

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Солонков Александр Алексеевич

**Свободные универсальные алгебры
с непрерывными и раздельно непрерывными
операциями**

Специальность 1.1.3. Геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Сипачева Ольга Викторовна

Москва 2025

Содержание

Введение	3
Основные понятия и предварительные сведения	23
1. Свободные топологические алгебры	30
1.1. Основные понятия и свойства топологических алгебр	30
1.2. Абсолютно свободная топологическая алгебра	34
2. Мальцевские алгебры	38
2.1. Определение и основные свойства мальцевских алгебр	38
2.2. Свободная топологическая мальцевская алгебра	42
2.3. Топологические груды	48
2.4. Явное описание свободной мальцевской алгебры	53
3. Булевы группы кружевных пространств	64
3.1. Введение	64
3.2. Монотонная нормальность свободной булевой топологической группы $B(X)$ на кружевном T_1 -пространстве X	67
3.3. Доказательство основной теоремы	75
4. Квазитопологические алгебры	76
4.1. Определения и основные свойства	76
4.2. Свободные квазитопологические алгебры	78
4.3. Абсолютно свободная квазитопологическая алгебра	79
4.4. Отделимость в квазитопологических алгебрах	85
5. Квазимальцевские алгебры	87
5.1. Определения и основные свойства	87
5.2. Аксиомы отделимости в квазимальцевских алгебрах	90
5.3. Ретракты квазитопологических групп	91
5.4. Вложения свободных квазимальцевских алгебр друг в друга	96
Заключение	100
Список литературы	102

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Работа посвящена универсальным топологическим и квазитопологическим алгебрам, т.е. универсальным алгебрам с топологией, относительно которой все операции непрерывны и, соответственно, раздельно непрерывны. Исследуются свободные топологические и квазитопологические универсальные алгебры. Особое внимание уделяется топологическим и квазитопологическим алгебрам с операцией Мальцева.

В 1954 году А. И. Мальцев доказал, что перестановочность всех конгруэнций на всех универсальных алгебрах из заданного многообразия эквивалентна наличию в сигнатуре этого многообразия специального тернарного термина, называемого теперь *мальцевским термом* или *операцией Мальцева* [3]. Топологические пространства, допускающие непрерывную операцию Мальцева и называемые теперь *мальцевскими пространствами*, хорошо изучены. Так, например, для мальцевских компактов было выяснено, что они обладают свойством Суслина [11] и являются компактами Дугунджи [12]. Кроме того, было доказано, что мальцевские компакты являются ретрактами топологических групп [7]; позже было показано, что не все мальцевские пространства обладают этим свойством [21].

В 1957 году Мальцевым было положено начало теории топологических алгебр [4], которая с тех пор активно и плодотворно развивается. Квазитопологические алгебры, однако, обладают многими свойствами, отличающими их от топологических алгебр. Например, в диссертации Е. А. Резниченко [6] (теорема 2.38) было выявлено уникальное категорное свойство этих алгебр: среди всех факторизаций любого непрерывного отображения квазитопологической алгебры данной сигнатуры в топологическое пространство через непрерывный гомоморфизм в другую квазитопологическую алгебру той же сигнатуры имеется максимальная (в естественном смысле) факторизация. Отметим, что в диссертации [6], как и в некоторых других статьях, квазитопологические алгебры названы полутопологическими. Е. А. Резниченко также установил ряд условий, при которых непрерывные операции на пространстве X продолжаются до раздельно непрерывных операций на βX [29] (до непрерывных операций они продолжаются значительно реже).

Один из основных результатов настоящей работы состоит в том, что, как и в случае топологических алгебр, для каждого топологического пространства X в любом многообразии квазитопологических алгебр определена свободная квазитопологическая алгебра над многообразием квазитопологических алгебр.

Диссертант устанавливает, что топологическая факторалгебра квазитопологической алгебры является квазитопологической алгеброй; это является ещё одним фундаментальным отличием квазитопологических алгебр от топологических. С помощью этого факта и конструктивного описания абсолютно свободной квазитопологической алгебры автор получает конструктивное описание свободной квазитопологической алгебры над полным многообразием квазитопологических алгебр. Возможность такого описания является одним из преимуществ квазитопологических алгебр перед топологическими.

Как специальный случай автор рассматривает квазимальцевское пространство и доказывает, что оно является ретрактом некоторой квазитопологической группы, тогда как ретрактом топологической группы мальцевское пространство является только при дополнительных условиях. Многие другие результаты о топологических алгебрах тоже остаются верными и даже усиливаются для квазитопологических алгебр.

Напомним, что топологическое пространство X называется *кружевным*, если существует функция G , которая каждому $n \in \omega$ и каждому замкнутому подмножеству $H \subset X$ ставит в соответствие открытое множество $G_n(H)$, содержащее H и такое, что:

- 1) $H = \bigcap_n G_n(H)$;
- 2) если $H \subset K$, то $G_n(H) \subset G_n(K)$;
- 3) $H = \bigcap_n \overline{G_n(H)}$.

Кружевные топологические пространства (термин А. В. Архангельского, на английском языке они называются «*stratifiable*») были введены И. Седером в 1961 году в статье [19] как обобщение метрических пространств. Интерес к ним возрос после доказательства И. Борджесом [17] обобщения теоремы Дугунджи о продолжении на случай кружевных пространств.

Диссертант рассматривает важный частный случай свободной топологической универсальной алгебры — свободную топологическую группу $B(X)$, порождённую топологическим пространством X и доказывает, что для кружевного T_1 -пространства X $B(X)$ также является кружевным пространством.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются объекты универсальной алгебры, снабжённые топологией, относительно которой все определённые на них операции непрерывны или раздельно непрерывны. Предметом исследования являются существование, строение и общие свойства свободных топологических

и квазитопологических универсальных алгебр, свойства важных конкретных объектов топологической алгебры, таких как мальцевские пространства, квазимальцевские пространства, свободные мальцевские и квазимальцевские алгебры и свободные топологические булевы группы, а также свойства квазитопологических алгебр, отличающие их от топологических.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

- 1) доказать существование и исследовать структуру и тополого-алгебраические свойства свободных топологических универсальных алгебр данного топологического пространства в заданных многообразиях топологических алгебр, в частности, абсолютно свободных топологических алгебр с заданной сигнатурой;
- 2) исследовать свойства свободных топологических алгебр в конгруэнц-перестановочных многообразиях топологических алгебр (т.е. многообразиях алгебр с непрерывной операцией Мальцева);
- 3) доказать, что свободная булева группа кружевного пространства является кружевной (и, тем самым, распространить теорему Дугунджи о существовании оператора продолжения на класс топологических векторных пространств над полем $\mathbb{F}_2$);
- 4) ввести понятие свободной квазитопологической универсальной алгебры (т.е. универсальной алгебры с топологией, относительно которой операции раздельно непрерывны), доказать существование и исследовать структуру и тополого-алгебраические свойства абсолютно свободных, свободных и общих квазитопологических алгебр;
- 5) исследовать строение и свойства свободных квазитопологических алгебр в конгруэнц-перестановочных многообразиях квазитопологических алгебр (т.е. многообразиях алгебр с раздельно непрерывной операцией Мальцева).

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту.

- 1) Для любого топологического пространства X и любой сигнатуры Σ существует абсолютно свободная топологическая Σ -алгебра $W^t(X)$. Она алгебраически изоморфна алгебре Σ -термов $W(X)$ и является индуктивным пределом подпространств, представляющих собой топологические суммы конечных степеней пространства X .

- 2) Свободные топологические алгебры в многообразиях топологических алгебр, представляющих особый интерес, а именно, в многообразиях топологических алгебр с перестановочными конгруэнциями (т.е. с непрерывными операциями Мальцева) и в многообразии булевых топологических групп (т.е. топологических векторных пространств над полем $\mathbb{F}_2$) обладают следующими свойствами:
 - каждая топологическая мальцевская алгебра является факторалгеброй некоторой свободной топологической мальцевской алгебры, причём соответствующий гомоморфизм представляет собой открытую ретракцию;
 - если свободная топологическая мальцевская алгебра $M(X)$ является T_0 -пространством или X является тихоновским пространством, то X гомеоморфно вкладывается в $M(X)$ в качестве замкнутого подпространства;
 - если пространство X функционально хаусдорфово, то свободная топологическая мальцевская алгебра $M(X)$ тоже функционально хаусдорфова;
 - для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств существует непрерывный гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow M(Y)$ со свойством $i_Y \circ f = h \circ i_X$ (где i_X и i_Y — канонические вложения пространств X и Y в $M(X)$ и $M(Y)$), причём если f факторно, то гомоморфизм h открыт;
 - свободная топологическая булева группа кружевного пространства является кружевным пространством.
- 3) В любом многообразии квазитопологических алгебр существует свободная квазитопологическая алгебра над произвольным топологическим пространством.
- 4) Для любого топологического пространства X и любой сигнатуры Σ существует абсолютно свободная квазитопологическая Σ -алгебра $W^q(X)$. Она алгебраически изоморфна алгебре Σ -термов $W(X)$ и является индуктивным пределом подпространств, представляющих собой топологические суммы конечных кросс-степеней пространства X .
- 5) Для каждого топологического пространства X в любом многообразии квазитопологических алгебр определена свободная квазитопологическая алгебра над пространством X . Факторалгебра любой квазитопологической алгебры с факторной топологией является квазитопологической алгеброй.

- 6) Свободные и общие квазитопологические алгебры с отдельно непрерывной операцией Мальцева обладают следующими свойствами:
- все T_0 -пространства, допускающие отдельно непрерывные операции Мальцева, являются также T_1 -пространствами;
 - всякое T_1 -пространство X гомеоморфно вкладывается в свободную квазитопологическую алгебру $M^q(X)$;
 - всякое квазимальцевское пространство X является ретрактом своей свободной квазитопологической группы $F^q(X)$;
 - всякое тихоновское квазимальцевское пространство X гомеоморфно ретракту тихоновской квазитопологической группы;
 - для любого тихоновского пространства X и любого его подпространства и Y тождественное вложение $Y \rightarrow X$ продолжается до замкнутого вложения $M^q(Y) \rightarrow M^q(X)$ тогда и только тогда, когда Y замкнуто в X .

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- 1) Предложено полное доказательство существования свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ произвольного топологического пространства X в любом многообразии $\mathcal{V}$ топологических алгебр. Изучено строение абсолютно свободной алгебры и получено её явное описание.
- 2) Доказано, что на факторалгебре любой топологической алгебры из конгруэнц-перестановочного многообразия топологических алгебр (т.е. из многообразия с операцией Мальцева) все операции многообразия непрерывны относительно факторной топологии. Таким образом, в таком многообразии имеет смысл понятие топологической факторалгебры. Приведён пример многообразия топологических алгебр, в котором топологические факторалгебры существуют не всегда.
- 3) Доказаны теоремы об аксиомах отделимости топологических алгебр с непрерывной операцией Мальцева.
- 4) Введено понятие свободной мальцевской алгебры топологического пространства (это свободная топологическая алгебра в многообразии всех топологических алгебр с операцией Мальцева). Выяснены условия, при которых топологическое пространство вкладывается в свою свободную мальцевскую алгебру (в качестве замкнутого подпространства).

- 5) Введено понятие свободной тихоновской мальцевской алгебры тихоновского пространства. Описаны основные свойства свободной тихоновской мальцевской алгебры.
- 6) Доказаны теоремы, характеризующие связь между свободными мальцевскими пространствами и свободными топологическими грейдами тихоновских пространств.
- 7) Доказано, что свободная булева группа (т.е. свободное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2$) кружевного T_1 -пространства является кружевным пространством.
- 8) Доказано, что в любом многообразии квазитопологических алгебр определены топологические факторалгебры. А именно, на любой факторалгебре любой квазитопологической алгебры операции раздельно непрерывны относительно факторной топологии.
- 9) Введено понятие и доказано существование свободной квазитопологической алгебры произвольного топологического пространства в данном многообразии квазитопологических алгебр. Получено явное описание абсолютно свободной квазитопологической алгебры произвольной сигнатуры произвольного топологического пространства. Доказано, что свободная квазитопологическая алгебра произвольного пространства X является индуктивным пределом некоторых, естественным образом определённых, подалгебр. Для топологических алгебр это верно лишь в случае, когда пространство X обладает свойствами, близкими к компактности.
- 10) Введены свободные квазимальцевские алгебры и исследованы их свойства, в частности, аксиомы отделимости. Предъявлено явное описание свободной квазимальцевской алгебры данного топологического пространства. Доказано, что всякое квазимальцевское пространство является ретрактом некоторой квазитопологической группы, тогда как ретрактом топологической группы мальцевское пространство является только при дополнительных условиях. Кроме того, доказано, что если X — тихоновское пространство и Y — его замкнутое подпространство, то свободная квазимальцевская алгебра пространства Y является замкнутой подалгеброй свободной квазимальцевской алгебры пространства X .

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы общей топологии, теории множеств, топологической алгебры и теории универсальных алгебр, а также методика,

предложенная автором.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес для специалистов в области общей топологии, топологической алгебры, универсальной алгебры и функционального анализа.

Степень достоверности

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати. При публикации в журналах они были подвергнуты рецензированию. Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация диссертации

Результаты диссертации опубликованы в четырёх статьях [36]–[39] в журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология и индексируемых в базах научного цитирования Scopus, Web of Science, RSCI, ядре РИНЦ. Также результаты были представлены на следующих всероссийских и международных научных конференциях и научно-исследовательских семинарах:

Доклады на международных конференциях:

- Топологическая конференция «Александровские чтения», посвящённая 125-летию со дня рождения Павла Сергеевича Александрова, 6–7 мая 2021 г., Москва, МГУ.
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2023», 10–21 апреля 2023 г., Москва, МГУ.

Доклады на научно-исследовательских семинарах

- Научно-исследовательский семинар им. П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 24 марта 2022 г.
- Научно-исследовательский семинар им. П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 26 октября 2023 г.
- Научно-исследовательский семинар им. П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 22 февраля 2024 г.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, раздела «Основные понятия и предварительные сведения», пяти глав, заключения, списка литературы и списка публикаций автора. Объём диссертации составляет 105 страниц. Список литературы и публикаций автора включает в себя 39 наименований. Используется двойная нумерация определений, лемм, теорем, предложений, следствий, примеров и замечаний. Первое число означает номер главы, а второе — номер определения или утверждения внутри главы.

Краткое содержание работы

Во **введении** приводится краткая история вопроса, определяется область исследования, обосновывается актуальность темы и научная новизна полученных результатов, формулируются основные результаты диссертации. В разделе «Основные понятия и предварительные сведения» содержатся самые основные определения (остальные необходимые определения приводятся по ходу дела), а также формулируются и доказываются некоторые нужные в дальнейшем общие факты.

Глава 1 посвящена основным свойствам свободных топологических алгебр, свободных мальцевских алгебр, свободных мальцевских тихоновских алгебр, абсолютно свободных топологических алгебр. Приводится явное описание абсолютно свободной мальцевской алгебры. В первом разделе приводятся определения и основные свойства топологических алгебр, многообразий топологических алгебр и свободных топологических алгебр.

Определение 1.1 ([30]). *Многообразием* топологических алгебр называется любой класс топологических алгебр с одинаковой сигнатурой, замкнутый относительно перехода к топологическим произведениям, гомоморфным образам с фактортопологией (при условии, что они являются топологическими алгебрами) и топологическим подалгебрам. Многообразие топологических алгебр называется *широким*, если оно замкнуто относительно перехода к непрерывным гомоморфным образам (при том же условии). Многообразие топологических алгебр, определённое системой тождеств (то есть состоящее из всех топологических алгебр, в которых выполнены эти тождества), называется *полным*.

Мы рассматриваем лишь *нетривиальные* многообразия топологических алгебр, т.е. многообразия, содержащие хотя бы одну алгебру, состоящую более чем из одного элемента.

Пусть A — топологическая алгебра. Через $\bar{A}$ мы будем обозначать ту же алгебру, но без топологии. Для данного многообразия $\mathcal{V}$ топологических алгебр через $\bar{\mathcal{V}}$ мы будем обозначать класс соответствующих абстрактных

алгебр:

$$\overline{\mathcal{V}} = \{\overline{A} : A \in \mathcal{V}\}.$$

Отметим, что по теореме Биркгофа [9] любое многообразие абстрактных алгебр определяется тождествами (состоит из всех Σ -алгебр, в которых выполнены данные тождества). В случае многообразия топологических алгебр это не так, однако известно [30], что если $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, то $\overline{\mathcal{V}}$ — многообразие абстрактных алгебр.

Определение 1.2 ([4]). *Свободной топологической алгеброй произвольно-го топологического пространства X в данном многообразии $\mathcal{V}$ топологических алгебр называется топологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}} : X \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X)$ со свойствами:*

- 1) алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ порождается множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f : X \rightarrow A$ в произвольную топологическую алгебру $A \in \mathcal{V}$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h : F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$ такой, что $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Предложение 1.1. *Пусть $\mathcal{T}$ — топология пространства X . Топология на $F_{\mathcal{V}}(X)$ является самой сильной из согласованных со всеми операциями топологий, индуцирующих на $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ топологию $\mathcal{T}'$, относительно которой отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ непрерывно.*

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр и X — топологическое пространство. Тогда существует свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}} : X \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X)$. Кроме того,*

- 1) абстрактная алгебра $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}$ изоморфна свободной алгебре, порождённой множеством X в многообразии $\overline{\mathcal{V}}$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f : X \rightarrow A$, где $A \in \mathcal{V}$, гомоморфизм $h : F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$, для которого $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$, единствен;
- 3) отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ инъективно;
- 4) алгебра $F(X)$ и отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ определены однозначно с точностью до топологического изоморфизма, т.е. если алгебра F и отображение φ удовлетворяют условиям в определении 1.2, то существует изоморфизм $i : F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow F$, являющийся гомеоморфизмом, для которого $\varphi = i \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Теорема 1.3. Если $\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр и X — тихоновское пространство, то отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ из определения свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ является топологическим вложением, а сама алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ является функционально хаусдорфовым пространством.

Второй раздел первой главы посвящён абсолютно свободным топологическим алгебрам.

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{W}$ — многообразие всех топологических алгебр данной сигнатуры Σ . Свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{W}}(X)$ называется абсолютно свободной топологической Σ -алгеброй пространства X и обозначается $W^t(X)$.

Пусть X — топологическое пространство. Из теоремы 1.1 вытекает, что абсолютно свободная топологическая алгебра пространства X существует и изоморфна алгебре термов $W(X)$. Второй раздел первой главы диссертации завершается конструктивным описанием абсолютно свободной топологической Σ -алгебры $W^t(X)$ и изоморфизма $\Phi: W^t(X) \rightarrow W(X)$.

Глава 2 посвящена мальцевским алгебрам, их строению и свойствам. В первом разделе приводятся основные определения и свойства абстрактных и топологических мальцевских алгебр.

Определение 2.1 ([26]). Пусть X — множество и $R_1, R_2 \subset X \times X$ — произвольные отношения на множестве X . Произведением конгруэнций $R_1 \circ R_2$ называется множество пар (p, q) , где $p, q \in X$, определяемое условием: $(p, q) \in R_1 \circ R_2$ тогда и только тогда, когда найдётся элемент t такой, что $(p, t) \in R_2$, $(t, q) \in R_1$. Конгруэнции R_1 и R_2 называются перестановочными, если $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Отметим [5], что произведение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда эти отношения перестановочны.

Следующее определение восходит к работе А.И. Мальцева [3].

Определение 2.2. Конгруэнц-перестановочными называются многообразия, в которых любые две конгруэнции перестановочны.

Теорема 2.1 ([3]). Многообразие топологических алгебр $\mathcal{W}$ конгруэнц-перестановочно тогда и только тогда, когда среди термов данного многообразия найдётся терм Мальцева, то есть многочлен $f(x, y, z)$, удовлетворяющий условиям $f(x, x, y) = y$ и $f(x, y, y) = x$ для всех $x, y \in A$, где A — любая алгебра из $\mathcal{W}$.

Топологической мальцевской алгеброй называется топологическая алгебра, среди производных операций которой найдётся операция μ , удовлетворяющая тождествам

$$x = \mu(x, y, y) = \mu(y, y, x).$$

При этом тернарная операция μ называется *операцией Мальцева*. Многообразие топологических алгебр сигнатуры $\{\mu\}$, где μ — тернарная операция, удовлетворяющая выписанным выше тождествам, будем обозначать $\mathcal{M}$.

Определение 2.3. Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве A . *Насыщением* множества $U \subset A$ относительно $\sim$ или $\sim$ -*насыщением* множества U называется множество

$$\{y \in A : \exists x \in U(x \sim y)\}.$$

Следующая теорема была сформулирована и доказана Мальцевым [4] для так называемых примитивных классов топологических алгебр, т.е. классов всех хаусдорфовых топологических алгебр данной сигнатуры, в которых выполнены данные тождества.

Теорема 2.2. Пусть $\mathcal{V}$ — конгруэнц-перестановочное многообразие топологических алгебр, $\sim$ — конгруэнция на произвольной алгебре $A \in \mathcal{V}$. Тогда $\sim$ -насыщение произвольного открытого подмножества $U \subset A$ открыто.

Замечание 2.1. Если X — любое топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на X и $X/\sim$ — факторпространство пространства X (т.е. множество $X/\sim$ с фактортопологией), то естественное факторное отображение $f: X \rightarrow X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда насыщение любого открытого множества $U \subset X$ относительно $\sim$ открыто.

Следствие 2.1. Для любой топологической алгебры A из конгруэнц-перестановочного многообразия определена топологическая факторалгебра по любой конгруэнции $\sim$. А именно, все операции на каждой абстрактной факторалгебре $\overline{A/\sim}$ непрерывны относительно фактортопологии, причём каноническое отображение $A \rightarrow \overline{A/\sim}$ — непрерывный открытый гомоморфизм.

Следствие 2.2. Для любых топологических алгебр A и B из любого конгруэнц-перестановочного многообразия топологических алгебр любой факторный гомоморфизм $h: A \rightarrow B$ открыт.

Пример 2.1. Существует многообразие топологических алгебр, в котором переход к факторалгебрам не сохраняет непрерывность операций.

Предложение 2.1. Все T_0 -пространства, допускающие непрерывные операции Мальцева, хаусдорфовы.

Следствие 2.3. Если A — T_0 -пространство, допускающее непрерывную операцию Мальцева, то любые две точки имеют непересекающиеся окрестности с непересекающимися замыканиями.

Замечание 2.2. Мальцевская алгебра, являющаяся T_0 -пространством, не обязана быть регулярной.

Теорема 2.3. Пусть $\mathcal{V}$ — конгруэнц-перестановочное многообразие топологических алгебр. Тогда для любой алгебры $A \in \mathcal{V}$ и любой конгруэнции R на A следующие условия эквивалентны:

- 1) топологическая факторалгебра A/R хаусдорфова;
- 2) все классы эквивалентности R замкнуты в A ;
- 3) отношение R замкнуто в $A \times A$.

Более того, если A — подалгебра алгебры $B \in \mathcal{V}$, то замыкание множества R в $B \times B$ является конгруэнцией на замыкании алгебры A в B .

Второй раздел второй главы посвящён свободным топологическим мальцевским алгебрам.

Определение 2.4. Свободной топологической мальцевской алгеброй пространства X называется свободная топологическая алгебра пространства X в многообразии $\mathcal{M}$. Иначе говоря, $M(X)$ — топологическая алгебра, для которой существует непрерывное отображение $i_X: X \rightarrow M(X)$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $M(X)$ алгебраически порождается множеством $i_X(X)$;
- 2) для любой алгебры $M \in \mathcal{M}$ и для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow M$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow M$ такой, что $f = h \circ i_X$.

Теорема 2.4. 1) Для любого топологического пространства X определена свободная мальцевская топологическая алгебра $M(X)$ (вместе с соответствующим непрерывным отображением $i_X: X \rightarrow M(X)$). Она единственна с точностью до топологического изоморфизма.

- 2) Отображение $i_X: X \rightarrow M(X)$ инъективно и алгебра $M(X)$ свободно порождена множеством $i_X(X)$.
- 3) Каждая топологическая мальцевская алгебра M является образом топологической алгебры $M(M)$ при непрерывном открытом гомоморфизме, являющемся ретракцией. Следовательно, каждая топологическая мальцевская алгебра является факторалгеброй некоторой свободной топологической мальцевской алгебры.

- 4) Для всякого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow M(Y)$, для которого $i_Y \circ f = h \circ i_X$, и если $i_Y \circ f \circ i_X^{-1}: i_X(X) \rightarrow i_Y(Y)$ факторно, то h открыто.
- 5) Если $M(X)$ — T_0 -пространство, то $i(X)$ замкнуто в $M(X)$.
- 6) Если X — тихоновское пространство, то X гомеоморфно вложено в $M(X)$ в качестве замкнутого подпространства.
- 7) Если X функционально хаусдорфово, то $M(X)$ также функционально хаусдорфово.

Вместе с многообразием мальцевских алгебр $\mathcal{M}$ в диссертации рассматривается многообразие тихоновских мальцевских алгебр $\mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$, которое состоит из всех топологических мальцевских алгебр, являющихся тихоновскими пространствами.

Определение 2.5. Свободной тихоновской мальцевской алгеброй $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ тихоновского пространства X называется алгебра из $\mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$, для которой найдётся непрерывное отображение $i_X: X \rightarrow M^{3\frac{1}{2}}(X)$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ порождается множеством $i_X(X)$;
- 2) Для любой топологической алгебры $M \in \mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$ и любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow M$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: M^{3\frac{1}{2}}(X) \rightarrow M$ такой, что $f = h \circ i_X$.

Теорема 2.5. 1) Для любого топологического пространства X определена свободная тихоновская мальцевская алгебра $M^{3\frac{1}{2}}(X) \in \mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$. Она единственна с точностью до топологического изоморфизма.

- 2) Отображение i_X — топологическое вложение пространства X в $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ в качестве замкнутого подпространства.
- 3) Алгебра $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ свободно порождается множеством $i_X(X) = X$.
- 4) Каждая тихоновская мальцевская алгебра M является образом алгебры $M^{3\frac{1}{2}}(M)$ при непрерывном открытом гомоморфизме, являющемся ретракцией. Следовательно, каждая тихоновская топологическая мальцевская алгебра является факторпространством свободной тихоновской мальцевской алгебры.
- 5) Любое факторное отображение $X \rightarrow M$, где $M \in \mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$, продолжается до открытого гомоморфизма $M^{3\frac{1}{2}}(X) \rightarrow M$.

При исследовании свободных мальцевских алгебр конструкция абсолютно свободной топологической алгебры оказывается особенно полезной. Дopusкая вольность речи, мы называем абсолютно свободную топологическую алгебру сигнатуры $\{\mu\}$, где μ — тернарная операция, *абсолютно свободной мальцевской алгеброй*. Согласно общей конструкции абсолютно свободной топологической алгебры, изложенной в параграфе 1.2, *абсолютно свободная мальцевская алгебра* $W^t(X)$ пространства X определяется по индукции следующим образом. Положим

$$\begin{aligned} W_0^t(X) &= X; \\ W_1^t(X) &= W_0^t(X) \times W_0^t(X) \times W_0^t(X); \\ W_n^t(X) &= \bigoplus_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ \max(i,j,k) = n-1}} W_i^t(X) \times W_j^t(X) \times W_k^t(X). \end{aligned}$$

Очевидно, $W_i^t(X) \cap W_j^t(X) = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть

$$W^t(X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} W_i^t(X).$$

Тернарную операцию μ на $W(X)^t$ зададим так:

$$\mu(x, y, z) = (x, y, z) \in W_i^t(X) \times W_j^t(X)^t \times W_k^t(X) \subset W_{\max\{i,j,k\}+1}^t(X).$$

Легко видеть, что эта операция непрерывна.

Определим отношение R на $W^t(X)$ следующим образом. Будем считать, что xRy , если найдётся $z \in W^t(X)$ такой, что $x = (z, z, y) = (y, z, z)$. Пусть $\sim$ — минимальная конгруэнция, содержащая R (то есть конгруэнция, являющаяся пересечением всех конгруэнций, содержащих R). Тогда $M(X) = W^t(X) \setminus \sim$. Пусть j — соответствующий факторный гомоморфизм. Положим

$$M_k(X) = j(W_k^t(X))$$

при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Предложение 2.2. *Топологическое пространство X является мальцевским тогда и только тогда, когда оно является ретрактом пространства $M_1(X)$.*

Теорема 2.6. *Пусть X — тихоновское пространство и $Y \subset X$ — его замкнутое подмножество. Тогда*

- все $M_n(X)$ замкнуты в $M(X)$;
- подалгебра $\langle Y \rangle$ алгебры $M(X)$, порождённая множеством Y , замкнута в $M(X)$.

Накладывая на операцию Мальцева естественное условие ассоциативности, мы приходим к определению груды. Топологическим грудам посвящён третий раздел второй главы.

Определение 2.6. *Грудой* называется множество с тернарной операцией $[[* * *]]$, удовлетворяющей системе тождеств:

$$\begin{aligned} [[xyz] uv] &= [x [uzv] v] = [xy [zuu]], \\ [xyu] &= [yux] = x. \end{aligned}$$

Из теоремы Бэра–Вагнера следует, что на всякой груде существуют производные групповые операции [4]. Различие лишь в том, что в груде нет фиксированной единицы. Таким образом, топологические груды (которые можно назвать ассоциативными мальцевскими пространствами) тесно связаны с топологическими группами.

Свободную топологическую группу $F(X)$ тихоновского пространства X можно представить в виде:

$$F(X) = \bigcup_{k \in \omega} F_k(X),$$

где $F_k(X) = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} : n \leq k, \varepsilon_i = \pm 1, x_i \in X\}$. Пусть $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$, тогда каждое подпространство $F_k(X)$ является образом пространства $(X \oplus \{e\} \oplus X^{-1})^k$ при естественном отображении (умножении)

$$m_k(x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_n^{\varepsilon_n}) = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}.$$

Определим свободную топологическую груду $G(X)$ как подпространство в свободной топологической группе $F(X)$:

$$G(X) = \bigcup_{n \in \omega} G_n(X), \text{ где}$$

$$G_n(X) = \{x_1 \cdot x_2^{-1} \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{2n}^{-1} \cdot x_{2n+1}\} \subset F_{2n+1}(X).$$

Операцию μ на $G(X)$ определим так: $\mu(a, b, c) = a \cdot b^{-1} \cdot c$. Отметим, что с этой операцией $G(X)$ действительно является грудой, так как

$$\mu(\mu(a, b, c), d, e) = \mu(a, \mu(d, c, b), e) = \mu(a, b, \mu(c, d, e)).$$

Теорема 2.7. Пусть $\mathcal{V}$ — полное топологическое подмногообразие многообразия $\mathcal{M}$, т.е. класс топологических мальцевских алгебр сигнатуры $\{\mu\}$, являющийся полным топологическим многообразием. Тогда для каждого топологического пространства X свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ является топологической факторалгеброй алгебры $M(X)$. В частности, для тихоновского пространства X топологическая груда $G(X)$ — факторпространство пространства $M(X)$.

Предложение 2.3. *Определённая выше топологическая груда $G(X)$ вместе с тождественным вложением $X \rightarrow G(X)$ является свободной топологической группой пространства X .*

В диссертации приведён пример пространства X , для которого $M_1(X)$ и $G_1(X)$ не гомеоморфны.

Предложение 2.4. *Пусть X — тихоновское пространство и отображение*

$$\bar{m}_3 = m_3|_{X \times X^{-1} \times X}: X \times X^{-1} \times X \rightarrow G_1(X), (x, y^{-1}, z) \mapsto xy^{-1}z$$

факторно, тогда $M_1(X)$ гомеоморфно пространству $G_1(X)$. Если, кроме того, X — мальцевское пространство, то X — ретракт пространства $G_1(X)$.

Условие факторности операции $\bar{m}_3$ (или m_3) — достаточное, но не необходимое условие того, что тихоновское мальцевское пространство X является ретрактом пространства $G_1(X)$.

Предложение 2.5. *Пусть X — тихоновское пространство, для которого $M(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $M_n(X)$, $n \geq 0$. Тогда $G(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $G_n(X)$, $n \geq 0$.*

Предложение 2.6. *Топологическое пространство X является ретрактом топологической группы тогда и только тогда, когда X является ретрактом груды $G(X)$.*

В последнем разделе второй главы приводится явное описание свободной мальцевской алгебры.

В главе 3 рассматривается важный частный случай топологических алгебр, а именно, булевы топологические группы или, что то же самое, топологические векторные пространства над полем $\mathbb{F}_2$. Третья глава целиком посвящена доказательству того, что свободные булевы группы кружевных пространств [23] являются кружевными, а значит, на них распространяется знаменитая теорема Дугунджи о существовании оператора продолжения.

Глава 4 посвящена изучению квазитопологических алгебр, то есть универсальных алгебр с раздельно непрерывными операциями. Определения и теоремы этой главы во многом аналогичны определениям и теоремам главы 1.

В первом разделе приводятся необходимые определения и доказываются основные свойства квазитопологических алгебр.

Определение 4.1. *Квазитопологическая алгебра сигнатуры Σ — это алгебра A с топологией, относительно которой все операции $\sigma: A^n \rightarrow A$, где $n \geq 0$ и $\sigma \in \Sigma_n$, раздельно непрерывны.*

Следующая теорема является важным свойством квазитопологических алгебр, выгодно отличающим их от топологических.

Теорема 4.1. Пусть A — квазитопологическая алгебра, $\sim$ — конгруэнция на A и B — факторалгебра $A/\sim$ с фактортопологией относительно канонического гомоморфизма. Тогда B является квазитопологической алгеброй, то есть операции на B раздельно непрерывны.

Определение 4.2. Многообразием квазитопологических алгебр называется любой класс квазитопологических алгебр, замкнутый относительно перехода к топологическим произведениям, образам гомоморфизмов с фактортопологией и топологическим подалгебрам.

Определение 4.3. Полным многообразием квазитопологических алгебр называется класс квазитопологических алгебр, состоящий из всех алгебр, удовлетворяющих некоторой заданной системе тождеств над Σ .

Как и в случае топологических алгебр, для квазитопологической Σ -алгебры A через $\bar{A}$ мы обозначаем абстрактную Σ -алгебру, которая как множество совпадает с A и имеет те же операции. Аналогично, для многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр через $\bar{\mathcal{V}}$ мы обозначаем класс всех абстрактных алгебр, алгебраически изоморфных алгебрам из $\mathcal{V}$; он состоит из тех же алгебр, что и $\mathcal{V}$, только без топологии.

Предложение 4.1. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие квазитопологических алгебр. Тогда $\bar{\mathcal{V}}$ является многообразием абстрактных алгебр.

Определение 4.4. Свободной квазитопологической алгеброй произвольного топологического пространства X в данном многообразии $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр назовём квазитопологическую алгебру $F_{\mathcal{V}}^q(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}^q(X)$ со свойствами:

- 1) алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ порождается множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$ в произвольную квазитопологическую алгебру $A \in \mathcal{V}$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: F_{\mathcal{V}}^q(X) \rightarrow A$ такой, что $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Предложение 4.2. Пусть $\mathcal{T}$ — топология пространства X . Топология на $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ является самой сильной из топологий, относительно которой все операции сигнатуры раздельно непрерывны и которые индуцируют на $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ топологию $\mathcal{T}'$, относительно которой отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ непрерывно.

Определение 4.5. Пусть $\mathcal{W}$ — многообразие всех топологических алгебр данной сигнатуры Σ . Свободная квазитопологическая алгебра $F_{\mathcal{W}}(X)$ называется абсолютно свободной квазитопологической Σ -алгеброй пространства X и обозначается $W^q(X)$.

Теорема 4.2. Пусть $\mathcal{V}$ — (нетривиальное) многообразие квазитопологических алгебр и X — топологическое пространство. Тогда существует свободная квазитопологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}^q(X)$. Кроме того,

- 1) абстрактная алгебра $\overline{F_{\mathcal{V}}^q(X)}$ изоморфна свободной алгебре множества X в многообразии $\overline{\mathcal{V}}$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$, где $A \in \mathcal{V}$, гомоморфизм $h: F_{\mathcal{V}}^q(X) \rightarrow A$, для которого $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$, единствен;
- 3) отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ инъективно;
- 4) алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ и отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ определены однозначно с точностью до топологического изоморфизма, т.е. если алгебра F и отображение φ удовлетворяют условиям в определении 4.4, то существует изоморфизм $i: F_{\mathcal{V}}^q(X) \rightarrow F$, являющийся гомеоморфизмом, для которого $\varphi = i \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Во втором разделе четвёртой главы описана конструкция абсолютно свободной квазитопологической алгебры $W^q(X)$ топологического пространства X : она совершенно аналогична конструкции абсолютно свободной топологической алгебры, единственное отличие состоит в том, что обычные произведения пространств заменяются на кросс-произведения.

Следующая теорема демонстрирует ещё одно отличие квазитопологических алгебр от топологических:

Теорема 4.4. Для любого топологического пространства X и любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр топология свободной квазитопологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ является фактортопологией относительно естественного гомоморфизма Q алгебры $W^q(X)$ на $F_{\mathcal{V}}(X)$.

Теорема 4.5. Пусть $\mathcal{V}$ — полное многообразие квазитопологических алгебр, X — топологическое пространство, $\Phi: W^q(X) \rightarrow W(X)$ — алгебраический изоморфизм из раздела 4.3, $\sim$ — конгруэнция на $W(X)$, для которой $W(X)/\sim$ является абстрактной свободной алгеброй $F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$ в абстрактном многообразии $\overline{\mathcal{V}}$, $f: W(X) \rightarrow W(X)/\sim$ — факторотображение и $Q = \Phi \circ f$. Положим $F_{\mathcal{V}}(X) = W(X)/\sim$ с фактортопологией относительно отображения Q и $\varphi_X^{\mathcal{V}} = Q$.

Тогда $F_{\mathcal{V}}(X)$ с отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ является свободной квазитопологической алгеброй пространства X в многообразии $\mathcal{V}$.

Ещё одно свойство, которое выгодно отличает квазитопологические алгебры от топологических, сформулировано в следующей теореме.

Теорема 4.6. Для любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр и всякого топологического пространства X свободная квазитопологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $F_{\mathcal{V}}^q(X) = \bigcup_{n \geq 0} F_n(X)$.

Четвертый раздел четвёртой главы посвящён аксиомам отделимости в квазитопологических алгебрах

Теорема 4.7. Пусть X — тихоновское пространство, $\mathcal{V}$ — полное многообразие квазитопологических алгебр и $F_{\mathcal{V}}(X)$ вместе с отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ — свободная квазитопологическая алгебра пространства X в $\mathcal{V}$. Тогда $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ — гомеоморфное вложение, $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ замкнуто в $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ и $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ является хаусдорфовым пространством.

Теорема 4.8. Пусть X — функционально хаусдорфово пространство, тогда пространство $F_{\mathcal{V}}(X)$ тоже функционально хаусдорфово для любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр.

Глава 5 посвящена изучению квазитопологических алгебр, то есть квазитопологических алгебр, среди производных операций которых найдётся раздельно непрерывная операция Мальцева. Как обычно, в первом разделе содержатся определения и основные свойства квазимальцевских алгебр.

