s + s(x - W_1)$ ,  $s \in [0, 1]$ , откуда

$$J(u, t) = \int \mathbb{E}[H(t, x, u + \eta_x)] \varphi_{0,1}(x) dx,$$

где  $H(t, x, y) = \tilde{G}(t, e^{\bar{\sigma} x} y)$  принимает значения в  $[0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \eta_x &:= \int_0^1 e^{-\bar{\sigma}(W_s - sW_1)} m(s, x) ds, \\ m(s, x) &:= e^{-\bar{\sigma} s x} \bar{m}(s) = e^{-\bar{\sigma} s x} m(U_1(s)) \bar{\sigma}^2 / \sigma_{U_1(s)}^2. \end{aligned}$$

**3.** Покажем, что случайная величина  $\eta_x$  имеет плотность. Рассмотрим на  $[0, 1]$  гауссовский процесс  $D_s := W_s - sW_1 - \gamma_s W_{1/2}$ , где  $\gamma_s := (2s) \wedge 1 - s$ . Заметим, что

$$\mathbb{E}[D_s W_{1/2}] = \mathbb{E}[(W_s - sW_1 - \gamma_s W_{1/2}) W_{1/2}] = s \wedge 1/2 - s/2 - \gamma_s/2 = 0$$

и, следовательно,  $D$  и  $W_{1/2}$  являются независимыми. Отсюда получаем, что для любой борелевской ограниченной функции  $g$

$$\mathbb{E}[g(\eta_x)] = \mathbb{E} \left[ \int g(B_x(v)) \varphi_{0,1/2}(v) dv \right],$$

где строго положительная  $C^\infty$ -функция

$$v \mapsto B_x(v) := \int_0^1 e^{-\bar{\sigma}(D_s + \gamma_s v)} m(s, x) ds$$

(зависящая от  $x$  и  $\omega$ ) является строго убывающей,  $B_x(-\infty) = \infty$  и  $B_x(\infty) = 0$ . Обратная функция  $y \mapsto B_x^{-1}(y)$  также является строго убывающей,  $B_x^{-1}(0+) = \infty$  и  $B_x^{-1}(\infty) = -\infty$ .

Заменяя переменную интегрирования, имеем

$$\mathbb{E}[g(\eta_x)] = \int_0^\infty g(y) \mathbb{E} \left[ \frac{\varphi_{0,1/2}(B_x^{-1}(y))}{K_x(B_x^{-1}(y))} \right] dy$$

где

$$K_x(v) = B'_x(v) = -\bar{\sigma} \int_0^1 \gamma_s e^{-\bar{\sigma}(D_s + \gamma_s v)} m(s, x) ds. \quad (3.10)$$

Тогда  $\eta_x$  имеет плотность

$$\rho_x(y) = \mathbb{E} \left[ \frac{\varphi_{0,1/2}(B_x^{-1}(y))}{K_x(B_x^{-1}(y))} \right], \quad y > 0.$$

Отсюда,

$$J(u, t) = \int \mathbb{E}[H(t, x, u + \eta_x)] \varphi_{0,1}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} H(t, x, y) \rho_x(y - u) \varphi_{0,1}(x) dy dx.$$

4. Остается показать, что  $\rho_x(\cdot)$  принадлежит к классу  $C^\infty$  и ее производные имеют не более, чем экспоненциальный рост, то есть

$$\sup_y \left| \frac{\partial^n}{\partial y^n} \rho_x(y) \right| \leq C_n e^{C_n |x|}. \quad (3.11)$$

Для функции  $f(x, v)$  обозначим  $f_v(x, v)$  ее частные производные по переменной  $v$ . Положим

$$Q^{(0)}(x, v) := \frac{\varphi_{0,1/2}(v)}{K_x(v)}, \quad Q^{(n)}(x, v) := -Q_v^{(n-1)}(x, v) \frac{1}{K_x(v)}, \quad n \geq 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} Q^{(0)}(x, B_x^{-1}(y)) &= Q_v^{(0)}(x, B_x^{-1}(y)) \frac{\partial B_x^{-1}(y)}{\partial y} = -\frac{Q_v^{(0)}(x, B_x^{-1}(y))}{K_x(B_x^{-1}(y))} \\ &= Q^{(1)}(x, B_x^{-1}(y)),\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial y} Q^{(n-1)}(x, B_x^{-1}(y)) = -\frac{Q_v^{(n-1)}(x, B_x^{-1}(y))}{K_x(B_x^{-1}(y))} = Q^{(n)}(x, B_x^{-1}(y)).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} Q^{(0)}(x, B_x^{-1}(y)) = Q^{(n)}(x, B_x^{-1}(y)).$$

Заметим, что

$$Q^{(n)}(x, v) = \frac{\Phi_{0,1/2}(v)}{K_x^{n+1}(v)} \sum_{k=0}^n P_k(v) R_{n-k}(x, v),$$

где  $P_k(v)$  есть полином степени  $k$  и  $R_{n-k}(x, v)$  есть линейная комбинация произведений производных функции  $K_x(v)$  по переменной  $v$ . Как было показано выше,

$$m(s, x) = e^{-\bar{\sigma}sx} m(U_1(s)) \bar{\sigma}^2 / \sigma_{U_1(s)}^2 = c e^{-\bar{\sigma}sx - \kappa \cdot L_{U_1(s)}} \bar{\sigma}^2 / \sigma_{U_1(s)}^2.$$

Отсюда получаем, что для всех  $s \in [0, 1]$  и  $x \in \mathbb{R}$  имеем оценки

$$m_* e^{-\bar{\sigma}|x|} \leq m(s, x) \leq m^* e^{\bar{\sigma}|x|},$$

где константы  $m_*, m^* > 0$  зависят только от  $|a|$  и  $\sigma$ . Положим  $\sigma^* := \sup_s \sigma_s$ ,  $\kappa^* := \sup_s |\kappa_s|$ , и  $W_1^* := \sup_{s \in [0, 1]} |W_s|$ . Заметим, что  $\gamma \leq 1/2$  и

$$\gamma^n \cdot L_1 = 2^{-(n+1)} / (n+1), \quad n \geq 1.$$

Очевидно, что

$$e^{-\sigma^*(3W_1^*+v)} \leq e^{-\bar{\sigma}(D_s+\gamma_s v)} \leq e^{\sigma^*(3W_1^*+v)},$$

Используя полученные оценки и (3.10), имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \sigma_* m_* e^{-\sigma^*(|x|+|v|+3W_1^*)} &\leq |K_x(v)| \leq \frac{1}{4} \sigma^* m^* e^{\sigma^*(|x|+|v|+3W_1^*)}, \\ \frac{(\sigma^*/2)^{n+1}}{n+2} m_* e^{-\sigma^*(|x|+|v|+3W_1^*)} &\leq \left| \frac{\partial^n}{\partial v^n} K_x(v) \right| \leq \frac{(\sigma^*/2)^{n+1}}{n+1} m^* e^{\sigma^*(|x|+|v|+3W_1^*)}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что существует константа  $C_n > 0$  такая, что

$$|Q^{(n)}(x, v)| \leq C_n e^{C_n |x|} (1 + v^n) e^{-v^2} e^{C_n W_1^*}. \quad (3.12)$$

Следовательно,

$$\mathbb{E} \left[ \sup_y |Q^{(n)}(x, B_x^{-1}(y))| \right] \leq \mathbb{E} \left[ \sup_{v \in \mathbb{R}} |Q^{(n)}(x, v)| \right] \leq \tilde{C}_n e^{C_n |x|} \mathbb{E} [e^{C_n W_1^*}] < \infty$$

для некоторой  $\tilde{C}_n > 0$ . Тогда для каждого  $x$  функция  $(\partial^n / \partial y^n) Q^{(0)}(x, B_x^{-1}(y))$  ограничена сверху интегрируемой величиной, не зависящей от  $y$ . Отсюда следует, что  $y \mapsto \rho_x(y)$  является бесконечно дифференцируемой функцией и

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} \rho_x(y) = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial^n}{\partial y^n} Q^{(0)}(x, B_x^{-1}(y)) \right].$$

Более того, увеличивая, если необходимо, константу  $C_n$ , получаем требуемую оценку (3.11). Так как  $B_x^{-1}(0+) = \infty$ , из неравенства (3.12) следует, что  $Q^{(n)}(x, B_x^{-1}(0+)) = 0$ . Следовательно,  $(\partial^n / \partial y^n) \rho_x(0) = 0$ .

Дифференцируя функцию  $u \mapsto J(u, t)$ , получаем

$$\frac{\partial^n}{\partial u^n} J(u, t) = \int \left[ \int H(t, x, y) \frac{\partial^n}{\partial u^n} \rho_x(y - u) dy \right] \varphi_{0,1}(x) dx.$$

Лемма доказана. □

### 3.2.2 Гладкость функции $\Upsilon^1$

Остается показать гладкость функции

$$\Upsilon^1(u) = \int_0^2 \int_{D_0} \mathbb{E} [\Phi(Y_t^u(Z) + \xi)] M(dZ) \nu(dt).$$

Будем считать, что  $c > 0$  и  $\xi < 0$ . Обозначим  $\zeta := -\xi > 0$ . Требуемый результат вытекает из следующего утверждения.

**Утверждение 4.** Пусть  $Y^u = e^V(u + ce^{-V} \cdot L)$ , где  $V = \kappa \cdot L + \sigma \cdot W$ ,  $\kappa$ , и  $\sigma > 0$  измеримые функции. Пусть случайная величина  $\zeta > 0$  имеет дважды непрерывно-дифференцируемую плотность  $f$  на  $(0, \infty)$ , такую, что  $f', f'' \in L^1(\mathbb{R}_+)$ .

Тогда  $\varphi_t(u) := \mathbb{E} [\Phi(Y_t^u - \zeta)]$  также дважды непрерывно-дифференцируема по  $u$  и существует константа  $C$ , зависящая только от  $\kappa^*$  и  $\sigma^*$ , такая, что

$$|\varphi'_t(u)| \leq C \|f'\|_{L^1}, \quad |\varphi''_t(u)| \leq C \|f''\|_{L^1} \quad (3.13)$$

для всех  $t \in [0, 2]$ ,  $u > 0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим измеримую функцию  $H : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  такую, что  $H = 0$  на  $\mathbb{R}_-$  и пусть  $\gamma > 0$ . Определим функцию

$$h(y) := \int_{\mathbb{R}_+} H(y - \gamma w) f(w) dw = (1/\gamma) \int_{\mathbb{R}_+} H(z) f((y - z)/\gamma) dz.$$

Отсюда следует, что  $h$  является дважды непрерывно-дифференцируемой функцией,

$$h'(y) = (1/\gamma^2) \int_{\mathbb{R}} H(z) f'((y - z)/\gamma) dz, \quad h''(y) = (1/\gamma^3) \int_{\mathbb{R}} H(z) f''((y - z)/\gamma) dz.$$

Очевидно, что  $|h'(y)| \leq (1/\gamma) \|f'\|_{L^1}$  и  $|h''(y)| \leq (1/\gamma^2) \|f''\|_{L^1}$ . Используя определения  $Y^u$  и  $V$ , получаем, что

$$\varphi_t(u) = \mathbb{E}[\Phi(Y_t^u - \zeta)] = \mathbb{E}[\Phi_t(e^{\sigma \cdot W_t}(u - e^{-\sigma \cdot W} m \cdot L_t) - e^{-\kappa \cdot L_t} \zeta)],$$

где  $\Phi_t(y) := \Phi(e^{\kappa \cdot L_t} y)$ ,  $m := ce^{-\kappa \cdot L_t}$ . Тогда,

$$\varphi_t(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[\Phi_t(e^{\sigma \cdot W_t}(u - e^{-\sigma \cdot W} m \cdot L_t) - e^{-\kappa \cdot L_t} w)] f(w) dw.$$

Рассмотрим на  $\mathbb{R}_+$  строго возрастающую функцию  $A := \sigma^2 \cdot L$  с обратной к ней функцией  $A^{-1}$  и заметим, что распределение процесса  $\sigma \cdot W$  совпадает с распределением процесса  $W_A$ . Заменяя переменную в интеграле по  $L$ , получаем  $e^{W_A} m \cdot L_t = e^W \tilde{m} \cdot L_{A_t}$  где  $\tilde{m}(r) := m(A_r^{-1})/\sigma_{A_r^{-1}}^2$ .

