

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Щегорцова Ольга Александровна

**Исследование изотропных многообразий и векторных
расслоений, соответствующих квазиклассическим
асимптотикам для уравнений с дельта-особенностями**

Специальность 1.1.3 Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2026

Диссертация подготовлена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова.

Научный –
руководитель

Шафаревич Андрей Игоревич,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН

Официальные –
оппоненты

Гайдуков Роман Константинович,
кандидат физико-математических наук,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова, Департамент прикладной математики, доцент

Киселев Алексей Прохорович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, лаборатория математических проблем волновой теории, ведущий научный сотрудник

Тюрин Николай Андреевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор РАН,
Международная неправительственная организация «Объединенный институт ядерных исследований», лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, начальник сектора

Защита диссертации состоится «30» октября 2026 г. в 18 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.011.4 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: dissovet.msu.011.4@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на портале: <https://dissovet.msu.ru/dissertation/4004>

Автореферат разослан «__» сентября 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.011.4,
кандидат физико-математических наук

В.А. Кибкало

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Тема диссертации относится к области дифференциальной геометрии. Исследование диссертационной работы находится на стыке теории лагранжевых и изотропных многообразий в симплектических пространствах и математической физики. Автором рассматривается задача о построении квазиклассических асимптотик решений уравнения Шредингера с дельта-образными потенциалами (далее — δ -потенциалами) и описании отвечающих им геометрических объектов в фазовом пространстве. Исследование посвящено четырем сюжетам, различающимся геометрией носителя сингулярности и типом начальных данных: 1) построению квазиклассической асимптотики с вещественной фазой для δ -потенциала, локализованного на поверхности коразмерности 1 в $\mathbb{R}^n$, и описанию перестройки лагранжева многообразия при взаимодействии с носителем сингулярности; 2) построению асимптотики с комплексной фазой для того же класса δ -потенциалов при начальных данных, локализованных в окрестности точки, и описанию соответствующих изотропных кривых и комплексных ростков над ними; 3) обобщению предыдущего результата на случай начальных данных, локализованных в окрестности подмногообразия положительной коразмерности, и описанию возникающих изотропных многообразий и комплексных векторных расслоений над ними; 4) построению асимптотики для точечного δ -потенциала в $\mathbb{R}^3$ и описанию лагранжевых многообразий, отвечающих падающей и рассеянной волнам. Результаты, полученные в работе, выражаются в терминах лагранжевых и изотропных многообразий, комплексных ростков и коэффициентов отражения и прохождения.

Под понятием оператора с δ -потенциалом понимается обширный класс сингулярных возмущений оператора Лапласа, допускающих корректное описание в рамках теории самосопряженных расширений. Известные также как потенциалы нулевого радиуса, они возникают в задачах математической физики при моделировании систем с сильно локализованными взаимодействиями, когда радиус действия потенциала оказывается пренебрежимо мал по сравнению с другими характерными масштабами системы. Подобные модели применяются, в частности, при изучении рассеяния электронов на точечных дефектах кристаллической решетки, при описании сильно локализованных полей, порожденных примесями в кристаллах, а также в приложениях к низкоразмерным структурам. Одной из первых работ, в которых использовались такие потенциалы, стала модель Кронига-Пенни ¹, в которой движение электрона в одномерной кристаллической решетке описывается с помощью периодической последовательности прямоугольных потенциальных барьеров.

Математическое обоснование таких моделей было получено несколько позже. Строгое определение операторов с δ -потенциалами впервые было дано в работе Ф. А. Березина и Л. Д. Фаддеева ². Используя теорию самосопряженных расширений и резольвентную формулу М. Г. Крейна, авторы показали, что оператор Лапласа, суженный на финитные гладкие функции, обращающиеся в нуль в окрест-

¹Kronig R. de L., Penney W. G. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices // Proc. R. Soc. Lond. A. 1931. Vol. 130, no. 814. P. 499–513.

²Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1011–1014.

ности особой точки, допускает однопараметрическое семейство самосопряженных расширений. Подробное изложение теории точечных взаимодействий, включая единое описание для размерностей 1, 2 и 3, а также классификацию граничных условий, представлено в монографиях³⁴. Дальнейшее развитие этот подход получил в работах Й. Брюнинга, В. Гейлера и К. Панкрашкина⁵⁶, посвященных рассеянию на компактных многообразиях с присоединенными струнами и спектральным свойствам операторов на декорированных графах.

Наряду со спектральными задачами важный класс вопросов составляет построение асимптотических решений для уравнений с δ -потенциалами. Хорошо известно, что уравнение Шредингера допускает точное аналитическое решение лишь для ограниченного класса потенциалов. Для исследования уравнений с гладкими коэффициентами широко применяется квазиклассический метод ВКБ, позволяющий строить асимптотики по малому параметру $h \rightarrow 0$, устанавливающему связь между квантовой динамикой и классической механикой. В старшем порядке по h эволюция волновой функции описывается движением вдоль классических траекторий в фазовом пространстве. Систематическое развитие этот метод получил в работах В. П. Маслова^{78,9}. Им был разработан математический аппарат, позволяющий строить глобальные асимптотики, в том числе в окрестности каустик и точек поворота, где стандартный метод ВКБ теряет применимость. Однако в случае сингулярных операторов существующая теория, вообще говоря, неприменима, поскольку развитый В. П. Масловым аппарат построен для уравнений с гладкими коэффициентами.

Центральное место в исследованиях В. П. Маслова занимает геометрический подход, основанный на теории лагранжевых и изотропных многообразий в фазовом пространстве. Лагранжевы многообразия, инвариантные относительно гамильтонова потока, используются для описания эволюции фазы волновой функции. В областях, где проекция лагранжева многообразия на конфигурационное пространство является диффеоморфизмом, асимптотика строится стандартным методом ВКБ. В окрестности каустик и точек поворота, где регулярность проекции нарушается, используется канонический оператор Маслова, позволяющий корректно согласовать локальные представления решения. При этом индекс Маслова отвечает за набег фазы при переходах между локальными картами и обходе каустик.

Наряду с каноническим оператором В. П. Масловым был разработан метод комплексного роста, предназначенный для описания решений, локализованных вблизи подмногообразий меньшей размерности (например, для гауссовых пучков или сжатых состояний, сосредоточенных около отдельных траекторий). В отличие от обычного метода ВКБ, где фазовая функция вещественна, в методе комплексного роста фаза является комплекснозначной. Геометрически такие решения описыва-

³S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden, Solvable models in quantum mechanics. Providence: AMS Chelsea Publishing, 2005.

⁴S. Albeverio, P. Kurasov, Singular perturbations of differential operators. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

⁵Brüning J., Geyler V. Scattering on compact manifolds with infinitely thin horns // J. Math. Phys. 2003. Vol. 44, № 2. P. 371–405.

⁶Brüning J., Geyler V., Pankrashkin K. Spectral properties of Schrödinger operators on decorated graphs // Rev. Math. Phys. 2008. Vol. 20, № 1. P. 1–70.

⁷В. П. Маслов, М. В. Федорюк, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики // М.: Наука, 1976.

⁸В. П. Маслов, Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях // М.: Наука, 1977.

⁹В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы // М.: Изд-во МГУ, 1965.

ются при помощи построения комплексных векторных расслоений над изотропными многообразиями, слои которых представляют собой лагранжевы подпространства комплексифицированного касательного пространства.

В случае сингулярных операторов, содержащих дельта-особенности, условие гладкости нарушается. Сингулярный характер взаимодействия приводит к тому, что классическая частица, налетающая на дефект, испытывает мгновенное изменение импульса, что соответствует разрыву фазовой траектории. В результате стандартный аппарат оказывается напрямую неприменимым. Более того, каждый тип сингулярного потенциала требует отдельного определения оператора через соответствующие граничные условия, что делает невозможным прямое применение классического подхода и требует его отдельной модификации в каждом случае.

В диссертационной работе рассматриваются асимптотические решения нестационарного уравнения Шредингера с δ -потенциалом, локализованным в окрестности поверхности коразмерности 1 или точки в трехмерном пространстве, при быстроосциллирующих начальных данных различных типов: волновых пакетах с вещественной фазой и гауссовых пучках, локализованных в окрестности точки или подмногообразия. Особое внимание уделяется геометрии соответствующих лагранжевых и изотропных многообразий, их эволюции и перестройке при взаимодействии волнового пакета с δ -потенциалом.

Похожие задачи рассматривались в работах А. И. Шафаревича и его соавторов. В работе Т. А. Филатовой и А. И. Шафаревича¹⁰ были исследованы квазиклассические спектральные серии оператора с точечным потенциалом

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x) + \alpha\delta(x - x_0)$$

на действительной прямой, а также на двумерной и трехмерной сферах. Далее этот подход был распространен на случай поверхностей вращения¹¹ и трехмерных сферически симметричных многообразий¹². Показано, что возникающие лагранжевы многообразия оказываются некомпактными, а их геометрия отражает топологию носителя сингулярного потенциала. Близкие по методам задачи для операторов Шредингера на геометрических графах рассматривались в работе В. Л. Чернышева и А. И. Шафаревича¹³.

Диссертационная работа продолжает исследования по развитию квазиклассического аппарата для сингулярных операторов с δ -потенциалами. Теоретическая значимость работы заключается в необходимости обобщения методов ВКБ и геометрического анализа на случай сингулярных коэффициентов. Практическая ценность определяется возможностью изучать эволюцию волновых пакетов и узких пучков в сильно локализованных полях. Полученные результаты позволяют глубже понять

¹⁰Филатова Т. А., Шафаревич А. И. Квазиклассические спектральные серии оператора Шредингера с дельта-потенциалом на прямой и на сфере // ТМФ. 2010. Т. 164, № 2. С. 279–298.

¹¹Ратью Т., Филатова Т. А., Шафаревич А. И. Некомпактные лагранжевы многообразия, соответствующие спектральным сериям оператора Шредингера с дельта-потенциалом на поверхности вращения // ДАН. 2012. Т. 446, № 6. С. 618–620.

