

**ОТЗЫВ**  
**официального оппонента**  
**на диссертацию на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук**  
**Корчагина Никиты Павловича**  
**на тему: «Сложность проблемы сюръективного гомоморфизма для**  
**циклов»**  
**по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и**  
**дискретная математика**

Диссертация Н. П. Корчагина посвящена задаче существования сюръективного гомоморфизма на фиксированный граф, которая относится к областям теории сложности вычислений и теории графов. В ней требуется определить, существует ли отображение из вершин данного графа  $G$  на вершины фиксированного графа  $H$ , которое сохраняет отношение смежности на вершинах. Рассматривается класс графов  $H$ , который содержит неориентированные циклы с петлями и все графы, которые получаются из них ориентацией некоторых рёбер.

Задача о существовании сюръективного гомоморфизма известна с прошлого века и с тех пор сложность задачи была определена для многих графов  $H$ . Так, в случае, когда  $H$  это неориентированный цикл длины 3 без петель, задача эквивалентна известной задаче о раскраске графа в три цвета, которая является NP-полной. А если в качестве  $H$  взять неориентированный цикл длины 4 с петлями, задача будет эквивалентна NP-полной массовой задаче поиска несвязного разреза в графе, также известной как *disconnected cut problem*. Несмотря на это, полной классификации сложности задачи не существует до сих пор.

В диссертационной работе задача о существовании сюръективного гомоморфизма рассматривается как частный случай известной массовой сюръективной задачи удовлетворения ограничениям, также известной как SCSP. Несмотря на большую актуальность в области математической кибернетики, на данный момент также не существует полной классификации

её сложности. Одним из перспективных направлений исследований является анализ этой задачи посредством полиморфизмов – функций, которые сохраняют наборы отношений. Долгое время существовала гипотеза, что сложность задачи полностью зависит только от полиморфизмов языка ограничений. Тем не менее, эта гипотеза была опровергнута Д. Н. Жуком в 2021 году. Таким образом, одним из актуальных направлений исследований в данной задаче является построение инструментов, позволяющих анализировать сложность SCSP для различных языков ограничений.

В диссертационной работе разбирается сложность задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на графы, которые получаются из неориентированных циклов с петлями путем ориентации некоторых рёбер. Была определена сложность задачи для всех подобных графов кроме циклов с тремя вершинами, неориентированного рефлексивного цикла длины 4 и в случае, когда каждое ребро цикла ориентировано ровно в одну сторону. Ключевым результатом работы является определение сложности задачи для всех циклов с петлями, кроме пяти циклов длины 4, 5 и 6. Помимо этого, большая часть работы посвящена формулировке двух критериев сложности задачи SCSP, которые автор называет «свойство наследования сюръективности» и «свойство сюръективного интерпретирования» и их применению. Таким образом, результаты работы являются актуальными и значимыми.

Объем диссертации составляет 118 страниц. Диссертация состоит из 4 глав, введения, заключения и списка литературы, который содержит 49 наименований.

В **введении** приводится краткая история задачи, обосновывается актуальность темы, формулируются основные цели и задачи работы, приводятся положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** приводятся основные определения и формулировки, которые используются в работе. Приводятся определения из области теории графов, теории сложности вычислений. Также в этой главе вводится

математический аппарат, который используется при доказательстве ключевых результатов работы.

Во **второй главе** автор определяет два критерия сложности задачи SCSP – «свойство сюръективного интерпретирования» и «свойство наследования сюръективности». Свойство сюръективного интерпретирования «моделирует» поведение отношения с помощью другого отношения. Согласно теореме 2.1, это свойство позволяет проводить полиномиальную сводимость задач SCSP. Свойство наследования сюръективности же позволяет определять сложность SCSP для множества отношений  $\Gamma$  с помощью анализа структуры трёхместных полиморфизмов  $\Gamma$ . Существенная часть работы посвящена применению полученных свойств к отношениям смежности различных циклов с петлями.

В **третьей главе** рассматриваются отношения смежности циклов с петлями, их полиморфизмы. Доказывается ряд свойств этих функций. Ключевой результат главы формулируется в теореме 3.1 и заключается в том, что все сюръективные полиморфизмы циклов с петлями длины  $n > 3$  существенно зависят ровно от одной переменной. Несмотря на то, что этот результат уже был доказан Ларивьер и др. в 2023 году, автор работы приводит независимое доказательство этого факта, которое опирается на топологические свойства графов, а не на алгебраические преобразования.

**Четвёртая глава** посвящена анализу сложности задачи о существовании сюръективного гомоморфизма на циклы с петлями. Основным результатом главы (теорема 4.1) является определение сложности задачи для всех рассматриваемых графов, кроме неориентированных циклов длины 5, 6 и циклов длины 4, 5, 6, содержащих ровно одно ориентированное ребро. При доказательстве этой теоремы автор опирается на результаты, полученные в главах 2 и 3. Стоит отметить, что результаты, представленные в разделе 4.2, уже были доказаны ранее Лароуз и др. в 2018 году. Тем не менее, доказательство, приведённое автором диссертации, существенно отличается от существующего и служит не только для полноты изложения, но и как

иллюстрация применимости сформулированного им свойства наследования сюръективности.

В **заключении** подводятся итоги работы, повторно приводятся результаты работы.

Диссертационная работа Корчагина Никиты Павловича выполнена на высоком уровне и носит теоретический характер. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и изложены в 3 статьях, которые были опубликованы в рецензируемых научных журналах. Достоверность результатов подкрепляется строгими математическими доказательствами. Помимо этого, результаты работы получили апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

Стоит отметить следующие замечания:

1. Часть диссертационной работы (теорема 3.1, раздел 4.2) посвящены доказательству результатов, которые уже были опубликованы ранее. Стоило бы более подробно отметить, чем предлагаемые автором диссертации доказательства отличаются от уже существующих.
2. Поставленные задачи работы не вполне соответствуют положениям, выносимым на защиту.
3. Свойство сюръективного интерпретирования, вводимое в разделе 2.1, применяется лишь один раз – в лемме 4.15. Логично было бы уделить больше внимания применимости этого свойства.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова. Диссертационное исследование оформлено согласно

требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Корчагин Никита Павлович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Официальный оппонент:

Кандидат физико-математических наук,  
ДОЦЕНТ кафедры ФН-1 «Высшая математика»  
ФГБОУ ВО Московский государственный  
технический университет имени Н. Э. Баумана  
МАСТИХИНА Анна Антоновна

Контактные данные:

Специальность, по которой официальным оппонентом  
защищена диссертация:  
01.01.09. Дискретная математика и математическая кибернетика

Адрес места работы:

105005, г. Москва, ул. Рубцовская наб., д. 2/18, эт. 9, ауд. 901-907  
ФГБОУ ВО Московский государственный технический университет имени  
Н. Э. Баумана, кафедра ФН-1 «Высшая математика»

Подпись доцента кафедры ФН-1 «Высшая математика»  
ФГБОУ ВО Московский государственный  
технический университет имени Н. Э. Баумана  
А.А. Мاستихиной удостоверяю: