МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Козловская Татьяна Давидовна

О МНОЖЕСТВАХ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Скворцов В.А.

Москва — 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В диссертации рассмотрена серия вопросов теории единственности разложения функций в ряды по ортогональным системам.

Истоком этих проблем является классическая теория единственности тригонометрических рядов. В 1870 г. Г. Кантор доказал, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на $[0, 2\pi)$, то все его коэффициенты равны нулю. В 1909 г. В. Юнг доказал, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на $[0, 2\pi)$, кроме некоторого счетного множества, то все его коэффициенты равны нулю. В 1916 г. Д. Е. Меньшов построил совершенное множество нулевой меры и тригонометрический ряд, сходящийся к нулю всюду вне этого множества и имеющий отличные от нуля коэффициенты. Этот результат Д. Е. Меньшова положил начало новому направлению исследований в теории единственности как тригонометрических рядов, так и рядов по другим системам функций.

Согласно введенной Н. Н. Лузиным и Н. К. Бари терминологии множество $E \subset [a, b)$ называется U-множеством или множеством единственности для рядов по системе $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [a, b)$, если из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$ к нулю на $[a, b) \setminus E$ следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Множество $E \subset [a, b)$ называется M-множеством для рядов по системе $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, если оно не является U-множеством, то есть существует нетривиальный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(x)$, сходящийся к нулю на $[a, b) \setminus E$.

Нетривиальный ряд, сходящийся к нулю почти всюду на $[a, b)$, называют нуль-рядом. Множество точек, где нуль-ряд не сходится к нулю, назовем ядром нуль-ряда. Множество точек, где $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |S_n(x)| = +\infty$, назовем приведенным ядром нуль-ряда.

Вскоре после построения Д. Е. Меньшовым совершенного M-множества нулевой меры Н. К. Бари и А. Райхман (1922 г.) независимо и разными способами получили целые классы непустых совершенных U-множеств.

Упомянутые исследования по тригонометрическим рядам изложены, например, в главе XIV фундаментальной монографии Н. К. Бари [1]. Система функций Уолша, сохраняя многие свойства тригонометрической системы (в силу групповых свойств области определения), тесно связана также с системами Хаара и Радемахера. Этим объясняется важная роль системы Уолша в общей теории ортогональных рядов. Система Уолша широко используется и в прикладных вопросах —в цифровой обработке сигналов, в теории кодирования, в распознавании образов. Основы теории рядов Уолша и прикладные вопросы изложены, например, в монографии [2].

Первые результаты по теории единственности для системы Уолша были получены Н. Я. Виленкиным в 1947 г. (аналог теоремы Кантора), А. А. Шнейдером [3], Н. Файном в 1949 г. [4] (каждое счетное множество является U-множеством). В работе [3] А. Шнейдер установил также, что среди непустых совершенных множеств нулевой меры имеются U-множества; построил и M-множество меры нуль для системы Уолша; получил теорему локализации для этой системы функций. Эти результаты получены с помощью формального произведения, введенного А. Шнейдером для системы Уолша по аналогии с введенным Райхманом формальным произведением для тригонометрической системы.

Если в определении множества единственности наложить на коэффициенты ряда условие

$$\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^p,$$

то получим определение U_p-множества (множества относительной единственности).

Понятие U_p-множеств (или множеств единственности относительно l^p) ввел в заметке Y. Katznelson [5], рассмотревший случай тригонометрической системы.

Вопросы теории единственности для рядов по различным системам функций активно разрабатываются современными математиками (В. А. Скворцов, Г. Г. Геворкян, Н. Н. Холщевникова, Н. А. Бокаев, А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, В. Шапиро, Ж.–П. Кахан, И. Кацнельсон, В. Вейд и др.).

В последние годы изучаются множества единственности для рядов по системе характеров нуль-мерных абелевых групп (В. А. Скворцов [6], В. А. Скворцов, Ф. Тулоне [7], В. А. Скворцов, Н. Н. Холщевникова [8] и др.). В. А. Скворцов [6] построил совершенное M_0-множество (упомянутый в определении M-множества нетривиальный ряд является рядом Фурье–Стильтьеса) для системы характеров нуль-мерной абелевой группы, мера Хаусдорфа которого равна нулю.

Н. К. Бари получен следующий результат: всякая порция ядра тригонометрического нуль-ряда содержит порцию приведенного ядра того же ряда; существует другой тригонометрический нуль-ряд, для которого ядром и приведенным ядром будут служить именно эти порции ядра и приведенного ядра данного нуль-ряда.

В диссертационной работе вводится и изучается обобщенное формальное произведение рядов Уолша, аналогичное тому, которое ввел Райхман для тригонометрических рядов. Это позволило доказать ряд новых теорем теории единственности рядов Уолша.

Свойства нуль-рядов используют для доказательства теорем об объединении множеств единственности. Н. К. Бари доказала, что объединение счетного множества замкнутых U-множеств для тригонометрической системы функций есть U-множество для этой системы. Аналог этой теоремы для системы Уолша получил американский математик В. Вейд [9].

Н. Н. Холщевниковой [10] доказана обобщенная теорема Бари для системы Уолша: если E_n — U-множества для рядов по системе Уолша, замкнутые относительно своего объединения

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

то E опять U-множество для рядов по системе Уолша.

Степень разработанности темы. Таким образом, теория множеств единственности (в обычном смысле) была и остается активно исследуемой областью гармонического анализа. При этом теория Райхмана формального произведения тригонометрических рядов сыграла важную роль в получении большинства результатов в тригонометрическом случае. В случае рядов Уолша аналог теории Райхмана был введен и исследовался лишь для формального произведения ряда и полинома Уолша.

Что касается множеств относительной единственности, то здесь также, начиная с упомянутой выше основополагающей работы Кацнельсона, большинство работ посвящалось тригонометрическому случаю. В последнее десятилетие появился и ряд работ, связанных с рядами Уолша, которые мы используем в наших исследованиях.

В настоящей работе по тематике, связанной с вопросами счетного объединения множеств относительной единственности для системы Уолша и для системы Виленкина–Джафарли, а также по вопросам классификации U_r-множеств, получены окончательные результаты.

Для тригонометрической системы результаты об объединении U_r-множеств получены лишь при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты рядов.

Цель работы.

- Распространение теории Райхмана формального произведения тригонометрических рядов на ряды Уолша. Исследование с помощью введенного обобщенного формального произведения рядов Уолша свойств ядер и приведенных ядер нуль-рядов.

- Классификация U_r-множеств для тригонометрической системы и системы Уолша.

- Изучение объединения U_r-множеств для системы Уолша.

- Изучение объединения U_r-множеств для системы характеров группы целых p-адических чисел — системы Виленкина–Джафарли.

- Изучение объединения U_r-множеств для тригонометрической системы.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Проведена классификация U_r-множеств для тригонометрической системы и для системы Уолша.

2. Введено и исследовано обобщенное формальное произведение (ОФП) рядов Уолша; тем самым теория Райхмана ФП для тригонометрических рядов распространена на ряды Уолша.

3. Изучены свойства ядер и приведенных ядер нуль-рядов Уолша (с помощью ОФП), нуль-рядов системы Виленкина–Джафарли.

4. Установлено, что при $r > 2$ объединение счетного числа замкнутых U_r-множеств для системы Уолша является U_r-множеством для этой системы.

5. Установлено, что при $r > 2$ объединение счетного числа замкнутых U_r-множеств для системы Виленкина–Джафарли является U_r-множеством для этой системы.

6. Изучена связь суммируемости коэффициентов тригонометрического ряда и суммируемости коэффициентов его формального произведения на абсолютно сходящийся ряд.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение при решении вопросов единственности по другим конкретным ортогональным системам, а также в абстактном гармоническом анализе при изучении рядов по системам характеров абелевых групп.

Методы исследования. В работе используются методы классического гармонического анализа (в том числе теория формального произведения рядов, варианты теорем локализации), методы теории рядов Фурье, общие методы действительного анализа, теории меры, теории размерности Хаусдорфа и теории характеров нуль-мерных групп (двоичной группы Кантора и группы p-адических чисел).

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются вопросы представления функций ортогональными рядами. Поэтому она соответствует паспорту специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ — по следующим направлениям: вещественный анализ, локальные и глобальные свойства функций вещественных переменных, их представления и приближения; метрическая теория функций, в которой на основе понятий меры и интеграла исследуются свойства функций и их производных, изучаются функциональные (в т. ч. ортогональные) ряды и их приложения.

Положения, выносимые на защиту:

1. Проведена классификация U_r-множеств для тригонометрической системы и для системы Уолша.

2. Теория Райхмана о формальном произведении рядов распространена на случай рядов Уолша.

3. Подробно изучены свойства ядер и приведенных ядер нуль-рядов Уолша и нуль-рядов по системе Виленкина–Джафарли.

4. Получены новые результаты о счетном объединении замкнутых U_r-множеств ($r > 2$) для системы Уолша и для системы Виленкина–Джафарли.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

1. Четвертая Международная научная конференция «Моделирование нелинейных процессов и систем» (MNPS - 2019), Москва, Россия, МГТУ «СТАНКИН», 10–13 декабря 2019 г.

2. Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов, Россия, 28 января–1 февраля 2020 г.

3. Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», Саратов, Россия, 31 января–4 февраля 2022 г.

4. Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы

теории функций и их приложения», Саратов, Россия, 28 января–31 января 2024 г.

Были также сделаны сообщения на научно-исследовательском семинаре «Тригонометрические и ортогональные ряды» (руководители семинара — профессор М. И. Дьяченко, профессор Т. П. Лукашенко, профессор В. А. Скворцов, профессор А. П. Солодов), механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова (многократно 2017–2026 гг.).

Публикации по теме диссертации. Автор имеет 8 работ по теме диссертации. Из них 3 работы опубликованы в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ имени М. В. Ломоносова по специальности и отрасли наук. Работ в соавторстве нет.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, основной части, состоящей из четырех глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 66 страниц. Список литературы содержит 36 наименований.

Краткое содержание диссертации. Утверждения (теоремы, леммы) и формулы каждого параграфа имеют свою внутреннюю нумерацию. Так, например, наряду с теоремой 2.3.1 нумерацию (2.3.1) имеет первая формула в параграфе 2.3 главы 2.

В **главе 1** даны определения всех понятий, фигурирующих в работе, вместе с необходимыми пояснениями. Сообщаются известные результаты, связывающие эти понятия: теорема локализации для каждой из рассматриваемых систем функций, связь размерности Хаусдорфа множества $E \subset [0, 2\pi)$, $|E| = 0$, с длиной промежутка значений r ($r \geqslant 1$) такого, что E – U_r-множество для тригонометрической системы, аналог теоремы Валле–Пуссена для системы характеров нуль-мерных абелевых групп и др. Некоторые из известных результатов мы приводим в несколько упрощенной форме, достаточной для последующего применения в нашей работе.

В 2.1 **главы 2** вводится понятие обобщенного формального произведения рядов Уолша и с его помощью в 2.1 и 2.2 основные теоремы теории Райхмана формального произведения тригонометрических рядов распространяются на случай рядов Уолша. Именно, формальным произведением ряда Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$ с коэффициентами, стремящимися к нулю, и ряда Фурье–Уолша функции

$$\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n w_n(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n| < \infty,$$

назовем ряд Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x)$, коэффициенты которого определяются равенством

$$c_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n \oplus p} \gamma_p \,.$$

Для получения двоичного разложения числа $n \oplus p$ нужно коэффициенты двоичных разложений чисел n и p сложить покоординатно по модулю 2.

Условимся говорить, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n w_n(x)$$

быстро сходится к функции $\lambda(x)$ на множестве $E \subset [0,1)$, если он сходится к $\lambda(x)$ на этом множестве и если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma_k$, где $\Gamma_k = \sum\limits_{n=k}^{\infty} |\gamma_n|$.

В 2.1 доказываются некоторые леммы о свойствах обобщенного формального произведения. В частности, доказано, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\gamma_n| < \infty$, то все ряды $c_n = \sum\limits_{p=0}^{\infty} a_{n\oplus p}\gamma_p$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, сходятся абсолютно, и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

В 2.2 **главы 2** доказаны следующие теоремы об обобщенном формальном произведении рядов Уолша.

Теорема 2.2.1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *и ряд* (2.3) *быстро сходится к нулю на интервале* $(a,b) \subset [0,1)$, *причем* $\gamma_0 = \gamma_0(x)$ *— ограниченная на* $[0,1)$ *функция, то подпоследовательность* $Q_{2^M}(x)$ *частичных сумм ряда* (2.4) *сходится к нулю в каждой точке интервала* (a,b).

Теорема 2.2.1′. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *и ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n w_n(x)$ *быстро сходится к нулю* *на интервале* $(a,b)\subset[0,1)$, *то формальное произведение* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x)$ *сходится к нулю в каждой точке интервала* (a,b).

Теорема 2.2.2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *и ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n w_n(x)$ *быстро сходится к функции* $\lambda(x)$ *на* $[0,1)$, *то подпоследовательность частичных сумм* $S_{2^M}(x)$ *ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_n-\lambda(x)a_n)w_n(x)$$

сходится к нулю в каждой точке полуинтервала $[0,1)$.

При исследовании специальных вопросов теории единственности представления функций рядами необходима функция, «локализующая» свойства произвольного ряда на некотором интервале (α,β). Если α и β — двоично-рациональные числа, то для рядов Уолша такой функцией является, например, характеристическая функция полуинтервала $[\alpha,\beta)$.

В 2.3 **главы 2** «локализующая» функция $\lambda(x)$ построена для интервала с произвольными концами α и β. Именно, доказана

Теорема 2.3.1. *Для любого интервала* $(\alpha,\beta)\subset[0,1)$ *и любой последовательности* $p_n\downarrow 0$, $p_n\not\equiv 0$ *существует функция* $\lambda(x)\in L(0,1)$, *отличная от нуля во всех точках* (α,β), *равная нулю во всех точках* $[0,1)\setminus[\alpha,\beta)$ *и такая, что ее коэффициенты Фурье—Уолша*

$$\hat{\lambda}(n)=o(p_n).$$

Из теорем 2.2.2, 2.2.1$'$, 2.3.1 и леммы 2.3.2 выводится

Теорема 2.3.3. *Пусть ядро* B *нуль-ряда Уолша замкнуто. Для любой непустой порции* $\delta(B)$ *можно построить другой нуль-ряд Уолша, для которого его ядро совпадает с* $\delta(B)$, *а его приведенное ядро* N_1 *является множеством всюду плотным в* $\delta(B)$. *Каждая точка* $\delta(B)$ *является точкой конденсации для* N_1.

Глава 3 посвящена классификации U_r-множеств для тригонометрической системы и классификации U_r-множеств для системы функций Уолша.