Определение 5.1. Квазимальцевской алгеброй мы будем называть квазитопологическую алгебру с квазинепрерывной операцией Мальцева μ . Многообразие квазимальцевских алгебр сигнатуры $\{\mu\}$ будем называть *многообразием квазимальцевских алгебр* и обозначать через $\mathcal{M}^q$. Свободную квазитопологическую группу топологического пространства X в этом многообразии будем называть *свободной квазимальцевской алгеброй* пространства X и обозначать через $M^q(X)$.

В первом разделе содержится также описание конструкции абсолютно свободной квазимальцевской алгебры $W^q(X)$ (т.е. абсолютно свободной квазитопологической алгебры сигнатуры $\{\mu\}$, где μ — тернарная операция). Она представляет собой частный случай конструкции абсолютно свободной квазитопологической алгебры произвольной сигнатуры, описанной ранее.

Теорема 5.1. Для любого топологического пространства X пространство $M^q(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $M^q(X) = \bigcup_{n \geq 0} M_n^q(X)$.

Во втором разделе рассматриваются аксиомы отделимости в квазимальцевских алгебрах.

Предложение 5.1. Все T_0 -пространства, допускающие раздельно непрерывные операции Мальцева, являются также T_1 -пространствами.

Теорема 5.3. *Всякое T_1 -пространство X гомеоморфно вкладывается в $M^q(X)$.*

В третьем разделе рассматриваются ретракты квазитопологических групп. Напомним, что *квазитопологической группой* называется группа G с топологией, относительно которой умножение раздельно непрерывно, а операция взятия обратного элемента непрерывна. Мы будем обозначать свободную квазитопологическую алгебру топологического пространства X в многообразии всех квазитопологических групп через $F^q(X)$.

Теорема 5.5. *Всякое квазимальцевское пространство X является ретрактом своей свободной квазитопологической группы $F^q(X)$.*

Теорема 5.6. *Всякое тихоновское квазимальцевское пространство X гомеоморфно ретракту тихоновской квазитопологической группы.*

Наконец, в последнем разделе мы доказываем следующую теорему.

Теорема 5.9. *Пусть X — тихоновское пространство и $Y \subseteq X$. Тогда тождественное вложение $Y \rightarrow X$ продолжается до замкнутого вложения $M^q(Y) \rightarrow M^q(X)$ тогда и только тогда, когда Y замкнуто в X .*

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность д.ф.-м.н. Сипачёвой Ольге Викторовне за постановку задач, научное руководство, заботу, терпение и помощь в работе.

Автор глубоко благодарен Тэтару Антонине Константиновне и Тэтару Людмиле Штефановне за полезные обсуждения и всестороннюю поддержку.

Автор благодарен кафедре общей топологии и геометрии за доброжелательную и творческую атмосферу.

Основные понятия и предварительные сведения

Для множества целых неотрицательных чисел мы используем обозначение ω .

Пусть A — любое непустое множество. Произвольное отображение $A^n \rightarrow A$, $n \in \omega$, называется *n -арной операцией на множестве A* . Сигнатурой называется множество Σ символов вместе с отображением $\alpha: \Sigma \rightarrow \omega$, ставящим каждому символу операции из Σ его *арность*. Множество $\Sigma_n = \alpha^{-1}(\{n\})$ является семейством символов n -арных операций; при этом $\Sigma = \bigcup_{n \in \omega} \Sigma_n$. Предположим, что с каждым символом $\sigma \in \Sigma$ ассоциирована операция $\sigma^A: A^n \rightarrow A$. Множество A с такой структурой называется *универсальной алгеброй сигнатуры Σ* или *Σ -алгеброй*. В дальнейшем под алгеброй мы всегда подразумеваем универсальную алгебру некоторой сигнатуры Σ . Верхний индекс A у обозначений операций на алгебре A мы, как правило, будем опускать. Основными объектами исследования в диссертации являются топологические и квазитопологические алгебры, а также многообразия топологических и квазитопологических алгебр. Понятия топологической алгебры и многообразия топологических алгебр восходят к работам Мальцева [3], [4] (см. также [30]); понятия квазитопологической алгебры и многообразия квазитопологических алгебр были введены автором в работе [39].

Определение 0.1. Алгебра A сигнатуры Σ называется *топологической (квазитопологической) Σ -алгеброй*, если на A задана *согласованная топология*, т.е. топология, относительно которой все операции из Σ непрерывны (раздельно непрерывны).

Алгебра A сигнатуры Σ без топологии называется *абстрактной Σ -алгеброй*.

Подалгебра B данной Σ -алгебры A определяется как подмножество алгебры A , замкнутое относительно всех операций $\sigma \in \Sigma$, то есть такое, что $\sigma(B^n) \subset B$ для каждого $\sigma \in \Sigma_n$. Говорят, что алгебра A *порождается множеством $X \subset A$* , если она не имеет собственных подалгебр, содержащих X .

Для данных Σ -алгебр A и B отображение $f: A \rightarrow B$ называется *согласованным с операцией $\sigma \in \Sigma_n$* , если

$$f(\sigma^A(x_1, \dots, x_n)) = \sigma^B(f(x_1), \dots, f(x_n))$$

при всех $x_1, \dots, x_n \in A$. Отображение f , согласованное со всеми операциями из Σ , называется *гомоморфизмом* алгебр. Биактивный гомоморфизм f называется *изоморфизмом* алгебр. Изоморфизм, являющийся гомеоморфизмом топологических алгебр, называется *топологическим изоморфизмом* алгебр. Тот факт, что алгебры A и B изоморфны, записывается формулой $A \cong B$.

Пусть $\sim$ — какое-то отношение эквивалентности на универсальной алгебре A сигнатуры Σ . Обозначим класс эквивалентности, содержащий элемент x , как $[x]_{\sim}$. Отношение $\sim$ называется *согласованным с операцией* $\sigma \in \Sigma_n$, если из эквивалентностей $x_k \sim y_k$, $k = 1, \dots, n$, вытекает эквивалентность $\sigma(x_1, \dots, x_n) \sim \sigma(y_1, \dots, y_n)$. Отношение эквивалентности, согласованное со всеми операциями, называется *конгруэнцией*. Фактормножество $A/\sim$ по произвольной конгруэнции является алгеброй той же сигнатуры Σ с операциями $\sigma([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) = [\sigma(x_1, \dots, x_n)]_{\sim}$ (из определения конгруэнции следует, что они корректно определены). Она называется *факторалгеброй* алгебры A по конгруэнции $\sim$. Всякая конгруэнция порождает сюръективный *канонический гомоморфизм* $h: A \rightarrow A/\sim$, $h: x \mapsto [x]_{\sim}$, и наоборот, всякий сюръективный гомоморфизм $h: A \rightarrow B$ порождает конгруэнцию $\ker h = \{(x, y) \in A \times A : h(x) = h(y)\}$, факторалгебра алгебры A по которой изоморфна алгебре B (она называется *ядром* гомоморфизма h). Мы будем отождествлять образ алгебры при гомоморфизме с её факторалгеброй по ядру этого гомоморфизма.

Напомним, что *фактортопология* на фактормножестве $X/\sim$ (где $\sim$ — отношение эквивалентности) состоит из всех множеств $U \subset X/\sim$ таких, что множество $\{x \in X : [x] \in U\}$ открыто. Сюръективное отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств X и Y называется *факторным*, если множество $U \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ открыто в X . Если $f: X \rightarrow Y$ — факторное отображение, то топология на Y называется *фактортопологией относительно f* (или просто *фактортопологией*, если из контекста ясно, о каком отображении f идёт речь).

Топологической факторалгеброй топологической алгебры A по конгруэнции $\sim$ назовём факторалгебру $A/\sim$ с фактортопологией. Образ топологической алгебры A при гомоморфизме, являющемся факторным отображением, мы тоже будем называть топологической факторалгеброй алгебры A .

Для любой сигнатуры Σ и любого множества символов X *термами* или *словами* над X называются формальные выражения, состоящие из конечных наборов символов из Σ и X , скобок и запятых. Каждому терму соответствуют его *переменные*, а также неотрицательное целое число — *ступень*. Термы, их переменные и ступени определяются рекурсивно:

- Каждый символ $x \in X$ — терм нулевой ступени, а его переменная — x . Каждая 0-арная операция тоже является термом нулевой ступени (без переменных).
- Если $n > 0$, $\sigma \in \Sigma_n$ и $t_1, \dots, t_n$ — термы ступеней $k_1, \dots, k_n$, то $\sigma(t_1, \dots, t_n)$ — терм ступени $\max\{k_1, \dots, k_n\} + 1$, а его переменные — это переменные термов $t_1, \dots, t_n$.

Будем обозначать множество всех термов k -й ступени через $T_k(X)$. Под

записью $t(x_1, \dots, x_n)$, где t — терм, мы будем подразумевать, что все переменные терма t содержатся среди $x_1, \dots, x_n$ (при этом некоторые из элементов $x_1, \dots, x_n$ могут не быть переменными терма t).

Любое непустое множество X порождает алгебру $W(X)$ сигнатуры Σ , называемую *абсолютно свободной Σ -алгеброй*, которая состоит из всех термов с переменными из X . Таким образом, $W(X) = \bigcup_{n \geq 0} T_n(X)$.

Каждый терм t с k переменными естественным образом определяет операцию $t^A: A^k \rightarrow A$ на любой алгебре A сигнатуры Σ . Такие операции называются *производными операциями* или *полиномами* (от k переменных). Следуя [3], мы будем называть полиномы, которые определяются термами n -й степени, *полиномами n -степени*.

Определение 0.2 (см. [9]). *Многообразием абстрактных Σ -алгебр* называется класс Σ -алгебр, замкнутый относительно операций декартовых произведений, перехода к подалгебрам и гомоморфным образам.

Определение 0.3 (см. [9]). *Свободная алгебра* в многообразии $\mathcal{V}$ над множеством X — это алгебра $F_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$, порождённая множеством X , со следующим *универсальным свойством*: для любой алгебры $A \in \mathcal{V}$ и любого отображения $f: X \rightarrow A$ существует гомоморфизм $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$, продолжающий f .

Хорошо известно, что такой гомоморфизм $\hat{f}$ единствен, все свободные алгебры над X изоморфны и каждая алгебра из $\mathcal{V}$, порождённая множеством X , является факторалгеброй алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ (см., например, [22, с. 162, 163]). При этом $F_{\mathcal{V}}(X) = \bigcup_{n \geq 0} F_n(X)$, где $F_n(X)$ — множество значений полиномов n -й степени на элементах множества X .

Тождеством сигнатуры Σ называется формула вида

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (t = s),$$

где $x_1, \dots, x_n$ — символы переменных, а t и s — термы, все переменные которых входят в набор $x_1, x_2, \dots, x_n$. По традиции символы $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n$, как правило, опускаются.

Пусть A — топологическая алгебра. Через $\bar{A}$ мы будем обозначать ту же алгебру, но без топологии. Для данного многообразия $\mathcal{V}$ топологических алгебр через $\bar{\mathcal{V}}$ мы будем обозначать класс соответствующих абстрактных алгебр:

$$\bar{\mathcal{V}} = \{\bar{A} : A \in \mathcal{V}\}.$$

Абсолютно свободные Σ -алгебры свободны (в многообразии всех Σ -алгебр) и любая Σ -алгебра является факторалгеброй абсолютно свободной. Действительно, пусть A — Σ -алгебра, порождённая множеством $X \subset A$ (в качестве X можно взять, например, A). По определению свободной алгебры тождественное вложение $X \hookrightarrow A$ продолжается до гомоморфизма

$h: W(X) \rightarrow A$. Так как $h(W(X))$ — подалгебра алгебры A , содержащая X , то h сюръективен. Таким образом, любой элемент a алгебры A является значением некоторого полинома $p(x_1, \dots, x_n)$ на некотором наборе попарно различных элементов $a_1, \dots, a_n \in X \subset A$ (этот полином определяется термом $p = p(x_1, \dots, x_n) \in W(X)$, для которого $a = h(p)$; если $a_i = a_j$ для $i < j \leq n$, то вместо термина $p(x_1, \dots, x_n)$ мы можем взять терм p' , определённый правилом $p'(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$). Из определения свободной алгебры видно также, что если $p, q \in W(X)$ — термы, все переменные которых содержатся среди $x_1, \dots, x_n$, элементы $a_1, \dots, a_n \in X$ попарно различны и $p(a_1, \dots, a_n) = q(a_1, \dots, a_n)$, то тождество $p = q$ выполнено во всех алгебрах $A \in \mathcal{V}$.