Следовательно,

$$\mathbb{E}[\Phi_t(e^{\sigma \cdot W_t}(u - e^{-\sigma \cdot W} m \cdot L_t) - e^{-\kappa \cdot L_t} w)] = \mathbb{E}[\Phi_t(e^{W_{A_t}}(u - e^{-W} \tilde{m} \cdot L_{A_t}) - e^{-\kappa \cdot L_t} w)].$$

Замена переменной  $s \rightarrow st/A_t$  приводит к интегрированию по промежутку  $[0, t]$  вместо  $[0, A_t]$  и правая часть выражения выше равна

$$\mathbb{E}[\Phi_t(e^{\sqrt{A_t/t} W_t}(u - e^{-\sqrt{A_t/t} W} \bar{m}_t \cdot L_t) - e^{-\kappa \cdot L_t} w)], \quad (3.14)$$

где  $\bar{m}_t(s) := \tilde{m}(A_t s) A_t = m(U_t(s)) A_t / \sigma_{U_t(s)}^2$  и  $U_t(s) := A_{A_t s}^{-1}$ .

Заметим, что

$$e^{-\sqrt{A_t/t}W} \bar{m}_t \cdot L_t := \int_0^t e^{-\sqrt{A_t/t}W_s} \bar{m}_t(s) ds.$$

Распределение процесса  $(W_s)_{s \in [0,t]}$  при условии  $W_t = x$  совпадает с распределением процесса  $W_s + (s/t)(x - W_t)$ ,  $s \in [0,t]$ . Следовательно, (3.14) может быть представлено как

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} H(u - \gamma_{t,x} w) \varphi_{0,1}(x/\sqrt{t}) dx,$$

где  $H(y) = H_{t,x}(y) := \mathbb{E}[\Phi_t(e^{\sqrt{A_t/tx}}(y - \eta_{t,x}))]$ ,  $\gamma_{t,x} := e^{-\kappa \cdot L_t - \sqrt{A_t/tx}}$ ,

$$\eta_{t,x} := \int_0^t e^{-\sqrt{A_t/t}(W_s - (s/t)W_t)} m_{t,x}(s) ds, \quad m_{t,x}(s) := e^{(s/t)x - \sqrt{A_t/tx}} \bar{m}_t(s).$$

Отсюда,

$$\varphi_t(u) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} H(u - \gamma_{t,x} w) f(w) dw \right] \varphi_{0,1}(x/\sqrt{t}) dx.$$

Обозначим  $h(u) = h_{t,x}(u) := \mathbb{E}[H(u - \gamma_{t,x}\zeta)]$ . Тогда  $h$  является дважды непрерывно-дифференцируемой и существует такая константа  $C$ , что для всех  $t \in [0,2]$  и всех  $x$

$$\begin{aligned} |h'(u)| &\leq (1/\gamma_{t,x}) \|f'\|_{L^1} \leq C e^{C|x|} \|f'\|_{L^1}, \\ |h''(u)| &\leq (1/\gamma_{t,x}^2) \|f''\|_{L^1} \leq C e^{C|x|} \|f''\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{C|x|} \varphi_{0,1}(x/\sqrt{t}) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{C\sqrt{t}|x|} \varphi_{0,1}(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} e^{2C|x|} \varphi_{0,1}(x) dx < \infty,$$

получаем, что функция  $\varphi_t(u)$  дважды непрерывно-дифференцируема по  $u$  и выполнены оценки (3.13).  $\square$

**Замечание 8.** Небольшие изменения в данном доказательстве позволяют получить гладкость вероятности неразорения в модели страхования жизни ( $c < 0$ ,  $\xi > 0$ ), а также в модели со скачками в обе стороны.

### 3.3 Интегро-дифференциальное уравнение

Вывод интегро-дифференциального уравнения основан на применении формулы Ито и марковского свойства. Справедливо следующее утверждение .

**Утверждение 5.** *Предположим, что  $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{K-1}) \in C^2$ . Тогда,*

$$\frac{1}{2}\sigma_i^2 u^2 \Phi_i''(u) + (a_i u + c)\Phi_i'(u) + \mathcal{I}\Phi_i(u) + \sum_{j \in E} \lambda_{ij} \Phi_j(u), \quad i \in E, \quad (3.15)$$

где

$$\mathcal{I}\Phi_i(u) = \alpha \int (\Phi_i(u+x) - \Phi_i(u)) F_\xi(dx) = \alpha \int \Phi_i(u+x) F_\xi(dx) - \alpha \Phi_i(u).$$

*Доказательство.* Пусть  $h > 0$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что  $u \in [\varepsilon, \varepsilon^{-1}] \subset (0,1)$ . Опуская, как обычно, индекс  $i$ , определим момент останковки

$$\tau_h^\varepsilon := \inf \{t \geq 0: X_t \notin [\varepsilon, \varepsilon^{-1}]\} \wedge T_1 \wedge \tau_1 \wedge h.$$

Применяя формулу Ито к функции  $\Phi$  и семимартингалу  $(X, \theta) = (X^{u,i}, \theta^i)$ , получаем

$$\Phi_{\theta_t}(X_t) = \Phi_i(u) + \Phi'_{\theta_-}(X_-) \sigma \cdot W_t + \mathcal{L}\Phi_\theta(X) \cdot L_t + \sum_{s \leq t} (\Phi_{\theta_s}(X_s) - \Phi_{\theta_{s-}}(X_{s-})), \quad (3.16)$$

где

$$\mathcal{L}\Phi_\theta(X) := \frac{1}{2}\sigma_\theta^2 X^2 \Phi_\theta''(X) + (a_\theta X + c)\Phi_\theta'(X), \quad \Sigma_t := \sum_{s \leq t} (\Phi_{\theta_s}(X_s) - \Phi_{\theta_{s-}}(X_{s-})).$$

В силу независимости процессов  $P$  и  $\theta$ , получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\Phi_{\theta_{s-}}(X_{s-} + x) - \Phi_{\theta_{s-}}(X_{s-})) \pi(ds, dx) \\ &\quad + \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{E}} (\Phi_k(X_{s-}) - \Phi_{\theta_{s-}}(X_{s-})) p(ds, k). \end{aligned}$$

Заменим в (3.16)  $t$  на  $\tau_h^\varepsilon$  и проинтегрируем обе части уравнения. Справедливы следующие утверждения.

- В силу строго марковского свойства  $\Phi_i(u) = \mathcal{E}\Phi_{\tau_h^\varepsilon}(X_{\tau_h^\varepsilon})$  (заметим, что  $\Phi_i(u) = 0$  при  $u \leq 0$ ).

- Для любого  $\varepsilon > 0$ , функции под знаком интеграла ограничены сверху на промежутке  $[0, \tau_h^\varepsilon(\omega)]$ , и, следовательно, математическое ожидание стохастического интеграла по винеровскому процессу равно 0.
- Так как  $\tau_h^\varepsilon \leq \tau_1$ , можем заменить в интегралах  $\theta_{s-}$  на  $i$ . Кроме того,  $\tau_h^\varepsilon = h$  для достаточно малого  $h$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^{\tau_h^\varepsilon} \int (\Phi_i(X_{s-}+x) - \Phi_i(X_{s-})) \pi(ds, dx) &= \mathbb{E} \int_0^{\tau_h^\varepsilon} \int (\Phi_i(X_{s-}+x) - \Phi_i(X_{s-})) ds \Pi(dx), \\ \mathbb{E} \int_0^{\tau_h^\varepsilon} \sum_{j \in E \setminus \{i\}} \Phi_j(X_{s-} - \Phi_i(X_{s-})) p(ds, j) &= \mathbb{E} \int_0^{\tau_h^\varepsilon} \sum_{j \in E} \Phi_j(X_{s-}) \lambda_{ij} ds. \end{aligned}$$

Отсюда, получаем уравнение

$$\mathbb{E} \int_0^{\tau_h^\varepsilon} \left( \mathcal{L} \Phi_i(X_s) + \int (\Phi_i(X_s+x) - \Phi_i(X_s)) F_\xi(dx) + \sum_{j \in E} (\Phi_j(X_s) - \Phi_i(X_s)) \lambda_{ij} \right) ds = 0.$$

Деля обе части уравнения на  $h$  и устремляя  $h \downarrow 0$ , получаем требуемое.

□

**Замечание 9.** Полученное уравнение является однородным и справедливо также для вероятности разорения  $\Psi(u) = 1 - \Phi(u)$ .

Рассмотрим случай экспоненциально распределенных отрицательных скачков (как в модели Крамера–Лундберга), то есть  $F_\xi(dx) = (1/\mu) e^{x/\mu} \mathbb{I}_{\{x < 0\}} dx$  и случайная величина  $-\xi$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $1/\mu$ . Тогда вероятность неразорения  $\Phi \in C^2((0, \infty))$ .

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^0 \Phi_i(x+u) F_\xi(dx) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \Phi_i(u-x) \mu e^{-x/\mu} dx = \frac{1}{\mu} \int_0^u \Phi_i(u-x) e^{-x/\mu} dx.$$

Принимая в расчет, что

$$\frac{d}{du} \int_0^u \Phi_i(u-x) e^{-x/\mu} dx = \Phi_i(u) - \frac{1}{\mu} \int_0^u \Phi_i(u-x) e^{-x/\mu} dx$$

получаем соотношение

$$\frac{d}{du} \mathcal{I} \Phi_i(u) = -\frac{1}{\mu} \mathcal{I} \Phi_i(u) - \alpha \Phi_i'(u).$$

Дифференцируя ИДУ (3.15) и добавляя к полученному результату уравнение (3.15), домноженное на  $\mu$ , получаем ОДУ третьего порядка

$$\Phi_i''' - p_i(u)\Phi_i'' + q_i(u)\Phi_i' + \frac{2}{\mu\sigma_i^2} \frac{1}{u^2} \sum_{j \in E} \lambda_{ij} \Phi_j'(u) - \frac{2}{\mu\sigma_i^2} \frac{1}{u^2} \sum_{j \in E} \lambda_{ij} \Phi_j(u) = 0,$$

где

$$p_i(u) := \frac{1}{\mu} - 2\left(1 + \frac{a_i}{\sigma_i^2}\right) \frac{1}{u} - \frac{2c}{\sigma_i^2} \frac{1}{u^2}, \quad q_i(u) := -\frac{2a_i}{\mu\sigma_i^2} \frac{1}{u} + (a_i - \alpha - c/\mu) \frac{2}{\sigma_i^2} \frac{1}{u^2}.$$

## Глава 4. Вероятность разорения в общей модели с инвестициями на конечном временном интервале

Эта глава посвящена исследованию вероятности разорения на конечном временном интервале для общей модели Орнштейна-Уленбека. Показано, что вероятность разорения является непрерывной функцией времени и начального капитала. Получено ИДУ в частных производных, понимаемое в вязкостном смысле. Показано, что вероятность разорения является решением данного ИДУ. Доказана теорема единственности, утверждающая, что два непрерывных вязкостных решения совпадают, если они имеют одинаковое поведение на границе.