В 3.1 **главы 3** устанавливается, что любое подмножество E окружности с размерностью Хаусдорфа $\dim E = 0$ является U_r-множеством для всех $r \geqslant 1$. Тем самым следующая теорема Кахана и Салема [11].

Теорема А. (*Ж-П. Кахан, Р. Салем*). *Пусть множество E имеет размерность Хаусдорфа α, $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant r < 2/\alpha$. Тогда не существует тригонометрического нуль-ряда*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

сходящегося к нулю всюду вне E, коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^r < \infty.$$

В 3.2 **главы 3** проведена следующая классификация подмножеств окружности нулевой меры Лебега.

Утверждение 3.2.1. *Совокупность всех замкнутых множеств нулевой меры Лебега можно разбить на три класса:*

а) *U_r-множества для тригонометрической системы для всех $1 \leqslant r < \infty$;*

б) *более «толстые» множества, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r < r_0$ и M_r-множествами для всех $r_0 < r < \infty$, $r_0 \geqslant 2/\dim E$;*

в) *наиболее «толстые» из множеств меры нуль, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r \leqslant 2$ и M_r-множествами для всех $2 < r < \infty$.*

При этом, как доказывается в 3.1 **главы 3**, множества E с $\dim E = 0$ входят в класс а). Пример M-множества с $\dim E = 0$ построил Ивашев–Мусатов [12]. Как следует из наших результатов, это множество тоже входит в класс а). Доказывается непустота и других классов.

Для получения классификации множеств положительной меры мы используем некоторые результаты Кацнельсона [5] и Хиршмана [13] и приходим к следующему утверждению.

Утверждение 3.2.3. *Совокупность всех замкнутых множеств положительной меры Лебега можно разбить на три класса:*

а) U_r*-множества для тригонометрической системы для всех* $1 \leqslant r < 2$ *и* M_r*-множества для всех* $2 \leqslant r < \infty$*;*

б) *более «толстые» множества, являющиеся* U_r*-множествами для всех* $1 \leqslant r < r_0 < 2$ *и* M_r*-множествами для всех* $r_0 < r < \infty$*;*

в) M_r*-множества для всех* $1 \leqslant r < \infty$*.*

В параграфе 3.3 **главы 3** проведена классификация U_r-множеств для системы функций Уолша. При этом важную роль играет доказанная здесь следующая теорема, а также следствие из нее:

Теорема 3.3.2. *Для любого* $r > 2$ *существует множество* $E \subset [0, 1)$, $|E| = 0$*, являющееся* M_r*-множеством для системы Уолша.*

Следствие. Существует множество $E \subset [0, 1)$, $|E| = 0$, являющееся M_r-множеством для системы Уолша для всех $r > 2$.

При доказательстве теоремы 3.3.2 использованы построения, описанные в теореме 1 статьи Г. Геворкяна [14].

В результате мы получаем

Утверждение 3.3.3. *Совокупность всех множеств нулевой меры Лебега* $E \subset [0, 1)$ *можно разбить на два класса:*

а) U_r*-множества для системы Уолша для всех* $1 \leqslant r < \infty$*;*

б) *множества, являющиеся* U_r*-множествами при всех* r*, для которых* $1 \leqslant r < r_0$*,* $2 \leqslant r_0 < \infty$*, и* M_r*-множествами при всех* r*, для которых* $r_0 \leqslant r < \infty$*;*

Заметим, что приведенное выше следствие показывает, что в этой теореме случай $r_0 = 2$ может быть реализован.

Пусть теперь $E \subset [0, 1)$, $|E| > 0$. Используя принцип локализации для рядов Уолша, можно доказать, что множество E является M_r-множеством для всех $2 \leqslant r < \infty$.

С помощью теоремы 5 работы Г. Геворкяна [15] приходим к следующему утверждению.

Утверждение 3.3.5. *Совокупность всех множеств положительной меры $E \subset [0,1)$ можно разбить на три класса:*

а) *U_r-множества для системы Уолша для всех $1 \leqslant r < 2$ и M_r-множества для всех $2 \leqslant r < \infty$;*

б) *множества, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r < r_0$, $1 \leqslant r_0 < 2$ и M_r-множествами для всех $r_0 < r < \infty$;*

в) *M_r-множества для всех $1 \leqslant r < \infty$.*

Глава 4 посвящена вопросу об объединении U_r-множеств.

Теорема 4.1.1. *Объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств, $2 \leqslant r < \infty$, для системы функций Уолша является U_r-множеством для этой системы.*

В доказательстве используется

Лемма 4.1.3. *Пусть B-ядро нуль-ряда Уолша. Тогда существует совершенное множество B, $B \subset P$, любая непустая порция $\delta(P)$ которого содержит непустую порцию $\delta(B)$.*

Группу характеров Γ для группы $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел образует система Виленкина—Джафарли

$$\gamma_n(g) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=0}^{s} \frac{t_k}{p^{k+1}} \sum_{j=0}^{s} x_j p^j\right).$$

Здесь $g \in \mathbb{Z}_p$, $g = (x_0, x_1, \ldots, x_j, \ldots)$, $n = \sum\limits_{k=0}^{s} t_k p^k$, $0 \leqslant t_k \leqslant p-1$.

Теорема 4.2.1. *Объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств, $2 < r < \infty$, для системы Виленкина—Джафарли является U_r-множеством для этой системы.*

Доказательство теоремы 4.2.1 предваряет несколько лемм.

Лемма 4.2.2. *Ядро Дирихле для системы Виленкина–Джафарли удовлетворяет равенству*

$$D_{p^s}(g) = \begin{cases} p^s, & \text{если } g \in G_s, \\ 0, & \text{если } g \in \mathbb{Z}_p \backslash G_s. \end{cases}$$

Лемма 4.2.3. *Пусть $2 \leqslant r < \infty$, измеримое множество $E \subset \mathbb{Z}_p$ и является U_r-множеством для системы характеров группы $\mathbb{Z}_p$. Тогда мера Хаара множества E равна нулю.*

Лемма 4.2.4. *Пусть $\delta(B)$ — непустая порция ядра B нуль-ряда Виленкина–Джафарли, N — приведенное ядро этого нуль-ряда. Существует другой нуль-ряд Виленкина–Джафарли, для которого соответсвенно ядром и приведенным ядром являются порции $\delta(B)$ и $\delta(N)$ ядра и приведенного ядра исходного нуль-ряда.*

Лемма 4.2.5. *Приведенное ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли является несчетным множеством.*

Лемма 4.2.6. *Приведенное ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли является множеством второй категории на себе.*

Лемма 4.2.7. *Пусть B—ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли. Существует замкнутое множество P, $B \subset P$, любая непустая порция $\delta(P)$ которого содержит непустую порцию $\delta(B)$.*

В параграфе 4.3 **главы 4** изучаются некоторые проблемы, связанные с объединением U_r-множеств для тригонометрической системы функций.

Аналоги доказанных в параграфах 4.1 и 4.2 теорем об объединении U_r-множеств для системы Уолша и системы Виленкина–Джафарли мы сможем получить и для тригонометрической системы, но лишь при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты тригонометрического ряда.

Рассмотрению этих условий и посвящен параграф 4.3.

Формальным произведением тригонометрических рядов $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ и

$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$ называется ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n e^{inx},$$

коэффициенты которого определяются равенством

$$K_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \gamma_{n-k}.$$

Сложности с проблемой объединения U_r-множеств для тригонометрической системы связаны с тем, что при доказательстве теоремы 4.1.1 достаточно воспользоваться тем фактом, что коэффициенты формального произведения ряда Уолша и полинома Уолша принадлежат l^p, если коэффициенты исходного ряда из l^p. Аналогичный факт используется и при доказательстве теоремы 4.2.1. Но для тригонометрической системы неясно, вытекает ли из условия $c_n \in l^p$ тот факт, что и $K_n \in l^p$. Однако, некоторые дополнительные предположения о поведении коэффициентов c_n позволяют сделать заключение, что $K_n \in l^p$. (Отметим, что здесь и всюду в дальнейшем мы позволяем себе для упрощения записей при упоминании какой-нибудь последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ писать просто a_n; например, $a_n \in l^p$ будет обозначать $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^p$.)

Мы вводим в рассмотрение вспомогательную последовательность a_n, определяемую соотношением $a_{|n|} = \max\limits_{|k| \geqslant |n|} |c_k|$, и доказываем, что если последовательность $a_n \in l^p$, то и $K_n \in l^p$ (следствие из Утверждение 4.3.1).

Далее мы показываем, что одно лишь условие $c_n \in l^p$ не гарантирует, что $a_n \in l^p$. Рассматривая случай $n \geqslant 0$, при котором $a_n \equiv \max\limits_{k \geqslant n} |c_k|$, мы сначала устанавливаем справедливость следующего утверждения:

Утверждение 4.3.2. *Пусть $c_n \in l^p$, $p \geqslant 2$; $|c_{m_n}|$ — подпоследовательность последовательности $|c_n|$, состоящая из всех таких элементов последней, для которых $|c_{m_n}| > |c_k|$, если $k > m_n$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r^p = |c_{m_1}|^p + \sum_{n=1}^{\infty} (m_n - m_{n-1}) |c_{m_n}|^p.$$

С помощью этого утверждения построен пример последовательности $c_n \in l^p$, $p \geqslant 2$, для которой $a_n \notin l^p$. Однако при этом $K_n \in l^p$. Это следует из Утверждения 4.3.3, которое, при тех же обозначениях, формулируется так:

Утверждение 4.3.3. *Пусть* $p \geqslant 2$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{m_n}|^p < \infty$, $c_k = 0$, *если* $k \neq m_n$. *Тогда* $K_n \in l^p$.

Приведенные выше утверждения показывают, что условие $a_n \in l^p$ является лишь достаточным для $K_n \in l^p$, но не является необходимым.

Далее мы описываем достаточно широкий класс последовательностей $c_n \in l^p$, $p > 1$, для которых и $a_n \in l^p$ (а, значит, и коэффициенты формального произведения $K_n \in l^p$). А именно, доказано следующее условие, являющееся достаточным для принадлежности a_n пространству l^p.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору МГУ Валентину Анатольевичу Скворцову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Основные определения и известные результаты

Приведем сначала определения и основные свойства ортогональных систем, вопросы единственности разложения функций в ряды по которым изучаются в работе.

Систему функций Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ получим в результате всевозможных перемножений между собой функций Радемахера $r_n(x) \equiv r_0(2^n x),\ n = 0, 1, \ldots$ где

$$r_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0; \frac{1}{2}), \\ -1 & \text{при } x \in [\frac{1}{2}; 1) \end{cases}$$

с продолжением с периодом 1 на всю числовую ось. Положим $w_0(x) \equiv 1$. Для определения $w_n(x)$ при $n \geqslant 1$ представим натуральное число n в виде

$$n = \sum_{j=i}^{k} t_j 2^j,$$

где $t_k = 1$ а при $j = 0, 1, \ldots, k-1$ $t_j = 0$ или 1; $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Положим

$$w_n(x) = \prod_{j=0}^{k} (r_j(x))^{t_j}. \tag{1.1}$$

Функции Уолша $w_n(x)$ обычно рассматривается лишь на полуинтервале $[0, 1)$.

Полезно упомянуть и другой вариант определения функции Уолша, связанный с иным подходом к области определения этих функций, когда функции определяются на группе, и тем самым теория рядов Уолша становится частью общей теории рядов по системе характеров компактных групп..

Определение. Пусть G — компактная коммутативная группа. *Характером* группы G называют непрерывную функцию χ, заданную на G, $|\chi(g)| = 1$, и удовлетворяющую равенству

$$\chi(g_1 \dot{+} g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2). \tag{1.2}$$

Рассмотрим конкретные группы, разложения по характерам которых будут рассмотрены в нашей работе.

Пусть G — множество последовательностей из нулей и единиц:

$$G = \{g = \{x_j\}_{j=0}^{\infty}\}, \quad x_j = 0 \text{ или } 1. \tag{1.3}$$

Это множество превращается в коммутативную группу, если в нем следующим образом определить алгебраическую операцию, которую условимся называть сложением и обозначать символом $\oplus$: суммой двух последовательностей $a = \{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ и $b = \{b_j\}_{j=0}^{\infty}$ называется последовательность $c = \{c_j\}_{j=0}^{\infty}$ такая, что

$$c = a \oplus b = \{a_j \oplus b_j\}_{j=0}^{\infty},$$

$$a_j \oplus b_j = \begin{cases} 0 & \text{при } a_j + b_j = 0 \text{ или } 2, \\ 1 & \text{при } a_j + b_j = 1, \end{cases}$$

т. е. операция $\oplus$ представляет собой покоординатное сложение двух последовательностей по модулю 2. Операцию $\oplus$ можно также определить для натуральных чисел: для получения двоичного разложения числа $n \oplus p$ нужно коэффициенты двоичных разложений чисел n и p сложить покоординатно по модулю 2.

Эту группу называют двоичной группой Кантора. Топология определяется подгруппами

$$G_n = \{g \in G \colon x_j = 0 \text{ для } j = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Систему функций Уолша $\{w_n^*(g)\}_{n=0}^{\infty}$ получим в результате всевозможных перемножений функций Радемахера, определяемых на группе соотношением $r_j^*(g) = (-1)^{x_j}$. Положим

$$w_n^*(g) = \prod_{j=0}^{k} (r_j^*(g))^{t_j},$$

где
$$n=\sum_{j=0}^{k} t_j 2^j,\ t_k=1,\ t_j=0 \text{ или } 1 \text{ при } j=0,1,\ldots,k-1.$$

При этом связь между определением функций Уолша на интервале и на группе описывается соотношением $w_n(x)=w_n^*(g(x))$, $g(x)=\{x_0,x_1,\ldots,x_j,\ldots\}$, где $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ — последовательность знаков двоичного разложения числа $x\in[0,1)$, конечная в случае двоично-рационального x.

Для получения двоичного разложения числа $n\oplus m$ нужно коэффициенты двоичных разложений чисел n и m сложить покоординатно по модулю 2. Справедливо равенство.

$$w_n^*(g)w_m^*(g)=w_{n\oplus m}^*(g). \tag{1.4}$$

Важнейшим равенством в теории рядов Уолша является следующее равенство:

$$w_n^*(g_1\oplus g_2)=w_n^*(g_1)w_n^*(g_2). \tag{1.5}$$

Равенство (1.5) означает, что система функций Уолша $\{w_n^*(g)\}_{n=0}^{\infty}$ является системой характеров двоичной группы Кантора.

Тригонометрическую систему функций также можно рассматривать как систему характеров. Рассмотрим множество $\mathbf{T}$ всех комплексных чисел, модуль которых равен единице. Элементы этого множества удобно представить в виде

$$z=e^{ix},\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

Определим операцию сложения на $\mathbf{T}$:

$$z_1\oplus z_2=e^{ix_1}\oplus e^{ix_2}\equiv e^{i(x_1+x_2)\bmod 2\pi}.$$

Множество $\mathbf{T}$ превращается в коммутативную группу. Система характеров группы $\mathbf{T}$ есть классическая тригонометрическая система функций $\{e^{inx}\}$, $n\in Z$ на отрезке $[0,2\pi]$.