¹²Ratiu T. S., Suleimanova A. A., Shafarevich A. I. Spectral series of the Schrödinger operator with delta-potential on a three-dimensional spherically symmetric manifold // Russ. J. Math. Phys. 2013. V. 20, № 3. P. 326–335.

¹³Чернышев В. Л., Шафаревич А. И. Квазиклассический спектр оператора Шредингера на геометрическом графе // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 4. С. 606–620.

геометрию и перестройку лагранжевых и изотропных многообразий при взаимодействии с сингулярными потенциалами и находят применение при моделировании квантовых систем с локализованными дефектами.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования является уравнение Шредингера с дельта-потенциалами двух типов: локализованным на гиперповерхности коразмерности 1 в $\mathbb{R}^n$ и точечным в $\mathbb{R}^3$. Предметом исследования являются квазиклассические асимптотики решений задачи Коши для указанных уравнений в зависимости от типа начальных условий. Рассматриваются начальные данные с вещественной фазой и комплексной фазой, локализованной в окрестности точки или подмногообразия коразмерности k . Наряду с асимптотиками изучаются соответствующие геометрические объекты в фазовом пространстве — лагранжевы и изотропные многообразия, комплексные ростки и векторные расслоения над ними — и их перестройка при взаимодействии волнового пакета с носителем сингулярности.

Цели и задачи диссертации

Основной целью диссертационной работы является разработка квазиклассических методов построения асимптотик решений нестационарного уравнения Шредингера с δ -потенциалами и описание перестройки соответствующих геометрических объектов в фазовом пространстве (лагранжевых и изотропных многообразий и комплексных векторных расслоений над ними) при взаимодействии с носителем сингулярности.

Исследование охватывает два типа потенциалов: локализованный на поверхности коразмерности один в $\mathbb{R}^n$ и точечный потенциал в $\mathbb{R}^3$. Рассматриваются различные типы начальных данных: быстро осциллирующие волновые пакеты с вещественной фазой и гауссовы пучки, локализованные в окрестности точки или подмногообразия.

Рассматриваются четыре блока задач.

1. **Блок 1.** Асимптотики с вещественной фазой для δ -потенциала на поверхности коразмерности 1 в $\mathbb{R}^n$.
 - 1.1. Построение локальной квазиклассической асимптотики решения в областях свободных от каустик.
 - 1.2. Построение глобальной квазиклассической асимптотики с использованием канонического оператора Маслова.
 - 1.3. Описание лагранжевых многообразий падающей, отраженной и прошедшей волн и исследование их эволюции при взаимодействии с δ -потенциалом.
 - 1.4. Вычисление квазиклассических аналогов коэффициентов отражения и прохождения.
 - 1.5. Оценка точности построенных асимптотик в норме L^2 .
2. **Блок 2.** Асимптотики с комплексной фазой для δ -потенциала на поверхности коразмерности 1 в $\mathbb{R}^n$: начальные данные, локализованные в окрестности точки.

- 2.1. Построение асимптотики решения на основе метода комплексного роста Маслова.
 - 2.2. Описание изотропных многообразий и комплексных ростков и исследование их эволюции при взаимодействии с δ -потенциалом.
 - 2.3. Вычисление квазиклассических аналогов коэффициентов отражения и прохождения.
 - 2.4. Оценка точности построенных асимптотик в норме L^2 .
3. **Блок 3.** Асимптотики с комплексной фазой для δ -потенциала на поверхности коразмерности 1 в $\mathbb{R}^n$: начальные данные, локализованные в окрестности подмногообразия коразмерности k .
- 3.1. Построение асимптотики решения на основе метода комплексного роста Маслова.
 - 3.2. Описание изотропных многообразий и соответствующих комплексных ростков и исследование их эволюции при взаимодействии с δ -потенциалом.
 - 3.3. Вычисление квазиклассических аналогов коэффициентов отражения и прохождения.
 - 3.4. Оценка точности построенных асимптотик в норме L^2 .
4. **Блок 4.** Асимптотики с вещественной фазой для точечного δ -потенциала в $\mathbb{R}^3$.
- 4.1. Построение квазиклассической асимптотики решения задачи Коши.
 - 4.2. Описание лагранжевых многообразий падающей и рассеянной волн и исследование их эволюции при взаимодействии с δ -потенциалом.
 - 4.3. Исследование структуры рассеянной волны с выделением сходящейся и расходящейся компонент и описание соответствующих геометрических объектов в фазовом пространстве.
 - 4.4. Оценка точности построенных асимптотик в норме L^2 .

Положения, выносимые на защиту

В диссертационной работе получены следующие основные результаты, выносимые на защиту.

1. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для уравнения Шредингера с δ -потенциалом на гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$ при начальных данных в виде быстро осциллирующего волнового пакета в виде суммы падающей, отраженной и прошедшей волн в областях без каустик в форме ВКБ-разложения (теорема 2.5). Глобальная асимптотика, справедливая как в областях без каустик, так и в окрестностях каустик, в виде суммы канонических операторов Маслова, задающих каждую из трех волн, с модификацией метода канонического оператора, учитывающей условия сшивки, задаваемые δ -потенциалом

(теорема 2.11). Оценки точности аппроксимации и невязки для обеих асимптотик. Расщепление лагранжева многообразия падающей волны при взаимодействии с δ -потенциалом, при котором лагранжево многообразие прошедшей волны совпадает с многообразием падающей, а лагранжево многообразие отраженной волны является образом падающего при преобразовании, меняющем знак нормальной компоненты импульса и сохраняющем касательную в точках поверхности-носителя сингулярности. Явный вид аналогов классических коэффициентов прохождения и отражения через нормальную компоненту импульса падающей волны и параметры δ -потенциала, удовлетворяющих закону сохранения $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

2. Квазиклассическая асимптотика решения той же задачи при начальных данных в виде гауссова пучка, локализованного в окрестности точки, в виде суммы падающего, отраженного и прошедшего пучков с квадратичными фазовыми функциями на основе модификации метода комплексного ростка Маслова, учитывающей условия сшивки, задаваемые δ -потенциалом (теорема 3.1). Оценки точности аппроксимации и невязки. Изотропные кривые падающего и отраженного пучков и комплексные ростки над ними, причем изотропная кривая отраженного пучка является зеркальным отражением падающей относительно поверхности-носителя сингулярности со сменой знака нормальной компоненты импульса при сохранении касательной, а изотропная кривая и росток прошедшего пучка совпадают с падающими. Сдвиг комплексного ростка падающего пучка при взаимодействии с δ -потенциалом, определяемый второй квадратичной формой поверхности-носителя сингулярности и параметрами системы. Явный вид аналогов классических коэффициентов прохождения и отражения через нормальную компоненту импульса падающего пучка и параметры δ -потенциала.
3. Квазиклассическая асимптотика решения при начальных данных в виде гауссова пучка, локализованного в окрестности k -мерной поверхности ($k < n$), в виде суммы падающего, отраженного и прошедшего пучков с квадратичными фазовыми функциями на основе модификации метода комплексного ростка Маслова, учитывающей условия сшивки, задаваемые δ -потенциалом (теорема 4.1). Оценки точности аппроксимации и невязки. Изотропные многообразия падающего и отраженного пучков и комплексные ростки над ними, причем изотропное многообразие отраженного пучка является зеркальным отражением падающего относительно поверхности-носителя сингулярности со сменой знака нормальной компоненты импульса при сохранении касательной. Сдвиг ростка падающего пучка при взаимодействии с δ -потенциалом вдоль каждой траектории, определяемый геометрией поверхности-носителя сингулярности в точке пересечения и параметрами системы. Явный вид аналогов классических коэффициентов прохождения и отражения через нормальную компоненту импульса падающего пучка и параметры δ -потенциала.
4. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для уравнения Шредингера с точечным δ -потенциалом в $\mathbb{R}^3$ при начальных данных, локализованных в окрестности шара B достаточно малого радиуса, в виде суммы падающей и рассеянной волн (теорема 5.1). Оценки точности аппроксимации

и невязки. Необходимое условие взаимодействия волнового пакета с точечным δ -потенциалом. Отсутствие сходящейся компоненты рассеянной волны для рассматриваемого класса начальных данных и структура рассеянной волны как чисто расходящейся сферической волны, определяемой краевыми условиями в точке x_0 . Лагранжевы многообразия падающей и рассеянной волн, причем лагранжево многообразие рассеянной волны образовано лучами, исходящими из точки рассеяния x_0 , при падающей волне с единичным импульсом $|p| = 1$ и радиальным направлением $p \parallel (x_0 - x')$, $x' \in B$.

Строгие формулировки результатов и их доказательства приведены в соответствующих главах диссертации.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются оригинальными и получены автором самостоятельно.

Существующие квазиклассические методы построены для уравнений с гладкими коэффициентами, и сингулярный характер δ -потенциала, приводящий к разрыву фазовой траектории на носителе сингулярности, делает стандартные методы непосредственно неприменимыми. В диссертации разработаны модификации метода канонического оператора и метода комплексного ростка Маслова, учитывающие условия сшивки на носителе сингулярности.

Для задачи с δ -потенциалом на гиперповерхности описано расщепление лагранжево многообразия на три компоненты и получены явные выражения для квазиклассических аналогов коэффициентов отражения и прохождения, удовлетворяющих закону сохранения $|R|^2 + |T|^2 = 1$. Для начальных данных с комплексной фазой, локализованных в окрестности точки, описана перестройка изотропной кривой и комплексного ростка над ней при взаимодействии с δ -потенциалом. В случае локализации вблизи подмногообразия коразмерности k возникают изотропные многообразия, над которыми строятся комплексные векторные расслоения с лагранжевыми слоями.

