

**Отзыв официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
Гармановой Татьяны Алексеевны
на тему: «Константы вложения в пространствах Соболева»
по специальности 1.1.1 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ**

Диссертационная работа Гармановой Татьяны Алексеевны относится по своей тематике к теории вложений в пространствах Соболева. Целью работы является исследование вложений пространств Соболева на отрезке с краевыми условиями Дирихле в пространства Соболева с равномерной нормой.

Актуальность диссертационной работы.

Исследование констант в теоремах вложения для пространств Соболева напрямую связано с классическими неравенствами Колмогорова для производных, изучению которых посвящены известные работы А. Н. Колмогорова, Э. Ландау, Ж. Адамара. В работах В. А. Стеклова, Г. Х. Харди, В. И. Левина, Э. Шмидта изучались константы в теоремах вложения для пространств Соболева на отрезке с краевыми условиями Дирихле. Существенный прогресс был достигнут в недавних работах А. И. Назарова, Г. А. Калябина, И. А. Шейпака.

Изучение констант в теоремах вложения фактически сводится к изучению свойств функций Грина для соответствующих краевых задач, что представляет самостоятельный интерес. Кроме того, неравенства между производными имеют полезные геометрические приложения. Например, неравенство Виртингера позволяет обосновать изопериметрическое неравенство на плоскости, а функциональным аналогом многомерного изопериметрического неравенства является классическое неравенство Соболева для функций из $W^{1,1}$. Таким образом, рассматриваемая диссертационная работа актуальна, а полученные в ней ре-

зультаты о константах вложения пространств Соболева $W_p^n[0, 1]$ в $W_\infty^k[0, 1]$ с нулевыми граничными условиями Дирихле представляют значительный интерес и являются существенным продвижением в данной области.

Содержание работы. Диссертация включает в себя введение, три главы, заключение и список литературы из 48 наименований. Общий объем диссертационной работы составляет 78 страниц. Во введении раскрыта актуальность выбранной темы, а также сформулированы основные цели исследования и обоснована научная новизна полученных результатов.

В первой главе:

- Рассмотрен случай вложения пространств $\mathring{W}_2^n[0, 1]$ в пространства $\mathring{W}_2^k[0, 1]$ при всех натуральных n и $0 \leq k < n - 1$.
- Получено описание оценочных функций $A_{n,k,2}$ в терминах гипергеометрической функции. Определена точка глобального максимума этих функций. Для четных k вычислены точные константы вложения.

Во второй главе:

- Показано, что оценочные функций $A_{n,k,p}$ для всех $p \in [1, +\infty]$ равны наилучшей аппроксимации сплайна $S(x, a)$ многочленами степени не выше $n - 1$ по норме пространства $L_{p'}[0, 1]$. Для $k = n - 1$ и $p = 1$ вычислены точные константы вложения. Для $k = n - 1, p = \infty$ получены оценки для точных констант вложения.

В третьей главе:

- Изучены дополнительные свойства первообразных полиномов Лежандра, связанные с почти ортогональностью. Вычислены скалярные произведения. Полученные результаты применены к ряду спектральных задач для обыкновенных дифференциальных операторов, а также к приближенному вычислению точных констант вложения $\Lambda_{n,k,2,2}$.

Научная новизна и теоретическая значимость результатов.

Представленные результаты являются новыми, доказательства нетривиальны и включают в себя кроме применения известных методов интересные оригинальные конструкции. Замечательный пример такой конструкции доставляет доказательство теоремы 1.2.7 о глобальных максимумах функций $A_{n,k}^2$, где используется специальным образом построенная мажоранта $B_{n,k}$, совпадающая в точках локального максимума с $A_{n,k}^2$ и монотонная на промежутках $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$. Отметим красивые и очень важные для получения основных результатов диссертации формулы (1.2.3) и (1.2.4) из теоремы 1.2.1, свидетельствующие о замечательной наблюдательности автора. Очень интересны результаты второй главы диссертации, в которых устанавливается связь между задачей о нахождении функции $A_{n,k,p}$ и задачей приближения сплайна $\chi_{[0,a]}(x)(a-x)^{n-k-1}/(n-k-1)!$ многочленами степени не выше $n-1$ в пространстве $L_{p'}[0, 1]$. Самостоятельный интерес представляют полученные в диссертации свойства многочленов Лежандра и их первообразных. Таким образом, результаты и методы рассматриваемой диссертационной работы являются существенным продвижением в данной области и будут использованы специалистами в дальнейших исследованиях.

Степень обоснованности научных положений и результатов, сформулированных в диссертации.

Положения, выносимые на защиту, получены лично автором, обоснованы и подтверждены четко сформулированными и строго доказанными теоремами.

Основные результаты диссертационной работы отражены в 7 публикациях автора, опубликованных в научных изданиях, рецензируемых Scopus, Web of Science и RSCI, в также определенных п. 2.3 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова.

Результаты проведенного исследования были представлены на ряде международных научных конференций и научно-исследовательских семинаров, что

подтверждает их актуальность и научную значимость.

Замечания по диссертационной работе:

1. В начале первой главы в разделе 1.1 не вполне удачно излагается поиск явной формулы для функции $g_{n,k}$. Функция $g_{n,k}$ строится с помощью двух многочленов на $[0, a)$ и $(a, 0]$, удовлетворяющих некоторым условиям согласования в точке a . Фраза «Отсюда получаем следующие условия на функцию $g_{n,k}$ » на странице 23 вводит в заблуждение так как на самом деле наоборот, если функция $g_{n,k}$ удовлетворяет условиям (1.1.1), (1.1.2) и (1.1.3), то в силу сделанных выше выкладок функция $g_{n,k}^{(n)}$ является ядром, задающим функционал $f \mapsto f^{(k)}(a)$.
2. Во второй главе в разделе 2.1 трудно понять, что верхний индекс функции $q_{n,k}^{(n)}$ на самом деле обозначает производную и может не совпадать с нижним индексом n . Это становится ясно лишь из дальнейшего изложения.
3. Затрудняет понимание материала второй главы отсутствие явного указания на зависимость функций $q_{n,k}^{(n)}$ от параметров $\nu_0, \dots, \nu_{n-1}$. Поэтому несколько странно выглядят формулы с производными по ν_j или с $\inf_\nu$ от выражений, в которых не указана зависимость от ν .

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно требованиям Положения о совете по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Гарманова Татьяна Алексеевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
механико-математического факультета
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Шапошников Станислав Валерьевич

30.04.2025

Контактные данные: тел. +79151577487, email: starticle@mail.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация:
01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика.

Адрес места работы: 119991, ГСП-1, Российская Федерация, Москва,
Ленинские горы, Главное здание, Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет,
кафедра математического анализа
Тел. +7 (495) 939-10-00, email: info@rector.msu.ru

Подпись С. В. Шапошникова удостоверяю:

Декан механико-математического факультета
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
член.-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор

Шафаревич Андрей Игоревич