Замечание 0.1. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие универсальных алгебр, X и Y — множества, $f: X \rightarrow Y$ — биекция, алгебра $A \in \mathcal{V}$ порождена множеством X , $h: A \rightarrow F_{\mathcal{V}}(Y)$ — гомоморфизм и $h|_X = f$. Тогда h является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть $a, b \in A$. Рассмотрим термы p и q и попарно различные элементы $a_1, \dots, a_n \in X$, для которых $p(a_1, \dots, a_n) = a$ и $q(a_1, \dots, a_n) = b$. Поскольку h — гомоморфизм, имеем $h(a) = p(f(a_1), \dots, f(a_n))$ и $h(b) = q(f(a_1), \dots, f(a_n))$, причём все $f(a_i)$ попарно различны, так как f — биекция. Если $h(a) = h(b)$, то во всех алгебрах из многообразия $\mathcal{V}$ (в частности, в алгебре A) выполнено тождество $p = q$, поэтому в этом случае $a = b$. Отсюда вытекает инъективность гомоморфизма h . Её сюръективность следует из того, что $h(A)$ — подалгебра алгебры $F_{\mathcal{V}}(Y)$, потому что $F_{\mathcal{V}}(Y)$ — гомоморфизм, и из того, что алгебра $F_{\mathcal{V}}(Y)$ порождена множеством $h(X) = Y$. $\square$

Всюду ниже естественный гомоморфизм из абсолютно свободной алгебры $W(X)$ на свободную алгебру $F_{\mathcal{V}}(X)$ в данном многообразии $\mathcal{V}$ будем обозначать через Q :

$$Q: W(X) \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X).$$

Лемма 0.1. Пусть $\mathcal{V}$ — любое многообразие абстрактных алгебр, X — непустое множество и Y — его непустое подмножество. Тогда подалгебра $\langle Y \rangle$ свободной алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$, порождённая множеством Y , является свободной алгеброй $F_{\mathcal{V}}(X)$.

Доказательство. Проверим, что любое отображение $f: Y \rightarrow A \in \mathcal{V}$ продолжается до гомоморфизма $\tilde{f}: \langle Y \rangle \rightarrow A$. Выберем любую точку $y_0 \in Y$ и продолжим f до отображения $\tilde{f}: X \rightarrow A$ правилом:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in Y, \\ f(y_0), & \text{если } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Пусть $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$ — гомоморфизм, продолжающий f . Тогда гомоморфизм $\hat{f} = \hat{f}|_{\langle Y \rangle}: \langle Y \rangle \rightarrow A$ тоже продолжает f . $\square$

Лемма 0.2. Пусть X — множество, $Y \subset X$ непусто и $y_0 \in Y$. Определим отображение $f: X \rightarrow Y \subset W(Y)$ правилом

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in Y, \\ y_0, & \text{если } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Пусть $\tilde{f}: W(X) \rightarrow W(Y)$ — гомоморфизм абсолютно свободных алгебр, продолжающий отображение f . Предположим, что $x \in W(X)$ и $Q(x) \in F_{\mathcal{V}}(Y)^1$. Тогда $Q(x) = Q(\tilde{f}(x))$.

Доказательство. Отображение $f: X \rightarrow Y$ можно трактовать как отображение $X \rightarrow F_{\mathcal{V}}(Y)$, ведь $Y \subset F_{\mathcal{V}}(Y)$. Пусть $\hat{f}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow F_{\mathcal{V}}(Y)$ — продолжающий его гомоморфизм. Имеем $\hat{f}|_Y = \text{id}_Y$ и $\hat{f}|_Y = \text{id}_Y$, так как $f|_Y = \text{id}_Y$. В силу леммы 1 подалгебры алгебр $W(X)$ и $F_{\mathcal{V}}(X)$, порождённые множеством Y , — это свободные алгебры $W(Y)$ и $F_{\mathcal{V}}(Y)$. Гомоморфизмы, продолжающие отображение $f|_Y: Y \rightarrow Y$ на эти свободные алгебры, единственны. Таковыми являются тождественные гомоморфизмы (так как $f|_Y = \text{id}_Y$), а также $\hat{f}|_{W(Y)}$ и $\hat{f}|_{F_{\mathcal{V}}(Y)}$. Значит, $\hat{f}|_{W(Y)} = \text{id}_{W(Y)}$ и $\hat{f}|_{F_{\mathcal{V}}(X)} = \text{id}_{F_{\mathcal{V}}(Y)}$. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} W(X) & \xrightarrow{Q} & F_{\mathcal{V}}(X) \\ \hat{f} \downarrow & & \downarrow \hat{f} \\ W(Y) & \xrightarrow{Q|_{W(Y)}} & F_{\mathcal{V}}(Y) \end{array}$$

Она коммутативна, потому что обе композиции $\hat{f} \circ Q$ и $Q \circ \hat{f}$ являются гомоморфизмами $W(X) \rightarrow F_{\mathcal{V}}(Y)$, продолжающими одно и то же отображение $f: X \rightarrow Y \subset F_{\mathcal{V}}(Y)$. Значит, $Q(\hat{f}(x)) = \hat{f}(Q(x))$ для любого $x \in W(X)$. Если при этом $Q(x) \in F_{\mathcal{V}}(Y)$, то $\hat{f}(Q(x)) = Q(x)$. $\square$

Определение 0.4. Топологическое пространство X называется *индуктивным пределом* относительно разложения $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_{\alpha}$, если произвольное множество U открыто в X тогда и только тогда, когда $U \cap X_{\alpha}$ открыто в подпространстве X_{α} при всех $\alpha \in A$.

¹Напомним, что по лемме 1 $F_{\mathcal{V}}(Y) = \langle Y \rangle \subset F_{\mathcal{V}}(X)$.

Лемма 0.3. Если пространство X является индуктивным пределом своих подпространств X_n , $n \in \omega$, и пространство Y является образом пространства X при факторном отображении f , то Y является индуктивным пределом своих подпространств $f(X_n)$, $n \in \omega$.

Доказательство. Пусть $U \subset Y$ и каждое пересечение $U \cap f(X_n)$, $n \in \omega$, открыто в $f(X_n)$, т.е. для каждого $n \in \omega$ существует открытое множество $U_n \subset Y$, для которого $U \cap f(X_n) = U_n \cap f(X_n)$. Для каждого $n \in \omega$ множество $f^{-1}(U_n)$ открыто в X (в силу непрерывности отображения f) и, следовательно, $f^{-1}(U_n) \cap X_n$ открыто в X_n . Из того, что $X_n \subset f^{-1}(f(X_n))$, следует, что $f^{-1}(U_n) \cap X_n = f^{-1}(U_n \cap f(X_n)) \cap X_n = f^{-1}(U \cap f(X_n)) \cap X_n = f^{-1}(U) \cap X_n$. Таким образом, каждое множество $f^{-1}(U) \cap X_n$ открыто в X_n , а значит, $f^{-1}(U)$ открыто в X , потому что X имеет топологию индуктивного предела. Пользуясь факторностью отображения f , заключаем, что U открыто в Y . $\square$

Определение 0.5 ([18]). Кросс-произведение $X_1 \otimes X_2$ топологических пространств X_1 и X_2 — это декартово произведение множеств X_1 и X_2 с кросс-топологией, которая определяется следующим образом: подмножество $U \subset X_1 \otimes X_2$ объявим открытым, если $\pi_1(U \cap X_1 \times \{y\})$ открыто в X_1 при всех $y \in X_2$ и $\pi_2(U \cap \{x\} \times X_2)$ открыто в X_2 при всех $x \in X_1$ (здесь π_1 и π_2 — проектирования на первый и второй сомножитель соответственно).

Понятие кросс-произведения очевидным образом распространяется на случай любого конечного числа сомножителей. Напомним, что суммой $\bigoplus_{i \in I} X_i$ топологических пространств X_i , $i \in I$, называется объединение попарно непересекающихся гомеоморфных копий этих пространств, снабжённое топологией индуктивного предела, т.е. топологией, относительно которой каждое слагаемое X_i вложено в $\bigoplus_{i \in I} X_i$ в качестве открыто-замкнутого подпространства.

Замечание 0.2. Если Y — замкнутое подмножество пространства X , то $Y \otimes Y$ замкнуто в $X \otimes X$ (потому что $Y \times Y$ замкнуто в $X \times X$, а топология пространств $X \otimes X$ сильнее, чем топология пространства $X \times X$).

Если даны отображения $\varphi_i: X_i \rightarrow Y$, где X_i , $i \in I$, и Y — топологические пространства, то суммой отображений φ_i назовём отображение $\bigoplus_{i \in I} \varphi_i: \bigoplus_{i \in I} X_i \rightarrow Y$ такое, что $\bigoplus_{i \in I} \varphi_i|_{X_i} = \varphi_i$ для всех $i \in I$.

Пусть даны топологические пространства X_i и Y_i ($i \in I$) и отображения $\varphi_i: X_i \rightarrow Y_i$, тогда кросс-произведение $\bigotimes_{i \in I} \varphi_i: \bigotimes_{i \in I} X_i \rightarrow \bigotimes_{i \in I} Y_i$ — это обычное декартово произведение отображений φ_i , рассматриваемое как отображение соответствующих кросс-произведений. Нам понадобятся следующие свойства отображений (см., например, [18]):

- Раздельная непрерывность отображения $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ в произвольное пространство Y относительно обычной топологии произведения на $X_1 \times X_2$ эквивалентна обычной непрерывности отображения f относительно кросс-топологии на $X_1 \otimes X_2$.
- Сумма отображений непрерывна тогда и только тогда, когда все слагаемые непрерывны.
- Кросс-произведение $\bigotimes_{i \in I} \varphi_i$ непрерывно (факторно) тогда и только тогда, когда непрерывны (факторны) все φ_i .

Нам потребуется

Определение 0.6 ([35]). *Мальцевским пространством* называется топологическое пространство X , на котором определена непрерывная относительно заданной топологии *операция Мальцева*, то есть тернарная операция μ , удовлетворяющая условию $\mu(x, y, y) = \mu(y, y, x) = x$ для любых элементов $x, y \in X$.

1. Свободные топологические алгебры

1.1. Основные понятия

и свойства топологических алгебр

Определение 1.1 (см. [30]). *Многообразием* топологических алгебр называется любой класс топологических алгебр с одинаковой сигнатурой, замкнутый относительно перехода к топологическим произведениям, гомоморфным образам с фактортопологией (при условии, что они являются топологическими алгебрами) и топологическим подалгебрам. Многообразие топологических алгебр называется *широким*, если оно замкнуто относительно перехода к непрерывным гомоморфным образам (при том же условии). Многообразие топологических алгебр, определённое системой тождеств (то есть состоящее из всех топологических алгебр, в которых выполнены эти тождества), называется *полным*.

Всюду ниже будем рассматривать лишь *нетривиальные* многообразия топологических алгебр, т.е. многообразия, содержащие хотя бы одну алгебру, состоящую более чем из одного элемента.

Отметим, что по теореме Биркгофа (см. [9]) любое многообразие абстрактных алгебр определяется тождествами (состоит из всех Σ -алгебр, в которых выполнены данные тождества).

Лемма 1.1 ([30]). *Если $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, то $\overline{\mathcal{V}}$ — многообразие абстрактных алгебр.*

Лемма 1.2 ([30]). *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр, $A \in \mathcal{V}$ и B — топологическая алгебра с антидискретной топологией, для которой $\overline{B} \cong \overline{A}$. Тогда $B \in \mathcal{V}$.*

Определение 1.2 (см. [4]). *Свободной топологической алгеброй* произвольного топологического пространства X в данном многообразии $\mathcal{V}$ топологических алгебр называется топологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X)$ со свойствами:

- 1) алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ порождается множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$ в произвольную топологическую алгебру $A \in \mathcal{V}$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$ такой, что $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Предложение 1.1. *Пусть $\mathcal{T}$ — топология пространства X . Топология на $F_{\mathcal{V}}(X)$ является самой сильной из согласованных со всеми операциями топологий, индуцирующей на $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ топологию $\mathcal{T}'$, относительно которой отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}''$ — любая топология на $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}$, согласованная со всеми операциями и индуцирующая на $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ топологию $\mathcal{T}'$, относительно которой отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ непрерывно. Тогда отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow (\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}, \mathcal{T}'')$ непрерывно. Согласно пункту 2 определения для непрерывного отображения $f = \varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow (\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}, \mathcal{T}'')$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow (\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}, \mathcal{T}'')$, для которого верно, что $f = \varphi_X^{\mathcal{V}} = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$. Этим условием гомоморфизм h определён однозначно, поскольку алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ порождена множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$, т.е. любой её элемент является значением некоторого многочлена на некотором наборе элементов этого множества. Отсюда и из того, что $F_{\mathcal{V}}(X)$ и $(\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}, \mathcal{T}'')$ совпадают как абстрактные алгебры, следует тождественность гомоморфизма h , так как тождественный гомоморфизм $\text{id}: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow (\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}, \mathcal{T}'')$ удовлетворяет тому же условию $\varphi_X^{\mathcal{V}} = \text{id} \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$. Следовательно, каждое множество, открытое в топологии $\mathcal{T}''$ алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$, открыто и в топологии алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 1.1. Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие топологических алгебр и X — топологическое пространство. Тогда существует свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X)$. Кроме того,

- 1) абстрактная алгебра $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}$ изоморфна свободной алгебре, порождённой множеством X в многообразии $\mathcal{V}$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$, где $A \in \mathcal{V}$, гомоморфизм $h: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$, для которого $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$, единствен;
- 3) отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ инъективно;
- 4) алгебра $F(X)$ и отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ определены однозначно с точностью до топологического изоморфизма, т.е. если алгебра F и отображение φ удовлетворяют условиям в определении 1.2, то существует изоморфизм $i: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow F$, являющийся гомеоморфизмом, для которого $\varphi = i \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Доказательство. Алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ и отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ строятся стандартным образом. А именно, пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ — множество топологических алгебр такое, что $|A| \leq |X| + |\Sigma|$ для $A \in \mathcal{M}$ и для каждой алгебры $B \in \mathcal{V}$ мощности $|B| \leq |X| + |\Sigma|$ найдётся алгебра $A \in \mathcal{M}$, топологически изоморфная алгебре B . В качестве такого множества $\mathcal{M}$ можно взять множество всех топологических алгебр, являющихся (как топологические пространства) подпространствами тихоновского куба $E^{2^{|X|+|\Sigma|}}$, где E — пространство $\{0, 1, 2\}$ с