### 4.1 Описание модели

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (\mathcal{F}_r)_{r \geq 0}, \mathbb{P})$  заданы два независимых процесса Леви  $R$  и  $P$  с триплетами  $(a, \sigma^2, \Pi)$  и  $(a_P, \sigma_P^2, \Pi_P)$ , допускающие, соответственно, представления

$$R_t = at + \sigma W_t + xI_{\{|x| \leq 1\}} * (\mu - \nu)_t + xI_{\{|x| > 1\}} * \mu_t \quad (4.1)$$

и

$$P_t = a_P t + \sigma_P W_t^P + xI_{\{|x| \leq 1\}} * (\mu^P - \nu^P)_t + xI_{\{|x| > 1\}} * \mu_t^P, \quad (4.2)$$

где  $\mu$  и  $\mu^P$  — меры скачков,  $\nu(dt, dx) = \Pi(dx)dt$  и  $\nu^P(dt, dx) = \Pi_P(dx)dt$ ,  $W$  и  $W^P$  — винеровские процессы. Обозначим через  $R^d$  и  $P^d$  чисто разрывные мартингальные компоненты  $R$  и  $P$ , то есть процессы

$$R^d := xI_{\{|x| \leq 1\}} * (\mu - \nu), \quad P^d := xI_{\{|x| \leq 1\}} * (\mu^P - \nu^P).$$

Рассмотрим процесс  $X = X^{t,u}$ , определённый на интервале  $[t, \infty)$ ,

$$X_r^{t,u} = u + \int_{(t,r]} X_{s-}^{t,u} dR_s + P_r - P_t. \quad (4.3)$$

В традиционной дифференциальной форме процесс можно записать как

$$dX_r^{t,u} = X_{r-}^{t,u} dR_r + dP_r, \quad X_t^{t,u} = u. \quad (4.4)$$

Будем считать, что  $\Pi((\infty, -1]) = 0$ , то есть стохастическая экспонента  $S_t := \mathcal{E}(R)$  строго положительна (п.н.).

В актуарном контексте  $X^{t,u}$  — это процесс, описывающий эволюцию резерва страховой компании, начинающей свою деятельность в момент времени  $t > 0$  с начальным капиталом  $u > 0$ , имеющей горизонт времени  $T > t$  и инвестирующей весь свой резерв в рисковый актив с процессом цены  $S$ , заданным СДУ  $dS = S_-dR$ ,  $S_0 = 1$ . Другими словами,  $S$  — геометрический процесс Леви. В частном случае, когда  $R$  — винеровский процесс со сносом,  $S$  является геометрическим броуновским движением. Также, в случае классической модели Крамера-Лундберга, процесс  $P$ , описывающий деятельность страховой компании, является составным пуассоновским процессом со сносом

$$P_r = cr + \sum_{i=1}^{N_r} \xi_i,$$

где  $N$  — пуассоновский процесс, независимый от последовательности н.о.р.с.в.  $\xi_i$ .

Определим при  $u > 0$  функцию  $\Psi(t, u) = \Psi(t, u, T) = \mathbb{P}(\tau^{t,u} < T)$  — вероятность выхода  $X^{t,u}$  из  $(0, \infty)$  до момента  $T$ . В актуарной терминологии  $\Psi(0, u)$  есть вероятность разорения на временном интервале  $[0, T]$  страховой компании, начинающей деятельность в момент  $t = 0$  с начальным капиталом  $u$ . В случае  $T = \infty$  приходим к определению вероятности разорения  $\Psi(0, u; \infty)$  на бесконечном интервале.

Определим следующие интегральные и дифференциальные операторы. Пусть  $\mathcal{L} := \mathcal{L}_R^d + \mathcal{L}_P^i + \mathcal{L}_R^d + \mathcal{L}_P^i$ , где

$$\mathcal{L}_R^d \Psi(t, u) := \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 \Psi_{uu}(t, u) + au \Psi_u(t, u), \quad (4.5)$$

$$\mathcal{L}_R^i \Psi(t, u) := \int \left( \Psi(t, u(1+z)) - \Psi(t, u) - \Psi_u(t, u)uzI_{\{|z| \leq 1\}} \right) \Pi(dz), \quad (4.6)$$

$$\mathcal{L}_P^d \Psi(t, u) := \frac{1}{2} \sigma_P^2 \Psi_{uu}(t, u) + a_P \Psi_u(t, u), \quad (4.7)$$

$$\mathcal{L}_P^i \Psi(t, u) := \int \left( \Psi(t, u+z) - \Psi(t, u) - \Psi_u(t, u)zI_{\{|z| \leq 1\}} \right) \Pi_P(dz). \quad (4.8)$$

Обозначим через  $C_b^{1,2}(t, u)$  множество ограниченных непрерывных функций  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывно дифференцируемых по временной переменной и дважды непрерывно дифференцируемых по фазовой переменной в некоторой окрестности точки  $(t, u) \in (0, T) \times (0, \infty)$  и равных нулю для

$u \in (-\infty, 0]$ . Отметим, что для  $f \in C_b^{1,2}(t, u)$  значения  $\mathcal{L}_R f(t, u)$  и  $\mathcal{L}_P f(t, u)$  определены корректно.

Функция  $\Psi : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  называется *вязкостным суперрешением*, если для каждой точки  $(t, u) \in (0, T) \times (0, \infty)$  и каждой функции  $f \in C_b^{1,2}(t, u)$  такой, что  $f(t, u) = \Psi(t, u)$  и  $f \leq \Psi$ , выполняется неравенство

$$f_t(t, u) + \mathcal{L}f(t, u) \leq 0.$$

Функция  $\Psi : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  называется *вязкостным субрешением*, если для каждой точки  $(t, u) \in (0, T) \times (0, \infty)$  и каждой функции  $f \in C_b^{1,2}(t, u)$  такой, что  $f(t, u) = \Psi(t, u)$  и  $f \geq \Psi$ , выполняется неравенство

$$f_t(t, u) + \mathcal{L}f(t, u) \geq 0.$$

Функция  $\Psi : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  является *вязкостным решением*, если  $\Psi$  одновременно является вязкостным супер- и субрешением.

Наконец, функция  $\Psi \in C_b^{1,2}([0, T] \times [0, \infty])$  называется *классическим суперрешением*, если неравенство  $(\partial/\partial t + \mathcal{L})\Psi \leq 0$  выполняется на  $(0, T) \times (0, \infty)$ .

Согласно нашим определениям, вероятность разорения  $\Psi(t, u) = 1$  для  $u \leq 0, t < T$ . Однако, может оказаться, что  $\Psi(t, 0+) < 1$ .

## 4.2 Вероятность разорения как вязкостное решение

Покажем, что вероятность разорения  $\Psi(t, u)$  является вязкостным решением ИДУ с частными производными параболического типа.

**Теорема 4.** *Функция  $\Psi(t, u)$  на  $[0, T] \times (0, \infty)$  является вязкостным решением интегро-дифференциального уравнения в частных производных*

$$\Psi_t(t, u) + \mathcal{L}\Psi(t, u) = 0. \quad (4.9)$$

Справедливость данного результата напрямую вытекает из следующих двух лемм.

**Лемма 5.** *Вероятность разорения  $\Psi$  как функция  $(t, u)$  является вязкостным суперрешением.*

*Доказательство.* Пусть  $f \in C_b^{1,2}(t, u)$  такова, что  $f(t, u) = \Psi(t, u)$  и  $f \leq \Psi$  на  $[0, T] \times \mathbb{R}$ . Возьмём  $\varepsilon \in (0, u/2)$  и  $h \in (0, T - t)$  такие, что прямоугольник  $[t, t+h] \times [u-\varepsilon, u+\varepsilon]$  лежит внутри окрестности, в которой функция  $f$  принадлежит классу  $C^{1,2}$ .

Пусть  $M = (M_s)_{s \geq t}$  — локальный мартингал с

$$dM_s = dX_s^c + X_{s-} dR_s^d + dP_s^d, \quad M_t = 0,$$

где  $X^c$  — непрерывная мартингальная компонента  $X$ ,

$$dX_s^c := \sigma X_{s-} dW_s + \sigma_P dW_s^P, \quad d\langle X^c \rangle_s = \sigma^2 X_{s-}^2 ds + \sigma_P^2 ds,$$

а  $R^d$  и  $P^d$  есть чисто разрывные мартингальные компоненты процессов  $R$  и  $P$ .

Определим момент остановки  $\tau_h = \tau_h^\varepsilon \leq t+h$  следующим образом:

$$\tau_h := \inf \{s > t: X_s^{t,u} \notin [u-\varepsilon, u+\varepsilon]\} \wedge \inf \{s > t: |M_s| \geq 1\} \wedge (t+h).$$

Применяя формулу Ито в стандартной форме к семимартингалу  $X = X^{t,u}$ , получаем:

$$\begin{aligned} f(\tau_h, X_{\tau_h}) &= f(t, u) + \int_{(t, \tau_h]} f_u(s, X_{s-}) dX_s + \int_{(t, \tau_h]} f_t(s, X_{s-}) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{(t, \tau_h]} f_{uu}(s, X_{s-}) d\langle X_s^c \rangle \\ &\quad + \sum_{s \in (t, \tau_h]} (f(s, X_{s-} + \Delta X_s) - f(s, X_{s-}) - f_u(s, X_{s-}) \Delta X_s). \end{aligned}$$

Представляя интеграл по  $dX$  в виде

$$\int_{(t, \tau_h]} f_u(s, X_{s-}) dM_s + \int_{(t, \tau_h]} f_u(s, X_{s-}) (aX_{s-} + a_P) ds + J^R + J^P,$$

где

$$\begin{aligned} J^R &:= \int_{(t, \tau_h]} \int f_u(s, X_{s-}) X_{s-} z I_{\{|z| > 1\}} \mu(ds, dz), \\ J^P &:= \int_{(t, \tau_h]} \int f_u(s, X_{s-}) z I_{\{|z| > 1\}} \mu^P(ds, dz). \end{aligned}$$

и сумму скачков в виде

$$\begin{aligned} &\int_{(t, \tau_h]} \int (f(s, X_{s-}(1+z)) - f(s, X_{s-}) - f_u(s, X_{s-}) X_{s-} z I_{\{|z| \leq 1\}}) \mu(ds, dz) \\ &+ \int_{(t, \tau_h]} \int (f(s, X_{s-} + z) - f(s, X_{s-}) - f_u(s, X_{s-}) z I_{\{|z| \leq 1\}}) \mu^P(ds, dz) - J^R - J^P, \end{aligned}$$