Для точечного дельта-потенциала в $\mathbb{R}^3$ описана геометрия рассеянной волны — лагранжево многообразие задается семейством радиальных лучей из точки рассеяния. При этом сходящаяся компонента рассеянной волны тождественно равна нулю. Геометрически это объясняется тем, что все лучи, исходящие из носителя начального возмущения, расположенного в шаре на положительном расстоянии от x_0 , приходят в точку рассеяния лишь в одном направлении, порождая чисто расходящуюся сферическую волну.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе применяются методы квазиклассического анализа, в том числе разработанные В. П. Масловым, а также методы теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Операторы с δ -потенциалами рассматриваются в рамках теории самосопряженных расширений симметрических операторов.

Для построения асимптотик с вещественной фазой применяются теория лагранжевых многообразий и канонический оператор Маслова. В случае комплексной фазы

используется метод комплексного роста, основанный на конструкции комплексных векторных расслоений над изотропными многообразиями.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Разработанные модификации метода канонического оператора и метода комплексного роста Маслова могут быть использованы для дальнейшего изучения квазиклассических асимптотик уравнений с сингулярными коэффициентами, в том числе для других типов носителей сингулярности и более общих классов начальных данных. Важно отметить, что все рассмотренные задачи при различных особенностях и начальных данных допускают единое описание в терминах лагранжевых и изотропных многообразий, комплексных ростков и векторных расслоений над ними.

Построенные асимптотики и полученные квазиклассические аналоги коэффициентов отражения и прохождения, выраженные через геометрические характеристики фазового пространства, могут применяться при моделировании распространения волновых пакетов в средах с сильно локализованными неоднородностями. В частности, асимптотические формулы позволяют описывать рассеяние электронов на точечных дефектах кристаллической решетки и эволюцию узких пучков в средах с примесями.

Построенная асимптотика для точечного δ -потенциала в $\mathbb{R}^3$ может служить инструментом для изучения задач рассеяния в трехмерном пространстве, где точечное взаимодействие моделирует локализованный дефект или примесный атом.

Степень достоверности

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация работы

Результаты диссертации опубликованы в четырех статьях в журналах, удовлетворяющих положению о присуждении ученых степеней МГУ, а также прошли апробацию на следующих международных и российских конференциях и школах:

- Акустический семинар им. Д.П. Коузова, Институт Проблем Машиноведения Российской Академии Наук, Санкт-Петербург, Россия, 28 апреля 2026 с докладом “Квазиклассические асимптотики для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- Асимптотические, геометрические и качественные методы в приложении к механике и математической физике, Международный математический центр “Сириус”, Россия, 13-17 апреля 2026 с докладом “Геометрические асимптотики для уравнения Шредингера с дельта потенциалом, локализованным на поверхности коразмерности 1”

- 68-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 30 марта–4 апреля 2026 с докладом “Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для трехмерного уравнения Шредингера с точечным потенциалом”
- Days on Diffraction 2025, Санкт-Петербург, Россия, 16-20 июня 2025 с докладом “Isotropic surfaces and complex vector bundles corresponding to the Schrödinger equation with a delta potential”
- 67-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 31 марта–5 апреля 2025 с докладом “Асимптотические решения для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- School and Workshop “Mathematical Challenges in Quantum Mechanics”, GSSI, L’Aquila, Italy, 9-14 февраля 2025 с докладом “Geometric Asymptotics for the Schrödinger Equation with a Delta Potential Localized on the Surface of Codimension 1”
- Integrable Systems and Quantum Theory 2024, СПбГУ, Россия, 23-28 сентября 2024 с докладом “Semiclassical asymptotic solutions and isotropic manifolds corresponding to the Schrödinger equation with a delta potential”
- Всероссийская конференция “Асимптотические методы в математической физике”, Москва, Россия, 17-19 июня 2024 с докладом “Квазиклассические асимптотики для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- Days on Diffraction 2024, Санкт-Петербург, Россия, 10-14 июня 2024 с докладом “Isotropic surfaces and complex vector bundles corresponding to the Schrödinger equation with a delta potential”
- XXXI Международная конференция студентов и аспирантов “Ломоносов 2024”, Россия, 12-26 апреля 2024 с докладом “Комплексный росток Маслова и квазиклассические асимптотики для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- 66-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 1-6 апреля 2024 с докладом “Лагранжевы многообразия и комплексные векторные расслоения, отвечающие задаче Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- Школа-конференция “Современные геометрические методы и их приложения – 2023”, Москва, Россия, 29 октября - 4 ноября 2023 с докладом “Квазиклассические сжатые состояния в задаче Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- 4th International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics (ISND 2023), Ярославль, Россия, 25-29 сентября 2023 с докладом “Semiclassical asymptotic solutions of the Schrödinger Equation with a delta-potential and rapidly oscillating initial conditions”

- Days on Diffraction 2023, Санкт-Петербург, Россия, 5-9 июня 2023 с докладом “Maslov complex germ in the Cauchy problem for the Schrödinger equation with delta potential”
- XXX Международная научная конференция студентов и аспирантов “Ломоносов-2023”, Москва, Россия, 10-21 апреля 2023 с докладом “Асимптотические решения задачи Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом и быстро осциллирующими начальными условиями”
- 65-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 3 апреля - 3 мая 2023 с докладом “Комплексный росток Маслова в задаче Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- Dynamical Systems of Classical and Celestial Mechanics, Sirius Mathematics Center, Сочи, Россия, 19-23 сентября 2022 с докладом “Asymptotics for Gaussian beams of the Schrödinger equation with a delta potential”
- XXIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2022”, Москва, Россия, 11-22 апреля 2022 с докладом “Квазиклассическое рассеяние гауссовых пучков на дельта-потенциалах”
- 64-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 23 ноября - 3 декабря 2021 с докладом “Квазиклассические асимптотики с комплексными фазами для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом, локализованным на поверхности коразмерности 1”
- Spectral Theory and Mathematical Physics, Euler International Mathematical Institute, Санкт-Петербург, Россия, 20-30 июня 2021 с докладом “Gaussian beam solutions to the Cauchy problem for the Schrödinger equation with a delta potential”
- Days on Diffraction 2021, Санкт-Петербург, Россия, 31 мая-4 июня 2021 с докладом “Semiclassical asymptotics of the solution to the problem of scattering of Gaussian beams on a delta-potential”
- XXVIII Международная научная конференция студентов и аспирантов “Ломоносов 2021”, Москва, Россия, 12-23 апреля 2021 с докладом “Квазиклассически сосредоточенные состояния для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом”
- 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, Россия, 23-29 ноября 2020 с докладом “Квазиклассическое рассеяние узких гауссовых пучков на дельта-потенциалах”

Публикации автора по теме работы

Основные результаты по теме диссертации представлены в четырех статьях в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Текст работы изложен на 111 страницах. Список литературы содержит 14 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** излагаются актуальность темы исследования, формулируются цели и задачи диссертационной работы, приводится обзор результатов и краткое содержание работы.

Первая глава носит вводный характер и посвящена краткому изложению геометрического аппарата квазиклассического анализа, а также необходимых сведений об операторах с δ -потенциалами. В ней закрепляются основные обозначения и формулируются ключевые результаты, на которые опирается дальнейшее изложение. Глава делится на две части.

В первой части даются явные определения, необходимые для использования теории Маслова и описания асимптотических решений.

Квазиклассическое приближение, известное также как *метод ВКБ* (Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна), позволяет строить асимптотические решения линейных уравнений с малым квазиклассическим параметром $\hbar > 0$. Решение представляется в виде быстроосциллирующей волны с медленно меняющейся амплитудой:

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar} S(x, t)} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x, t) \hbar^k,$$

где фаза $S(x, t) \in C^\infty$ — классическое действие, определяющее классическую геометрию системы, $\varphi_k(x, t) \in C^\infty$ — амплитуды. При подстановке разложения в нестационарное уравнение Шредингера старший порядок по $\hbar$ дает уравнение Гамильтона–Якоби для фазы $S(x, t)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x} \right\rangle + V(x) = 0.$$

Следующий порядок по $\hbar$ определяет уравнение переноса для $\varphi_0(x, t)$, а остальные — уравнения для поправок $\varphi_k(x, t)$, $k > 0$:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \Delta S(x, t) \varphi_0 = 0.$$

Поправки более высоких порядков $\varphi_k(x, t)$, $k \geq 1$, определяются из аналогичных уравнений переноса, содержащих дополнительные слагаемые, зависящие от предыдущих амплитуд, и вычисляются рекуррентно.

При построении решения уравнения Гамильтона–Якоби естественным образом возникают геометрические объекты в фазовом пространстве — *лагранжесвы многообразия*.

Фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n}_{(x,p)}$ рассматривается как кокасательное расслоение $T^*\mathbb{R}^n$ с заданной канонической симплектической формой

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dx^i,$$

где x – координаты, а p – сопряженные импульсы.

Подмногообразие $\Lambda^k \subset \mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$ размерности $k \leq n$ называется *изотропным*, если ограничение симплектической формы на него тождественно равно нулю

$$\omega|_{\Lambda^k} = 0.$$

Изотропное многообразие максимальной размерности $k = n$ называется *лагранжевым*.

Лагранжевы многообразия возникают при решении уравнения Гамильтона–Якоби следующим образом. Характеристики этого уравнения представляют собой траектории гамильтоновой системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

с гамильтонианом

$$H(x, p) = \frac{|p|^2}{2} + V(x).$$

Совокупность гамильтоновых траекторий, выпущенных из носителя начальных данных задачи Коши, образует лагранжево многообразие, инвариантное относительно гамильтонова потока. Для нестационарной задачи естественно рассматривать *расширенное фазовое пространство* $\mathbb{R}_{(x,p,t,\tau)}^{2n+2}$, в котором время t и сопряженная ему переменная $\tau = -H$ образуют дополнительную пару канонических координат. В этом пространстве совокупность гамильтоновых траекторий образует лагранжево многообразие Λ^{n+1} , определенное как семейство лагранжевых многообразий Λ_t^n в обычном фазовом пространстве $\mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$:

$$\Lambda^{n+1} = \bigcup_{t \in [0, T]} \Lambda_t^n.$$

Решение уравнения Гамильтона–Якоби находится как *классическое действие* вдоль траекторий гамильтоновой системы:

$$S(\alpha, t) = \int_{\gamma} (\langle p, dx \rangle - H) dt, \quad S(x, t) = S(\alpha, t) \Big|_{\alpha=\alpha(x,t)},$$

где интегрирование ведется вдоль пути γ на Λ^{n+1} , соединяющего начальную точку $(x(\alpha, 0), p(\alpha, 0), 0, -H) \in \Lambda_0^n$ с точкой $(x(\alpha, t), p(\alpha, t), t, -H)$. Здесь α – координаты на Λ_0^n , а $\alpha(x, t)$ – обратное отображение проекции $\pi: \Lambda^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{(x,t)}^{n+1}$.