топологией $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1, 2\}\}$. Семейство всех таких алгебр образует множество. Оно обладает нужным свойством, потому что всякое топологическое пространство мощности $\leq |X| + |\Sigma|$ имеет вес $\leq 2^{|X|+|\Sigma|}$ и всякое топологическое пространство мощности $\leq |X| + |\Sigma|$ и веса $\leq 2^{|X|+|\Sigma|}$ гомеоморфно подпространству куба $E^{2^{|X|+|\Sigma|}}$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi_X^\mathcal{V} = \bigtriangleup_{A \in \mathcal{M}} \bigtriangleup_{\Phi \in C(X, A)} \Phi: X \rightarrow P = \prod_{A \in \mathcal{M}} A^{C(X, A)},$$

где $C(X, A)$ есть множество непрерывных отображений из X в A , и подалгебру $F_\mathcal{V}(X)$ алгебры P , порождённую множеством $\varphi_X^\mathcal{V}(X)$. Пусть $A \in \mathcal{V}$ и $f: X \rightarrow A$ — любое непрерывное отображение. Образ $f(X)$ содержится в некоторой подалгебре B мощности $|B| \leq |X| + |\Sigma|$ алгебры A . Пусть $A_0 \in \mathcal{M}$ и $\psi: B \rightarrow A_0$ — топологический изоморфизм. Обозначим через $\pi: P \rightarrow A_0$ композицию проектирований произведения P на степень $A_0^{C(X, A_0)}$ и степени $A_0^{C(X, A_0)}$ на сомножитель, соответствующий отображению $\psi \circ f \in C(X, A_0)$. Сужение g отображения π на $F_\mathcal{V}(X)$ — непрерывный гомоморфизм. Для гомоморфизма $h = \psi^{-1} \circ g$ имеем $f = h \circ \varphi_X^\mathcal{V}$.

1 и 3. Рассмотрим многообразие $\overline{\mathcal{V}}$ и абстрактную свободную алгебру $F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$. Согласно лемме 1.1, многообразие $\mathcal{V}$ содержит алгебру $F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$ с некоторой согласованной топологией, и согласно лемме 1.2, в $\mathcal{V}$ содержится алгебра $(F_{\overline{\mathcal{V}}}(X), \mathcal{T}_0)$, где $\mathcal{T}_0$ — антидискретная топология. Пусть $f: X \rightarrow (F_{\overline{\mathcal{V}}}(X), \mathcal{T}_0)$ — тождественное отображение, являющееся, очевидно, непрерывным. Согласно пункту 2 определения 1.2 найдётся непрерывный гомоморфизм $h: F_\mathcal{V}(X) \rightarrow (F_{\overline{\mathcal{V}}}(X), \mathcal{T}_0)$ такой, что $f = h \circ \varphi_X^\mathcal{V}$. Так как f — инъекция, то $\varphi_X^\mathcal{V}$ — тоже инъекция, что доказывает пункт 3.

В силу замечания 0.1 h является изоморфизмом, что доказывает пункт 1.

2. Вытекает из пункта 1 и единственности гомоморфизма h для абстрактных алгебр $\overline{F_\mathcal{V}(X)} \cong F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$ и $\overline{A}$.

4. Пусть алгебра $F \in \mathcal{V}$ и отображение $\varphi: X \rightarrow F$ удовлетворяют условиям в определении 1.2. Тогда, согласно пункту 2 этого определения, найдутся непрерывные гомоморфизмы $h_1: F_\mathcal{V}(X) \rightarrow F$ и $h_2: F \rightarrow F_\mathcal{V}(X)$, для которых

$$\varphi_X^\mathcal{V} = h_2 \circ \varphi, \quad \varphi = h_1 \circ \varphi_X^\mathcal{V},$$

откуда $\varphi_X^\mathcal{V} = (h_2 \circ h_1) \circ \varphi_X^\mathcal{V}$, что говорит о биективности и взаимной обратности отображений h_1 и h_2 на $\varphi_X^\mathcal{V}(X)$ и $\varphi(X)$. Рассмотрим элемент $d \in F_\mathcal{V}(X)$. Согласно пункту 1 определения 1.2, $d = p(\varphi_X^\mathcal{V}(x_1), \dots, \varphi_X^\mathcal{V}(x_j))$ для некоторого полинома p . Тогда, так как h_1 и h_2 — гомоморфизмы, то

$$\begin{aligned} h_1(d) &= p(h_1(\varphi_X^\mathcal{V}(x_1)), \dots, h_1(\varphi_X^\mathcal{V}(x_j))) = p(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_j)) \in F; \\ h_2(h_1(d)) &= p(h_2(\varphi(x_1)), \dots, h_2(\varphi(x_j))) = p(\varphi_X^\mathcal{V}(x_1), \dots, \varphi_X^\mathcal{V}(x_j)) = d. \end{aligned}$$

Следовательно, h_1 и h_2 взаимно обратны на $F_{\mathcal{V}}(X)$ и на F . $\square$

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться следующей теоремой Сверчковского.

Теорема 1.2 ([32]). Пусть $F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$ — абстрактная свободная алгебра множества X . Пусть на X определена функционально хаусдорфова топология $\mathcal{T}$. Тогда на $F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$ существует топология $\mathcal{T}_F$ такая, что:

- 1) все операции на $(F_{\overline{\mathcal{V}}}(X), \mathcal{T}_F)$ непрерывны;
- 2) $(F_{\overline{\mathcal{V}}}(X), \mathcal{T}_F)$ — вполне регулярное пространство;
- 3) X — замкнутое подмножество в $(F_{\overline{\mathcal{V}}}(X), \mathcal{T}_F)$;
- 4) топология на X , индуцированная из $F_{\mathcal{V}}(X)$, не сильнее исходной топологии на X и совпадает с ней тогда и только тогда, когда X вполне регулярно.

Из теоремы Сверчковского вытекает следующее утверждение:

Теорема 1.3. Если $\mathcal{V}$ — полное многообразие топологических алгебр и X — тихоновское пространство, то отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ из определения свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ является топологическим вложением, причём $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ замкнуто в $F_{\mathcal{V}}(X)$, а сама алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ является функционально хаусдорфовым пространством.

Доказательство. Пусть $A = (F_{\overline{\mathcal{V}}}(X), \mathcal{T}_F)$ — топологическая алгебра из теоремы 1.2. В силу теоремы 1.1 A алгебраически изоморфна алгебре $F_{\mathcal{V}}(X)$. Так как $\mathcal{V}$ — полное многообразие, имеем $F_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$ и $A \in \mathcal{V}$. Следовательно, существует непрерывный гомоморфизм $\psi: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow A$, для которого $\text{id} = \psi \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$ (здесь id — тождественное вложение множества X в алгебру A). Из замечания 0.1 вытекает, что ψ — непрерывный изоморфизм. Так как X — тихоновское пространство, то A — вполне регулярное пространство. По предположению 1.1 топология свободной алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ сильнее вполне регулярной топологии на $\overline{F_{\mathcal{V}}(X)}$, которая индуцируется изоморфизмом ψ (т.е. состоит из прообразов $\psi^{-1}(U)$ всех открытых множеств $U \in \mathcal{T}_F$). Следовательно, $F_{\mathcal{V}}(X)$ функционально хаусдорфова и $\psi^{-1}(X) = \varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ замкнуто в $F_{\mathcal{V}}(X)$. Из того, что $\text{id} = \psi \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$ и $\text{id}: X \rightarrow A$ является топологическим вложением, следует, что $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ — топологическое вложение. $\square$

1.2. Абсолютно свободная топологическая алгебра

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{W}$ — многообразие всех топологических алгебр данной сигнатуры Σ . Свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{W}}(X)$ называется *абсолютно свободной топологической Σ -алгеброй* пространства X и обозначается $W^t(X)$.

Пусть X — топологическое пространство. Из теоремы 1.1 вытекает, что абсолютно свободная топологическая алгебра пространства X существует и изоморфна алгебре термов $W(X)$. В этом разделе мы конструктивно опишем абсолютно свободную топологическую Σ -алгебру $W^t(X)$ и изоморфизм $\Phi: W^t(X) \rightarrow W(X)$.

Напомним, что Σ представляет собой объединение множеств Σ_j операций конечной арности j :

$$\Sigma = \bigcup_{j \in \omega} \Sigma_j.$$

Будем строить $W^t(X)$ в соответствии с определением терма. На нулевом шаге рассматриваем топологическую сумму пространства X и множества Σ_0 , снабжённого дискретной топологией, то есть

$$W_0^t(X) = X \oplus \Sigma_0.$$

Элементы этого пространства являются символами переменных и 0-арными операциями (т.е. термами нулевой степени). Обозначим через Φ^0 тождественное отображение $W_0^t(X) \rightarrow T_0(X)$.

На первом шаге для каждого $j \in \omega$ и каждого $\sigma \in \Sigma_j$ обозначим через $(W_0^t(X)^j)_{\sigma}$ топологическую копию пространства $W_0^t(X)^j$. Наборы $(t_1, \dots, t_j) \in W_0^t(X)^j$, рассматриваемые как элементы именно этой копии, будем обозначать $(t_1, \dots, t_j)_{\sigma}$. Определим пространство $W_1^t(X)$ как топологическую сумму:

$$W_1^t(X) = \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_0^t(X)^j)_{\sigma}.$$

Каждый элемент каждого слагаемого $(W_0^t(X)^j)_{\sigma}$, где $\sigma \in \Sigma_j$, отождествим с термом первой степени с помощью отображений

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma}^1: (W_0^t(X)^j)_{\sigma} &\rightarrow T_1(X), \\ \Phi_{\sigma}^1((t_1, \dots, t_j)_{\sigma}) &= \sigma(t_1, \dots, t_j) \in T_1(X) \end{aligned}$$

для $\sigma \in \Sigma_j$, $j > 0$ и $t_1, \dots, t_j \in W_0^t(X) = X \oplus \Sigma_0 = T_0(X)$.

Заметим, что сумма $\Phi^1 = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_0} \Phi_{\sigma}^1$ представляет собой взаимно однозначное соответствие между $W_1^t(X)$ и множеством $T_1(X)$ всех термов первой степени.

Предположим, что $n > 0$ и мы уже определили пространство $W_{n-1}^t(X)$ и отождествили его с множеством всех термов $(n-1)$ -й степени посредством отображения Φ^{n-1} . Для каждого $j \in \omega$, каждого набора $(k_1, \dots, k_j)$, где $0 \leq k_m \leq n-1$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1$, и каждого $\sigma \in \Sigma_j$ обозначим через $(W_{k_1}^t(X) \times \dots \times W_{k_j}^t(X))_\sigma$ топологическую копию пространства $W_{k_1}^t(X) \times \dots \times W_{k_j}^t(X)$ и положим

$$W_n^t(X) = \bigoplus_{\substack{j>0 \\ 0 \leq k_1, \dots, k_j \leq n-1 \\ \max(k_1, \dots, k_n) = n-1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}^t(X) \times \dots \times W_{k_j}^t(X))_\sigma.$$

Для $j > 0$, неотрицательных целых $k_1, \dots, k_j$, удовлетворяющих условию $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1$, $i \in I_j$ и любого набора² $(t_1, \dots, t_j)_\sigma \in (W_{k_1}^t(X) \times \dots \times W_{k_j}^t(X))_\sigma$ положим

$$\Phi_{\sigma; k_1, \dots, k_j}^n((t_1, \dots, t_j)_\sigma) = \sigma(\Phi^{n-1}(t_1), \dots, \Phi^{n-1}(t_j)) \in T_n(X).$$

Тем самым мы определили отображение $\Phi_{\sigma; k_1, \dots, k_j}^n : (W_{k_1}^t \times \dots \times W_{k_j}^t)_\sigma \rightarrow T_n(X)$. Сумма Φ^n всех этих отображений представляет собой взаимно однозначное соответствие между $W_n^t(X)$ и множеством $T_n(X)$ всех термов n -й степени, так что мы можем отождествить множество $W_n^t(X)$ с множеством $T_n(X)$.

Заметим, что $W_n^t(X) \cap W_m^t(X) = \emptyset$, если $n \neq m$. В конце концов положим

$$W^t(X) = \bigoplus_{n \in \omega} W_n^t(X)$$

и

$$\Phi = \bigoplus_{n \in \omega} \Phi^n.$$

Отображение Φ осуществляет взаимно однозначное соответствие между множеством $W^t(X)$ и абсолютно свободной алгеброй $W(X) = \bigcup_{n \in \omega} T_n(X)$.