перепишем правую часть формулы Ито в виде

$$\begin{aligned}
& f(t, u) + \int_{(t, \tau_h]} f_u(s, X_{s-})(dX_s^c + X_{s-}dR^d + dP^d) \\
& + \int_{(t, \tau_h]} \left( f_t(s, X_{s-}) + f_u(s, X_{s-})(aX_{s-} + a_P) + \frac{1}{2}f_{uu}(s, X_{s-})(\sigma^2 X_{s-}^2 + \sigma_P^2) \right) ds \\
& + \int_{(t, \tau_h]} \int (f(s, X_{s-}(1+z)) - f(s, X_{s-}) - f_u(s, X_{s-})X_{s-}zI_{\{|z| \leq 1\}}) \mu(ds, dz) \\
& + \int_{(t, \tau_h]} \int (f(s, X_{s-} + z) - f(s, X_{s-}) - f_u(s, X_{s-})zI_{\{|z| \leq 1\}}) \mu^P(ds, dz)
\end{aligned}$$

Беря математическое ожидание, получаем:

$$\mathbb{E}[f(\tau_h, X_{\tau_h})] = f(t, u) + \mathbb{E} \left[ \int_t^{\tau_h} (f_t(s, X_s) + \mathcal{L}(f(s, X_s))) ds \right].$$

Напомним, что  $f(t, u) = \Psi(t, u)$  и  $f \leq \Psi$ . Кроме того, заметим, что

$$\Psi(t, u) = \mathbb{E}[\Psi(\tau_h, X_{\tau_h}^{t, u})]$$

в силу строгого марковского свойства для процесса  $X$ . Таким образом, получаем неравенство

$$\mathbb{E} \left[ \int_t^{\tau_h} (f_t(s, X_s) + \mathcal{L}f(s, X_s)) ds \right] \leq 0.$$

Почти наверное  $\tau_h(\omega) = t + h$  при достаточно малых  $h$  (порог, для которого это равенство выполняется, зависит от  $\omega$ ). Используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем:

$$f_t(t, u) + \mathcal{L}f(t, u) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E} \left[ \int_t^{\tau_h} (f_t(s, X_s) + \mathcal{L}f(s, X_s)) ds \right] \leq 0,$$

что и доказывает лемму. □

**Лемма 6.** *Функция  $\Psi$  является вязкостным субрешением.*

*Доказательство.* Применяя напрямую рассуждения из леммы 5, заменяя неравенство на  $f \geq \Psi$ , получаем требуемое. □

**Замечание 10.** *Если функция  $\Psi \in C^{1,2}$ , то уравнение  $\Psi_t(t, u) + \mathcal{L}\Psi(t, u) = 0$  выполняется в классическом смысле.*

**Замечание 11.** *В дальнейшем будет показано, что вероятность неразорения (эквивалентно, вероятность разорения) является непрерывной функцией на  $[0, T] \times (0, \infty)$ .*

### 4.3 Единственность вязкостного решения

Данный раздел посвящен доказательству единственности вязкостного решения при определенных условиях на границе рассматриваемой области. Первый этап состоит в введении понятия суб- и суперджетов, позволяющих равномерно приблизить произвольную непрерывную функцию достаточно гладкой тестовой функцией.

#### 4.3.1 Параболические джеты

Пусть  $f$  и  $g$  — функции, определённые в окрестности нуля  $\mathbb{R}^2$ . Обозначая через  $(h_1, h_2)$  произвольную точку из  $\mathbb{R}^2$ , введем следующее обозначение:

$$f(\cdot) \lesssim g(\cdot),$$

если  $f(h_1, h_2) \leq g(h_1, h_2) + o(|h_1| + |h_2|^2)$  при  $|h| \rightarrow 0$ . Аналогичным образом определим

$$f(\cdot) \gtrsim g(\cdot)$$

и, соответственно,  $f(\cdot) \approx g(\cdot)$ .

Для  $(b, p, A) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  рассмотрим функцию

$$Q_{b,p,A}(t, x) := bt + px + (1/2)Ax^2, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

линейную по  $t$  и квадратичную по  $x$ . Определим параболические *супер-* и *субджеты* произвольной функции  $v$  в точке  $(t, x) \in K := (0, T) \times (0, \infty)$ :

$$\mathcal{P}^+v(t, x) := \{(b, p, A) \in \mathbb{R}^3 : v((t, x) + \cdot) \lesssim v(t, x) + Q_{b,p,A}(\cdot)\},$$

$$\mathcal{P}^-v(t, x) := \{(b, p, A) \in \mathbb{R}^3 : v((t, x) + \cdot) \gtrsim v(t, x) + Q_{b,p,A}(\cdot)\}.$$

Следующая лемма утверждает, что для  $v \in C(K)$  и любого элемента  $(b, p, A) \in \mathcal{P}^+v(t, x)$ , где  $(t, x) \in K$ , существует тестовая функция  $f$ , мажорирующая  $v$  на  $K$  и равномерно близкая к  $v$ , имеющая в точке  $(t, x)$  то же значение, что и  $v$ , принадлежащая  $C^{1,2}$  в окрестности  $(t, x)$  и имеющая в этой точке первую

производную по  $t$ , равную  $b$ , и первую и вторую производные по  $x$ , равные, соответственно,  $p$  и  $A$ . Более того,  $f = v$  вне любой сколь угодно малой окрестности  $(t, x)$ .

**Лемма 7.** Пусть  $v \in C(K)$ ,  $(t, x) \in K$  и  $(b, p, A) \in \mathcal{P}^+v(t, x)$ . Тогда для любых  $\varepsilon, \delta \in (0, 1]$  существует  $r > 0$ , зависящее от  $\varepsilon$ , а также функция  $f \in C^{1,2}(t, x)$ , зависящая от  $\varepsilon$  и  $\delta$ , со следующими свойствами:

$$(i) \quad f(t, x) = v(t, x), \quad f_t(t, x) = b, \quad f_x(t, x) = p, \quad f_{xx}(t, x) = A;$$

$$(ii) \quad v \leq f \leq v + \varepsilon \text{ на } K;$$

(iii)  $f((t, x) + h) = v(t, x) + Q_{b,p,A}(h) + \rho(h)$  для  $h \in \mathcal{O}_r(0, 0)$ , где  $C^{1,2}$ -функция  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  с компактным носителем такова, что

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{\rho(h)}{|h_1| + |h_2|^2} = 0, \quad (4.10)$$

$$(iv) \quad f = v \text{ на множестве } K \setminus \mathcal{O}_{r'}(t, x), \text{ где } r' := r + \delta.$$

*Доказательство.* Возьмём  $r \in (0, 1)$  так, что шар  $\mathcal{O}_{2r}(t, x)$  с центром в точке  $(t, x)$  и радиусом  $2r$  лежит внутри  $K$ . По определению  $\mathcal{P}^+v(t, x)$ ,

$$\varrho(h) := v((t, x) + h) - v(t, x) - Q_{b,p,A}(h) \leq (|h_1| + |h_2|^2)\varphi(h),$$

где  $\varphi(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Рассмотрим на  $\mathcal{O}_{2r}(0, 0) \cap \mathbb{R}_+^2$  функцию

$$\widehat{\varphi}(u) := \sup_{\{h: |h_1| \leq u_1, |h_2| \leq u_2\}} \frac{\varrho^+(h)}{|h_1| + |h_2|^2} \leq \sup_{\{h: |h_1| \leq u_1, |h_2| \leq u_2\}} \varphi^+(u),$$

где  $\varphi^+ = \max(\varphi, 0)$ . Очевидно, что  $\widehat{\varphi}$  непрерывна, возрастает по  $u_1$  и  $u_2$ , и  $\widehat{\varphi}(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow 0$ . Продолжим  $\widehat{\varphi}$  до положительной непрерывной функции на  $\mathbb{R}_+^2$  с  $\widehat{\varphi}(u) = 0$  при  $|u| \geq 1$  и сопоставим ей функцию  $\Upsilon : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ , положив

$$\Upsilon(u) = \Upsilon(u_1, u_2) := \int_{u_1}^{2u_1} \widehat{\varphi}(\xi, u_2) d\xi + \frac{2}{3} \int_{u_2}^{2u_2} \int_{\eta}^{2\eta} \widehat{\varphi}(u_1, \xi) d\xi d\eta.$$

Тогда

$$(u_1 + u_2^2)\widehat{\varphi}(u) \leq \Upsilon(u) \leq (u_1 + u_2^2)\widehat{\varphi}(4u).$$

Отсюда следует, что функция  $\rho : h \mapsto \Upsilon(|h_1|, |h_2|)$  имеет компактный носитель, принадлежит  $C^{1,2}(\mathcal{O}_r(0, 0))$ , обращается в ноль в начале координат вместе с частными производными первого порядка по  $h_1$  и  $h_2$  и второй частной производной по  $h_2$ . Для  $h \in \mathcal{O}_r(0, 0)$  имеем:

$$v((t, x) + h) - v(t, x) - Q_{b,p,A}(h) \leq (|h_1| + |h_2|^2)\widehat{\varphi}(h) \leq \Upsilon(|h_1|, |h_2|) = \rho(h).$$

Таким образом, функция

$$f^0 : (s, y) \mapsto v(t, x) + Q_{b, p, A}(s - t, y - x) + \rho(s - t, y - x)$$

мажорирует  $v$  на шаре  $O_r(t, x)$ . Без потери общности, уменьшая  $r$  при необходимости, мы можем считать, что  $f^0 \leq v + \varepsilon$  на шаре  $O_{r'}(t, x)$  для некоторого  $r' > r$ .

Рассмотрим непрерывную функцию  $\xi_{r, r'} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  такую, что  $\xi_{r, r'} = 1$  на  $O_r(0, 0)$  и  $\xi_{r, r'} = 0$  вне  $O_{r'}(0, 0)$ . Функция

$$f : (s, y) \mapsto f^0(s, y)\xi_{r, r'}(s - t, y - x) + v(s, y)(1 - \xi_{r, r'}(s - t, y - x))$$

обладает всеми требуемыми свойствами.  $\square$

Соответствующее утверждение для  $\mathcal{P}^-v(x)$  выполняется с очевидными изменениями в формулировке.

Следующий результат является скалярной версией леммы Ишии (см. [35], лемма 1) и играет ключевую роль в дальнейших рассуждениях.

**Лемма 8.** Пусть  $O$  — открытое подмножество  $\mathbb{R}_+$ ,  $v$  и  $\tilde{v}$  — две непрерывные функции на  $(0, T) \times O$ . Пусть  $\Delta_n(t, x, y) := v(t, x) - \tilde{v}(t, y) - \frac{1}{2}n|x - y|^2$ , где параметр  $n > 0$ . Предположим, что функция  $\Delta_n$  достигает максимума в точке  $(t_n, x_n, y_n) \in (0, T) \times O \times O$ . Тогда существуют вещественные числа  $b_n$ ,  $A_n$  и  $\tilde{A}_n$  такие, что

$$(b_n, n(x_n - y_n), A_n) \in \bar{\mathcal{P}}^+v(t_n, x_n), \quad (b_n, n(x_n - y_n), \tilde{A}_n) \in \bar{\mathcal{P}}^-\tilde{v}(t_n, y_n),$$

и, для всех  $x, y \in O$ ,

$$A_n x^2 - \tilde{A}_n y^2 \leq 3n(x - y)^2. \quad (4.11)$$

В частности,  $A_n \leq \tilde{A}_n$ .