Таким образом, построение асимптотики с использованием классического ВКБ-подхода оказывается возможным только при условии, что отображение $\alpha(x, t)$ определено, то есть проекция $\pi: \Lambda^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{(x,t)}^{n+1}$ невырождена.

Для построения глобальной асимптотики лагранжево многообразие Λ^{n+1} покрывается *каноническими картами* – открытыми подмножествами $U_{(\alpha)} \subset \Lambda^{n+1}$, на каждом из которых определена проекция $\pi_{(\alpha)}: \Lambda^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$,

$$(x, p, t) \mapsto (p_{(\bar{I}_{\alpha})}, x_{(I_{\alpha})}, t), \quad I_{\alpha} \cup \bar{I}_{\alpha} = \{1, \dots, n\},$$

являющаяся диффеоморфизмом. В каждой карте $U_{(\alpha)}$ лагранжево многообразие задается *производящей функцией* $S(p_{(\bar{I}_\alpha)}, x_{(I_\alpha)}, t)$ через соотношения

$$x_{(\bar{I}_\alpha)} = -\frac{\partial S}{\partial p_{(\bar{I}_\alpha)}}, \quad p_{(I_\alpha)} = \frac{\partial S}{\partial x_{(I_\alpha)}}.$$

В этих же координатах строится локальное асимптотическое решение в виде быстроосциллирующей функции — *предканонический оператор*:

$$\begin{aligned} \hat{K}_{U_{(\alpha)}}[a] = & \frac{1}{(2\pi\hbar)^{|\bar{I}_\alpha|/2}} \int e^{\frac{i}{\hbar}(S(p_{(\bar{I}_\alpha)}, x_{(I_\alpha)}, t) + \langle p_{(\bar{I}_\alpha)}, x_{(\bar{I}_\alpha)} \rangle)} \times \\ & \times a(p_{(\bar{I}_\alpha)}, x_{(I_\alpha)}, t) \left| \det J_{(\alpha)} \right|^{1/2} dp_{(\bar{I}_\alpha)}. \end{aligned}$$

При переходе из одной карты в другую фаза асимптотического решения приобретает дополнительный сдвиг, зависящий от геометрии многообразия в окрестности каустики. Учет этих сдвигов при обходе Λ^{n+1} приводит к понятию *индекса Маслова*.

Каноническим оператором Маслова K_Λ называется оператор, сопоставляющий функции $a \in C^\infty(\Lambda^{n+1})$ асимптотическое решение в конфигурационном пространстве:

$$K_\Lambda[a] = \sum_{\alpha} e^{-\frac{i\pi}{2}\mu_{(\alpha)}} \cdot \hat{K}_{U_{(\alpha)}}(e_{(\alpha)}a),$$

где суммирование ведется по всем каноническим картам $\{U_{(\alpha)}\}$, покрывающим Λ^{n+1} , $\{e_{(\alpha)}\}$ — подчиненное разбиение единицы, а $\mu_{(\alpha)} \in \mathbb{Z}$ — индекс Маслова карты $U_{(\alpha)}$, учитывающий фазовые сдвиги при переходах между картами.

Вторая часть главы посвящена операторам Шредингера с δ -потенциалами. Построенный выше квазиклассический аппарат — лагранжевы многообразия, канонический оператор Маслова — развит для уравнений с гладкими коэффициентами. Наличие δ -потенциала нарушает это условие, поэтому прежде чем строить асимптотики, необходимо корректно определить сам оператор.

Под *оператором Шредингера с δ -потенциалом*

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x) + \frac{q(y)}{\hbar}\delta_M$$

понимается самосопряженное расширение оператора Шредингера с гладким потенциалом

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(x),$$

ограниченного на функции, обращающиеся в ноль на поверхности M .

Область определения таких расширений зависит от геометрии носителя сингулярности. В диссертационной работе рассматриваются два случая: носитель является гиперповерхностью коразмерности 1 и носитель является точкой в $\mathbb{R}^3$.

В случае гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$ область определения составляют функции, непрерывные при переходе через M и удовлетворяющие условию скачка нормальной производной:

$$\begin{cases} \psi|_{M^+} = \psi|_{M^-}, \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial m} \right|_{M^+} - \left. \frac{\partial \psi}{\partial m} \right|_{M^-} = \frac{q(y)}{\hbar} \psi|_M, \end{cases}$$

где m — единичная нормаль к M . Первое условие означает непрерывность волновой функции; второе описывает скачок нормальной производной, пропорциональный интенсивности потенциала $q(y)$. Через $M^\pm$ обозначены предельные значения с положительной и отрицательной сторон от поверхности M соответственно:

$$\psi|_{M^\pm} := \lim \psi(r(y) \pm \epsilon m(y)), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial m} \right|_{M^\pm} := \lim \frac{\partial \psi}{\partial m}(r(y) \pm \epsilon m(y)), \quad \epsilon > 0.$$

Область определения оператора с точечным потенциалом составляют функции $f \in D(\hat{H}) \subset W_2^2(M)$, представимые в окрестности точки x_0 в виде

$$f(x, t) = a(f) F_0(x, x_0) + b(f) + R(x, x_0),$$

где

$$F_0(x, x_0) = \begin{cases} -\frac{1}{2} r(x, x_0), & \dim M = 1, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln r(x, x_0), & \dim M = 2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(x, x_0)}, & \dim M = 3, \end{cases}$$

$a(f), b(f) \in \mathbb{C}$, и $r(x, x_0) = |x - x_0|$ — расстояние между точками x и x_0 на M . При стремлении $x \rightarrow x_0$ остаточный член удовлетворяет оценкам

$$|R(x, x_0)| = \begin{cases} o(|x - x_0|), & \dim M = 1, \\ o(1), & \dim M = 2, 3. \end{cases}$$

Коэффициенты $a(f)$ и $b(f)$ связаны краевым условием

$$a(f) = \frac{2\alpha}{h^2} b(f).$$

Вторая глава посвящена построению квазиклассической асимптотики решения задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера с δ -потенциалом, локализованным на гладкой гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$, заданной параметризацией $x = r(y)$, $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$, при начальных данных в виде быстро осциллирующего волнового пакета с вещественной фазой.

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \frac{q(y)}{h} \delta_M \psi, \\ \psi(x, 0) = e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x), \end{cases}$$

где $q(y)$ — вещественная функция на M , носитель начальных данных φ^0 компактен и находится на положительном расстоянии от M . Область определения оператора с δ -потенциалом задается граничными условиями на M :

$$\begin{cases} \psi(r(y) - 0, t) = \psi(r(y) + 0, t), \\ h \left(\frac{\partial \psi}{\partial m}(r(y) - 0, t) - \frac{\partial \psi}{\partial m}(r(y) + 0, t) \right) = q(y) \psi(r(y), t), \end{cases}$$

где $m(y)$ — единичная нормаль к M в точке $r(y)$, направленная в сторону носителя начальных данных.

До момента взаимодействия с поверхностью M динамика системы совпадает с гладким случаем, и волновой пакет распространяется вдоль классических траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q)$. Траектория падающей волны $\{Q^+(\alpha, t), P^+(\alpha, t)\}$ задается начальными условиями:

$$Q^+(\alpha, 0) = \alpha, \quad P^+(\alpha, 0) = \nabla S_0(\alpha), \quad \alpha \in \text{supp} \varphi^0.$$

Предполагается, что каждая траектория пересекает M ровно один раз трансверсально в момент времени $t_0(\alpha)$, переходя с отрицательной стороны на положительную:

$$Q^+(\alpha, t_0(\alpha)) = r(y_0(\alpha)), \quad \langle \dot{Q}^+(\alpha, t_0(\alpha)), m(y_0(\alpha)) \rangle > 0.$$

При достижении поверхности M волновой пакет расщепляется на три составляющие — падающую, отраженную и прошедшую волны, каждая из которых описывается собственным лагранжевым многообразием. В отличие от траектории падающей волны, задаваемой начальными условиями, траектория отраженной волны $\{Q^-(\alpha, t), P^-(\alpha, t)\}$ определяется краевыми условиями на поверхности M в момент взаимодействия с δ -потенциалом:

$$Q^-(\alpha, t_0(\alpha)) = Q^+(\alpha, t_0(\alpha)), \\ P_n^-(\alpha, t_0(\alpha)) = -P_n^+(\alpha, t_0(\alpha)), \quad P_\tau^-(\alpha, t_0(\alpha)) = P_\tau^+(\alpha, t_0(\alpha)),$$

где $P_n^\pm = \langle P^\pm, m(y_0(\alpha)) \rangle$ и $P_\tau^\pm$ — нормальная и касательная компоненты импульса в точке $r(y_0(\alpha)) \in M$.

Исследованы и описаны геометрические объекты, отвечающие решению задачи. Лагранжево многообразие Λ^+ , несущее падающую и прошедшую волны, строится стандартным образом.