Группу характеров Γ для группы $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел (p-простое число) образует так называемая система Виленкина–Джафарли. Элементами группы $\mathbb{Z}_p$ являются последовательности

$$g = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots),$$

где x_n может принимать значения $0, 1, \dots, p-1$. Топология в множестве таких последовательностей определяется следующим образом: k-я окрестность элемента $a = (a_0, \dots, a_n, \dots)$ состоит из всех элементов $x = (x_0, \dots, x_n, \dots)$, для которых $x_j = a_j$ при $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Ясно, что $a = \lim\limits_{k\to\infty} a^{(k)}$, где $a = (a_0, \dots, a_n, \dots)$, $a^{(k)} = (a_0, \dots, a_k, 0, \dots)$. Следовательно, финитные последовательности образуют в $\mathbb{Z}_p$ всюду плотное множество.

Для определения операции сложения рассмотрим сначала финитные последовательности. Для них операция сложения в $\mathbb{Z}_p$ определяется так. Сопоставим элементам $a = (a_0, a_1, \dots, a_l, 0, \dots)$, $b = (b_0, b_1, \dots, b_m, 0, \dots)$ целые числа $\hat{a} = a_0 + a_1 p + \dots + a_l p^l$, $\hat{b} = b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m$. Пусть $\hat{a} + \hat{b} = c_0 + c_1 p + \dots + c_s p^s$, $c_j = 0, 1, \dots, p-1$, $0 \leqslant j \leqslant s$. Положим по определению

$$a \oplus b = c = (c_0, c_1, \dots, c_s, 0, \dots).$$

Если же $a = (a_0, \dots, a_n, \dots)$, $b = (b_0, \dots, b_n)$, $a^{(k)}, b^{(k)}$ — последовательности финитных элементов — «срезок» элементов a и b соответственно, то будем считать

$$a \oplus b \equiv \lim_{k\to\infty} (a^{(k)} + b^{(k)}),$$

где предел понимается в смысле сходимости во введенной топологии.

Легко видеть, что эту топологию можно задать подгруппами

$$G_n = \{g \in \mathbb{Z}_p, x_j = 0 \text{ для } j = 0, 1, \dots, n-1\},$$
$$\mathbb{Z}_p = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_n \supset \dots.$$

Как и двоичная канторова группа, множество $G = \mathbb{Z}_p$ с введенной топологией и операцией сложения является компактной коммутативной нуль-мерной топологической группой, так как топология в ней задается с помощью системы подгрупп.

Смежные классы группы G по подгруппе G_n будем обозначать K_j^n, $j = 0, 1, \dots, p^n - 1$.

Если $n=\sum\limits_{k=0}^{s} t_k p^k$, $0\leqslant t_k\leqslant p-1$, то

$$\gamma_n(g)=\exp\left(2\pi i\sum_{k=0}^{s}\frac{t_k}{p^{k+1}}\sum_{j=0}^{s}x_j p^j\right)$$

— система Виленкина–Джафарли.

Формальное произведение ряда Уолша

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x) \tag{1.6}$$

и полинома по системе Уолша

$$P(x)=\sum_{n=0}^{H} b_n w_n(x) \tag{1.7}$$

([2],[3]) определяется рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x), \tag{1.8}$$

где

$$c_n=\sum_{p=0}^{H} a_{n\oplus p} b_p \tag{1.9}$$

(для получения двоичного разложения числа $n\oplus p$ нужно коэффициенты двоичных разложений чисел n и p сложить покоординантно по модулю 2).

Справедлива теорема о формальном произведении рядов Уолша:

Теорема 1.1. ([3], [2, теорема 3.3.1]). *Пусть коэффициенты ряда* (1.6) *удовлетворяют условию*

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0, \tag{1.10}$$

а коэффициенты ряда (1.8) *получены по формуле* (1.9). *Тогда ряды* (1.8) *и*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n w_n(x)P(x))=P(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$$

являются равномерно равносходящимися на $[0,1)$*, т. е. их разность равномерно сходится к нулю.*

Нам также понадобится теорема локализации для рядов Уолша:

Теорема 1.2. ([3], [2, теорема 3.3.2]. *Для всякого ряда* (1.6), *коэффициенты которого удовлетворяют условию* (1.10), *и полуинтервала* $[\alpha, \beta)$ *с двоично-рациональными концами существует ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^* w_n(x)$, *у которого* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^* = 0$, *равномерно равносходящийся с рядом* (1.6) *на* $[\alpha, \beta)$ *и равномерно сходящийся к нулю вне* $[\alpha, \beta)$.

В Главе 2 используем следующую теорему единственности, доказанную В.А. Скворцовым:

Теорема 1.3. ([16], [2, теорема 3.3.3]). *Пусть некоторая подпоследовательность* $\{S_{2^{k_i}}(x)\}$ *частных сумм ряда* (1.6), *удовлетворяющего условию* (1.10), *сходится к нулю на некотором интервале* $(a, b) \subset [0, 1)$. *Тогда на этом интервале* (a, b) *ряд* (1.6) *сходится к нулю, причем сходимость равномерна на всяком полуинтервале* $[\alpha, \beta)$ *с двоично-рациональными концами, содержащемся в* (a, b).

Отметим, что эта теорема верна и при более общих условиях; именно справедлива.

Теорема 1.3′. *Пусть подпоследовательность* $\{S_{2^{k_i}}(x)\}$ *частных сумм ряда* (1.6), *удовлетворяющего условию* (1.10), *сходится почти всюду на интервале* (a, b) *и ограничена в каждой точке* (a, b), *кроме точек некоторого счетного множества. Тогда на этом интервале* (a, b) *ряд* (1.6) *сходится к нулю.*

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 1.3 с использованием Теоремы 3.2.5 из [2], которая содержит в своей формулировке исключительное счетное множество.

Аналогичные теоремы справедливы для рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n$ по системе Γ характеров произвольной группы G из класса нуль-мерных групп..

Пусть $k(l, n)$ — индекс, определяемый равенством $\gamma_l \gamma_n^{-1} = \gamma_{k(l,n)}$. Формальным произведением ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n$ и полинома $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{H} b_n \gamma_n$ будем называть ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l \gamma_l$, где $c_l = \sum\limits_{n=0}^{H} b_n a_{k(l,n)}$.

Справедливы

Теорема 1.4. (Скворцов [6], теорема 3.1). *Пусть ряд*

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l \gamma_l \tag{1.11}$$

получен как формальное произведение ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{1.12}$$

и полинома $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{H} b_n \gamma_n$. *Тогда ряды* (1.11) *и* $\lambda \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n$ *являются равномерно равносходящимися на* G.

Теорема 1.5. (теорема локализации, [6], теорема 3.2). *Для ряда* (1.12) *и для любого смежного класса* K^n *существует ряд* $\sum_{l=0}^{\infty} c_l \gamma_l$ *с* $\lim\limits_{l\to\infty} c_l = 0$, *который равномерно равносходится с* (1.12) *на* K^n *и равномерно сходится к нулю вне* K^n.

Пусть $\{G_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [a;b)$ — ортонормированная система функций. Ряд по этой системе, который сходится к нулю почти всюду на $[a, b)$, но не всюду, называют нуль-рядом.

Множество точек, где нуль-ряд не сходится к нулю, будем называть ядром нуль-ряда.

Множество точек, где $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |S_n(x)| = +\infty$, будем называть приведенным ядром нуль-ряда.

При изучении в Главе 2 свойств нуль-рядов по системе Уолша с помощью введенного в этой главе обобщенного формального произведения рядов Уолша используем следующие теоремы единственности.

Теорема 1.6. (Арутюнян, Талалян [17]). *Если у ряда Уолша с коэффициентами, стремящимися к нулю, подпоследовательность частных сумм* $S_{2^{n_k}}(x)$ *сходится к конечной функции* $f(x) \in L(0;1)$ *всюду, кроме, быть может, счетного множества точек, то этот ряд является рядом Фурье–Уолша функции* $f(x)$.

Теорема 1.6′. (Скворцов В.А. [2], теорема 3.2.5). *Пусть для частных сумм ряда Уолша с коэффициентами, стремящимися к нулю, при всех* $x \in [0, 1)$, *кроме, быть может, точек некоторого счетного множества, выполняется неравенство*

$$\varliminf_{k\to\infty} S_{2^k}(x) \leqslant f(x) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} S_{2^k}(x),$$

где $f(x)$ — всюду конечная интегрируемая по Лебегу на $[0,1)$ фунуция. Тогда данный ряд является рядом Фурье–Уолша функции $f(x)$.

Нам также понадобится некоторый аналог теоремы Валле–Пуссена , доказанный в работе (Скворцов, Тулоне [7] теорема 4.2).

Теорема 1.7. *Пусть частичные суммы $S_{p^n} = \sum\limits_{k=0}^{p^n-1} a_k\gamma_k$ ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\gamma_k$ почти всюду на G сходятся к суммируемой функции f и выполнены условия*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0,\ \varlimsup_{n\to\infty} |S_{p^n}(g)| < +\infty$$

всюду, кроме счетного множества. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\gamma_k$ является рядом Фурье функции f по системе Γ.

В Главе 3 для классификации U_p-множеств для тригонометрической системы используем понятие хаусдорфовой размерности множества.

Пусть E — подмножество окружности и $0 < \alpha \leqslant 1$. Мера Хаусдорфа $H_\alpha(E)$ размерности α множества E определяется следующим образом.

Для каждого $\delta > 0$ рассмотрим точную нижнюю грань $H_\alpha^\delta(E)$ сумм $\sum |Y_j|^\alpha$ по всем семействам интервалов Y_j таким, что $\sup |Y_j| \leqslant \delta$ и $E \subset \cup Y_j$.

$H_\alpha^\delta(E)$ — невозрастающая функция δ со значениями в $[0,\infty]$. Положим $H_\alpha(E) \equiv \lim\limits_{\delta\to 0} H_\alpha^\delta(E)$. Хаусдорфова размерность $\dim E$ множества E есть точная нижняя грань таких α, что $H_\alpha(E) = 0$, (совпадающая с точной верхней гранью таких α, что $H_\alpha(E) = \infty$.

Теорема 1.8. (Кахан, Салем [11]). *Пусть множество E имеет размерность Хаусдорфа α, $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant p < \frac{2}{\alpha}$. Тогда не существует тригонометрического нуль-ряда*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

сходящегося к нулю всюду вне E, коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^p < \infty.$$

Результаты используемые для классификации U_p — множеств для системы Уолша, приводятся в самой Главе 3.

В [6] (теорема 3.4) В.А. Скворцовым доказана следующая теорема, которая в случае системы Виленкина-Джафарли может быть сформулирована так:

Теорема 1.9. *Если для ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\gamma_n$*,* $a_n \to 0$ *некоторая подпоследовательность частичных сумм* $S_{p^{n_k}}(g)$ *сходится к нулю для всех* g *из некоторого открытого множества* O *группы* $\mathbb{Z}_p$*, то этот ряд сходится к нулю на* O*.*

Теорему 1.9 используем в Главе 4.

Глава 2

Обобщенное формальное произведение рядов Уолша и его применение

2.1. Определение обобщенного формального произведения рядов Уолша и его свойства

Изучая единственность разложений по системе функций Уолша, А. Шнейдер ввел понятие формального произведения ряда Уолша и полинома по системе Уолша (см. стр. 21 **Главы 1**). В последующих работах, посвященных единственности представления функции рядами Уолша, использовалось именно это определение формального произведения.

Здесь мы введем и изучим более общее определение формального произведения для рядов Уолша, аналогичное определению Райхмана формального произведения для тригонометрических рядов, где вместо полинома используется ряд Фурье с коэффициентами, образующими абсолютно сходящийся ряд.

Определение. Пусть коэффициенты ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x) \tag{2.1}$$

удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n w_n(x) \equiv \lambda(x) \tag{2.3}$$

— ряд Фурье–Уолша функции $\lambda(x)$, причем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\gamma_n| < \infty$. Обобщенным формальным произведением (ОФП) ряда (2.1) и ряда (2.3) назовем ряд Уолша

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x), \tag{2.4}$$

коэффициенты которого определяются равенством

$$c_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n\oplus p}\gamma_p, \tag{2.5}$$

где сумма $n \oplus p$ определена в Главе 1.

Если $\lambda(x)$ — полином Уолша, то определение ОФП совпадает с определением ФП Шнейдера.

Условимся говорить, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n w_n(x)$ быстро сходится к функции $\lambda(x)$ на множестве $E \subset [0,1)$ если он сходится к $\lambda(x)$ на этом множестве и если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma_k$, где $\Gamma_k = \sum\limits_{n=k}^{\infty} |\gamma_n|$.

Из условия $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\gamma_n| < \infty$ вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n w_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[0,1)$ и является рядом Фурье–Уолша некоторой фунции $\lambda(x)$.

При изучении свойств ОФП нам понадобится следующее утверждение

Лемма 2.1.1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то и*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{p=0,1,\ldots,[\frac{n}{2}]} |a_{n\oplus p}| = 0. \tag{2.6}$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(n) \equiv \max\limits_{p=0,1,\ldots,[\frac{n}{2}]} |a_{n\oplus p}|$.

Докажем сначала, что если $\varphi(n) = |a_m|$, и $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, $k \geqslant 1$, то и

$$2^k \leqslant m < 2^{k+1}. \tag{2.7}$$

Изучаемые индексы имеют вид:

$$m(k;\Delta,p) = (2^k + \Delta) \oplus p,$$

где $\Delta = 0,1,2,\ldots,2^k-1$, а $p = 0,1,\ldots,\left[\frac{2^k+\Delta}{2}\right]$. Так как $0 \leqslant \Delta \leqslant 2^k - 1$, то $2^k \oplus \Delta = 2^k + \Delta$. Поэтому

$$(2^k + \Delta) \oplus p = (2^k \oplus \Delta) \oplus p = 2^k \oplus (\Delta \oplus p). \tag{2.8}$$

Но и $0 \leqslant p \leqslant 2^k - 1$, откуда следует, что

$$0 \leqslant \Delta \oplus p \leqslant 2^k - 1.$$

Поэтому

$$2^k \oplus (\Delta \oplus p) = 2^k + (\Delta \oplus p). \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) вытекает, что

$$2^k \leqslant m \leqslant 2^{k+1} - 1 < 2^{k+1}.$$

Неравенство (2.7) доказано.

Таким образом, $\varphi(n) = |a_{m_n}|$, и последовательность m_n возрастает к ∞ вместе с n.