**Замечание 12.** Запись  $(b_n, n(x_n - y_n), A_n) \in \bar{\mathcal{P}}^+v(t_n, x_n)$  означает, что существуют последовательности  $(t_{nk}, x_{kn})$  и  $(b_{nk}, p_{nk}, A_{nk}) \in \mathcal{P}^+v(t_{n,k}, x_{nk})$ ,  $k \geq 1$ , такие, что

$$(t_{nk}, x_{kn}) \rightarrow (t_n, x_n), \quad (b_{nk}, p_{nk}, A_{nk}) \rightarrow (b_n, n(x_n - y_n), A_n), \quad k \rightarrow \infty.$$

Аналогичный смысл имеет запись  $(b_n, n(x_n - y_n), \tilde{A}_n) \in \bar{\mathcal{P}}^-\tilde{v}(t_n, y_n)$ .

### 4.3.2 Принцип максимума и теорема единственности

**Теорема 5.** Пусть  $\psi, \tilde{\psi}$  — функции на  $\bar{K} := [0, T] \times \bar{R}_+$  со значениями в отрезке  $[0, 1]$ , непрерывные всюду, кроме точки  $(0, T)$ , являющиеся, соответственно, вязкостным субрешением и суперрешением уравнения (4.9), такие, что

$$\psi(t, 0+) = \tilde{\psi}(t, 0+), \quad \psi(t, \infty) = \tilde{\psi}(t, \infty), \quad \psi(T, u) = \tilde{\psi}(T, u). \quad (4.12)$$

Тогда  $\tilde{\psi} \geq \psi$ .

*Доказательство.* Для любого  $\delta > 0$  функция  $\tilde{\psi}^\delta(t, u) := \tilde{\psi}(t, u) + \delta/t \geq \delta/t$  является строгим суперрешением уравнения (4.9). Она равномерно стремится к бесконечности при  $t \rightarrow 0$ . Покажем, что  $\tilde{\psi}^\delta \geq \psi$ , и получим требуемый результат, устремив  $\delta$  к нулю.

Если доказываемое неравенство не выполняется, то  $\psi(t_0, u_0) = \tilde{\psi}^\delta(t_0, u_0) + \varepsilon_0$  для некоторых  $u_0 \in (0, \infty)$ ,  $t_0 \in (0, T)$  и  $\varepsilon_0 > 0$ .

1. Первый шаг для получения противоречия состоит в использовании метода удвоения переменных для дальнейшего применения леммы Ишии к каждому элементу последовательности функций  $\Delta_n = \Delta_n^\delta$  в точках их максимума.

Определим непрерывную функцию  $\Delta_n : (0, T] \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 0$ , по формуле

$$\Delta_n(t, u, w) := \psi(t, u) - \tilde{\psi}^\delta(t, w) - \frac{1}{2}n|u - w|^2.$$

Заметим, что  $\Delta_n(t, u, u) = \Delta_0(t, u, u)$  для всех  $(t, u) \in (0, T] \times \mathbb{R}_+$  и  $\Delta_0(t, 0, 0) \leq 0$ .

Рассмотрим непустые замкнутые множества

$$\Gamma_n := \{(t, u, w) \in (0, T] \times \mathbb{R}_+^2 : \Delta_n(t, u, w) \geq \varepsilon_0\}.$$

Тогда  $\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma_n \subseteq [\delta, T] \times \mathbb{R}_+^2$ . Множество  $\Gamma_1$  ограничено. Действительно, если это не так, мы можем найти последовательность  $(s_m, u_m, w_m) \in \Gamma_1$  такую, что  $s_m \rightarrow s$ ,  $u_m, w_m \rightarrow \infty$ . В силу непрерывности  $\psi$  и  $\tilde{\psi}$  получаем неравенство

$$\limsup_m \Delta_1(s_m, u_m, w_m) \leq -\delta/s < 0,$$

то есть приходим к противоречию.

Отсюда следует, что все функции  $\Delta_n$  достигают своих максимальных значений на  $[0, T] \times \mathbb{R}_+^2$  на компактном подмножестве  $\Gamma_1$ . То есть существуют

$(t_n, x_n, y_n) \in [\delta, T] \times \mathbb{R}_+^2$  такие, что

$$\begin{aligned} \Delta_n(t_n, x_n, y_n) &= \bar{\Delta}_n := \sup_{(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^2} \Delta_n(t, x, y) \\ &\geq \bar{\Delta} := \sup_{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+} \Delta_0(t, x, x) \geq \varepsilon_0 > 0. \end{aligned}$$

Значит последовательность  $n|x_n - y_n|^2$  ограничена. Продолжим рассуждения (без введения новых обозначений) с подпоследовательностью индексов, вдоль которой  $(t_n, x_n, y_n)$  сходятся к некоторому пределу  $(\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{x})$ . Необходимо, чтобы  $n|x_n - y_n|^2 \rightarrow 0$  (иначе  $\Delta_0(\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{x}) > \bar{\Delta}$ ). Также легко видеть, что  $\bar{\Delta}_n \downarrow \Delta_0(\widehat{t}, \widehat{x}, \widehat{x}) = \bar{\Delta}$ . Таким образом,  $(\widehat{t}, \widehat{x}) \in K := (0, T) \times (0, \infty)$ .

**2.** Второй шаг состоит в построении тестовых функций.

По лемме Ишии, применённой к функциям  $\psi$  и  $\tilde{\psi}^\delta$  в точке  $(t_n, x_n, y_n)$ , существуют числа  $b_n, A_n$  и  $\tilde{A}_n$ , удовлетворяющие (4.11), такие что

$$(b_n, n(x_n - y_n), A_n) \in \bar{\mathcal{P}}^+ \psi(t_n, x_n), \quad (b_n, n(x_n - y_n), \tilde{A}_n) \in \bar{\mathcal{P}}^- \tilde{\psi}^\delta(t_n, y_n).$$

Согласно замечанию после леммы Ишии, существуют точки  $(t_{nk}, x_{nk}) \in K$  и  $(b_{nk}, p_{nk}, A_{nk}) \in \mathcal{P}^+ \psi(t_{nk}, x_{nk})$  такие, что

$$(t_{nk}, x_{nk}) \rightarrow (t_n, x_n), \quad (b_{nk}, p_{nk}, A_{nk}) \rightarrow (b_n, n(x_n - y_n), A_n),$$

и  $(t'_{nk}, y_{kn}) \in K$ ,  $(b'_{nk}, p'_{nk}, \tilde{A}'_{nk}) \in \mathcal{P}^- \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{kn})$  такие, что

$$(t'_{nk}, y_{kn}) \rightarrow (t_n, y_n), \quad (b'_{nk}, p'_{nk}, \tilde{A}'_{nk}) \rightarrow (b_n, n(x_n - y_n), \tilde{A}_n), \quad k \rightarrow \infty.$$

Из джетов  $\mathcal{P}^+ \psi(t_{nk}, x_{nk})$  и  $\mathcal{P}^- \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{kn})$  построим функции  $f^{nk}$  и  $\tilde{f}^{nk}$ , чтобы проверить, соответственно, что  $\psi$  является вязкостным субрешением уравнения (4.9) в точке  $(t_{nk}, x_{nk})$ , а  $\tilde{\psi}^\delta$  является вязкостным сверхрешением в точке  $(t'_{nk}, y_{kn})$ .

Возьмём произвольные положительные  $\varepsilon_n, \delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а также  $\varepsilon_{nk} \downarrow \varepsilon_n, \delta_{nk} \downarrow \delta_n$  при  $k \rightarrow \infty$  (конкретный выбор параметров будет осуществлен далее). По лемме 7 существуют  $r_{nk} > 0$  и  $f^{nk} \in C_b^{1,2}(t_{nk}, x_{nk})$  со свойствами  $\psi \leq f^{nk} \leq \psi + \varepsilon_{nk}$ ,

$$\begin{aligned} f^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) &= \psi(t_{nk}, x_{nk}), \quad f_t^n(t_{nk}, x_{nk}) = b_{nk}, \quad f_x^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) = p_{nk}, \\ f_{xx}^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) &= A_{nk}, \end{aligned}$$

$f^{nk}((t_{nk}, x_{nk}) + h) = \psi(t_{nk}, x_{nk}) + Q_{b_{nk}, p_{nk}, A_{nk}}(h) + \rho_{nk}(h)$  для  $h \in O_{r^{nk}}(0, 0)$ , где  $C^{1,2}$ -функция  $\rho_{nk} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  с компактным носителем такая, что

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{\rho_{nk}(h)}{|h_1| + |h_2|^2} = 0,$$

и  $f^{nk} = \psi$  на множестве  $K \setminus O_{r'}(t_{nk}, x_{nk})$ , где  $r'_{nk} := r_{nk} + \delta_n$ .

Аналогично, существуют  $\tilde{r}_{nk} > 0$  и функция  $\tilde{f}^{nk} \in C_b^{1,2}(t'_{nk}, y_{nk})$  со свойствами  $\tilde{\psi}^\delta \geq \tilde{f}^{nk} \geq \tilde{\psi}^\delta - \varepsilon_{nk}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) &= \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk}), \quad \tilde{f}_t^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) = b'_{nk}, \quad \tilde{f}_x^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) = p'_{nk}, \\ \tilde{f}_{xx}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) &= \tilde{A}'_{nk}, \end{aligned}$$

$\tilde{f}^{nk}((t'_{nk}, y_{nk}) + h) = \tilde{\psi}(t'_{nk}, y_{nk}) + Q_{b'_{nk}, p'_{nk}, \tilde{A}'_{nk}}(h) + \tilde{\rho}_{nk}(h)$  для  $h \in O_{\tilde{r}^{nk}}(0, 0)$ , где  $C^{1,2}$ -функция  $\tilde{\rho}_{nk} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  с компактным носителем такая, что

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{\tilde{\rho}_{nk}(h)}{|h_1| + |h_2|^2} = 0,$$

и  $\tilde{f}^{nk} = \tilde{\psi}^\delta$  на множестве  $K \setminus O_{\tilde{r}'}(t'_{nk}, y_{nk})$ , где  $\tilde{r}'_{nk} := \tilde{r}_{nk} + \tilde{\delta}_n$ .

По определениям суб- и суперрешений имеем:

$$\begin{aligned} f_t^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) + \mathcal{L}f^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) &\geq 0 \\ \tilde{f}_t^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) + \mathcal{L}\tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) &\leq -\delta/T^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B_{nk} = f_t^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) - \tilde{f}_t^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) - \mathcal{L}f^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) + \mathcal{L}\tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) \geq \delta/T^2. \quad (4.13)$$

**3.** Третий шаг состоит в получении противоречия с нашим предположением.

После перегруппировки членов получаем  $B_{nk} = B_{nk}^{(1)} + B_{nk}^{(2)}$ , где

$$\begin{aligned} B_{nk}^{(1)} &:= \frac{1}{2}\sigma^2(A_{nk}x_{nk}^2 - \tilde{A}'_{nk}y_{nk}^2) + \frac{1}{2}\sigma_P^2(A_{nk} - \tilde{A}'_{nk}) + a(p_{nk}x_{nk} - p'_{nk}y_{nk}) \\ &\quad + a_P(p_{nk} - p'_{nk}) + b_{nk} - b'_{nk}, \\ B_{nk}^{(2)} &:= \mathcal{L}_R^i f^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) - \mathcal{L}_R^i \tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) + \mathcal{L}_P^i f^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) - \mathcal{L}_P^i \tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) \end{aligned}$$

с  $\mathcal{L}_R^i$  и  $\mathcal{L}_P^i$ , определёнными в (4.6) и (4.8).

Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получаем:

$$\lim_k B_{nk}^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma^2(A_n x_n^2 - \tilde{A}_n y_n^2) + \frac{1}{2}\sigma_P^2(A_n - \tilde{A}_n) + a n(x_n - y_n)^2.$$

По лемме Ишии  $A_n - \tilde{A}_n \leq 0$ , первый член оценивается сверху константой, умноженной на  $n|x_n - y_n|^2$ , и, следовательно, сходится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что  $\limsup_n \lim_k B_{nk}^{(1)} \leq 0$ .

Чтобы получить противоречие с (4.13), достаточно показать, что

$$\limsup_n \limsup_k (\mathcal{L}_R^i f^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) - \mathcal{L}_R^i \tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk})) \leq 0, \quad (4.14)$$

$$\limsup_n \limsup_k (\mathcal{L}_P^i f^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) - \mathcal{L}_P^i \tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk})) \leq 0. \quad (4.15)$$

Пусть

$$\begin{aligned} H_{nk}(z) &:= [f^{nk}(t_{nk}, x_{nk} + x_{nk}z) - f^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) - f_x^{nk}(t_{nk}, x_{nk})x_{nk}zI_{\{|z| \leq 1\}}] \\ &\quad - [\tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk} + y_{nk}z) - \tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) - \tilde{f}_x^{nk}(t'_{nk}, y_{nk})y_{nk}zI_{\{|z| \leq 1\}}], \\ G_{nk}(z) &:= [f^{nk}(t_{nk}, x_{nk} + z) - f^{nk}(t_{nk}, x_{nk}) - f_x^{nk}(t_{nk}, x_{nk})zI_{\{|z| \leq 1\}}] \\ &\quad - [\tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk} + z) - \tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk}) - \tilde{f}_x^{nk}(t'_{nk}, y_{nk})zI_{\{|z| \leq 1\}}]. \end{aligned}$$

В этих обозначениях соотношения (4.14) и (4.15) принимают вид

$$\begin{aligned} \limsup_n \limsup_k \int H_{nk}(z) \Pi(dz) &\leq 0, \\ \limsup_n \limsup_k \int G_{nk}(z) \Pi_P(dz) &\leq 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем считать, что  $n$  и  $k$  достаточно большие, чтобы гарантировать  $\kappa \leq x_{nk}, y_{kn} \leq 1/\kappa$  для некоторой малой величины  $\kappa > 0$ .

На множестве  $\{|z| > 1\}$  функции  $H_{nk}$  и  $G_{nk}$  допускают равномерные оценки

$$H_{nk}(z) \leq \psi(t_{nk}, x_{nk} + x_{nk}z) - \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk} + y_{nk}z) - \psi(t_{nk}, x_{nk}) + \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk}) + 2\varepsilon_{nk},$$

$$G_{nk}(z) \leq \psi(t_{nk}, x_{nk} + z) - \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk} + z) - \psi(t_{nk}, x_{nk}) + \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk}) + 2\varepsilon_{nk}.$$

Выбирая  $\varepsilon_{nk} = 1/n + 1/k$ , получаем:

$$\limsup_k H_{nk}(z) \leq \psi(t_n, x_n + x_n z) - \tilde{\psi}^\delta(t_n, y_n + y_n z) - \psi(t_n, x_n) + \tilde{\psi}^\delta(t_n, y_n) + 1/n.$$

Заметим, что на множестве  $\{|z| > 1\}$

$$\begin{aligned} \psi(t_n, x_n + x_n z) - \tilde{\psi}^\delta(t_n, y_n + y_n z) &= \Delta_n(t_n, x_n + x_n z, y_n + y_n z) \\ &\quad + (1/2)nz(z+2)|x_n - y_n|^2 + (1/2)n|x_n - y_n|^2 \\ &\leq \Delta_n(t_n, x_n + x_n z, y_n + y_n z) \\ &\quad + (3/2)nz^2|x_n - y_n|^2 + (1/2)n|x_n - y_n|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, на множестве  $\{|z| > 1\}$

$$\limsup_k H_{nk}(z) \leq \Delta_n(t_n, x_n + x_n z, y_n + y_n z) - \Delta_n(t_n, x_n, y_n) + \frac{3}{2} n z^2 |x_n - y_n|^2 + \frac{1}{n}.$$

Первый член в неравенстве выше мажорируется вторым членом, а последние два члена стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Аналогично получаем оценки

$$\begin{aligned} \limsup_k G_{nk}(z) &\leq \psi(t_n, x_n + z) - \tilde{\psi}^\delta(t_n, y_n + z) - \psi(t_n, x_n) + \tilde{\psi}^\delta(t_n, y_n) \\ &\leq \Delta_n(t_n, x_n + z, y_n + z) - \Delta_n(t_n, x_n, y_n) \leq 0. \end{aligned}$$

В силу ограниченности  $H_{nk}(z)I_{\{|z|>1\}}$  и  $G_{nk}(z)I_{\{|z|>1\}}$ , применяя лемму Фату, получаем оценки

$$\begin{aligned} \limsup_n \limsup_k \int H_{nk}(z) I_{\{|z|>1\}} \Pi(dz) &\leq 0, \\ \limsup_n \limsup_k \int G_{nk}(z) I_{\{|z|>1\}} \Pi_P(dz) &\leq 0. \end{aligned}$$

Возьмём  $r_{nk} \in (0, \kappa)$  достаточно малым, чтобы гарантировать, что для  $\theta \in (0, r_{nk}]$  справедливы представления

$$\begin{aligned} f^{nk}(t_{nk}, x_{nk} + \theta) &= \psi(t_{nk}, x_{nk}) + p_{nk} \theta + (1/2) A_{nk} \theta^2 + R_{nk}(\theta), \\ \tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk} + \theta) &= \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk}) + p'_{nk} \theta + (1/2) \tilde{A}'_{nk} \theta^2 + \tilde{R}_{nk}(\theta), \end{aligned}$$

где  $R_{nk}(\theta) = \rho_{nk}(0, \theta)$ ,  $\tilde{R}_{nk}(\theta) = \tilde{\rho}_{nk}(0, \theta)$ .

На множестве  $U_{nk} := \{z: |z| \leq \kappa r_{nk}\} \cap \{z: |z| \leq 1\}$

$$\begin{aligned} H_{nk}(z) &= (1/2)(A_n x_{nk}^2 - \tilde{A}_n y_{nk}^2) z^2 \\ &\quad + (1/2)((A_{nk} - A_n) x_{nk}^2 - (\tilde{A}'_{nk} - \tilde{A}_n) y_{nk}^2) z^2 + R_{nk}(z x_{nk}) - \tilde{R}_{nk}(z y_{nk}), \\ G_{nk}(z) &= (1/2)(A_{nk} - \tilde{A}'_{nk}) z^2 + R_{nk}(z) - \tilde{R}_{nk}(z), \end{aligned}$$

и справедливы оценки

$$\begin{aligned} H_{nk}(z) &\leq (3/2)n(x_{nk} - y_{nk})^2 z^2 + (1/(2\kappa^2))(|A_{nk} - A_n| + |\tilde{A}'_{nk} - \tilde{A}_n|) z^2 \\ &\quad + |R_{nk}(z x_{nk})| + |\tilde{R}_{nk}(z y_{nk})|, \\ G_{nk}(z) &\leq (1/2)|A_{nk} - \tilde{A}'_{nk}| z^2 + |R_{nk}(z)| + |\tilde{R}_{nk}(z)|. \end{aligned}$$

Функции  $R_{nk}(zx_{nk})/z^2$ ,  $\tilde{R}_{nk}(zy_{nk})/z^2$ ,  $R_{nk}(z)/z^2$  и  $\tilde{R}_{nk}(z)/z^2$  ограничены и стремятся к нулю при  $z \rightarrow 0$ . Таким образом, для всех достаточно больших  $n, k$

$$\begin{aligned} \int_{U_{nk}} H_{nk}(z) \Pi(dz) &\leq \frac{1}{n}, \\ \int_{U_{nk}} G_{nk}(z) \Pi_P(dz) &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Выберем достаточно малое  $\delta_n > 0$  и  $r'_{nk} := \kappa r_{nk} + \delta_n$  (из леммы 7) таким образом, чтобы для достаточно больших  $k, n$  на множестве  $V_{nk} := \{z: \kappa r_{nk} \leq |z| \leq r'_{nk}\} \cap \{z: |z| \leq 1\}$  иметь

$$\begin{aligned} \int_{V_{nk}} H_{nk}(z) \Pi(dz) &\leq \frac{1}{n}, \\ \int_{V_{nk}} G_{nk}(z) \Pi_P(dz) &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

На множестве  $\{z: |z| \geq r'_{nk}\}$

$$\begin{aligned} f^{nk}(t_{nk}, x_{nk} + zx_{nk}) &= \psi(t_{nk}, x_{nk} + zx_{nk}), \quad \tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk} + zy_{nk}) = \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk} + zy_{nk}), \\ f^{nk}(t_{nk}, x_{nk} + z) &= \psi(t_{nk}, x_{nk} + z), \quad \tilde{f}^{nk}(t'_{nk}, y_{nk} + z) = \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk} + z), \end{aligned}$$

что означает, что на множестве  $Y_{nk} := \{z: r'_{nk} \leq |z| \leq 1\}$

$$\begin{aligned} H_{nk}(z) &= \psi(t_{nk}, x_{nk} + x_{nk}z) - \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk} + y_{nk}z) - \psi(t_{nk}, x_{nk}) + \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk}) \\ &\quad - (p_{nk}x_{nk} - p'_{nk}y_{nk})z, \\ G_{nk}(z) &= \psi(t_{nk}, x_{nk} + z) - \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk} + z) - \psi(t_{nk}, x_{nk}) + \tilde{\psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk}) \\ &\quad - (p_{nk} - p'_{nk})z. \end{aligned}$$

Функции  $H_{nk}(z)$ ,  $G_{nk}(z)$  непрерывны на компактном множестве  $\{z: \delta_n \leq |z| \leq 1\} \supseteq Y_{nk}$ , и, следовательно, равномерно непрерывны. Учитывая, что

$$p_{nk}x_{nk} - p'_{nk}y_{nk} \rightarrow n(x_n - y_n)^2, \quad p_{nk} - p'_{nk} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

получаем, что для достаточно больших  $k$  и достаточно малых  $\eta_n, \mu_n > 0$

$$\begin{aligned} H_{nk}(z) &\leq \psi(t_n, x_n + x_n z) - \tilde{\psi}^\delta(t'_n, y_n + y_n z) - \psi(t_n, x_n) + \tilde{\psi}^\delta(t'_n, y_n) \\ &\quad - nz(x_n - y_n)^2 + \eta_n \\ &\leq \Delta_n(t_n, x_n + x_n z, y_n + y_n z) - \Delta_n(t_n, x_n, y_n) + \frac{1}{2}nz^2|x_n - y_n|^2 + \eta_n. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} G_{nk}(z) &\leq \Psi(t_{nk}, x_{nk} + z) - \tilde{\Psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk} + z) - \Psi(t_{nk}, x_{nk}) + \tilde{\Psi}^\delta(t'_{nk}, y_{nk}) + \mu_n \\ &\leq \Delta_n(t_n, x_n + x_n z, y_n + y_n z) - \Delta_n(t_n, x_n, y_n) + \mu_n. \end{aligned}$$

Первые члены в обоих неравенствах мажорируются вторыми членами. Третий член в первом неравенстве интегрируем и сходится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$\limsup_n \frac{1}{2} n |x_n - y_n|^2 \int z^2 I_{\{|z| \leq 1\}} \Pi(dz) \leq 0.$$

Последние члены  $\eta_n$  и  $\mu_n$  можно выбрать одновременно с  $\delta_n$  так, чтобы гарантировать, что для достаточно больших  $n$

$$\mu_n \int I_{\{\delta_n \leq |z| \leq 1\}} \Pi(dz) \leq \frac{1}{n}, \quad \eta_n \int I_{\{\delta_n \leq |z| \leq 1\}} \Pi_P(dz) \leq \frac{1}{n}.$$

Следовательно, применяя теорему о мажорируемой сходимости,

$$\begin{aligned} \limsup_n \limsup_k \int H_{nk}(z) I_{\{|z| \leq 1\}} \Pi(dz) &\leq 0, \\ \limsup_n \limsup_k \int G_{nk}(z) I_{\{|z| \leq 1\}} \Pi_P(dz) &\leq 0. \end{aligned}$$

□

Как следствие, получаем следующий результат единственности.

**Теорема 6.** Пусть  $\Psi$  и  $\tilde{\Psi}$  — две функции на  $\bar{K} := [0, T] \times \bar{\mathbb{R}}_+$  со значениями в  $[0, 1]$ , непрерывные всюду, кроме точек  $(T, \infty)$  и  $(0, T)$ . Предположим, что  $\Psi$  и  $\tilde{\Psi}$  являются вязкостными решениями уравнения (4.9) на  $\bar{K}$ , такими что

$$\Psi(t, 0) = \tilde{\Psi}(t, 0), \quad \Psi(t, \infty) = \tilde{\Psi}(t, \infty), \quad \Psi(T, u) = \tilde{\Psi}(T, u).$$

Тогда  $\Psi = \tilde{\Psi}$ .

**Замечание 13.** В актуарном контексте  $\Psi$  — функция вероятности разорения,  $\Psi(t, \infty) = 0$  для всех  $t \in [0, T]$  и  $\Psi(T, u) = 0$  для всех  $u > 0$ . По определению разорения,  $\Psi(t, 0) = 1$  для всех  $t$ . Даже в случае, когда  $\Psi$  непрерывна в точках  $(t, 0)$ ,  $t < T$ , она имеет разрыв в точке  $(T, 0)$ .

## 4.4 Непрерывность вероятности разорения

### 4.4.1 Модель Крамера–Лундберга

Чтобы объяснить идею подхода, сначала рассмотрим классическую модель Крамера–Лундберга. В этом случае  $X_t = u + P_t$ , где  $P$  — составной пуассоновский процесс с интенсивностью  $\alpha$ , постоянным сносом  $c > 0$  и распределением скачков  $F_\xi$ .

**Утверждение 6.** *Вероятность неразорения  $\Phi(t, u)$  непрерывна на множестве  $[0, T] \times (0, \infty)$ .*

*Доказательство.* Непрерывность в любой точке  $(T, u)$ , где  $u > 0$ , очевидна. Чтобы исследовать непрерывность в точке  $(t, u)$ , где  $t < T$  и  $u > 0$ , рассмотрим сначала случай, когда функция распределения  $F_\xi$  непрерывна. Положим  $\tau^t := \tau_1^t \wedge T$ , где  $\tau_1^t$  есть первый скачок  $P$  после  $t$ . Тогда, используя строгое марковское свойство и учитывая, что  $\Phi(t, u) = 0$  для  $u \leq 0$ ,  $t < T$ , и  $\Phi(T, u) = 1$  для  $u > 0$ , имеем:

$$\Phi(t, u) = \mathbb{E}[\Phi(\tau^t, X_{\tau^t}^{t, u}) I_{\{\tau^t < T\}}] + \mathbb{P}[\tau^t = T]. \quad (4.16)$$

Второй член в правой части, равный  $e^{-\alpha(T-t)}$ , непрерывен по  $t$ . Первый член можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Phi(\tau^t, X_{\tau^t}^{t, u}) I_{\{\tau^t < T\}}] &= \alpha \int_t^T \int \Phi(s, u + c(s-t) + x) e^{-\alpha(T-s)} F_\xi(dx) ds \\ &= \alpha e^{-\alpha T} \int \left[ \int \Phi(s, u + c(s-t) + x) F_\xi(dx) \right] I_{[t, T]}(s) e^{\alpha s} ds. \end{aligned}$$

Функция  $y \rightarrow \Phi(s, y)$  убывает, следовательно, непрерывна всюду, кроме, возможно, счётного подмножества. Отсюда следует, что интеграл в квадратных скобках является непрерывной функцией от  $(t, u)$ . Функция  $t \mapsto I_{[t, T]}(s)$  непрерывна во всех точках  $t$ , кроме  $t = s$ . Таким образом, первый член непрерывен по  $(t, u)$ .

В чисто разрывном случае, когда мера  $F_\xi$  сосредоточена на счётном множестве  $\cup \{x_i\}$  с  $p_i := F_\xi(\{x_i\})$ , интеграл в квадратных скобках можно записать как функцию

$$\sum \Phi(s, u + c(s-t) + x_i) p_i,$$

непрерывную по  $(t, u)$  для всех  $s$ , кроме счётного множества. Поскольку любая функция распределения есть сумма непрерывной функции распределения и чисто разрывной, получаем результат.  $\square$

#### 4.4.2 Модели с инвестициями

**Теорема 7.** Вероятность неразорения  $\Phi(t, u)$  непрерывна на  $[0, T) \times (0, \infty)$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $\Pi^P \neq 0$ . Без потери общности можем считать, что  $\alpha := \Pi^P(\{|x| > 1\}) \neq 0$ . Пусть  $\tilde{P} := xI_{\{|x| > 1\}} * \mu^P$  и  $\hat{P} := xI_{\{|x| \leq 1\}} * (\mu^P - \nu^P)$ . Составной пуассоновский процесс  $\tilde{P}$  имеет интенсивность  $\alpha$  и распределение скачков  $F_{\tilde{\xi}}(dx) = I_{\{|x| > 1\}} \Pi^P(dx) / \alpha$ . Определим момент остановки  $\tau^t := \tau_1^t \wedge T$ , где  $\tau_1^t$  есть момент первого скачка  $\tilde{P}$  после  $t$ .

Используя, как и выше, строгое марковское свойство, получаем (4.16), но теперь

$$\mathbb{E}[\Phi(\tau^{t,u}, X_{\tau^t}^{t,u}) I_{\{\tau^t < T\}}] = \alpha e^{-\alpha T} \int \mathbb{E} \left[ \int \Phi(s, Y_s^{t,u} + x) F_{\tilde{\xi}}(dx) \right] I_{[t, T]}(s) e^{\alpha s} ds,$$

где

$$Y_s^{t,u} := \frac{\mathcal{E}_s(R)}{\mathcal{E}_t(R)} u + \int_t^s \mathcal{E}_{v-}^{-1}(R) dP_v.$$

Предположим, что  $F_{\tilde{\xi}}$  непрерывна. Зафиксируем  $(t_0, u_0)$ . Функция  $v \mapsto \Phi(s, v)$  убывает, следовательно, непрерывна всюду, кроме точек  $v$  из счётного подмножества  $\Gamma_s \subset (0, \infty)$ . Процессы Леви  $R$  и  $P$  стохастически непрерывны. Для любого  $s$  функция  $(t, u) \mapsto Y_s^{t,u}$  непрерывна в точке  $(t_0, u_0)$  всюду, кроме  $\mathbb{P}$ -нулевого множества  $\Omega_s^{t_0, u_0}$ . Таким образом, всюду, кроме этого множества,

$$\int \Phi(s, Y_s^{t,u} + x) F_{\tilde{\xi}}(dx) \rightarrow \int \Phi(s, Y_s^{t_0, u_0} + x) F_{\tilde{\xi}}(dx), \quad (t, u) \rightarrow (t_0, u_0).$$

Следовательно, функция

$$(t, u) \mapsto \mathbb{E} \left[ \int \Phi(s, Y_s^{t,u} + x) F_{\tilde{\xi}}(dx) \right]$$

непрерывна, и мы получаем требуемую непрерывность тем же способом, что и в рассуждениях выше. Случай дискретного распределения требует лишь незначительных изменений.

Наконец, в случае, когда  $P$  содержит только гауссовскую компоненту, мы можем рассмотреть момент остановки  $\tau_1 := \inf\{s > t: W_s^P = 1\}$ . Его закон имеет плотность, которая может заменить в рассуждениях плотность экспоненциального распределения.  $\square$

## Заключение

**Обзор проведённого исследования.** В работе изучены вопросы гладкости вероятности разорения страховой компании и ее асимптотического поведения при больших значениях начального капитала. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. В модели типа Крамера–Лундберга с инвестициями в рисковый актив, цена которого задана ГБД, исследована вероятность разорения как функция начального капитала. В предположении непрерывности функции распределения  $F$  и ограниченности моментов страховых выплат доказана гладкость вероятности разорения, получено ИДУ для вероятности разорения и доказана степенная асимптотика при стремлении начального капитала к бесконечности. Проведены численные эксперименты, подтверждающие полученные теоретические результаты для случаев скачков с «тяжелыми» и «легкими» хвостами распределений.
2. Исследована модель с инвестициями в рисковый актив, динамика цены которого задана ГБД, и двусторонними скачками, плотность которых имеет дробно-рациональное преобразование Лапласа. Доказано, что, в предположении достаточной гладкости, вероятность разорения убывает степенным образом с параметром  $\beta$  при  $\beta \in (0,1)$ .
3. В модели с инвестициями в рисковый актив, динамика цены которого модулируется марковским процессом с конечным числом состояний, получены достаточные условия гладкости вероятности разорения. Показано, что если плотность скачков имеет непрерывные и интегрируемые производные вплоть до второго порядка, то есть  $f', f'' \in L^1(\mathbb{R}_+)$ , то вероятность разорения является дважды непрерывно дифференцируемой функцией начального капитала. Кроме того, получена система ИДУ, описывающая вероятности разорения для каждого начального состояния марковского процесса.
4. Исследована общая модель Орнштейна–Уленбека с инвестициями в рисковый актив на конечном временном интервале. Показано, что вероятность разорения является непрерывной функцией начального

капитала. Кроме того, получено ИДУ в частных производных для вероятности разорения и доказано, что вероятность разорения является единственным решением уравнения в смысле вязкости.

**Рекомендации и перспективы по дальнейшей разработке темы диссертации.**

1. Рассмотреть подход, используемый в главе 1, для модели разорения с инвестициями в рисковый актив в случайной среде, предложенной в главе 3. Исследовать вопрос гладкости вероятности разорения как функции начального капитала и ее асимптотического поведения при стремлении начального капитала к бесконечности.
2. Используя подход, предложенный в главе 1, исследовать гладкость и асимптотическое поведение вероятности разорения в модели с инвестициями в рисковый актив и двусторонними скачками, рассмотренной в главе 2.

## Список сокращений и условных обозначений

**ГБД** — геометрическое броуновское движение

**ИДУ** — интегро-дифференциальное уравнение

**ДУ** — дифференциальное уравнение

**ОДУ** — однородное дифференциальное уравнение

**СДУ** — стохастическое дифференциальное уравнение

**п.н.** — почти-наверное

## Список литературы

1. *Lundberg F.* Approximerad framställning af sannolikhetsfunktionen: Återförsäkring af kollektivrisker : дис. ... канд. / Lundberg Filip. — Uppsala, Sweden : Uppsala University, 1903. — С. 53.
2. *Cramér H.* On the Mathematical Theory of Risk. — Stockholm, Sweden : Skandia Jubilee Volume, 1930. — (Skandias Jubileumsvolym).
3. *Cramér H.* Collective Risk Theory. — Stockholm, Sweden : Skandia Jubilee Volume, 1955.
4. *Ширяев А. Н.* Вероятность-2: Суммы и последовательности случайных величин — стационарные, мартингалы, марковские цепи. — 4-е, переработанное и дополненное. — Москва : МЦНМО, 2007. — С. 416.
5. *Asmussen S., Albrecher H.* Ruin Probabilities. Vol. 14. — 2nd. — Singapore : World Scientific, 2010. — P. 620. — (Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability).
6. *Grandell I.* Aspects of Risk theory. — Berlin : Springer, 1990.
7. *Фролова А. Г.* Некоторые математические модели теории риска // Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам в геометрии и анализе. Тезисы. — 1994. — С. 117—118. — неопубликованная работа.
8. *Frolova A., Kabanov Y., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous // Finance and Stochastics. — 2002. — Vol. 6, № 2. — pp. 227–235.
9. *Kalashnikov V., Norberg R.* Power tailed ruin probabilities in the presence of risky investments // Stochastic Processes and their Applications. — Netherlands, 2002. — Vol. 98, № 2. — pp. 211–228.
10. *Paulsen J., Gjessing H. K.* Ruin theory with stochastic return on investments // Advances in Applied Probability. — 1997. — Vol. 29, № 4. — pp. 965–985.
11. *Fedoryuk M. V.* Asymptotic Analysis: Linear Ordinary Differential Equations. — Berlin : Springer-Verlag, 1993. — P. 363.

12. *Pergamenshchikov S., Zeitouni O.* Ruin probability in the presence of risky investments // *Stochastic Processes and their Applications*. — Amsterdam, Netherlands, 2006. — Vol. 116. — pp. 267–278.
13. *Pergamenshchikov S.* Erratum to: “Ruin probability in the presence of risky investments” // *Stochastic Processes and their Applications*. — Amsterdam, Netherlands, 2009. — Vol. 119, № 1. — pp. 305–306. — Erratum to [12].
14. *Belkina T.* Risky investment for insurers and sufficiency theorems for the survival probability // *Markov Processes and Related Fields*. — 2014. — Vol. 20, № 3. — pp. 505–525.
15. *Kabanov Y., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous: the case of negative risk sums // *Finance and Stochastics*. — Germany, 2016. — Vol. 20, № 2. — pp. 355–379.
16. *Kabanov Y., Pukhlyakov N.* Ruin probabilities with investments: smoothness, integro-differential and ordinary differential equations, asymptotic behaviour // *Journal of Applied Probability*. — United Kingdom, 2022. — Vol. 59, № 2. — pp. 556–570.
17. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В.* Сингулярная краевая задача для интегродифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями: анализ и численное решение // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2012. — Т. 52, № 10. — С. 1812–1846.
18. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Славко Б. В.* Платежеспособность страховой компании в дуальной модели риска с учётом инвестиций: анализ и численные исследования сингулярных краевых задач // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2019. — Т. 59, № 11. — С. 1973–1997.
19. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Славко Б. В.* Безрисковые инвестиции и их сравнение с простыми рисковыми стратегиями в модели пенсионного страхования: решение сингулярных задач для интегродифференциальных уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2020. — Т. 60, № 10. — С. 1676–1696.
20. *Goldie C.* Implicit renewal theory and tails of solutions of random equation. // *Ann. Appl. Probab.* — 1991. — Vol. 1. — pp. 126–166.
21. *Nyrhinen H.* On the ruin probabilities in a general economic environment. // *Stoch. Proc. Appl.* — 1999. — Vol. 83. — pp. 319–330.

22. *Nyrhinen H.* Finite and infinite time ruin probabilities in a stochastic economic environment. // *Stoch. Proc. Appl.* — 2001. — Vol. 92. — pp. 265–285.
23. *Albrecher H., Constantinescu C., Thomann E.* Asymptotic results for renewal risk models with risky investments // *Stochastic Processes and their Applications.* — 2012. — Vol. 122, № 11. — pp. 3767–3789.
24. *Ellanskaya A., Kabanov Y.* On ruin probabilities with risky investments in a stock with stochastic volatility // *Extremes.* — 2021. — Vol. 24. — pp. 687–697.
25. *Kabanov Y., Pergamenshchikov S.* On ruin probabilities with investments in a risky asset with a regime-switching price // *Finance and Stochastics.* — 2022. — Vol. 26. — pp. 877–897.
26. *Ramsden L., Papaioannou A. D.* Asymptotic results for a Markov-modulated risk process with stochastic investment // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2017. — Vol. 313. — pp. 38–53.
27. *Paulsen J.* Risk theory in stochastic economic environment // *Stochastic Processes and their Applications.* — 1993. — Vol. 46. — pp. 327–361.
28. *Belkina T., Kabanov Y.* Viscosity solutions of integro-differential equations for nonruin probabilities // *Theory Probab. Appl.* — 2016. — Vol. 60, № 4. — pp. 671–679.
29. *Eberlein E., Kabanov Y., Schmidt T.* Ruin probabilities for a Sparre Andersen model with investments. // *Stoch. Process. Appl.* — 2022. — Vol. 144. — pp. 72–84.
30. *Kabanov Y., Promyslov P.* Ruin probabilities for a Sparre Andersen model with investments: the case of annuity payments. // *Stoch. Process. Appl.* — 2023. — Vol. 27. — pp. 887–902.
31. *Kabanov Y., Pergamenshchikov S.* Ruin probabilities for a Lévy-driven generalised Ornstein–Uhlenbeck process // *Finance and Stochastics.* — 2020. — Vol. 24, № 1. — pp. 39–69.
32. *Hunting M.* Existence of a classical solution of a parabolic PIDE associated with ruin probability : Working Paper / University of Bergen. — 2012.
33. *Hunting M.* A numerical approach to ruin probability in finite time for fitted models with investment : Working Paper / University of Bergen. — 2012.

34. *Vostrikova L., Spielmann J.* On the Ruin Problem with Investment When the Risky Asset Is a Semimartingale // Theory of Probability & Its Applications. — 2020. — Vol. 65, № 2. — pp. 249–269.
35. *Barles G., Imbert C.* Second-order elliptic integro-differential equations: viscosity solutions' theory revisited // Annales de l'Institut Henri Poincaré C: Analyse Non Linéaire. — 2008. — Vol. 25. — pp. 567–585.
36. *Gaier J., Grandits P., Schachermayer W.* Asymptotic ruin probabilities and optimal investment // Ann. Appl. Probab. — 2003. — Vol. 13, № 3. — pp. 1054–1076.
37. *Belkina T., Kurochkin S., A.E. T.* Asymptotics of optimal investment behavior under a risk process with two-sided jumps // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2025. — Т. 25, № 3. — С. 316–324.
38. *Burton T. A.* Volterra Integral and Differential Equations. — New York, NY, USA : Academic Press, 1983.
39. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М. : ИЛ, 1958. — 474 с. — Пер. с англ.: E. A. Coddington, N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1955, xii+429 pp.
40. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения : в 2 т. Т. 2. — М. : Мир, 1984. — 752 с. — Пер. с англ.: W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, v. II, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1971, xxiv+669 pp.
41. *Жакоб Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 47, 48 / под ред. Ю. В. Прохоров ; пер. С. Е. Кузнецов. — Москва : Физматлит, 1994. — С. 544, 368. — (Теория вероятностей и математическая статистика). — В 2 томах. Том 1 — 544 с., том 2 — 368 с.

## Работы автора по теме диссертации

*Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных  
для защиты в диссертационном совете МГУ имени М. В. Ломоносова  
по специальности и отрасли наук*

1. *Antipov V., Kabanov Y.* Ruin probabilities with investments in random environment: smoothness // Mathematics. — 2024. — Vol. 12, № 11. — P. 1705.  
EDN: ZLBCPH / Импакт-фактор 0.497 (SJR).  
Вклад соискателя 0.75 п.л. / Общий объем 0.75 п.л.  
*Постановка задачи и общий подход к решению принадлежат Ю.М. Кабанову. Все результаты получены В.А. Антиповым самостоятельно.*
2. *Antipov V., Kabanov Y.* Ruin problems with investments on a finite interval: PIDEs and their viscosity solutions // Finance and Stochastics. — 2026. — Vol. 30, № 1. — pp. 159–177.  
EDN: NOFARD / Импакт-фактор 1.046 (SJR).  
Вклад соискателя 1.1875 п.л. / Общий объем 1.1875 п.л.  
*Постановка задачи и общий подход к решению принадлежат Ю.М. Кабанову. Все результаты получены В.А. Антиповым самостоятельно.*
3. *Антипов В. А.* О применении преобразования Лапласа для задачи разорения со случайными страховыми платежами и инвестициями в рисковый актив // Теория вероятностей и её применения. — 2026. — Т. 71, № 1. — С. 153–162.  
EDN: IEMXYK / Импакт-фактор 0.329 (РИНЦ).  
Вклад соискателя 0.625 п.л. / Общий объем 0.625 п.л.  
*Antipov, V. A.* An Application of the Laplace Transform to Ruin Problems with Random Insurance Payments and Risky Asset Investments // Theory of Probability & Its Applications. — 2026. — Vol. 71 – № 1 – pp. 122–128.  
DOI: 10.1137/S0040585X97T992811 / Импакт-фактор 0.344 (SJR).  
Вклад соискателя 0.4375 п.л. / Общий объем 0.4375 п.л.
4. *Antipov V., Kabanov Y.* On the integro-differential equation arising in the ruin problem for non-life insurance models with investment // Mathematics. — 2026. — Vol. 14, № 6. — P. 1035.

EDN: UZJHFY / Импакт-фактор 0.497 (SJR).

Вклад соискателя 0.75 п.л. / Общий объем 0.75 п.л.

*Постановка задачи и общий подход к решению принадлежат Ю.М. Кабанову. Все результаты получены В.А. Антиповым самостоятельно.*