Начальные данные индуцируют лагранжево многообразие:

$$\Lambda_0^n = \{(q, p) \in \mathbb{R}_{(q,p)}^{2n} : q = \alpha, p = \nabla S_0(\alpha)\},$$

которое сдвигается вдоль гамильтонова потока g_t :

$$\Lambda^+ = \bigcup_{t \in [0, T]} g_t(\Lambda_0^n).$$

Прошедшей волне отвечает то же многообразие Λ^+ , что и падающей. Таким образом, траектории прошедшей волны продолжаютсся вдоль тех же характеристик, не меняя направления при прохождении через M . Различие между падающей и прошедшей волнами проявляется лишь на уровне амплитуд.

Лагранжево многообразие Λ^- , несущее отраженную волну, строится следующим образом. Сечение $\Lambda_1^n = \Lambda^+ \cap Q^{2n+1}$, где Q^{2n+1} — поднятие поверхности M в расширенное фазовое пространство $\mathbb{R}_{(q,p,t,p_t)}^{2n+2}$, описывает совокупность траекторий в момент взаимодействия с M . К нему применяется отображение отражения:

$$\Phi: (x, p_m, p_\tau, t) \mapsto (x, -p_m, p_\tau, t),$$

меняющее знак нормальной к M компоненты импульса и сохраняющее касательную. Образ $\Lambda_2^n = \Phi(\Lambda_1^n)$ служит начальным многообразием для отраженных траекторий.

Лагранжевость Λ_2^n следует из лагранжевости Λ_1^n . Сдвигая Λ_2^n вдоль гамильтонова потока, получаем лагранжево многообразие для отраженной волны:

$$\Lambda^- = \bigcup_{\tau \geq t_0(\alpha)} g_\tau(\Lambda_2^n).$$

Фазы $S^+(x, t)$, $S^-(x, t)$, $\hat{S}(x, t)$ падающей, отраженной и прошедшей волн удовлетворяют уравнению Гамильтона–Якоби и согласованы на поверхности M условиями:

$$S^\pm|_M = \hat{S}|_M, \quad \frac{\partial S^-}{\partial m}\bigg|_M = -\frac{\partial S^+}{\partial m}\bigg|_M, \quad \frac{\partial \hat{S}}{\partial m}\bigg|_M = \frac{\partial S^+}{\partial m}\bigg|_M.$$

Амплитуды волн определяются из уравнений переноса вдоль соответствующих траекторий. Старшие части амплитуд выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_0^+(x, t) &= \varphi^0(\alpha) (J^+(\alpha, t))^{-1/2} \bigg|_{\alpha=\alpha^+(x, t)}, \\ \varphi_0^-(x, t) &= \frac{-q(y_0(\alpha))}{2iP_n^+(\alpha, t_0(\alpha)) + q(y_0(\alpha))} \varphi^0(\alpha) (J^-(\alpha, t))^{-1/2} \bigg|_{\alpha=\alpha^-(x, t)}, \\ \hat{\varphi}_0(x, t) &= \frac{2iP_n^+(\alpha, t_0(\alpha))}{2iP_n^+(\alpha, t_0(\alpha)) + q(y_0(\alpha))} \varphi^0(\alpha) (J^+(\alpha, t))^{-1/2} \bigg|_{\alpha=\alpha^+(x, t)}. \end{aligned}$$

Поправки $\varphi_k^\pm$, $\hat{\varphi}_k$, $k \geq 1$, определяются как решения неоднородных уравнений переноса с краевыми условиями на M , выражающимися через уже найденные амплитуды предыдущих порядков.

Построена функция:

$$\Psi(x, t, h) = \begin{cases} e^{\frac{i}{h} S^+(x, t)} \left(\sum_{k=0}^N \varphi_k^+(x, t) h^k + v_1 h^N \right) + e^{\frac{i}{h} S^-(x, t)} \left(\sum_{k=0}^N \varphi_k^-(x, t) h^k + v_2 h^N \right), & \text{с отрицательной стороны от } M, \\ e^{\frac{i}{h} \hat{S}(x, t)} \sum_{k=0}^N \hat{\varphi}_k(x, t) h^k, & \text{с положительной стороны от } M, \end{cases}$$

где $\|v_i\|_{L_2} = O(1)$, $i = 1, 2$. Поправки v_1, v_2 выбираются так, чтобы Ψ точно удовлетворяла краевым условиям на M и лежала в области определения оператора с δ -потенциалом.

В предположении отсутствия фокальных точек, то есть при условии, что соответствующие якобианы $J^\pm(\alpha, t) = \det(\partial Q^\pm / \partial \alpha)$ не обращаются в нуль, отображения $\alpha \mapsto Q^\pm(\alpha, t)$ являются локальными диффеоморфизмами, и построенное ВКБ-решение корректно определено.

Обозначим через $t_0 = \min_{\alpha \in \text{supp } \varphi^0} t_0(\alpha)$ минимальный момент пересечения траекторий с поверхностью M .

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.5. Пусть $T > t_0$ таково, что $J^+(\alpha, t) \neq 0$, $J^-(\alpha^-, t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$ и $\alpha \in \text{supp} \varphi^0$. Тогда решение задачи Коши:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \frac{q(y)}{\hbar} \delta_M \psi, \\ \psi|_{t=0} = e^{\frac{i}{\hbar} S_0(x)} \varphi^0(x), \end{cases}$$

представимо в виде $\psi = \Psi + w$, где $\|w\|_{L_2} = O(\hbar^N)$.

Получены явные выражения для квазиклассических аналогов коэффициентов отражения и прохождения:

$$R = \frac{-q(y)}{2i \frac{\partial S^+}{\partial m} \Big|_M + q(y)}, \quad T = \frac{2i \frac{\partial S^+}{\partial m} \Big|_M}{2i \frac{\partial S^+}{\partial m} \Big|_M + q(y)},$$

удовлетворяющие закону сохранения $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Результат распространен **на случай наличия фокальных точек**. Разработана модификация метода канонического оператора Маслова, учитывающая условия сшивки, задаваемые областью определения оператора с δ -потенциалом.

Теперь функции $\varphi_0^\pm$, $\hat{\varphi}_0$ определяются на лагранжевых многообразиях $\Lambda^\pm$:

$$\begin{aligned} \varphi_0^+(\alpha) &= \varphi^0(\alpha), \quad \alpha \in \Lambda^+, \\ \hat{\varphi}_0(\alpha) &= \frac{2ip_m^+}{2ip_m^+ + q(y)} \Big|_{\Lambda_1^n} \varphi_0^+(\alpha), \\ \varphi_0^-(\alpha') &= \frac{-q(y)}{2ip_m^+ + q(y)} \Big|_{\Lambda_2^n} \varphi_0^+(\Phi^{-1}(\alpha')), \quad \alpha' \in \Lambda^-. \end{aligned}$$

Поправки $\varphi_k^\pm$, $\hat{\varphi}_k$, $k > 0$, определяются рекуррентно как решения уравнений переноса с краевыми условиями на Λ_1^n и Λ_2^n .

Для построения глобальной асимптотики начальные данные переписываются в виде канонического оператора на начальном многообразии Λ_0^n :

$$\psi|_{t=0} = K_{\Lambda_0^n}[\varphi_0](x).$$

Глобальное решение строится с помощью канонических операторов Маслова $K_{\Lambda^\pm}$ на соответствующих лагранжевых многообразиях:

$$\Psi(x, t, \hbar) = \begin{cases} K_{\Lambda^+} \left[\sum_{k=0}^N \hbar^k \varphi_k^+ + \hbar^N \omega_1 \right] + K_{\Lambda^-} \left[\sum_{k=0}^N \hbar^k \varphi_k^- + \hbar^N \omega_2 \right], & \text{с отрицательной стороны от } M, \\ K_{\Lambda^+} \left[\sum_{k=0}^N \hbar^k \hat{\varphi}_k \right], & \text{с положительной стороны от } M, \end{cases}$$

где поправки ω_1, ω_2 , $\|\omega_j\|_{L_2} = O(1)$, $j = 1, 2$, обеспечивают точное выполнение краевых условий на M .

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.11. Пусть $T > t_0$ таково, что $J^+(\alpha, t) \neq 0$, $J^-(\alpha^-, t) \neq 0$ при $t \in [t_0, T]$ и $\alpha \in \text{supp } \varphi^0(x)$. Тогда решение задачи Коши:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \frac{q(y)}{h} \delta_M \psi, \\ \psi|_{t=0} = K_{\Lambda_0^n}[\varphi_0](x), \end{cases}$$

представимо в виде $\psi = \Psi + w$, где $\|w\|_{L_2} = O(h^N)$.

Третья глава посвящена построению квазиклассической асимптотики решения задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера с δ -потенциалом, локализованным на гладкой гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$ коразмерности 1, и начальных данных в виде гауссова пакета, локализованного в малой окрестности точки x_0 . Для построения асимптотики используется метод комплексного ростка Маслов. Описывается отражение изотропного многообразия с комплексным ростком при взаимодействии с δ -потенциалом.

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \frac{q(y)}{h} \delta_M \psi, \\ \psi(x, 0) = \tilde{A} e^{\frac{i}{h} S_0(x)}, \end{cases}$$

где $q(y)$ — вещественная функция на M , $\tilde{A} = h^{-n/4} A$, $A \in \mathbb{R}$. Начальная фаза $S_0(x)$ является комплекснозначной квадратичной функцией:

$$S_0(x) = s_0 + \langle p_0, x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle x - x_0, B_0(x - x_0) \rangle,$$

где $s_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^n$, B_0 — симметричная комплексная $n \times n$ -матрица с $\text{Im} B_0 > 0$. Условие $\text{Im} B_0 > 0$ обеспечивает экспоненциальное затухание волновой функции при удалении от точки x_0 и локализацию волнового пакета в ее малой окрестности. Без ограничения общности можно считать начальную фазу квадратичной. При разложении произвольной гладкой фазы с локальным минимумом $\text{Im} S_0$ в точке x_0 в ряд Тейлора линейный член вещественен, поскольку ненулевая мнимая часть линейного члена привела бы к экспоненциальному росту волновой функции в некотором направлении и нарушила бы L_2 -интегрируемость начальных данных. Квадратичный член с положительно определенной мнимой частью с учетом нормировочного множителя $h^{-n/4}$, дает вклад порядка $O(1)$ в норму L_2 начального условия и определяет структуру гауссова пучка. Условие $\text{Im} B_0 > 0$ обеспечивает экспоненциальное затухание волновой функции при удалении от точки x_0 и локализацию волнового пакета в ее малой окрестности. Члены третьего и более высоких порядков входят лишь в поправки к амплитуде порядка $O(h^{1/2})$ и могут быть учтены в старших членах асимптотики.