Тем самым, члены последовательности $\varphi(n) = |a_{m_n}|$ совпадают по модулю с членами некоторой подпоследовательности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящейся к нулю и, значит, тоже сходятся к нулю

Лемма 2.1.1 доказана.

Лемма 2.1.2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\gamma_n|$ *сходится. Тогда все ряды* (2.5) *сходятся абсолютно, и*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Доказательство. Так как последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится, то существует постоянная $A > 0$ такая, что $|a_n| \leqslant A$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Сравнивая ряды $\sum\limits_{p=0}^{\infty} |a_{n\oplus p}||\gamma_p|$ с рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A|\gamma_n|$, видим, что они сходятся.

Кроме того,

$$|c_n| \leqslant \sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} |a_{n\oplus p}||\gamma_p| + \sum_{p=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} |a_{n\oplus p}||\gamma_p| \leqslant \varphi(n) \sum_{p=0}^{\infty} |\gamma_p| + A \sum_{p=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} |\gamma_p|,$$

где

$$\varphi(n) = \max_{p=0,1,\ldots,[\frac{n}{2}]} |a_{n\oplus p}|.$$

Обозначив $\sum\limits_{p=0}^{\infty} |\gamma_p| \equiv B$, $\sum\limits_{p=[\frac{n}{2}]+1}^{\infty} |\gamma_p| \equiv r(n)$, получаем оценку коэффициентов c_n формального произведения:

$$|c_n| \leqslant Ar(n) + B\varphi(n),$$

где $r(n) \to 0$ при $n \to \infty$ как остаток сходящегося ряда, а $\varphi(n) \to 0$ при $n \to \infty$ в силу леммы 2.1.1.

Лемма 2.1.2 доказана.

Докажем еще одно свойство ОФП.

Лемма 2.1.3. *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$ — *ряд Фурье–Уолша функции* $f(x)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n w_n(x) \equiv \lambda(x)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\gamma_n| < \infty$. *Тогда ОФП этих рядов есть ряд Фурье–Уолша функции* $f(x)\lambda(x)$.

Доказательство. Пусть $S_m(x) = \sum\limits_{p=0}^{m} \gamma_p w_p(x)$ — частичная сумма ряда (2.3). Оценим при фиксированном n разность

$$\Delta_{m,n}(x) = \int_0^1 f(x)S_m(x)w_n(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\lambda(x)w_n(x)\,dx.$$

В силу равномерной сходимости ряда (2.3) для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$|S_m(x) - \lambda(x)| < \frac{\varepsilon}{\int_0^1 |f(x)|dx}$$

для всех $m > N$, всех $x \in [0, 1)$.

Значит

$$|\Delta_{m,n}| \leqslant \int_0^1 |f(x)||S_m(x) - \lambda(x)|\,dx < \varepsilon$$

для всех $m > N$, всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Итак,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 f(x)S_m(x)w_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\lambda(x)w_n(x)\,dx$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Но

$$\int\limits_0^1 f(x)w_n(x)\sum_{p=0}^{m} \gamma_p w_p(x)\,dx = \sum_{p=0}^{m} \gamma_p \int\limits_0^1 f(x)w_n(x)w_p(x)\,dx =$$

$$= \sum_{p=0}^{m} \gamma_p \int\limits_0^1 f(x)w_{n\oplus p}(x)\,dx = \sum_{p=0}^{m} a_{n\oplus p}\gamma_p.$$

Тем самым, $\sum\limits_{p=0}^{\infty} a_{n\oplus p}\gamma_p = \widehat{f\lambda}(n)$, т. е. коэффициенты ОФП рядов (2.1) и (2.3) в условиях леммы удовлетворяют равенству $c_n = \widehat{f\lambda}(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Лемма 2.1.3 доказана.

2.2. Распространение основных теорем теории формального произведения тригонометрических рядов Райхмана на случай рядов Уолша

Формальное произведение тригонометрических рядов ввел и изучил А. Райхман ([1], [18]). В этом параграфе мы доказываем аналоги основных теорем теории Райхмана для обобщенного формального поизведения (ОФП) рядов Уолша.

Теорема 2.2.1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, и ряд* (2.3) *быстро сходится к нулю на интервале* $(a, b) \subset [0, 1)$*, причем* $\gamma_0 = \gamma_0(x)$ *— ограниченная на* $[0, 1)$ *функция, то подпоследовательность* $Q_{2^M}(x)$ *частичных сумм ряда* (2.4) *сходится к нулю в каждой точке интервала* (a, b).

Доказательство. Обозначим $\{Q_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ последовательность частичных сумм ряда (2.4).

$$Q_m(x) \equiv \sum_{n=0}^{m-1} c_n w_n(x) = \sum_{n=0}^{m-1}\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\gamma_{n\oplus p}\right) w_{n\oplus p}(x)w_p(x) =$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty} a_p w_p(x) \sum_{n=0}^{m-1} \gamma_{n\oplus p} w_{n\oplus p}(x);$$

$|a_p| \leqslant A$ для всех $p = 1, 2, \ldots$

Надо доказать, что $\lim Q_{2^M}(x) = 0$ в каждой точке интервала (a, b). Разобъем сумму

$$Q_{2^M}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p w_p(x) \sum_{n=0}^{2^M-1} \gamma_{n\oplus p} w_{n\oplus p}(x)$$

на две

$$\Sigma_1(M,x) = \sum_{p=0}^{2^M-1} a_p w_p(x) \sum_{n=0}^{2^M-1} \gamma_{n\oplus p} w_{n\oplus p}(x)$$

и

$$\Sigma_2(M,x) = \sum_{p=2^M}^{\infty} a_p w_p(x) \sum_{n=0}^{2^M-1} \gamma_{n\oplus p} w_{n\oplus p}(x).$$

Отображение $n \to n \oplus p$ при фиксированном $0 \leqslant p < 2^M$ осуществляет перестановку множества $\{n\colon 0 \leqslant n \leqslant 2^M - 1\}$, т. е. взаимно однозначное отображение этого множества на себя. Это следует из определения операции $\oplus$ (для получения двоичного разложения числа $n \oplus p$ нужно коэффициенты двоичных разложений чисел n и p сложить покоординатно по модулю 2). Поэтому

$$\sum_{n=0}^{2^M-1} \gamma_{n\oplus p} w_{n\oplus p}(x) = \sum_{n=0}^{2^M-1} \gamma_n w_n(x).$$

Значит, внутренняя сумма в $\sum_1$ может быть записана как

$$\lambda(x) - \sum_{n=2^M}^{\infty} \gamma_n w_n(x) = -\sum_{n=2^M}^{\infty} \gamma_n w_n(x),\ \ x \in (a,b).$$

Тогда

$$\Big|\sum\nolimits_1(M,x)\Big| = \Big|\sum_{p=0}^{2^M-1} a_p w_p(x) \sum_{n=2^M}^{\infty} \gamma_n w_n(x)\Big| \leqslant \sum_{p=0}^{2^M-1} |a_p| \sum_{n=2^M}^{\infty} |\gamma_n| \leqslant A 2^M \Gamma_{2^M}. \tag{2.10}$$

Так как последовательность Γ_M невозрастающая и по условию теоремы ряд $\sum\limits_{M=0}^{\infty} \Gamma_M$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{M=0}^{\infty} 2^M \Gamma_{2^M}$.

Итак, из оценки (2.10) вытекает, что

$$\lim_{M\to\infty} \sum\nolimits_1(M,x) = 0$$

равномерно на (a,b).

Оценим теперь $\sum_2$:

$$\begin{aligned} \Big|\sum\nolimits_2(M,x)\Big| &\leqslant A \sum_{p=2^M}^{\infty} \Big|\sum_{n=0}^{2^M-1} \gamma_{n\oplus p}\ w_{n\oplus p}(x)\Big| = \\ &= A \sum_{k=M}^{\infty} \sum_{p=2^k}^{2^{k+1}-1} \Big|\sum_{n=0}^{2^M-1} \gamma_{n\oplus p}\ w_{n\oplus p}\Big| \leqslant A \sum_{k=M}^{\infty} \sum_{p=2^k}^{2^{k+1}-1} \sum_{n=0}^{2^M-1} |\gamma_{n\oplus p}|, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $p \geqslant 2^k$, $n < 2^M \leqslant 2^k$ при каждом фиксированном $k = M,\ M+1, \ldots$, а значит, и $n \oplus p \geqslant 2^k$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{2^M-1} |\gamma_{n\oplus p}| \leqslant \sum_{j=2^k}^{\infty} |\gamma_j| \equiv \Gamma_{2^k}. \tag{2.12}$$

Из неравенств (2.11) и (2.12) вытекает, что

$$|\sum\nolimits_2(M,x)| \leqslant A \sum_{k=M}^{\infty} 2^k \Gamma_{2^k}. \tag{2.13}$$

Но $\lim\limits_{M\to\infty} \sum\limits_{k=M}^{\infty} 2^k \Gamma_{2^k} = 0$ как предел последовательности остатков сходящегося ряда.

Итак, из оценки (2.13) следует, что и

$$\lim_{M\to\infty} \sum\nolimits_2(M,x) = 0$$

равномерно на (a,b).

Теорема 2.2.1 доказана.

Следующая теорема представляет собой усиление Теоремы 2.2.1, когда все коэффициенты γ_n ряда (2.3) постоянны.

Теорема 2.2.1$'$. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, и ряд* (2.3) *быстро сходится к нулю на интервале $(a,b) \subset [0,1)$, то обобщенное формальное произведение* (2.4) *сходится к нулю в каждой точке интервала (a,b).*

Доказательство. Согласно теореме 2.2.1 для любого $x \in (a,b)$

$$\lim_{M\to\infty} Q_{2^M}(x) = 0. \tag{2.14}$$

Но так как все коэффициенты γ_n $(n = 0, 1, \ldots)$ ряда (2.3) постоянны, можно применить теорему 1.3 из Главы 1, согласно которой из (2.14) следует что и $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(x) = 0$ для любого $x \in (a,b)$.

Теорема 2.2.1$'$ доказана.

Замечание. Теорема 2.2.1$'$ остается верной, если в ее формулировке рассматривать вместо интервала $(a,b) \subset [0,1)$ полуинтервал $[a,b) \subset [0,1)$ при условии, что a — двоично-рациональное число. Это вытекает из того, что использованная в доказательстве теорема 1.3 из Главы 1 остается верной при такой замене.

Теорема 2.2.2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *а ряд* (2.3) *быстро сходится к функции* $\lambda(x)$ *на* $[0,1)$, *то подпоследовательность* $S_{2^M}(x)$ *частичных сумм ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_n - \lambda(x)a_n)w_n(x),$$

где c_n *— коэффициенты ОФП, сходится к нулю в каждой точке* $[0,1)$.

Доказательство. Положим $\gamma_0^* = \gamma_0 - \lambda(x)$, $\gamma_n^* = \gamma_n$ при $n = 1, 2, \ldots$ и рассмотрим формальное произведение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^* w_n(x)$ рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n^* w_n(x)$. В силу условия $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\gamma_n| < \infty$ $\gamma_0^* = \gamma_0^*(x)$ — ограниченная на $[0,1)$ функция аргумента x.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^* w_n(x) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n w_n(x) - \lambda(x)$$

быстро сходится к нулю на $[0,1)$. Поэтому в силу теоремы 2.2.1 подпоследовательность $Q_{2^M}(x)$ частичных сумм ОФП $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^* w_n(x)$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$ и ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n^* w_n(x)$ сходится к нулю в каждой точке $[0,1)$. При этом

$$\begin{aligned} c_n^* &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n\oplus p}\gamma_p^* = a_n\gamma_0^* + \sum_{p\neq 0} a_{n\oplus p}\gamma_p^* = a_n(\gamma_0 - \lambda(x)) + \sum_{p\neq 0} a_{n\oplus p}\gamma_p = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} a_{n\oplus p}\gamma_p - a_n\lambda(x) = c_n - a_n\lambda(x). \end{aligned}$$

Таким образом, ряд в формулировке теоремы совпадает с формальным произведением. Теорема 2.2.2 доказана.

2.3. Построение «локализующей» функции и ее применение к исследованию нуль-рядов Уолша

При исследовании ряда вопросов теории единственности представления функций рядами необходима функция, «локализующая» свойства произвольного ряда на некотором интервале (α, β). Если α и β — двоично-рациональные числа, то для рядов Уолша такой функцией является, например, характеристическая функция полуинтервала $[\alpha, \beta)$. В этом параграфе «локализующая» функция $\lambda(x)$ построена для интервала с произвольными концами α и β.

Построение такой функции содержится в следующей теореме:

Теорема 2.3.1. *Для любого интервала* $(\alpha, \beta) \subset [0, 1)$ *и любой последовательности* $p_n \downarrow 0$, $p_n \not\equiv 0$ *существует функция* $\lambda(x) \in L(0, 1)$, *отличная от нуля во всех точках* (α, β), *равная нулю во всех точках* $[0, 1)\backslash[\alpha, \beta)$ *и такая, что ее коэффициенты Фурье–Уолша*

$$\widehat{\lambda}(n) = o\ (p_n).$$

Ниже будет также доказана

Лемма 2.3.2. *Пусть* B*-ядро нуль-ряда Уолша,* $\delta \subset [0, 1)$ *— произвольный интервал. Тогда множество* E *всех точек из непустой порции* $\delta(B)$, *определяемой интервалом* δ, *в каждой из которых подпоследовательность* $S_{2^M}(x)$ *частичных сумм этого нуль-ряда неограничена, является несчетным.*

Затем с помощью теорем 2.3.1, 2.2.1$'$ и леммы 2.3.2 получим следующую основную теорему этого параграфа — аналог соответствующей теоремы Н.К. Бари для тригонометрических нуль-рядов ([1], с. 794), которую Н.К. Бари использовала для доказательства теоремы об объединении счетного множества замкнутых U-множеств для тригонометрической системы.

Теорема 2.3.3. *Пусть ядро* B *нуль-ряда Уолша замкнуто. Для любой непустой порции* $\delta(B)$ *можно построить другой нуль-ряд Уолша, для которого его ядро совпадает с* $\delta(B)$, *а его приведенное ядро* N_1 *является множеством всюду плотным в* $\delta(B)$. *Каждая точка* $\delta(B)$ *является точкой конденсации для* N_1.