Операции $\sigma \in \Sigma$ на алгебре $W(X)$ естественным образом порождают операции на $W^t(X)$. А именно, пусть $j > 0$ и $t_1, \dots, t_j \in W^t(X)$. Для каждого $m \leq j$ элемент t_m содержится в ровно одном множестве $W_{n_m}^t(X)$. Положим $n = \max\{n_1, \dots, n_j\} + 1$ и

$$\sigma(t_1, \dots, t_j) = (t_1, \dots, t_j)_\sigma \in W_n^t(X).$$

Лемма 1.3. *Алгебра $W^t(X)$ является топологической Σ -алгеброй.*

²Через $(t_1, \dots, t_j)_\sigma$ мы обозначаем элемент пространства $W_{n_1}^t(X) \otimes \dots \otimes W_{n_j}^t(X)$, рассматриваемый как элемент σ -й копии этого пространства.

Доказательство. Мы должны проверить, что операции $\sigma \in \Sigma$, определённые на $W^t(X)$, непрерывны. Из определения операций на $W^t(X)$ видно, что сужение каждой операции $\sigma \in \Sigma_j$, $j > 0$, на каждое слагаемое $W_{n_1}^t(X) \otimes \cdots \otimes W_{n_j}^t(X)$ степени $W^t(X)^j$ представляет собой гомеоморфизм между $W_{n_1}^t(X) \times \cdots \times W_{n_j}^t(X)$ и $(W_{n_1}^t(X) \times \cdots \times W_{n_j}^t(X))_\sigma$. Значит, операция $\sigma \in \Sigma_j$ непрерывна как сумма непрерывных отображений:

$$\sigma = \bigoplus_{n_k \geq 0} \sigma|_{W_{n_1}^t(X) \times \cdots \times W_{n_j}^t(X)}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 1.4. *Для любой топологической алгебры $A \in \mathcal{W}$ и любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$ существует непрерывный гомоморфизм $\tilde{f}: W^t(X) \rightarrow A$, для которого $f = \tilde{f}|_X$.*

Доказательство. Для $j \geq 0$ обозначим операцию на A , соответствующую операции $\sigma \in \Sigma_j$ на $W^t(X)$, тем же символом. По определению операций σ на алгебре $W^t(X)$ всякий элемент множества $W_n^t(X)$ при $n > 0$ имеет вид $(x_1, \dots, x_j)_\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_j)$, где $j > 0$, $\sigma \in \Sigma_j$, $x_i \in W_{k_i}^t(X)$ для $i \leq j$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n - 1$. Определим отображения $f_n: W_n^t(X) \rightarrow A$ для $n \in \omega$ следующим образом. Положим

$$f_0|_X = f, \quad f_0|_{\Sigma_0} = \text{id}$$

(здесь id — тождественное отображение). Отображение f_0 непрерывно, поскольку f непрерывно на X , а слагаемое Σ_0 дискретно. Для $\sigma \in \Sigma_j$, $j > 0$, положим

$$f_1^\sigma((x_1, \dots, x_j)_\sigma) = \sigma(f_0(x_1), \dots, f_0(x_j))$$

для $x_1, \dots, x_j \in W_0^t(X) = X \cup \Sigma_0$, то есть для $(x_1, \dots, x_j)_\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_j) \in W_1^t(X)$. Каждое отображение $f_1^\sigma: W_1^t(X) \rightarrow A$ непрерывно, поскольку оно является композицией непрерывных отображений f_0 и σ , и оно согласовано с операцией σ в естественном смысле. Положим $f_1 = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_0} f_1^\sigma$. Это непрерывное отображение из $W_1^t(X)$ в A , согласованное со всеми операциями σ . Предположим, что $n > 1$ и мы уже определили для всех $k < n$ непрерывные отображения $f_k: W_k^t(X) \rightarrow A$, согласованные со всеми операциями. Для $\sigma \in \Sigma_j$, $j > 0$, положим

$$f_n^\sigma((x_1, \dots, x_j)_\sigma) = \sigma(f_{k_1}(x_1), \dots, f_{k_j}(x_j))$$

для всех $x_1 \in W_{k_1}^t(X), \dots, x_j \in W_{k_j}^t(X)$, где $0 \leq k_1, \dots, k_j \leq n - 1$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n - 1$, то есть для $(x_1, \dots, x_j)_\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_j) \in W_n^t(X)$, и $f_n = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_0} f_n^\sigma$. Определим теперь отображение $\tilde{f}: W^t(X) \rightarrow A$ так:

$$\tilde{f} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} f_n.$$

Оно является гомоморфизмом, продолжающим отображение f . Притом оно непрерывно, будучи суммой непрерывных отображений f_n . $\square$

Теорема 1.4. *Для топологического пространства X топологическая алгебра $W^t(X)$ вместе с тождественным вложением $\varphi_X^{\mathcal{W}} = \text{id}_X^{\mathcal{W}} : X \rightarrow W^t(X)$ является абсолютно свободной топологической Σ -алгеброй. Как абстрактная алгебра $W^t(X)$ является абсолютно свободной Σ -алгеброй над множеством X .*

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из лемм 1.3 и 1.4. Второе утверждение следует из того, что отображение Φ является изоморфизмом между алгеброй $W^t(X)$, рассматриваемой как абстрактная алгебра, и абстрактной абсолютно свободной алгеброй $W(X)$. $\square$

2. Мальцевские алгебры

2.1. Определение и основные свойства мальцевских алгебр

Определение 2.1 ([26]). Пусть X — множество и $R_1, R_2 \subset X \times X$ — произвольные отношения на множестве X . *Произведением* конгруэнций $R_1 \circ R_2$ называется множество пар (p, q) , где $p, q \in X$, определяемое условием: $(p, q) \in R_1 \circ R_2$ тогда и только тогда, когда найдётся элемент t такой, что $(p, t) \in R_2$, $(t, q) \in R_1$. Конгруэнции R_1, R_2 называются *перестановочными*, если $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Отметим, что произведение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда эти отношения перестановочны (см., например, [5]).

Следующее определение восходит к работе А.И. Мальцева [3].

Определение 2.2. *Конгруэнцы-перестановочными* называются многообразия в которых любые две конгруэнции перестановочны.

Теорема 2.1 ([3]). *Многообразие топологических алгебр $\mathcal{W}$ конгруэнцы-перестановочно тогда и только тогда, когда среди термов данного многообразия найдётся терм Мальцева, то есть многочлен $f(x, y, z)$, удовлетворяющий условиям $f(x, x, y) = y$ и $f(x, y, y) = x$ для всех $x, y \in A$, где A — любая алгебра из $\mathcal{W}$.*

Доказательство. Справедливость теоремы следует из леммы 1.1 и того факта, что наличие топологии на алгебрах никак не меняет её доказательства, проведённого в [3]. $\square$

Топологической мальцевской алгеброй мы будем называть топологическую алгебру, среди производных операций которой найдётся операция μ , удовлетворяющая тождествам

$$x = \mu(x, y, y) = \mu(y, y, x).$$

При этом тернарная операция μ называется *операцией Мальцева*, а определяющий её терм — *мальцевским термом*. Многообразие топологических алгебр сигнатуры $\{\mu\}$, где μ — тернарная операция, удовлетворяющая выписанным выше тождествам, будем обозначать $\mathcal{M}$.

Естественным примером мальцевской алгебры может служить группа G с операцией умножения $\cdot$. Операция Мальцева на ней определяется как $\mu(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$.

Другим примером мальцевской алгебры является левая лупа, определяемая как алгебра с двумя бинарными операциями $\cdot$ и $/$ и одной 0-арной операцией e (выделенный элемент), в которой выполняются тождества:

$$x \cdot (x \backslash y) = y, \quad x \backslash (x \cdot y) = y, \quad x \cdot e = x.$$

Терм Мальцева определяется как $\mu(x, y, z) = x \cdot (y \backslash z)$.

Наконец, мальцевской алгеброй является квазигруппа, т. е. алгебра с тремя бинарными операциями $\cdot$, $/$, $\backslash$, в которой выполняются тождества:

$$(y/x) \cdot y = y, \quad (y \cdot x)/x = x, \quad x \cdot (x \backslash y) = y, \quad x \backslash (x \cdot y) = y.$$

В данном случае термом Мальцева является $\mu(x, y, z) = (x/(y \backslash y)) \cdot (y \backslash z)$.

Определение 2.3. Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве A . *Насыщением* множества $U \subset A$ относительно $\sim$ или $\sim$ -*насыщением* множества U называется множество

$$\{y \in A : \exists x \in U(x \sim y)\}.$$

Следующая теорема была сформулирована и доказана в [4] для так называемых примитивных классов топологических алгебр, т.е. классов всех хаусдорфовых топологических алгебр данной сигнатуры, в которых выполнены данные тождества. Приводимое ниже доказательство аналогично доказательству, приведённому в [4].

Теорема 2.2. Пусть $\mathcal{V}$ — конгруэнц-перестановочное многообразие топологических алгебр и $\sim$ — конгруэнция на произвольной алгебре $A \in \mathcal{V}$. Тогда $\sim$ -насыщение произвольного открытого подмножества $U \subset A$ открыто.

Доказательство. Согласно теореме 2.1 на каждой алгебре $A \in \mathcal{V}$ определён мальцевский терм f . Пусть $U \subset A$ — открытое подмножество в A , а U^* — его $\sim$ -насыщение. Пусть U^* не открыто, то есть найдётся точка $x^* \in U^*$, не внутренняя по отношению к U^* . Во множестве U найдётся точка y такая, что $y \sim x^*$. Так как многочлен f — непрерывная функция, то $f(x, x^*, y)$ — непрерывная функция переменной x . Поскольку $f(x^*, x^*, y) = y$, для всякого открытого множества $U \ni y$ найдётся открытая окрестность V точки x^* такая, что $f(x, x^*, y) \in U$ для всех $x \in V$. Так как x^* — не внутренняя точка для U^* , то найдётся точка z такая, что $z \in V$ и $z \notin U^*$. Так как $y \sim x^*$, то $f(z, x^*, y) = f(z, y, y) = z \in U \subset U^*$ — противоречие. $\square$

Замечание 2.1. Если X — любое топологическое пространство, $\sim$ — отношение эквивалентности на X и $X/\sim$ — факторпространство пространства X (т.е. множество $X/\sim$ с фактортопологией), то естественное факторное отображение $f: X \rightarrow X/\sim$ открыто тогда и только тогда, когда насыщение любого открытого множества $U \subset X$ относительно $\sim$ открыто.

Доказательство. Действительно, очевидно, $\sim$ -насыщением любого множества $U \subset X$ является $f^{-1}(f(U))$. Если отображение f открыто, то образ $f(U)$ каждого открытого множества $U \subset X$ открыт, а значит, открыт и прообраз $f^{-1}(f(U))$ (в силу непрерывности отображения f). Обратно, если $\sim$ -насыщение $f^{-1}(f(U))$ каждого открытого множества $U \subset X$ открыто, то в силу факторности отображения f открыт и его образ $f(U)$. $\square$

Следствие 2.1. *Для любой топологической алгебры A из конгруэнц-перестановочного многообразия определена топологическая факторалгебра по любой конгруэнции $\sim$. А именно, все операции на каждой абстрактной факторалгебре $A/\sim$ непрерывны относительно фактортопологии, причём каноническое отображение $A \rightarrow A/\sim$ — непрерывный открытый гомоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\sim$ — конгруэнция. Рассмотрим фактортопологию на $A/\sim$. Согласно замечанию 2.1 каноническое отображение $f: A \rightarrow A/\sim$ открыто. Пусть σ — произвольная n -арная операция в алгебре A , докажем её непрерывность на $A/\sim$. Рассмотрим элементы $[x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim$ алгебры $A/\sim$. Пусть U — произвольное открытое множество, содержащее $\sigma([x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim)$. Тогда $V = f^{-1}(U)$ — открытая (в силу непрерывности отображения f) окрестность точки $\sigma(x_1, \dots, x_n)$. Операция σ непрерывна на алгебре A , поэтому найдутся открытые множества $V_1, \dots, V_n$, содержащие $x_1, \dots, x_n$ соответственно и такие, что $\sigma(V_1 \times \dots \times V_n) \subset V$. Так как $\sim$ — конгруэнция, то

$$\sigma(f(V_1) \times \dots \times f(V_n)) = f(\sigma(V_1 \times \dots \times V_n)) \subset f(V) = U.$$

Таким образом, для каждой открытой окрестности U точки $\sigma([x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim)$ найдутся открытые окрестности $f(V_1), \dots, f(V_n)$ точек $[x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim$, образ декартова произведения которых при отображении σ содержится в U . $\square$

Следствие 2.2. *Для любых топологических алгебр A и B из любого конгруэнц-перестановочного многообразия топологических алгебр любой факторный гомоморфизм $h: A \rightarrow B$ открыт.*

Пример 2.1. Существует многообразие топологических алгебр, в котором переход к факторалгебрам не сохраняет непрерывность операций.