Область определения оператора с δ -потенциалом задается теми же граничными условиями на M , что и в предыдущей главе. Решение задачи строится в виде линейной комбинации трех гауссовых пучков — падающего, прошедшего и отраженного, — каждый из которых связан с собственным изотропным многообразием и комплексным ростком. Рассматривается траектория падающего гауссова пучка $\{Q^+(t), P^+(t)\}$ гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H(q, p) = \frac{1}{2} |p|^2 + V(q),$$

заданная начальными условиями:

$$Q^+(0) = x_0, \quad P^+(0) = p_0.$$

Предполагается, что луч $Q^+(t)$ пересекает поверхность M ровно один раз трансверсально в момент t_0 :

$$Q^+(t_0) = r(y_0) \in M.$$

Прошедший пучок продолжает движение вдоль той же траектории $\{Q^+(t), P^+(t)\}$, что и падающий, поэтому соответствующие изотропное многообразие, фаза и росток для прошедшего пучка совпадают с падающим. Различие между ними проявляется лишь на уровне амплитуд.

Траектория отраженной волны $\{Q^-(t), P^-(t)\}$ определяется условиями отражения на M :

$$Q^-(t_0) = Q^+(t_0), \quad P_n^-(t_0) = -P_n^+(t_0), \quad P_\tau^-(t_0) = P_\tau^+(t_0),$$

где $P_n^\pm$ и $P_\tau^\pm$ — нормальная и касательная к M компоненты импульса в точке $r(y_0)$. Нормальная компонента импульса меняет знак, что соответствует классическому закону отражения, тогда как касательная сохраняется.

Фазы $S^+(x, t)$, $S^-(x, t)$, $\hat{S}(x, t)$ падающей, отраженной и прошедшей волн определяются как квадратичные по $(x - Q^\pm(t))$ функции:

$$S^\pm(x, t) = \sigma^\pm(t) + \langle P^\pm(t), x - Q^\pm(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - Q^\pm(t), B^\pm(C^\pm)^{-1}(t)(x - Q^\pm(t)) \rangle, \\ \hat{S}(x, t) = S^+(x, t),$$

где $\sigma^\pm(t)$ — действия вдоль соответствующих траекторий, а матрицы $B^\pm(t)$, $C^\pm(t)$ являются решениями системы в вариациях вдоль $\{Q^\pm(t), P^\pm(t)\}$:

$$\dot{C}^\pm = B^\pm, \quad \dot{B}^\pm = -\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(Q^\pm(t))C^\pm,$$

с начальными условиями для падающего пучка:

$$C^+(0) = I, \quad B^+(0) = B_0,$$

и условиями для отраженного:

$$C^-(t_0) = I, \quad B^-(t_0) = \Omega^-.$$

Матрица Ω^- определяется условиями согласования ростка с геометрией поверхности M :

$$\begin{cases} \langle r_i, \Omega^- r_j \rangle = \langle r_i, \Omega^+(t_0) r_i \rangle + \langle r_{ij}, p^+ - p^- \rangle, \\ \langle p^-, \Omega^- p^- \rangle = \langle p^+, \Omega^+(t_0) p^+ \rangle + \langle \frac{\partial V}{\partial x}(r(y_0)), p^+ - p^- \rangle, \\ \langle p^-, \Omega^- r_i \rangle = \langle p^+, \Omega^+(t_0) r_i \rangle, \end{cases}$$

где $r_i = \frac{\partial r}{\partial y^i}(y_0)$, $r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial y^i \partial y^j}(y_0)$ — элементы первой и второй квадратичных форм поверхности M , $p^\pm = P^\pm(t_0)$. Первое уравнение учитывает касательные направления и кривизну поверхности через вторую квадратичную форму r_{ij} , второе задает компоненты вдоль нормали, а третье фиксирует смешанные компоненты. В

силу симметрии матрицы $B^+(t_0)$ система однозначно определяет симметричную матрицу Ω^- . Заметим, что ограничение матрицы Ω^- на касательные направления к поверхности M отличается от соответствующего ограничения матрицы $\Omega^+(t_0)$ на слагаемые, содержащие вторую квадратичную форму поверхности r_{ij} .

Амплитуды $\varphi_k^\pm$, $\hat{\varphi}_k$, $k = 0, \dots, N$, определяются из уравнений переноса вдоль соответствующих траекторий. Начальные условия для падающего пучка:

$$\varphi_0^+(z^+, 0) = A, \quad \varphi_k^+(z^+, 0) = 0, \quad k \geq 1,$$

где $z^\pm = (x - Q^\pm(t))h^{-1/2}$. Амплитуды отраженного и прошедшего пучков определяются из краевых условий на M :

$$\varphi_k^-(z_1, t_0) = \frac{-q(y_0)\varphi_k^+(z_1, t_0) + u_k(\xi)}{2iP_n^+(t_0) + q(y_0)}, \quad \hat{\varphi}_k(z_1, t_0) = \frac{2iP_n^+(t_0)\varphi_k^+(z_1, t_0) + v_k(\xi)}{2iP_n^+(t_0) + q(y_0)},$$

где $\xi = (y - y_0, t - t_0)h^{-1/2}$, $z_1(\xi)$ — линейная часть разложения $z^\pm|_M$ по ξ , а $u_k(\xi)$, $v_k(\xi)$ — многочлены от ξ , определяемые рекуррентно через амплитуды предыдущих порядков, причем $u_0 \equiv v_0 \equiv 0$.

Определены квазиклассические аналоги коэффициентов отражения и прохождения:

$$R = \frac{-q(y_0)}{2iP_n^+(t_0) + q(y_0)}, \quad T = \frac{2iP_n^+(t_0)}{2iP_n^+(t_0) + q(y_0)},$$

удовлетворяющие закону сохранения $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Построена функция $\Psi(x, t, h)$, представляющая собой сумму падающей, отраженной и прошедшей волн:

$$\Psi(x, t, h) = \begin{cases} h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S^+(x, t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k^+ \left(\frac{x - Q^+(t)}{h^{1/2}}, t \right) h^{k/2} + \\ \quad + h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S^-(x, t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k^- \left(\frac{x - Q^-(t)}{h^{1/2}}, t \right) h^{k/2}, \\ \quad \text{с отрицательной стороны от } M, \\ h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} \hat{S}(x, t)} \sum_{k=0}^N \hat{\varphi}_k \left(\frac{x - Q^+(t)}{h^{1/2}}, t \right) h^{k/2} + \omega, \\ \quad \text{с положительной стороны от } M, \end{cases}$$

где поправка $\|\omega\|_{L_2} = O(h^{N/2})$ обеспечивает точное выполнение краевых условий на M .

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть $t \in [t_0, T]$. Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \frac{q(y)}{h} \delta_M \psi, \\ \psi|_{t=0} = h^{-n/4} A e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \end{cases}$$

представимо в виде $\psi = \Psi + \omega$, где $\|\omega\|_{L_2} = O(h^{N/2-1})$.

Четвертая глава является обобщением предыдущей и посвящена построению квазиклассической асимптотики решения задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера с δ -потенциалом при начальных данных в виде гауссова пучка, локализованного в окрестности гладкой k -мерной поверхности γ_0^k . В отличие от предыдущей главы начальное многообразие перестает быть точкой и становится изотропным подмногообразием положительной размерности, а комплексный росток определяется над ним как векторное расслоение. Описывается расщепление изотропного многообразия с комплексным ростком при взаимодействии с δ -потенциалом.

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \frac{q(y)}{h} \delta_M \psi, \\ \psi(x, 0) = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x), \end{cases}$$

где $q(y)$ — вещественная функция на M . Начальные данные заданы в виде гауссова пучка, локализованного на k -мерной гладкой поверхности γ_0^k , с гладкой вещественной амплитудой $\varphi^0(x)$ и гладкой комплексной фазой $S_0(x)$ такой, что $\text{Im} S_0(x) \geq 0$, причем $\text{Im} S_0(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \gamma_0^k$:

$$\gamma_0^k = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{Im} S_0(x) = 0\}, \quad \text{rang} \left(\text{Im} \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\gamma_0^k} \right) = n - k.$$

Поверхность γ_0^k задается параметрически: $x = q_0(\tau)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$. Нормировочный множитель $h^{-n/4}$ введен для того, чтобы гарантировать оценку $\|\psi(x, 0)\|_{L_2} = O(1)$.

Начальная фаза задается в виде:

$$S_0(x) = s_0 + \langle p_0, x - q_0(\tau) \rangle + \langle B_0(x - q_0(\tau)), x - q_0(\tau) \rangle \Big|_{\tau=\tau(x)},$$

где $s_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^n$, B_0 — симметричная комплексная матрица с $\text{Im} B_0 > 0$. Начальная амплитуда задается в виде конечного асимптотического ряда:

$$\varphi^0(x) = \sum_{m=0}^{N_0} \varphi_m^0 \left(\frac{x - q_0(\tau)}{h^{1/2}} \right) \Big|_{\tau=\tau(x)} h^{m/2},$$

где $\varphi_m^0(z)$ — однородные многочлены степени m .

Область определения оператора с δ -потенциалом задается теми же граничными условиями на M , что и в предыдущих главах.