Доказательство теоремы 2.3.1. Пусть δ_1 — наибольший двоичный интервал, содержащийся в $[\alpha, \beta)$; n_1 — ранг* интервала δ_1. Положим

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} w_{2^{n_1}}(x), & x \in \delta_1; \\ 0, & x \in [0,1)\backslash\delta_1. \end{cases}$$

Пусть $\delta_2^{(1)}$ и $\delta_2^{(2)}$ — наибольшие двоичные интервалы ранга $n_2^{(1)}$ и $n_2^{(2)}$ соответственно, содержащиеся в примыкающих к δ_1 промежутках, дополняющих δ_1 до заданного полуинтервала $[\alpha, \beta)$, $n_2 = \max\{n_2^{(1)}, n_2^{(2)}\}$, $\delta_2 \equiv \delta_2^{(1)} \cup \delta_2^{(2)}$. Положим

$$\lambda_2(x) = \begin{cases} w_{2^{n_2}}(x), & x \in \delta_2; \\ 0, & x \in [0,1)\backslash\delta_2. \end{cases}$$

Этот процесс продолжаем неограниченно: для любого $k > 2$ $\delta_k = \delta_k^{(1)} \cup \delta_k^{(2)}$, $\delta_k^{(1)}$ и $\delta_k^{(2)}$ — наибольшие двоичные интервалы, примыкающие к δ_{k-1} слева и справа ранга $n_k^{(1)}$ и $n_k^{(2)}$ соответственно, $n_k = \max\{n_k^{(1)}, n_k^{(2)}\}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \delta_i \subset [\alpha, \beta)$. Положим

$$\lambda_k(x) = \begin{cases} w_{2^{n_k}}(x) & x \in \delta_k; \\ 0 & x \in [0,1)\backslash\delta_k. \end{cases}$$

Так как функция $\lambda_k(x) (k = 1, 2, \ldots)$ постоянна на каждом интервале ранга $n_k + 1$, то $\lambda_k(x)$ есть полином Уолша степени не выше $2^{n_k+1} - 1$ (см. [2], утверждение 1.3.2). Кроме того, так как каждая из функций

$$w_0(x), w_1(x), \ldots, w_{2^{n_k}-1}(x)$$

постоянна на каждом интервале ранга n_k, то функция $\lambda_k(x)$ ортогональна к $w_0(x)$, $w_1(x), \ldots$, $w_{2^{n_k}-1}(x)$. Итак,

$$\lambda_k(x) = \sum_{n=2^{n_k}}^{2^{n_k+1}-1} \hat{\lambda}_k(n) w_n(x).$$

Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — бесконечно малая последовательность положительных чисел. Положим

$$\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda_k(x), \tag{2.15}$$

* Интервалы вида $\left(\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right)$ называются интервалами ранга k.

где коэффициенты α_k, $\alpha_k > 0$ подчиняем условию

$$\alpha_k \max_{n=2^{n_k},2^{n_k}+1,\ldots,2^{n_k+1}-1} |\hat{\lambda}_k(n)| \leqslant \varepsilon_k p_{2^{n_k+1}-1}. \tag{2.16}$$

Ряд (2.15) сходится в любой точке $x_0 \in [0,1)$, так как $x_0 \in \delta_k = \delta_k(x_0)$ при единственном k, и ряд (2.15) сводится к слагаемому $\alpha_k\lambda_k(x_0)$; это слагаемое можно представить в виде конечной суммы функций Уолша:

$$\alpha_k\lambda_k(x_0) = \sum_{i=2^{n_k}}^{2^{n_k+1}-1} \alpha_k\widehat{\lambda}_k(i)w_i(x_0).$$

Функция $\lambda(x) \in L(0,1)$ и конечна всюду на $[0,1)$.

Запишем ряд (2.15) в развернутой форме как некоторый ряд Уолша. Согласно условию (2.16) коэффициенты этого ряда стремятся к нулю. Обозначим через $S_n(x)$ последовательность частичных сумм этого ряда Уолша, через $\sigma_n(x)$ — последовательность частичных сумм ряда (2.15). Ясно, что

$$S_{2^{n_k+1}}(x) = \sigma_k(x) \forall x \in [0,1). \tag{2.17}$$

Из (2.17) следует, что подпоследовательность $S_{2^{m_k}}(x)$ частичных сумм рассматриваемого ряда Уолша сходится в любой точке $[0,1)$ к функции $\lambda(x)$. Мы находимся в условиях теоремы единственности, приведенной как Теорема 1.6 в **Главе 1**, и рассматриваемый ряд Уолша является рядом Фурье–Уолша функции $\lambda(x)$. При этом и $S_n(x) \to \lambda(x)$ при $n \to \infty$ (см. [2], теорема 2.5.5).

Коэффициенты Фурье—Уолша функции $\lambda(x)$

$$\hat{\lambda}(n) = \begin{cases} \alpha_k\hat{\lambda}_k(n), & \text{если } n = 2^{n_k}, 2^{n_k}+1, \ldots, 2^{n_k+1}-1; \\ 0, & \text{если } n = 2^K, 2^K+1, \ldots, 2^{K+1}-1, \end{cases} \tag{2.18}$$

а число $K \neq n_k$ ни при каком $k = 1, 2, \ldots$.

Итак,

$$\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\lambda}(n)w_n(x) \forall x \in [0,1),$$

где $\hat{\lambda}(n)$ определяются формулами (2.18).

Пусть $2^{n_k} \leqslant n \leqslant 2^{n_k+1}-1$. Если $n \to \infty$, то и $k \to \infty$. В силу монотонности p_n

$$p_{2^{n_k+1}-1} \leqslant p_n,$$

$$\frac{|\widehat{\lambda}(n)|}{|p_n|} = \frac{\alpha_k|\widehat{\lambda}_k(n)|}{|p_n|} \leqslant \frac{\alpha_k \max\limits_{k=2^{n_k},2^{n_k}+1,\dots,2^{n_{k+1}}-1} |\widehat{\lambda}_k(n)|}{|p_{2^{n_{k+1}}}-1|} \leqslant \varepsilon_k$$

в силу условия (2.16).

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\hat{\lambda}(n)|}{|p_n|} = 0$, т. е. $\hat{\lambda}(n) = o\ (p_n)$.

Теорема 2.3.1 доказана.

Замечание. Если числа α и β двоично-рациональные, то процесс построения функции $\lambda(x)$ осуществляется за конечное число шагов.

Доказательство леммы 2.3.2. Предположим, что множество E всех точек из непустой порции $\delta(B)$ ядра B нуль-ряда, в каждой из которых подпоследовательность $S_{2^n}(x)$ неограничена, счетное.

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n}(x) = 0$ почти всюду на интервале δ: если $x \in \delta(\bar{B})^*$, то даже $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$ (по определению ядра нуль-ряда); а если $x \in \delta(B)$, то в силу $|\delta(B)| = 0$.

Кроме того, тогда подпоследовательность $S_{2^n}(x)$ ограничена в каждой точке интервала δ, кроме точек счетного множества E: если $x \in \delta(B)$ — по определению множества E; а если $x \in \delta(\bar{B})$, то опять потому что $S_{2^n}(x) \to 0$ при $n \to \infty$ (вместе с $S_n(x)$).

Тем самым, из нашего предположения вытекает, что выполнены все условия Теоремы 1.3′ Главы 1, и рассматриваемый нуль-ряд сходится к нулю на интервале δ.

Получили противоречие с условием доказываемой Леммы 2.3.2: ведь порция $\delta(B)$ непустая.

Лемма 2.3.2 доказана.

Доказательство Теоремы 2.3.3. Возьмем в теореме 2.3.1 последовательность $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ такой, что ряд Фурье—Уолша функции $\lambda(x)$, построенной для интервала δ, сходится быстро. Составим ОФП произведение

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x) \tag{*}$$

---

* $\bar{B}$ — дополнение множества B до интервала δ.

исходного нуль-ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$ на ряд Фурье—Уолша функции $\lambda(x)$. Убедимся в том, что $(*)$ и есть искомый нуль-ряд.

На интервалах $(0, \alpha)$ и $(\beta, 1)$ $\lambda(x) = 0$; значит, по теореме 2.2.1$'$ ряд $(*)$ сходится к нулю на этих интервалах.

Пусть $x \in \delta \backslash \delta(B)$. Так как по условию доказываемой теоремы ядро B замкнутое, то точка x находится в некотором интервале, в каждой точке которого $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x) = 0$. Значит, по теореме 2.2.2 и теореме 1.3 **Главы 1** ряд $(*)$ сходится к нулю.

Пусть наконец $x \in \delta(B)$. Здесь исходный нуль-ряд не сходится к нулю (по определению ядра нуль-ряда). Если бы при этом $\sum\limits_{n=0}^{2^M} a_n w_n(x) \to 0$ при $M \to \infty$, то это означало бы, что множество E (см. стр. 34) для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$ пустое, что противоречит лемме 2.3.2. Итак, на $\delta(B)$ $\sum\limits_{n=0}^{2^M} a_n w_n(x) \nrightarrow 0$ при $M \to \infty$, откуда по теореме 2.2.2 и ОФП $(*)$ не сходится к нулю для любого $x \in \delta(B)$.

Итак, доказано, что ОФП $(*)$ есть новый нуль-ряд Уолша, при этом его ядро есть $\delta(B)$.

В соответствии с леммой 2.3.2 в окрестности любой точки из $\delta(B)$ существует несчетное подмножество порции $\delta(N)$ (N — приведенное ядро исходного нуль-ряда), где частные суммы исходного нуль-ряда с номерами 2^M неограниченны. Тогда по теореме 2.2.2 то же самое верно и для ряда $(*)$, то есть множество E (взятое теперь для произвольной окрестности точки из $\delta(B)$) является частью приведенного ядра N_1 ряда $(*)$.

Итак, доказано, что ОФП $(*)$ есть нуль-ряд с ядром $\delta(B)$, с приведенным ядром N_1, являющимся всюду плотным в $\delta(B)$; и каждая точка $\delta(B)$ является точкой конденсации для N_1.

Теорема 2.3.3 доказана.

Глава 3

Классификация U_r-множеств для тригонометрической системы и для системы функций Уолша

3.1. О размерности Хаусдорфа U_r-множеств для тригонометрической системы

Пусть E — подмножество окружности T и $0 < \alpha \leqslant 1$. Определим меру Хаусдорфа $H_\alpha(E)$ размерности α множества E.

Для каждого $\delta > 0$ рассмотрим точную нижнюю грань $H_\alpha^\delta(E)$ сумм $\sum |J_j|^\alpha$ по всем семействам интервалов J_j таким, что $\sup |J_j| \leqslant \delta$ и $E \subset \cup J_j$.

$H_\alpha^\delta(E)$ — невозрастающая функция δ со значениями в $[0, \infty]$. положим $H_\alpha(E) \equiv \lim\limits_{\delta \to 0} H_\alpha^\delta(E)$. Хаусдорфова размерность $\dim E$ множества E есть точная нижняя грань таких α, что $H_\alpha(E) = 0$, совпадающая с точной верхней гранью таких α, что $H_\alpha(E) = \infty$.

Из Теоремы V [11] (стр. 40) вытекает справедливость следующего утверждения (используем его в дальнейшем).

Теорема А1. *Если существует нетривиальный ряд* $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, *сходящийся к нулю всюду вне замкнутого множества* E, *коэффициенты которого удовлетворяют при некотором* α' *условию*

$$\sum_1^\infty \frac{|c_n|^2}{n^{1-\alpha'}} < \infty,\ 0 < \alpha' < 1,$$

то $\dim E > 0$.

Утверждение 3.1.1. *Любое подмножество E окружности с размерностью Хаусдорфа $\alpha = \dim E = 0$ является U_r-множеством для всех $r \geqslant 1$.*

Доказательство. Из условия $\alpha = \dim E = 0$ вытекает, что $|E| = 0$. Пусть ряд $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ сходится к нулю всюду вне E, и $c_n \in l^r$.

Если $1 \leqslant r \leqslant 2$, то, в силу теоремы Фишера–Рисса этот ряд является рядом Фурье функции $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$. Из теоремы Фейера–Лебега ([1], стр. 143) следует, что функция $f(x) = 0$ почти всюду. Значит, все коэффициенты ряда $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ равны нулю.

Пусть теперь $2 < r < \infty$. Применим неравенство Гельдера к ряду

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n^{1-\alpha'}} \tag{3.1}$$

взяв $1 > \frac{2}{r} > \alpha' > 0$. Ясно, что $1 - \alpha' > \frac{r-2}{r}$.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n^{1-\alpha'}} \leq \left(\sum_{1}^{\infty} |c_n|^r \right)^{\frac{2}{r}} \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{(1-\alpha')r}{r-2}}} \right)^{\frac{r-2}{r}} < \infty.$$

По теореме А1 сходимость ряда (3.1) влечет $\dim E > 0$. А это противоречит условию.

Утверждение 3.1.1 доказано.

Пример M-множества с $\dim E = 0$ построил Ивашев–Мусатов ([12]).

3.2. Классификация U_r-множеств для тригонометрической системы

Более «толстые» множества, чем гарантированные утверждением 3.1.1, определяет следующая теорема.

Теорема А2. ([11]), стр. 106). *Пусть множество E имеет размерность Хаусдорфа α, $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant r < \frac{2}{\alpha}$. Тогда не существует тригонометрического нуль-ряда*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

сходящегося к нулю всюду вне E, коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^r < \infty. \tag{3.2}$$

Замечание. В [11], стр. 107–110 также доказано, что если $0 < \alpha < 1$ или $\alpha = 1$ (при этом $|E| = 0$), то существует совершенное множество E, $\dim E = \alpha$ и нетривиальный тригонометрический ряд, сходящийся к нулю всюду вне E, коэффициенты которого удовлетворяют условию (3.2) при $r > \frac{2}{\alpha}$.

Из утверждения 3.1.1, теоремы A2 и замечания к ней вытекает

Утверждение 3.2.1. *Совокупность всех замкнутых множеств нулевой меры Лебега можно разбить на три класса:*

а) *U_r-множества для всех $1 \leqslant r < \infty$ (объединение класса U-множеств и некоторого подмножества класса M-множеств);*

б) *более «толстые» множества, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r < r_0$, $2 < r_0 < \infty$, и M_r-множествами для всех $r_0 < r < \infty$; $r_0 \geqslant \frac{2}{\dim E}$;*

в) *наиболее «толстые» множества, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r \leqslant 2$ и M_r-множествами для всех $2 < r < \infty$.*

Доказательство. Ясно, что если замкнутое множество нулевой меры не попадает в класс а), то оно является M_r-множеством для некоторого r, $2 < r < \infty$. Тогда это множество, с учетом того, что каждое M_{r_0}-множество является также M_r-множеством для всех $r \geq r_0$, попадает в один из классов б) или в).

Остается показать непустоту каждого из классов. Непустота класса а) ясна из того, что любое U-множество является и U_r-множеством; а в качестве M-множества, являющегося U_r-множеством для всех $r \geqslant 1$, можно взять M-множество с $\dim E = 0$ (построено в [12]) и использовать Утверждение 3.1.1.

Непустоту класса б) гарантирует Теорема A2 и замечание к ней ($0<\alpha<1$).

Что касается класса в), то его непустота следует из замечания к Теореме A2 для $\alpha = 1$. Из этого замечания следует существование нуль-ряда, удовлетворяющего условию (3.2) при $r > 2$, а при $1 < r \leq 2$ такой ряд невозможен, так как он при этом должен быть рядом Фурье.