Как и в прошлой главе решение задачи строится в виде суммы трех пучков — падающего, прошедшего и отраженного. До момента взаимодействия с поверхностью M решение совпадает с решением задачи с гладким потенциалом. Рассматривается траектория $\{Q^+(\tau, t), P^+(\tau, t)\}$ гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q)$, заданная начальными условиями:

$$Q^+(\tau, 0) = q_0(\tau), \quad P^+(\tau, 0) = \frac{\partial S_0}{\partial x}(q_0(\tau)).$$

Предполагается, что проекция $Q^+(\tau, t)$ пересекает поверхность M ровно один раз трансверсально в момент времени $t_0(\tau)$ в точке $y_0(\tau)$. Прошедший пучок продолжает

движение вдоль той же траектории $\{Q^+(\tau, t), P^+(\tau, t)\}$, поэтому соответствующие изотропное многообразие, фаза и росток совпадают с падающей волной; различие между ними проявляется лишь на уровне амплитуд.

Траектория отраженной волны $\{Q^-(\tau, t), P^-(\tau, t)\}$ определяется условиями отражения на M :

$$Q^-(\tau, t_0(\tau)) = Q^+(\tau, t_0(\tau)), \\ P_n^-(\tau, t_0(\tau)) = -P_n^+(\tau, t_0(\tau)), \quad P_\tau^-(\tau, t_0(\tau)) = P_\tau^+(\tau, t_0(\tau)),$$

где $P_n^\pm$ и $P_\tau^\pm$ — нормальная и касательная к M компоненты импульса в точке $r(y_0(\tau))$.

Фазы $S^+(x, t)$, $S^-(x, t)$, $\hat{S}(x, t)$ падающего, отраженного и прошедшего пучков определяются как квадратичные по $(x - Q^\pm(\tau, t))$ функции:

$$S^\pm(x, t) = \sigma^\pm(\tau, t) + \langle P^\pm(\tau, t), x - Q^\pm(\tau, t) \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle x - Q^\pm(\tau, t), B^\pm(C^\pm)^{-1}(\tau, t)(x - Q^\pm(\tau, t)) \rangle \Big|_{\tau=\tau(x, t)}, \\ \hat{S}(x, t) = S^+(x, t),$$

где $\sigma^\pm(\tau, t)$ — действия вдоль соответствующих траекторий, а матрицы $B^\pm(\tau, t)$, $C^\pm(\tau, t)$ являются решениями системы в вариациях вдоль $\{Q^\pm(\tau, t), P^\pm(\tau, t)\}$:

$$\dot{C}^\pm = B^\pm, \quad \dot{B}^\pm = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(Q^\pm(\tau, t))C^\pm,$$

с естественными начальными условиями для падающего пучка :

$$C^+(\tau, 0) = I, \quad B^+(\tau, 0) = \frac{\partial^2 S_0}{\partial x^2}(q_0(\tau)),$$

и краевыми условиями для отраженного:

$$C^-(\tau, t_0(\tau)) = I, \quad B^-(\tau, t_0(\tau)) = \Omega^-(\tau).$$

где симметричная матрица $\Omega^-(\tau)$ определяется системой:

$$\begin{cases} \langle r_i(\tau), \Omega^-(\tau) r_j(\tau) \rangle = \langle r_i(\tau), \Omega^+(\tau) r_j(\tau) \rangle + \langle r_{ij}(\tau), p^+(\tau) - p^-(\tau) \rangle, \\ \langle p^-(\tau), \Omega^-(\tau) p^-(\tau) \rangle = \langle p^+(\tau), \Omega^+(\tau) p^+(\tau) \rangle + \langle \frac{\partial V}{\partial x}(r(y_0(\tau))), p^+(\tau) - p^-(\tau) \rangle, \\ \langle p^-(\tau), \Omega^-(\tau) r_i(\tau) \rangle = \langle p^+(\tau), \Omega^+(\tau) r_i(\tau) \rangle, \end{cases}$$

где $r_i(\tau) = \frac{\partial r}{\partial y^i}(y_0(\tau))$ и $r_{ij}(\tau) = \frac{\partial^2 r}{\partial y^i \partial y^j}(y_0(\tau))$ — элементы первой и второй квадратичных форм поверхности M , $p^\pm(\tau) = P^\pm(\tau, t_0(\tau))$ — импульсы падающей и отраженной волн в момент взаимодействия с M , $\Omega^+(\tau) = B^+(C^+)^{-1}(\tau, t_0(\tau))$ — матрица роста падающей волны в этот момент. Заметим, что ограничение матрицы Ω^- на касательные направления к поверхности M отличается от соответствующего ограничения матрицы $\Omega^+(\tau)$ на слагаемые, содержащие вторую квадратичную форму поверхности $r_{ij}(\tau)$, что отражает влияние кривизны поверхности M на отраженный росток.

Амплитуды $\varphi_k^\pm$, $\hat{\varphi}_k$, $k = 0, \dots, N$, определяются как решения уравнений переноса вдоль соответствующих траекторий. Начальные условия для падающего пучка:

$$\varphi_k^+(z^+, 0) = \varphi_k^0(z^+), \quad k \leq N_0, \quad \varphi_k^+(z^+, 0) = 0, \quad k > N_0,$$

где $z^\pm = (x - Q^\pm(\tau, t))h^{-1/2}$. Амплитуды отраженного и прошедшего пучков определяются из краевых условий на M :

$$\varphi_0^-|_M = \frac{-q(y)}{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle + q(\tau)} \varphi_0^+|_M, \quad \hat{\varphi}_0|_M = \frac{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle}{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle + q(\tau)} \varphi_0^+|_M,$$

а при $k \geq 1$:

$$\varphi_k^-|_M = \frac{-q(y)\varphi_k^+ + u_k(\xi)}{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle + q(\tau)} \Big|_M, \quad \hat{\varphi}_k|_M = \frac{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle \varphi_k^+ + v_k(\xi)}{2i\langle P^+(\tau), m(\tau) \rangle + q(\tau)} \Big|_M,$$

где $\xi(\tau) = (y - y_0(\tau), t - t_0(\tau))h^{-1/2}$, а $u_k(\xi)$, $v_k(\xi)$ — многочлены от ξ , определяемые рекуррентно через амплитуды предыдущих порядков, причем $u_0 \equiv v_0 \equiv 0$.

Определены квазиклассические аналоги коэффициентов отражения и прохождения:

$$R = \frac{-q(y_0(\tau))}{2i\langle P^+(\tau, t_0(\tau)), m(y_0(\tau)) \rangle + q(y_0(\tau))}, \quad T = \frac{2i\langle P^+(\tau, t_0(\tau)), m(y_0(\tau)) \rangle}{2i\langle P^+(\tau, t_0(\tau)), m(y_0(\tau)) \rangle + q(y_0(\tau))},$$

удовлетворяющие закону сохранения $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Построена функция $\Psi(x, t, h)$, представляющая собой сумму падающего, отраженного и прошедшего пучков:

$$\Psi(x, t, h) = \begin{cases} h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S^+(x, t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k^+ \left(\frac{x - Q^+(\tau, t)}{h^{1/2}}, t \right) \Big|_{\tau=\tau^+(x, t)} h^{k/2} + \\ + h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S^-(x, t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k^- \left(\frac{x - Q^-(\tau, t)}{h^{1/2}}, t \right) \Big|_{\tau=\tau^-(x, t)} h^{k/2}, \\ \text{с отрицательной стороны от } M, \\ h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} \hat{S}(x, t)} \sum_{k=0}^N \hat{\varphi}_k \left(\frac{x - Q^+(\tau, t)}{h^{1/2}}, t \right) \Big|_{\tau=\tau^+(x, t)} h^{k/2} + \omega, \\ \text{с положительной стороны от } M. \end{cases}$$

где параметры $\tau^\pm(x, t)$ определяются из уравнений $\langle x - Q^\pm(\tau, t), \frac{\partial Q^\pm}{\partial \tau_j}(\tau, t) \rangle = 0$, $j = 1, \dots, k$. Поправка $\|\omega\|_{L_2} = O(h^{N/2})$ обеспечивает точное выполнение краевых условий на M .

Доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть $t \in [t_0, T]$. Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \frac{q(y)}{h} \delta_M \psi, \\ \psi|_{t=0} = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x) \end{cases}$$

представимо в виде $\psi = \Psi + \chi$, где $\|\chi\|_{L_2} = O(h^{N/2-1})$.

Пятая глава посвящена построению квазиклассической асимптотики решения задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера с точечным δ -потенциалом в $\mathbb{R}^3$.

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + \alpha \delta_{x_0} \psi, \\ \psi(x, 0) = e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x), \end{cases}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ — параметр точечного потенциала, сосредоточенного в точке $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Носитель начальных данных φ^0 компактен, не содержит точку x_0 и содержится в шаре

$$B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < \varepsilon\}.$$

Начальные данные задаются в виде быстро осциллирующего волнового пакета $e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x)$, где $S_0(x)$ — вещественнозначная гладкая фазовая функция, а $\varphi^0(x)$ — гладкая амплитуда с компактным носителем.

Решение задачи в окрестности точки x_0 представимо в виде:

$$\psi(x, t) = \frac{a(\psi)}{4\pi r(x, x_0)} + b(\psi) + R(x, x_0), \quad r(x, x_0) = |x - x_0|,$$

где $R(x, x_0) = o(1)$ при $x \rightarrow x_0$, а коэффициенты $a(\psi)$ и $b(\psi)$ связаны условием:

$$a(\psi) = \frac{2\alpha}{h^2} b(\psi).$$

Это соотношение играет роль краевого условия в точке x_0 .

Решение задачи строится в виде суперпозиции падающей и рассеянной волн:

$$\psi(x, t, h) = \psi_1(x, t, h) + \frac{1}{r(x, x_0)} \psi_2(x, t, h),$$

где

$$\psi_1(x, t, h) = e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k(x, t) h^k, \quad \psi_2(x, t, h) = e^{\frac{i}{h} \sigma(r, t)} \sum_{k=0}^N \chi_k(r, t) h^k \Big|_{r=|x-x_0|}.$$

Падающая волна ψ_1 описывает распространение начального волнового пакета, а член $\frac{1}{r} \psi_2$ отвечает рассеянию на δ -потенциале в точке x_0 .

Классическая траектория падающей волны представляет собой прямолинейное движение:

$$X(y, t) = y + \nabla S_0(y) t, \quad P(y, t) = \nabla S_0(y), \quad y \in B.$$

Фаза $S(x, t)$ падающей волны определяется как действие вдоль этих траекторий и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби. Для взаимодействия с точечным потенциалом необходимо, чтобы лучи $X(y, t)$ достигали точки x_0 в некоторый момент времени $t_0 \in (0, T)$, то есть чтобы x_0 лежало в конусе лучей, исходящих из носителя B . Не уменьшая общности, можно считать $\nabla S_0(y)$ единичным:

$$\nabla S_0(y) = \frac{x_0 - x'}{|x_0 - x'|}, \quad x' \in B,$$

что эквивалентно перенормировке временного параметра t_0 . Обозначим через $t_{\min} = \min_{y \in B} t_0(y)$ минимальное время достижения точки x_0 .

Поскольку внешний потенциал отсутствует ($V(x) = 0$), рассеянная волна оказывается радиально симметричной и зависит только от $r = |x - x_0|$ и времени t . Фаза $\sigma(r, t)$ рассеянной волны удовлетворяет одномерному уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r} \right)^2 = 0,$$

и согласована с падающей волной условием:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) = |\nabla S(x_0, t)|,$$

которое следует из требования $\sigma(0, t) = S(x_0, t)$. Показано, что для рассматриваемого класса начальных данных сходящаяся компонента рассеянной волны отсутствует, и рассеянная волна является чисто расходящейся.

Амплитуды падающей волны $\varphi_k(x, t)$ определяются из уравнений переноса с начальными условиями $\varphi_0(x, 0) = \varphi^0(x)$, $\varphi_k(x, 0) = 0$ при $k \geq 1$. Амплитуды рассеянной волны $\chi_k(r, t)$ определяются рекуррентно из краевых условий в точке x_0 :

$$\chi_0(r, t) \equiv 0, \quad \chi_1(0, t) = i \frac{\varphi_0(x_0, t)}{|\nabla S(x_0, t)|},$$

а при $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \chi_k(0, t) &= i \left(\frac{\partial \sigma}{\partial r}(0, t) \right)^{-1} \left(\varphi_{k-1}(x_0, t) + \frac{\partial \chi_{k-1}}{\partial r}(0, t) + \Phi_k(t) \right), \\ \Phi_k(t) &= \frac{2\pi}{\alpha} \varphi_{k-3}(x_0, t), \quad k \geq 3. \end{aligned}$$

Построена функция:

$$\Psi_N(x, t, h) = e^{\frac{i}{h} S(x, t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k(x, t) h^k + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^N e^{\frac{i}{h} \sigma(r, t)} \chi_k(r, t) h^k \Big|_{r=|x-x_0|} + \omega(x, t, h),$$

где $\|\omega\|_{L_2} = O(h^{N-2})$.

Доказана теорема.

Теорема 5.1. Пусть $T > t_{\min}$ таково, что $J^1(y, t) \neq 0$, $J^2(t_0, t) \neq 0$ при $t \in [t_{\min}, T]$ и $y \in B$. Тогда решение задачи Коши

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + \alpha \delta_{x_0} \psi, \\ \psi|_{t=0} = e^{\frac{i}{h} S_0(x)} \varphi^0(x) \end{cases}$$

представимо в виде $\psi = \Psi_N + v$, где $\|v\|_{L_2} = O(h^{N-3})$.

Исследованы и описаны геометрические объекты, отвечающие построенному решению. Лагранжево многообразие падающей волны строится стандартным образом:

$$\Lambda_t^{3,+} = \{(x, p) \in \mathbb{R}^6 : x = y + \nabla S_0(y) t, p = \nabla S_0(y), y \in B\}.$$

Лагранжево многообразие рассеянной волны определяется семейством лучей, исходящих из точки рассеяния x_0 во всех направлениях. Поскольку фаза σ зависит только от r и t , угловые компоненты импульса тождественно равны нулю ($p_\theta \equiv p_\phi \equiv 0$), и многообразие задается в полном фазовом пространстве как:

$$\Lambda_t^- = \{(x, p) \in \mathbb{R}^6 : |x - x_0| = |\nabla S(x_0, t_0)|(t - t_0), p = |\nabla S(x_0, t_0)| \frac{x - x_0}{|x - x_0|}, t_0 \in [t_{\min}, t]\}.$$

Это трехмерное лагранжево многообразие, параметризованное угловыми координатами (θ, ϕ) точки на сфере и моментом t_0 , задающим ее радиус. Таким образом, влияние точечного δ -потенциала состоит в порождении расходящейся сферической волны из точки x_0 , параметры которой определяются значением падающей волны в точке x_0 и краевыми условиями, задаваемыми δ -потенциалом.

Таким образом, влияние точечного δ -потенциала состоит в порождении расходящейся сферической волны из точки x_0 , параметры которой определяются значением падающей волны в точке x_0 и краевыми условиями, задаваемыми δ -потенциалом.

Заключение

В диссертационной работе построены квазиклассические асимптотики решений задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера с δ -потенциалами различных типов и описаны соответствующие геометрические объекты в фазовом пространстве.

Во второй главе рассмотрен случай δ -потенциала, локализованного на гладкой гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$, при начальных данных с вещественной фазой. Построена локальная и глобальная квазиклассическая асимптотика в виде суммы падающей, отраженной и прошедшей волн. Описано расщепление лагранжево многообразия при взаимодействии с поверхностью: лагранжево многообразие отраженной волны получается из падающего отображением, меняющим знак нормальной компоненты импульса. Определены квазиклассические аналоги коэффициентов отражения и прохождения, удовлетворяющие закону сохранения $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

В третьей главе рассмотрен тот же тип потенциала при начальных данных в виде гауссова пучка, локализованного в окрестности точки. Построена асимптотика на основе метода комплексного роста Маслова. Описаны изотропные кривые, отвечающие падающей и отраженной волнам, и комплексные ростки над ними. Показано, что при взаимодействии с δ -потенциалом матрица роста отраженной волны отличается от матрицы падающего на слагаемые, определяемые второй квадратичной формой поверхности M .

Четвертая глава является обобщением предыдущей на случай начальных данных, локализованных в окрестности гладкой k -мерной поверхности. Построена асимптотика в виде суммы падающей, отраженной и прошедшей волн. Описаны изотропные многообразия и комплексные векторные расслоения над ними, возникающие при взаимодействии с δ -потенциалом.

В пятой главе рассмотрен точечный δ -потенциал в $\mathbb{R}^3$ при начальных данных с вещественной фазой. Получены необходимые условия взаимодействия волнового пакета с потенциалом. Построена асимптотика в виде суммы падающей и рассеянной волн. Показано, что для рассматриваемого класса начальных данных рассеянная волна является чисто расходящейся сферической волной, а сходящаяся компонента отсутствует. Описаны лагранжевы многообразия падающей и рассеянной волн.

Благодарности

Автор выражает особую благодарность своему научному руководителю член-корр. РАН, доктору физ.-мат. наук, профессору Андрею Игоревичу Шафаревичу за постановку задач, ценные советы и полезные обсуждения. Автор искренне благодарит сотрудников лаборатории механики природных катастроф Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН за внимание к работе и ценные комментарии. Автор также благодарит коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за дружелюбную атмосферу.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3 Геометрия и топология (физико-математические науки).

1. *Shchegortsova O. A. Semiclassical Asymptotics of the Solution to the Cauchy Problem for the Three-Dimensional Schrödinger Equation with a Point Potential* // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2026. – Vol. 33, № 1 – pp. 163–179. EDN: PEFPVK. Импакт-фактор 0.561 (SRJ). Объем 1.06 п.л.
2. *Shafarevich A. I., Shchegortsova O. A. Reconstruction of Maslov's Complex Germ in the Cauchy Problem for the Schrödinger Equation with a Delta Potential Localized on a Hypersurface* // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2024. – Vol. 31, № 3 – pp. 526–543. EDN: LVQKCK. Импакт-фактор 0.561 (SRJ). Объем 1.06 п.л.
А.И. Шафаревичу принадлежат постановки задач, О.А.Щегорцовой принадлежат точные формулировки и доказательства утверждений. Общая доля диссертанта составляет 0.848 п.л.
3. *Shafarevich A. I., Shchegortsova O. A. Maslov Complex Germ and Semiclassical Contracted States in the Cauchy Problem for the Schrödinger Equation with Delta Potential* // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 283, № 1 – pp. 139–149. EDN: KGNTQC. Импакт-фактор 0.253 (SRJ). Объем 0.68 п.л.
А.И. Шафаревичу принадлежат постановки задач, О.А.Щегорцовой принадлежат точные формулировки и доказательства утверждений. Общая доля диссертанта составляет 0.544 п.л.
4. *Шафаревич А. И., Щегорцова О. А. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом, локализованным на поверхности коразмерности 1* // Труды Математического института

им. В. А. Стеклова. – 2020. – Т. 310. – С. 322–331.

EDN: ASPQXV. Импакт-фактор 0.524 (РИНЦ). Объем 0.68 п.л.

Английский перевод:

Shafarevich A. I., Shchegortsova O. A. Semiclassical Asymptotics of the Solution to the Cauchy Problem for the Schrödinger Equation with a Delta Potential Localized on a Codimension 1 Surface // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2020. – Vol. 310. — pp. 304–313.

EDN: ASPQXV. Импакт-фактор 0.324 (SRJ). Объем 0.68 п.л.

А.И. Шафаревичу принадлежат постановки задач, О.А.Щегорцовой принадлежат точные формулировки и доказательства утверждений. Общая доля диссертанта составляет 0.544 п.л.