Рассмотрим теперь множества положительной меры Лебега.

Лемма 3.2.2. *Пусть $r \geqslant 2$, мера Лебега множества E положительна. Тогда множество E является M_r-множеством для тригонометрической системы.*

Доказательство. Характеристическая функция $\chi_P(x)$ совершенного множества P, $|P| > 0$, вложенного в E, принадлежит $L^2(T)$. Значит, коэффициенты Фурье $c_n(\chi) \in l^2 \subset l^r$ для всех $r \geqslant 2$; причем тригонометрический ряд Фурье $\sigma(\chi)$ сходится к нулю всюду вне P (в силу принципа локализации ([1], с. 110) и нетривиален.

Пусть $1 \leqslant r < 2$. Имеет место теорема

Теорема А3. ([5]). Для любого $\delta > 0$ существует замкнутое множество E, $|E| > 2\pi - \delta$, которое является U_r-множеством для всех $1 \leqslant r < 2$.

Теорема А4. ([13]). Пусть $1 < q < r \leqslant 2$. Существует замкнутое множество положительной меры, являющееся U_q-множеством и M_r-множеством.

Отсюда легко получить

Утверждение 3.2.3. *Совокупность всех замкнутых множеств положительной меры Лебега можно разбить на три класса:*

г) *U_r-множества для всех $1 \leqslant r < 2$ и M_r-множества для всех $2 \leqslant r < \infty$;*

д) *более «толстые» множества, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r < r_0$, $1 < r_0 < 2$, и M_r-множествами для всех $r_0 < r < \infty$.*

е) *M_r-множества для тригонометрической системы для всех $1 \leq r < \infty$.*

Доказательство. Как и в случае Утверждения 3.2.1, ясно, что каждое замкнутое множество положительной меры Лебега попадает в один из указанных классов.

Непустоту класса г) гарантирует Теорема А3 и Лемма 3.2.2. Для доказательства непустоты класса д) возьмем q и r и множество E в соответствии с

Теоремой А4. Тогда в качестве r_0 можно взять супремум всех $q_1 \geqslant q$, для которых множество E является U_{q_1}-множеством. В соответствии с той же теоремой этот супремум не превосходит $r \leqslant 2$.

Что касается класса е), то примером может быть любой интервал $(a,b) \subset [0,2\pi)$. Достаточно рассмотреть функцию «шапочку»

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} e^{\frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{(x-\frac{a+b}{2})^2-(\frac{b-a}{2})^2}}, \ x \in (a,b); \\ 0, \ x \notin (a,b). \end{cases}$$

Тригонометрический ряд Фурье функции $\lambda(x)$ нетривиален и сходится к нулю всюду вне (a,b).

Известно ([1], стр. 88), что если $f^{(k)}(x)$ суммируема, то тригонометрические коэффициенты Фурье $\hat{f}(n) = \text{o}\,(\frac{1}{n^k})$. Значит, $\widehat{\lambda}(n) \in l^r$ для любого $r \geq 1$.

3.3. Классификация U_r-множеств для системы функций Уолша

В этом параграфе проведена классификация U_r-множеств ($r \geqslant 1$) для системы $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ функций Уолша.

Лемма 3.3.1. *Пусть $1 \leqslant r \leqslant 2$, мера Лебега множества E равна нулю, $E \subset [0,1)$. Тогда множество E является U_r–множеством для системы Уолша.*

Доказательство. В силу теоремы Фишера–Рисса всякий ряд с коэффициентами из l^r, $1 \leqslant r \leqslant 2$, есть ряд Фурье–Уолша некоторой функции $f(x) \in L^2(0,1)$. По теореме Билларда ([19]) ряд Фурье–Уолша любой функции из $L^2(0,1)$ сходится к ней почти всюду на $[0,1)$. Итак, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x)$ сходится к нулю всюду вне множества E, $|E| = 0$, $c_n \in l^r$, $1 \leqslant r \leqslant 2$, то его коэффициенты $c_n = \int_0^1 f(x) w_n(x) dx = 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$

Далее нам понадобится следующая теорема, доказанная Г. Геворкяном в [14]:

Теорема B. ([14]). *Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$ и $\sum \varepsilon_n^2 = +\infty$. Тогда существует множество $E \subset [0,1)$ с $|E| = 0$ такое, что*

а) *существует ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$ с коэффициентами $|a_n| \leqslant \varepsilon_n$, который сходится к нулю всюду вне E, и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| > 0$;*

б) *если $|b_n| = o\,(\varepsilon_n)$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n w_n(x)$ сходится к нулю всюду вне E, то $b_n = 0$ для всех n.*

Теорема 3.3.2. *Для любого $r > 2$ существует множество $E \subset [0,1)$, $|E| = 0$, являющееся M_r-множеством для системы Уолша.*

Доказательство. Рассмотрим $\varepsilon_n = \frac{1}{n^{1/r}(\ln n)^{2/r}}$. Ясно, что $\varepsilon_n \in l^r$. В то же время $\sum \varepsilon_n^2 = +\infty$ (поскольку $n^{1-2/r} > (\ln n)^{4/r}$ при достаточно больших n). По теореме B (п. а)) существует множество $E \subset [0,1)$, $|E| = 0$ и нетривиальный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$, $|a_n| \leqslant \varepsilon_n$, сходящийся к нулю всюду вне E. Так как $a_n \in l^r$, то $E - M_r$-множество.

Теорема доказана.

Далее важную роль сыграет полученное с помощью этой теоремы

Следствие. Существует множество $E \subset [0,1)$, $|E| = 0$, являющееся M_r-множеством для системы Уолша для всех $r > 2$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

где $E_n \subset [0,1)$, $|E_n| = 0$, есть $M_{2+\frac{1}{n}}$-множество для системы Уолша, существующее в силу теоремы 3.3.2.

Ясно, что $|E| = 0$.

Пусть $2 < r < 3$. Тогда найдется номер n такой, что $r \in [2 + \frac{1}{n+1}, 2 + \frac{1}{n})$. Нуль-ряд для $M_{2+\frac{1}{n+1}}$-множества E_{n+1} сходится к нулю вне E_{n+1}, а значит и вне E, и доказывает, что E является M_r-множеством для рассматриваемого r. Если $r \geqslant 3$, то нуль-рядом, доказывающим, что E является M_r-множеством служит нуль-ряд, построенный для M_3-множества E_1 с носителем на этом множестве.

Утверждение 3.3.3. *Совокупность всех множеств нулевой меры Лебега, $E \subset [0,1)$ можно разбить на два класса:*

а) *U_r-множества для всех $1 \leqslant r < \infty$*

б) *множества, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r < r_0$, $2 \leqslant r_0 < \infty$ и M_r-множествами для всех r, $r_0 < r < \infty$.*

Доказательство. Ясно, что если множество E не попадает в класс а), то оно попадает в класс б). Непустота класса а) следует из того, что в этот класс входят все U-множества (в обычном смысле) для системы Уолша. Непустота класса б) следует из теоремы 3.3.2. В качестве r_0 выступает инфимум всех таких r, для которых E является M_r-множеством. Заметим, что мы не исключаем возможность случая $r_0 = 2$, который реализуется в силу следствия из теоремы 3.3.2.

Переходя к классификации множеств положительной меры, докажем следующее утверждение.

Лемма 3.3.4. *Пусть $2 \leqslant r < \infty$, $E \subset [0,1)$, $|E| > 0$. Тогда множество E является M_r-множеством для системы Уолша.*

Доказательство. Пусть $\chi_P(x)$-характеристическая функция совершенного множества P, $|P| > 0$, вложенного в E. Функция $\chi_P(x) \in L^2(0,1)$, значит, коэффициенты Фурье–Уолша $\widehat{\chi}(n) \in l^2 \subset l^r$ для всех $r > 2$, причем ряд Фурье–Уолша функции $\chi_P(x)$ нетривиален и сходится к нулю всюду вне P (например, в силу принципа локализации ([2], с. 57).

Лемма доказана.

Теорема С. ([15]). Для любого r, $1 < r \leqslant 2$, существует множество $E \subset [0,1)$, которое является M_r-множеством для системы Уолша и является $U_{r'}$-множеством для этой системы при любом $r' < r$.

Понятно, что $|E| > 0$ (см. Лемму 3.3.1).

Утверждение 3.3.5. *Совокупность всех множеств положительной меры $E \subset [0,1)$ можно разбить на три класса:*

г) *U_r-множества для всех $1 \leqslant r < 2$ и M_r-множества для всех $2 \leqslant r < \infty$;*

д) *множества, являющиеся U_r-множествами для всех $1 \leqslant r < r_0$, $1 \leqslant r_0 < 2$ и M_r-множествами для всех $r_0 < r < \infty$;*

е) *M_r-множества для системы Уолша для всех $1 \leqslant r < \infty$.*

Существование множеств из класса г) гарантирует Теорема C при $r = 2$ и Лемма 3.3.4.

Существование множеств из пункта д) утверждает та же теорема C, если взять в ней $1 < r < 2$. Что касается е), то любой двоичный интервал $(\alpha, \beta) \subset [0, 1)$, является M_r-множеством для системы Уолша для всех $1 \leqslant r < < \infty$ (соответствующий нуль-ряд представляет собой полином Уолша).

Глава 4

Об объединении U_r-множеств для системы Уолша, системы Виленкина–Джафарли и тригонометрической системы

4.1. Теорема об объединении U_r-множеств для системы Уолша

Систему Уолша в этом параграфе будем рассматривать на интервале $[0,1)$ Справедлива

Теорема 4.1.1. *Объединение счетного множества замкнутых U_r–множеств, $2 \leqslant r < \infty$, для системы Уолша является U_r-множеством для этой системы*

Доказательство предваряют несколько лемм.

Лемма 4.1.2. *Пусть $2 \leqslant r < \infty$ и измеримое множество $E \subset [0,1)$ является U_r-множеством для системы Уолша. Тогда $|E| = 0$, где $|E| = 0$ обозначает меру Лебега множества E.*

Доказательство. Предположим, что $|E| > 0$. Тогда можно построить нетривиальный ряд Уолша с коэффициентами из l^r, сходящийся к нулю всюду вне множества E. В самом деле, характеристичекая функция $\chi_F(x)$ совершенного множества F, вложенного в множество E, принадлежит $L^2[0,1)$. Поэтому ее коэффициенты Фурье–Уолша $c_n \in l^2 \subset l^r$, $r \geqslant 2$, и $c_0 = |E| > 0$. (напомним, что $c_n \in l^p$ здесь и в дальнейшем обозначает $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^p$)

Из принципа локализации для рядов Уолша ([2], стр. 57) нетрудно вывести, что ряд Фурье–Уолша этой функции сходится к нулю всюду вне F, а, значит, и вне E.

Пусть δ — произвольный интервал (a, b) (или полуинтервал $[a, b)$), содержащийся в $[0, 1)$. Порцией $\delta(E)$ множества E, определяемой интервалом δ, назовем множество $E \cap \delta$.

Лемма 4.1.3. *Всякая непустая порция $\delta(B)$ ядра B нуль-ряда Уолша содержит непустую порцию $\Delta(N)$ приведенного ядра N того же нуль-ряда, где Δ — некоторый полуинтервал с двоично-рациональными концами, содержащийся в δ. Существует другой нуль-ряд Уолша, для которого соответственно ядром и приведенным ядром являются эти порции $\Delta(B)$ и $\Delta(N)$ ядра и приведенного ядра исходного нуль-ряда.*

Доказательство. Возьмем полуинтервал Δ с двоично-рациональными концами, $\Delta \subset \delta$, определяющий непустую порцию $\Delta(B)$, и рассмотрим формальное произведение, обозначаемое

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x), \tag{4.1}$$

нуль-ряда Уолша

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x) \tag{4.2}$$

и полинома Уолша $\chi_\Delta(x)$, являющегося в нашем случае характеристической функцией полуинтервала Δ. Согласно теореме о формальном произведении (теорема 1.1 Главы 1) ряд (4.1) равномерно сходится к нулю вне Δ и равномерно равносходится с рядом $\chi_\Delta(x) \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x)$ на Δ. Значит, ряд (4.1) сходится к нулю почти всюду, но не всюду: в точках множества $\Delta(B)$ ряд (4.1) не сходится к нулю. Более того, в силу Леммы 2.3.2 из Главы 2, определяемая интервалом Δ порция $\Delta(N)$, где этот ряд неограниченно расходится, также непустая. Итак, ряд (4.1) — нуль-ряд, причем $\Delta(B)$ и $\Delta(N)$ — его ядро и приведенное ядро соответственно.

Лемма 4.1.3 полностью доказана.

Лемма 4.1.4. *Пусть B — ядро нуль-ряда Уолша. Тогда существует совершенное множество P, $B \subset P$; любая непустая порция $\delta(P)$ которого содержит непустую порцию $\delta(B)$.*

Доказательство. Обозначим через P множество точек конденсации приведенного ядра N нуль-ряда. Из теоремы 1.6 Главы 1 ясно, что множество N несчетное. Тогда P — совершенное ([20], теорема 3 на стр. 53).

Докажем, что $B \subset P$. Пусть не так; тогда некоторый смежный к P интервал δ задает непустую порцию $\delta(B)$. По лемме 4.1.3 $\delta(B)$ содержит непустую порцию $\Delta(N)$ — приведенное ядро нового нуль-ряда Уолша. Итак, $\Delta(N)$ — несчетное множество, что невозможно, так как $N - P$ не более чем счетно (следствие из теоремы Линделефа, [2], стр. 53).

Второе утверждение леммы следует из определения точки конденсации.

Лемма 4.1.4 полностью доказана.

Доказательство теоремы 4.1.1. Пусть $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность замкнутых U_r —множеств для системы Уолша, $2 \leqslant r < \infty$, $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$. Согласно лемме 4.1.2 $|E_j| = 0$, $j = 1, 2, \ldots$.

Предположив существование нетривиального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(x), \quad a_n \in l^r, \tag{*}$$

сходящегося к нулю всюду вне E, можно применить к нему, как к нулю-ряду, леммы 4.1.3, 4.1.4. B-ядро, N — приведенное ядро нуль-ряда $(*)$.

Хотя бы одно множество E_{j_0} плотно на некоторой непустой порции $\delta(P)$, где P — совершенное множество из леммы 4.1.4. В самом деле, если предположить, что ни одно из множеств $E_j (j = 1, 2, \ldots)$ этим свойством не обладает, то $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность нигде не плотных на P множеств, а значит, E — множество первой категории на P. Но N всюду плотно на P и $N \subset E$; значит, и N — первой категории на P. Получили противоречие с утверждением работы [9], где установлено, что N — множество второй категории на себе, а значит, в силу того, что множество N всюду плотно в P, N — второй категории и на P.

Итак, множество E_{j_0} замкнуто и плотно на некоторой непустой порции $\delta(P)$; значит, $\delta(P) \subset E_{j_0}$, и $\delta(P)$ является U_r —множестовм.

Согласно лемме 4.1.4 существует непустая порция $\delta(B) \subset \delta(P)$. Согласно лемме 4.1.3 существует другой нуль ряд (4.1) с ядром $\Delta(B)$, где Δ — некоторый полуинтервал с двоично-рациональными концами, $\Delta \subset \delta$. Коэффициенты ряда (4.1)

$$c_n = \sum_{p=0}^{l} a_{n \oplus p} \gamma_p, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\{\gamma_p\}_{p=0}^{l}$ — коэффициенты полинома Уолша $\chi_\Delta(x)$. Ясно, что $c_n \in l^r$, как линейная комбинация последовательностей из l^r.

Итак, $\Delta(B)$ и U_r —множество (из $\Delta(B) \subset \delta(B) \subset \delta(P)$) и M_r —множество, что невозможно.

Теорема 4.1.1 полностью доказана.

4.2. Теорема об объединении U_r —множеств для системы Виленкина–Джафарли

Определение системы Виленкина–Джафарли дано в Главе 1 (стр. 19–21). Если $n = \sum_{k=0}^{s} t_k p^k$, $0 \leqslant t_k \leqslant p-1$, и $g = (x_0, x_1, \dots, x_j, \dots)$, то

$$\gamma_n(g) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=0}^{s} \frac{t_k}{p^{k+1}} \sum_{j=0}^{s} x_j p^j\right). \tag{4.3}$$

Теорема 4.2.1. *Объединение счетного множества замкнутых U_r—множеств $(r > 2)$ для системы Виленкина–Джафарли является U_r—множеством для этой системы.*

Доказательство этой теоремы проходит по схеме доказательства теоремы 4.1.1, но нам понадобится несколько дополнительных утверждений. В частности, понадобится интегральное представление для частичных сумм ряда Фурье функции f по этой системе. Прежде всего отметим, что, как и для произвольной коммутативной компактной группы, частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L(G)$ по системе характеров группы G записываются в виде (см. [21]):

$$S_n(f,g) = \int\limits_G f(g \dot{-} u) D_n(u) d\mu(u), \tag{4.4}$$

где μ — мера Хаара на группе G, $D_n(u)$ — ядро Дирихле для этой системы.

Лемма 4.2.2. *Ядро Дирихле для системы Виленкина–Джафарли удовлетворяет равенству*[*]

$$D_{p^s}(g) = \begin{cases} p^s, & \textit{если } g \in G_s; \\ 0, & \textit{если } g \in \mathbb{Z}_p \backslash G_s, \end{cases} \tag{4.5}$$

где $\{G_s\}$ *— система подгрупп группы* G*, задающая топологию в* G*.*

Доказательство. Равенство (4.5) проверяем индукцией по s. При $s = 0$ оно очевидно, так как $D_1(g) = \gamma_0(g) \equiv 1$ на $\mathbb{Z}_p$. Пусть

$$D_{p^s}(g) = \begin{cases} p^s, & \text{если } g \in G_s; \\ 0, & \text{если } g \in \mathbb{Z}_p \backslash G_s. \end{cases}$$

Имеем

$$D_{p^{s+1}}(g) \equiv \sum_{n=0}^{p^{s+1}-1} \gamma_n(g) = D_{p^s}(g) + \sum_{n=p^s}^{p^{s+1}-1} \gamma_n(g),$$

где характеры $\gamma_n(g)$ определяются формулой (4.3). Тогда

$$\sum_{n=p^s}^{p^{s+1}-1} \gamma_n(g) = D_{p^s}(g) \sum_{t_s=1}^{p-1} \exp\left(2\pi i \frac{ts}{p^{s+1}} \sum_{j=0}^{s} x_j p^j\right).$$

Если $g \in G_{s+1}$, то $x_0 = x_1 = \ldots = x_s = 0$; значит,

$$D_{p^{s+1}}(g) = D_{p^s}(g) + (p-1) D_{p^s}(g) = p D_{p^s}(g) = p^{s+1}.$$

Если же $g \notin G_{s+1}$ но $g \in G_s$, то $x_0 = x_1 = \ldots = x_{s-1} = 0$ и

$$D_{p^{s+1}}(g) = D_{p^s}(g) \left(1 + \sum_{t_s=1}^{p-1} \exp \frac{2\pi i t_s}{p} x_s\right).$$

[*] Это равенство приводится в [21] без доказательства.

В скобке — сумма членов геометрической прогрессии, подсчет которой дает равенство нулю этой скобки. Если же $g \notin G_s$, то $D_{p^s}(g) = 0$.

Лемма 4.2.2 доказана.

Лемма 4.2.3. *Пусть $2 \leqslant r < \infty$, измеримое множество $E \subset \mathbb{Z}_p$ и является U_r-множеством для системы характеров группы $\mathbb{Z}_p$. Тогда мера Хаара множества E равна нулю.*

Доказательство. Предположим, что $\mu(E) > 0$. Зафиксируем число ε: $0 < \varepsilon < \mu(E)$. Множество CE (дополнение к E) можно покрыть открытым множеством D, которое можно представить как объединение D счетного множества смежных классов K_j^n так, что $\mu(CE) < \mu(D) < \mu(CE) + \varepsilon$. Тогда $\mu(CD) > \mu(E) - \varepsilon > 0$. Получим замкнутое множество $F = CD \subset E$, $\mu(F) > 0$.

Построим нетривиальный ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l \gamma_l$ по рассматриваемой системе характеров Γ с коэффициентами из l^r, сходящийся к нулю всюду вне множества E. Характеристическая функция $\chi_{_F}$ замкнутого множества F принадлежит $L^2(G)$; поэтому ее коэффициенты Фурье по системе Γ $c_l(\chi) \in l^2 \subset l^r$, $r > 2$, и $c_0 = \mu(F) > 0$. Пусть $g \in CF$. Тогда существует смежный класс $K^{n_0} \subset CF$ такой, что $g \in K^{n_0}$; ясно, что для всех $n > n_0$ элемент g входит в некоторый смежный класс K^n.

Согласно (4.3), (4.4) имеем

$$S_{p^n}(\chi_{_F}; g) = \int\limits_G \chi_{_F}(g \dot{-} u) D_{p^n}(u) d\mu(u) = p^n \int\limits_{G_n} \chi_{_F}(g \dot{-} u) d\mu(u).$$

Так как $g \in K^n$, $u \in G_n$, то и $g \dot{-} u \in K^n$; значит, $\chi_{_F}(g \dot{-} u) = \chi_{_F}(g) = 0$, и $S_{p^n}(\chi_{_F}; g) = 0$ для всех $n \geqslant n_0$, всех $g \in CF$.

Итак, подпоследовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l(\chi)\gamma_l$ $S_{p^n}(\chi, g)$ сходится к нулю в любой точке открытого множества CF. Согласно [6] (см. теорему 1.9 в **Главе 1**) из этого следует, что рассматриваемый ряд сходится к нулю на CF, и $E - M_r$ — множество. Получили противоречие с условием леммы.

Лемма 4.2.3 полностью доказана.

Нуль-рядом Виленкина-Джафарли назовем всякий нетривиальный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\gamma_k(g)$, сходящийся почти всюду на $\mathbb{Z}_p$ к нулю.

Пусть $S_n(g)$ — последовательность частичных сумм нуль-ряда. В соответствии с общим определением, множество элементов, где

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|S_n(g)| = +\infty,$$

является приведенным ядром нуль-ряда.

Порцией $\delta(E)$ множества $E \subset G$ назовём множество $E\bigcap K^n$, где K^n — некоторый смежный класс группы G по подгруппе G_n.

Лемма 4.2.4. *Пусть $\delta(B)$ — непустая порция ядра B нуль-ряда Виленкина-Джафарли, N — приведенное ядро этого нуль-ряда. Существует другой нуль-ряд Виленкина-Джафарли, для которого соответственно ядром и приведенным ядром являются порции $\delta(B)$ и $\delta(N)$ ядра и приведенного ядра исходного нуль-ряда.*

Доказательство. Пусть рассматриваемая порция ядра B нуль-ряда есть пересечение ядра B и смежного класса K^n. Характеристическая функция любого смежного класса может быть представлена как полином по системе характеров Г. Согласно теореме локализации для нуль-мерных групп ([6], теорема 3.2) формальное произведение

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l\gamma_l \tag{4.6}$$

этого полинома и данного нуль-ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i\gamma_i$ равномерно сходится к нулю вне K^n и равномерно равносходится с данным нуль-рядом на K^n. Значит, ряд (4.6) сходится к нулю почти всюду на $G = \mathbb{Z}_p$, но не всюду: в точках множества $\delta(B)$ ряд (4.6) не сходится к нулю. При этом порция $\delta(N)$ тоже непуста (это следует из теоремы 1.7 главы 1) и в ее точках он неограниченно расходится. Итак, ряд (4.6) — нуль-ряд; из теоремы локализации ясно, что $\delta(B)$ и $\delta(N)$ — его ядро и приведенное ядро, соответственно.

Лемма 4.2.5. *Приведенное ядро нуль-ряда Виленкина-Джафарли является несчетным множеством.*

Доказательство. Предположим, что приведенное ядро нуль-ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\gamma_k$ счетное. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|S_{p^n}(g)| < +\infty$$

всюду, кроме счетного множества. Кроме того, ряд почти всюду сходится к нулю и $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$ (для этого достаточно сходимости ряда хотя бы в одной точке $g \in G$). Таким образом, применима теорема 1.7 из **Главы 1**. Значит, $c_k = 0$ для всех k, что невозможно, так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\gamma_k$ является нуль-рядом.

Лемма 4.2.6. *Приведенное ядро нуль-ряда Виленкина-Джафарли является множеством второй категории на себе.*

Доказательство. Пусть N — приведенное ядро нуль-ряда Виленкина–Джафарли:

$$N = \{g \in \mathbb{Z}_p : \overline{\lim_{n\to\infty}}|S_n(g)| = +\infty\}.$$

Согласно лемме 4.2.5 N — несчетное множество. Так как функции $S_n(g) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k\gamma_k(g)$ непрерывны, множества

$$N_k = \{g \in \mathbb{Z}_p : |S_n(g)| > k \,\text{для некоторого}\, n\}$$

являются открытыми. Ясно, что $N = \bigcap\limits_k N_k$, т.е. N типа G_δ. Известно, что несчетное множество типа G_δ является множеством второй категории на себе ([22], стр. 548).

Лемма 4.2.7. *Пусть B — ядро нуль-ряда Виленкина-Джафарли. Существует замкнутое множество P, $B \subset P$, любая непустая порция $\delta(P)$ которого содержит непустую порцию $\delta(B)$.*

Доказательство. Пусть N — приведенное ядро рассматриваемого нуль-ряда, P — множество всех его точек конденсации. Ясно, что $N \subset B$. Поскольку N несчетно, то P является непустым совершенным множеством. Покажем, что $B \subset P$. Предположим противное. Тогда найдется определяемая некоторым смежным классом K^n из открытого множества CP непустая порция $\delta(B)$. Используя леммы 4.2.4 и 4.2.5, получаем, что $\delta(B)$ содержит несчетное множество $\delta(N)$. Но множество $N \setminus P$ не более чем счетно ([20] стр. 55). Из полученного противоречия вытекает, что дополнение к P не содержит точек из B, т. е. $B \subset P$.

Пусть теперь $\delta(P)$ — любая непустая порция множества P. Так как любая точка P есть точка конденсации приведенного ядра N, то $\delta(N)$ непусто, а тогда и $\delta(B)$ непусто.

Лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы 4.2.1. Пусть $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность замкнутых U_r-множеств для системы Виленкина-Джафарли, $2 < r < \infty$, $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$. Согласно лемме 4.1.2 имеем $\mu(E_j) = 0$ $(j = 1, 2, ...)$. Предположим, что существует нетривиальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \gamma_k, \;\; a_k \in l^r, \tag{4.7}$$

сходящийся к нулю всюду вне E.

Хотя бы одно множество E_{j_0} плотно на некоторой порции $\delta(P)$, где P — замкнутое множество из леммы 4.2.7. Действительно, если бы это было неверно, то $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность нигде не плотных на P множеств, а E — множество первой категории на P; значит, приведенное ядро N нуль-ряда (4.7) и подавно первой категории на P и на себе. Получили противоречие с леммой 4.2.6.

Итак, замкнутое множество E_{j_0} плотно на некоторой порции $\delta(P)$, а потому содержит $\delta(P)$. Согласно лемме 4.2.7 имеем $\delta(B) \subset \delta(P)$ где $\delta(B)$ — соответствующая порция ядра B нуль-ряда (4.7). Множество $\delta(B)$ является U_r-множеством как подмножество U_r-множества E_{j_0}.

С другой стороны, согласно лемме 4.2.4 порция $\delta(B)$ является ядром нового нуль-ряда (4.6). Теперь ряд (4.6) является формальным произведением исходного нуль-ряда (4.7) и полинома по системе Виленкина-Джафарли с коэффициентами b_n (характеристической функции χ_{K^n}). Коэффициенты ряда (4.6) имеют вид

$$c_l = \sum_{n=0}^{m} b_n a_{k(l,n)},$$

где индекс $k(l,n)$ определяется равенством $\gamma_l \gamma_n^{-1} = \gamma_{k(l,n)}$ (см. [6]). При этом $c_l \in l^r$ как линейная комбинация последовательностей из l^r. Итак, множество $\delta(B)$ как ядро нуль-ряда с коэффициентами из l^r является и M_r-множеством.

Полученное противоречие доказывает, что E — U_r-множество для системы функций Виленкина-Джафарли.

4.3. Об объединении U_r-множеств для тригонометрической системы

Доказанные выше для системы Уолша и системы Виленкина–Джафарли теоремы об объединении U_r-множеств для тригонометрической системы мы сможем получить лишь при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты исходного тригонометрического ряда.

Рассмотрению этих условий и посвящен данный параграф.

Напомним, что формальным произведением тригонометрических рядов $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, $c_n \to 0$ при $n \to \pm\infty$, и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$ называется ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} K_n e^{inx},$$

коэффициенты которого определяются равенством

$$K_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \gamma_{n-k}.$$

Нас будет интересовать случай, когда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n| < \infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$ сходится абсолютно и равномерно на $[-\pi, \pi]$ и является тригонометрическим рядом Фурье некоторой функции $\lambda(x)$.

Из результатов Райхмана ([1], стр. 194) следует, что при этом все ряды, определяющие K_n, сходятся и $K_n \to 0$ при $n \to \pm\infty$.

В доказательстве теоремы 4.1.1 используется тот факт, что коэффициенты формального произведения ряда Уолша и полинома Уолша принадлежат l^p, если коэффициенты ряда Уолша из l^p. Однако для тригонометрической системы функций неясно, вытекает ли из условия $c_n \in l^p$ то, что и $K_n \in l^p$. Мы установим эту взаимосвязь при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты c_n (см. Следствие из Утверждения 4.3.1).

Утверждение 4.3.1. *Если* $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$ *— тригонометрический ряд Фурье функции* $\lambda(x) \in \mathbf{C}^3(\mathbf{T})$ *($\mathbf{T}$—окружность), то при* $n > 0$

$$|K_n| \leqslant \frac{B}{n^2} + a_{[\frac{n}{2}]+1} C,$$

и

$$|K_{-n}| \leqslant \frac{B}{n^2} + a_{|-[\frac{n}{2}]-1|} C,$$

где $a_{-n} = a_n \equiv \max\limits_{|k| \geqslant n} |c_{|k|}|$; B, C *— константы.*

Доказательство. Из условия $\lambda(x) \in \mathbf{C}^3(\mathbf{T})$ вытекает, что $\widehat{\lambda}(n) = \text{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Рассмотрим случай $n > 0$

$$|K_n| = \Big| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \widehat{\lambda}(n-k) \Big| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{[\frac{n}{2}]} |c_k| \Big| \widehat{\lambda}(n-k) \Big| + \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{+\infty} |c_k| \Big| \widehat{\lambda}(n-k) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant A \sum_{r=n-[\frac{n}{2}]}^{\infty} |\widehat{\lambda}(r)| + \max_{k \geqslant [\frac{n}{2}]+1} |c_k| \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{+\infty} \widehat{\lambda}(n-k) \leqslant \frac{B}{n^2} + a_{[\frac{n}{2}]+1} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\lambda}(r)|,$$

где константы зависят только от перемножаемых рядов.

Следствие. Пусть $\lambda(x) \in \mathbf{C}^3(\mathbf{T})$. Если $a_n \in l^p$ $(p \geqslant 1)$, то и $K_n \in l^p$.

Заметим, что однако условие $c_n \in l^p$ не гарантирует, что $a_n \in l^p$, где $a_n \equiv \max\limits_{k \geqslant n} |c_k|$ (будем ниже рассматривать $n \geqslant 0$). Сначала отметим справедливость следующего утверждения:

Утверждение 4.3.2. *Пусть последовательность* $c_n \in l^p$, $p > 1$; $a_n = \max\limits_{k \geqslant n} |c_k|$; $\{|c_{m_n}|\}_{n=1}^{\infty}$ *— подпоследовательность последовательности* $\{|c_n|\}_{n=1}^{\infty}$, *состоящая из всех элементов последней, для которых* $|c_{m_n}| > |c_k|$, *если* $k > m_n$. *Тогда справедливо равенство.*

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r^p = |c_{m_1}|^p + \sum_{n=1}^{\infty} (m_n - m_{n-1}) |c_{m_n}|^p, \ m_0 = 1. \tag{4.8}$$

Доказательство. $a_1 = |c_{m_1}|, \dots, a_{m_1} = |c_{m_1}|, \dots, a_{m_n} = |c_{m_n}|$, а для $r = m_n+1, m_n+2, \dots, m_{n+1}$ $a_r = |c_{m_{n+1}}|$, $m = 0, 1, \dots$, $m_0 = 1$.

Поэтому

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r^p = a_1^p + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=m_{n-1}+1}^{m_n} a_r^p = |c_{m_1}|^p + \sum_{n=1}^{\infty} (m_n - m_{n-1}) |c_{m_n}|^p.$$

Утверждение 4.3.2 доказано.

Построим теперь пример последовательности $c_n \in l^p$, $p > 1$, для которой $a_n \notin l^p$.

Сначала строим возрастающую последовательность номеров m_n, положив

$$m_n = m_{n-1} + n^{[p]}; \quad n = 1, 2, \dots.$$

Определим последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ равенством:

$$c_{m_n} = \frac{1}{n}, \quad \text{где} \quad n = 1, 2, \dots; \; c_1 = 1,$$
$$c_k = 0, \quad \text{если} \quad k \neq m_n.$$

Очевидно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < \infty$ для любого $p > 1$. Однако ряд, стоящий в правой части (4.8) расходится:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-[p]}} = +\infty,$$

т. к. для любого $p > 1$ $0 \leqslant p - [p] < 1$.

В силу утверждения 4.3.2 это означает, что $a_n \notin l^p$. Однако, это не препятствует тому, что $K_n \in l^p$. Это следует из утверждения 4.3.3.

Утверждение 4.3.3. *Пусть $p \geqslant 2$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{m_n}|^p < \infty$, $c_k = 0$, если $k \neq m_n$. Тогда $K_n \in l^p$.*

Доказательство. Обозначим

$$\sum_{k=-\infty}^{[\frac{n}{2}]} |c_k||\gamma_{n-k}| \equiv S_n, \qquad \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{+\infty} |c_k||\gamma_{n-k}| \equiv T_n,$$

так что $|K_n| \leqslant S_n + T_n$. Как было показано при доказательстве Утверждения 4.3.1, $S_n \leqslant \frac{B}{n^2}$, $B = \mathrm{const}$; значит, $S_n \in l^p$. Докажем, что и $T_n \in l^p$.

Разобъем ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^p$ на пачки вида $\sum\limits_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n^p$.

$$T_{2m_k} = \sum_{j=m_k+1}^{+\infty} |c_j||\gamma_{2m_k-j}| = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}||\gamma_{2m_k-m_i}|,$$

так как $c_j = 0$ для $j \neq m_i$, $i = k+1, k+2, \ldots$

$$T_{2m_k+1} = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}||\gamma_{2m_k+1-m_i}|, \ldots, T_{2m_{k+1}-1} = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}||\gamma_{2m_{k+1}-1-m_i}|.$$

Суммируем эти $2m_{k+1} - 2m_k$ слагаемых; затем используем монотонное убывание последовательности $|c_{m_n}|$: $|c_{m_i}| \leqslant |c_{m_{k+1}}|$ для всех $i \geqslant k+1$.

$$\sum_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}| \sum_{j=2m_k-m_i}^{2m_{k+1}-1-m_i} |\gamma_j| \leqslant |c_{m_{k+1}}| \sum_{i=k+1}^{+\infty} \sum_{j=2m_k-m_i}^{2m_{k+1}-1-m_i} |\gamma_j| \leqslant$$
$$\leqslant |c_{m_{k+1}}| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\gamma_j|.$$

Полученное неравенство приводит к следующей оценке:

$$\sum T_n^p = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n^p \leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n \right)^p \leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_{m_{k+1}}|^p \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\gamma_j| \right)^p.$$

По условию $c_{m_n} \in l^p$, ряд $\sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} |\gamma_j|$ сходится, значит, $T_n \in l^p$.

Утверждение 4.3.3. доказано.

Приведенные выше рассуждения показывают, что условие $a_n \in l^p$ является лишь достаточным для $K_n \in l^p$, но не является необходимым.

Приведем одно условие, являющееся достаточным для принадлежности a_n пространству l^p

Утверждение 4.3.4. *Пусть последовательность c_n имеет монотонную мажоранту d_n, и $d_n \in l^p$, $p > 1$. Тогда и последовательность $a_n \equiv \max\limits_{k \geqslant n} |c_k|$ принадлежит пространству l^p.*

Доказательство. Любой номер $r = 1, 2, \ldots$ попадает в множество номеров $\{m_n{+}1, m_n{+}2, \ldots, m_{n+1}\}$, а значит $a_r = |c_{m_{n+1}}| \leqslant d_{m_{n+1}} < d_r$, так как $m_{n+1} \geqslant r$.

Итак, $d_n \in l^p$ служит мажорантой и для a_n. Поэтому и $a_n \in l^p$.

Следствие. Если последовательность c_n имеет монотонную мажоранту d_n, и $d_n \in l^p$, $p > 1$, то последовательность $K_n \in l^p$.

В результате мы приходим к следующему выводу: если априори потребовать, что у последовательности c_n существует монотонная мажоранта из пространства l^p, то и для тригонометрической системы справедлива теорема об объединении U_r-множеств. Доказательство проводится по схеме доказательства Теоремы 4.1.1, поскольку для тригонометрической системы справедливы аналоги Леммы 4.1.3 и Леммы 4.1.4 (см. [1], стр. 794-795).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации введено и исследовано обобщенное формальное произведение (ОФП) для рядов Уолша; тем самым теория Райхмана ФП для тригонометрических рядов распространена на ряды Уолша; с помощью ОФП изучены свойства ядер и приведенных ядер нуль-рядов Уолша; изучены свойства ядер и приведенных ядер нуль-рядов по системе Виленкина–Джафарли.

Проведена классификация U_r-множеств для тригонометрической системы и для системы Уолша.

Установлено, что объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств $(r > 2)$ для системы Уолша является U_r-множеством для этой системы; установлено, что объединение счетного множества замкнутых U_r-множеств $(r > 2)$ для системы Виленкина–Джафарли является U_r-множеством для этой системы; изучена связь суммируемости коэффициентов тригонометрического ряда и суммируемости коэффициентов его формального произведения на абсолютно сходящийся ряд.

Перспективы дальнейших исследований.

Перспективы дальнейших исследований связаны с распространением полученных результатов на случай общих нуль-мерных групп. Предполагается, в частности, установить связи размерности Хаусдорфа множества на такой группе с наличием нуль-ряда по системе характеров таких групп (аналог Теоремы A из главы 3 диссертации).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М: Физматгиз, 1961.

[2] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

[3] Шнейдер А. А. О единственности разложений по системе функций Уолша // Матем. сб. 1949. Т. 24. С. 279–300.

[4] Файн (Fine N. J.) On the Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V.65, N3. P. 372–414.

[5] Katznelson Y. Sets of uniqueness for some classes of trigonometrical series// Bull Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. P. 722–723.

[6] Skvortsov V. A. On M_0-sets for series with respect to characters of compact zero-dimensional group // Tatra Mt. Math. Publ. 2014. 62, P. 165–174.

[7] Skvortsov V. A., Tulone F. Kurzweil-Henstock type integral on zero-dimensional group and some of its applications //Czechoslovak Math, J. 2008. 58. P. 1167–1183.

[8] Skvortsov V. A., Kholshchevnikova N. N. On U- and M-sets for series with respect to characters of compact zero-dimensional groups // Journal of Math, Analysis and Applications. 2017. V. 446. P. 383–394.

[9] Wade W. R. Summing closed U-sets for Walsh series // Proc. Amer. Math, Soc. 1971. V. 29, N1. P. 123–125.

[10] Холщевникова Н. Н. Обобщенная теорема Бари для системы Уолша// Матем. сб. 1992. Т. 183, N9. С. 3–12.

[11] Kahane J.–P., Salem R. Ensembles parfaits et series trigonometriques. Paris, Hermann. 1963.

[12] Ивашев–Мусатов О. С. M-множества и мера Хаусдорфа // ДАН СССР. 1962. Т. 142, N5. С. 1001–1004.

[13] Hirschmann J. J., Katznelson Y. Sets of uniqueness and multiplicity for $l^{p,\alpha}$ // Israel J. Math. 1965. V.3. P. 221–231.

[14] Gevorkian G. On coefficients of null-series and sets of uniqueness of trigonometric and Walsh systems// Analysis Math. 1988. V. 14. P. 219–251.

[15] Геворкян Г. Г. О множествах единственности для некоторых ортогональных рядов // Известия АН Арм. ССР. 1983. 18. С.448–475.

[16] Скворцов В. А. Пример ряда Уолша со всюду сходящейся к нулю подпоследовательностью частичных сумм // Матем. сб. 1975. Т. 97, N4. С. 517–539.

[17] Арутюнян Ф. Г., Талалян А. А. О единственности рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. С. 1391–1408.

[18] Rajchman A. Sur le principe de localisation de Riemann. C.R. de la Soc. Sci. de Varsovie. 1918. 11. P. 115–122.

[19] Billard P. Sur la convergence presque partout des series de Fourier-Walsh functions de l'espace $L^2(0,1)$ // Studia Math. 1967. V.28. N3. P. 363–388.

[20] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: «Наука». 1974.

[21] Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм. 1981.

[22] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М. : Мир. 1965.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ.011.3 по специальности 1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ и входящих в базы цитирования Web of Science, Scopus и RSCI.

[23] Козловская Т. Д. О произведении рядов Уолша–Пэли и его применении // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. – 2002. – № 3. С. 16–21.

[24] Козловская Т. Д. Об объединении U_p-множеств для системы характеров группы целых p-адических чисел // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. – 2019. – № 4. С. 42–46.

[25] Козловская Т. Д. О множествах единственности для рядов Уолша–Пэли // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. – 2020, № 3. С. 56–58.

Иные публикации

[26] Козловская Т. Д. Об U_p-множествах для системы функций Уолша // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2012. N1 (18). С. 85–88.

[27] Козловская Т. Д. О формальном произведении рядов Уолша // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем / Под ред. Л. А. Уваровой. М.: Изд-во «Станкин». 2001. N 4. С. 22–28.

[28] Козловская Т. Д. Классификация U_p-множеств для системы функций Уолша // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем / Под ред. Л. А. Уваровой. М.: Изд-во «Янус-К». 2004. N 7. С. 28–30.

[29] Козловская Т. Д. Об одной числовой последовательности // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологи систем / Под ред. Л. А. Уваровой. М.: Изд-во «Янус-К». 2007. N 10. С. 14–15.

[30] Козловская Т. Д. О коэффициентах формального произведения тригонометрических рядов // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем / Под ред. Л. А. Уваровой. М.: Изд-во «Янус-К» 2016. N17. С. 98–102.

[31] Козловская Т. Д. Об U_p-множествах. В сборнике «Современные проблемы теории функций и их приложения». Тезисы докладов 11-й Саратовской зимней школы. 2002. С. 92–93.

[32] Козловская Т. Д. Об U_p-множествах для системы функций Уолша // Вторая международная научная конференция «Моделирование нелинейных процессов и систем». Сб. тезисов. М.: Янус–К. 2011. С. 275.

[33] Козловская Т. Д. Об U_r-множествах для системы характеров группы це-

лых p-адических чисел // Четвертая международная научная конференция «Моделирование нелинейных процессов и систем». Сб. тезисов. М.: Янус–К. 2019.

[34] Козловская Т. Д. О множествах относительной единственности для системы Виленкина–Джафарли // Сб. «Современные проблемы теории функций и их приложения». Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. 2020. С. 177–183.

[35] Козловская Т. Д. О свойствах ядер нуль-рядов Уолша // Сб. «Современные проблемы теории функций и их приложения». Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. 2022. С. 139, 140.

[36] Козловская Т. Д. О коэффициентах формального произведения тригонометрических рядов // Сб. «Современные проблемы теории функций и их приложения». Материалы 22-й международной Саратовской зимней школы. 2024. С. 121–123.