Доказательство. Пусть $\mathscr{W}$ — полное многообразие с сигнатурой Σ как у группы (т.е. класс алгебр с тремя операциями — одной 0-арной, одной унарной и одной бинарной), но без тождеств. Рассмотрим свободную топологическую алгебру $F_{\mathscr{W}}(\mathbb{Q}) = W^t(\mathbb{Q})$ из многообразия $\mathscr{W}$ на пространстве рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Согласно лемме 1.4 найдётся непрерывный гомоморфизм

$h: W^t(\mathbb{Q}) \rightarrow F_G(\mathbb{Q})$, где $F_G(\mathbb{Q})$ — свободная топологическая группа пространства $\mathbb{Q}$ в смысле Граева (см., например, [1]), в которой роль единицы играет $0 \in \mathbb{Q}$. Поскольку пространство $W^t(X)$ является топологической суммой своих подпространств $W_n^t(X)$, если бы гомоморфизм h был факторным, то в силу леммы 0.3 топологическая группа $F_G(\mathbb{Q})$ была бы индуктивным пределом своих подпространств $F_n(\mathbb{Q}) = h(W_n^t(\mathbb{Q}))$, однако согласно [28, Theorem 4.1] это не так. Значит, гомоморфизм h не факторный, т.е. топология группы $F_G(\mathbb{Q})$ строго слабее фактортопологии. С другой стороны, в силу предложения 1.1, это самая сильная из всех групповых топологий $\mathcal{T}$ на $F_G(\mathbb{Q})$, относительно которых групповые операции непрерывны и $\mathbb{Q}$ гомеоморфно вкладывается в $(F_G(\mathbb{Q}), \mathcal{T})$. Следовательно, фактортопология строго сильнее любой такой топологии. Поскольку $\mathbb{Q}$ гомеоморфно вложено в $F_G(\mathbb{Q})$ с фактортопологией (так как сужение h на $\mathbb{Q} \subset W^t(\mathbb{Q})$ — тождественный гомеоморфизм), отсюда вытекает, что групповые операции на $F_G(\mathbb{Q})$ не непрерывны относительно фактортопологии. $\square$

Предложение 2.1. *Все T_0 -пространства, допускающие непрерывные операции Мальцева, хаусдорфовы.*

Доказательство. Это следует из того факта, что каждая T_0 топологическая алгебра из многообразия алгебр, в которых все конгруэнции перестановочны, хаусдорфова [30, corollary 2.7]. $\square$

Следствие 2.3. *Если A — T_0 -пространство, допускающее непрерывную операцию Мальцева, то любые две точки в A имеют непересекающиеся окрестности с непересекающимися замыканиями.*

Доказательство. Если A — T_0 -пространство, допускающее непрерывную операцию Мальцева μ , то A — T_2 -пространство, согласно предложению 2.1. Пусть $a, b \in A$ и U, V — открытые непересекающиеся множества, содержащие a и b соответственно. Операция μ непрерывна, поэтому из равенства $\mu(a, b, b) = a$ следует, что найдутся открытые множества $Z \ni a, W \ni b$ такие, что $\mu(Z \times W \times \{b\}) \subseteq U$.

Пусть существует $c \in Z \cap \overline{W}$, тогда $\mu(c, c, b) = b \notin \overline{U}$ и, в силу непрерывности операции μ , найдётся окрестность E точки c такая, что $\mu(E, E, b) \subset A \setminus \overline{U}$. При этом E , как окрестность точки c , принадлежащей пересечению замыканий Z и W , содержит точки $c_1 \in Z, c_2 \in W$ в противоречие с тем, что $\mu(Z, W, b) \subset U$. $\square$

Замечание 2.2. Мальцевская алгебра, являющаяся T_0 -пространством, не обязана быть регулярной. В качестве примера можно рассмотреть множество $\mathbb{Q}$ с топологией $\mathcal{T}$, база которой состоит из всевозможных открытых интервалов и множеств вида $(a, b) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \omega\}$. Топология $\mathcal{T}$ сильнее тополо-

гии на $\mathbb{Q}$, индуцированной из стандартной топологии вещественной прямой $\mathbb{R}$. Согласно теореме 2 из [21], $(\mathbb{Q}, \mathcal{T})$ — мальцевское пространство, причём оно, очевидно, не является регулярным.

Следующая теорема вытекает из [30, Corollary 2.4], [3, теорема 11] и [16, упражнение 2.4C(c)].

Теорема 2.3. Пусть $\mathcal{V}$ — конгруэнц-перестановочное многообразие топологических алгебр. Тогда для любой алгебры $A \in \mathcal{V}$ и любой конгруэнции $\sim$ на A следующие условия эквивалентны:

- 1) топологическая факторалгебра $A/\sim$ хаусдорфова;
- 2) все классы эквивалентности $\sim$ замкнуты в A ;
- 3) отношение $\sim$ замкнуто в $A \times A$.

Более того, если A — подалгебра алгебры $B \in \mathcal{V}$, то замыкание множества $\sim$ в $B \times B$ является конгруэнцией на замыкании алгебры A в B .

2.2. Свободная топологическая мальцевская алгебра

Определение 2.4. Свободной топологической мальцевской алгеброй пространства X называется свободная топологическая алгебра пространства X в многообразии $\mathcal{M}$. Иначе говоря, $M(X)$ — топологическая $\{\mu\}$ -алгебра, для которой существует непрерывное отображение $i_X: X \rightarrow M(X)$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $M(X)$ алгебраически порождается множеством $i_X(X)$;
- 2) для любой алгебры $M \in \mathcal{M}$ и для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow M$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow M$ такой, что $f = h \circ i_X$.

Теорема 2.4. 1) Для любого топологического пространства X определена свободная мальцевская топологическая алгебра $M(X)$ (вместе с соответствующим непрерывным отображением $i_X: X \rightarrow M(X)$). Она единственна с точностью до топологического изоморфизма.

- 2) Отображение $i_X: X \rightarrow M(X)$ инъективно и алгебра $M(X)$ свободно порождена множеством $i_X(X)$.
- 3) Каждая топологическая мальцевская алгебра M гомеоморфна подпространству $i_M(M)$ свободной топологической алгебры $M(M)$, которое является образом топологической алгебры $M(M)$ при непрерывном открытом гомоморфизме, являющемся ретракцией. Следовательно, каждая топологическая мальцевская алгебра является факторалгеброй некоторой свободной топологической мальцевской алгебры.

- 4) Для всякого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ найдётся непрерывный открытый гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow M(Y)$, для которого $i_Y \circ f = h \circ i_X$, и если $i_Y \circ f \circ i_X^{-1}: i_X(X) \rightarrow i_Y(Y)$ факторно, то h открыто.
- 5) Если $M(X)$ — T_0 -пространство, то $i(X)$ замкнуто в $M(X)$.
- 6) Если X — тихоновское пространство, то X гомеоморфно вложено в $M(X)$ в качестве замкнутого подпространства.
- 7) Если X функционально хаусдорфово, то $M(X)$ также функционально хаусдорфово.

Доказательство. Справедливость пунктов 1 и 2 следует из пунктов 1 и 3 теоремы 1.1.

Докажем пункт 3. Пусть M — произвольная мальцевская алгебра, тогда найдётся непрерывный гомоморфизм $h: M(M) \rightarrow M$ такой, что тождественный гомеоморфизм $f: M \rightarrow M$ равен $h \circ i_M$, откуда следует, что $i_M: M \rightarrow M(M)$ — гомеоморфное вложение, так что M можно отождествить с $i_M(M) \subset M(M)$, и h — ретракция пространства $M(M)$ на $i_M(M) = M$. Очевидно, для любого $X \subset M$ имеем $h^{-1}(X) \cap i_M(M) = i_M(X)$. Следовательно, если прообраз $h^{-1}(X)$ открыт в $M(M)$, то множество $i_M(X)$ открыто в $i_M(M)$. Поскольку i_M непрерывно и взаимно однозначно отображает M на $i_M(M)$, отсюда следует, что X открыто в M . Значит, h факторно. Так как в многообразии $\mathcal{M}$ конгруэнции на всех алгебрах перестановочны, то, по следствию 2.1, h — непрерывный открытый гомоморфизм и M — факторалгебра алгебры $M(M)$ по его ядру.

Докажем пункт 4. Для данного непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ рассмотрим непрерывный гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow M(Y)$, для которого $i_Y \circ f = h \circ i_X$. При этом h единствен, потому что $M(X)$ порождается множеством $i_X(X)$, и для любого терма t из языка многообразия $\mathcal{M}$ и любых элементов $x_1, \dots, x_n \in X$ (где n — количество переменных t) имеем $h(t(x_1, \dots, x_n)) = t(h(x_1), \dots, h(x_n))$.

Предположим, что композиция $i_Y \circ f \circ i_X^{-1}$ факторна (и, следовательно, сюръективна). Тогда h сюръективен, так как алгебра $M(Y)$ порождается множеством $i_Y(Y)$. Пусть $\tilde{M}(X)$ — топологическое факторпространство пространства $M(X)$ по ядру гомоморфизма h . Согласно следствию 2.1, $\tilde{M}(X)$ — мальцевская топологическая алгебра. Пусть $\tilde{h}$ — соответствующий канонический гомоморфизм, тогда тождественное отображение $\tilde{i}: \tilde{M}(X) \rightarrow M(Y)$ — непрерывный изоморфизм и $h = \tilde{i} \circ \tilde{h}$. Отображение $i_Y \circ f \circ i_X^{-1}$ совпадает с сужением гомоморфизма h на $i_X(X)$. Как отображение множеств без топологии оно также совпадает с сужением гомоморфизма $\tilde{h}$ на $i_X(X)$

(мы отождествляем $\tilde{M}(X)$ и $M(Y)$ как множества). Поскольку отображение $i_Y \circ f \circ i_X^{-1}$ факторно, топология его образа $i_Y(Y)$ является сильнейшей среди тех топологий, по отношению к которым оно непрерывно. Следовательно, $\tilde{i}^{-1}|_{i_Y(Y)} \circ i_Y: Y \rightarrow \tilde{M}(X)$ — непрерывная инъекция. Непрерывный гомоморфизм $g: M(Y) \rightarrow \tilde{M}(X)$, для которого $\tilde{i}^{-1}|_{i_Y(Y)} \circ i_Y = g \circ i_Y$, должен совпадать с $\tilde{i}^{-1}$ как отображение множеств, потому что алгебра $M(Y)$ свободно порождена множеством $i_Y(Y)$, а i_Y — инъекция. Таким образом, тождественный изоморфизм i — гомеоморфизм, а гомоморфизм h факторный. По следствию 2.1 он открыт.

Докажем пункт 5. Пусть $M(X) \in T_0$. Тогда пространство $M(X)$ хаусдорфово в силу предложения 2.1. Обозначим $M(X)$ как M и рассмотрим свободную мальцевскую алгебру $M(M)$ вместе с непрерывным отображением $i_M: M \rightarrow M(M)$. Из пункта 3 следует, что $i_M(M)$ является замкнутым подпространством алгебры $M(M)$ (так как любой ретракт хаусдорфова пространства замкнут), гомеоморфным пространству M ; мы будем отождествлять M с $i_M(M)$. Пусть M_X — подалгебра алгебры $M(M)$, порождённая множеством $i_M(i_X(X)) = i_X(X) \subset M$. Легко видеть, что алгебраически это свободная алгебра множества $i_X(X)$. Действительно, рассмотрим любое отображение f из $i_X(X)$ в $\{\mu\}$ -алгебру A . Сначала оно может быть продолжено до отображения (даже гомоморфизма) $\tilde{f}: M \rightarrow A$, так как $M = M(X)$ — свободная топологическая алгебра пространства X (а значит, абстрактная свободная алгебра множества $i_X(X)$), а затем и до гомоморфизма $f^*: M(M) \rightarrow A$, чьё сужение на M_X есть гомоморфизм $M_X \rightarrow A$, продолжающий f . Отметим, что $M_X \cap M = i_M(i_X(X)) = i_X(X)$. Действительно, ясно, что $i_X(X) \subset M_X$. Предположим, что $y_0 \in M \setminus i_X(X)$ и рассмотрим отображение (необязательно непрерывное) $g: M \rightarrow \{0, 1\}$, определённое условиями $g(y) = 1$ при $y = y_0$ и $g(y) = 0$ при $y \neq y_0$. Множество $\{0, 1\}$ допускает групповую структуру и, следовательно, операцию Мальцева. Следовательно, g продолжается до гомоморфизма абстрактной свободной $\{\mu\}$ -алгебры множества M (изоморфной алгебре $M(M)$) в $\{0, 1\}$. Прообраз нуля при этом гомоморфизме является подалгеброй алгебры $M(M)$, поскольку $\{0\}$ является подгруппой группы $\{0, 1\}$. Он содержит подалгебру M_X , порождённую множеством $i_X(X)$, и не содержит y_0 . Из произвольности выбора точки $y_0 \in M \setminus i_X(X)$ вытекает, что M_X не содержит ни одной точки из $M \setminus i_X(X)$.

Таким образом, M_X и $M(X)$ изоморфны как абстрактные алгебры. Кроме того, M_X с топологией, индуцированной из $M(M)$, является мальцевским пространством, содержащим $i_X(X)$ как замкнутое подпространство. Для непрерывного отображения $i_X: X \rightarrow i_X(X) \subset M_X$ существует непрерывный гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow M_X$, удовлетворяющий условию $i_X = h \circ i_X$ и являющийся изоморфизмом, так как алгебры M_X и $M(X)$ свободно по-

рождены множеством $i_X(X)$. Это означает, что на $M(X)$ существует более слабая топология, относительно которой $i_X(X)$ замкнуто. Из того, что M_X замкнуто в $M(M)$ и $M_X \cap M = i_X(X)$, следует, что $i_X(X)$ замкнуто в M_X . Следовательно, $i_X(X)$ замкнуто в $M(X)$.

Пункты 6 и 7 следуют из теоремы 1.3. □

Вместе с многообразием мальцевских алгебр $\mathcal{M}$ рассмотрим *многообразие тихоновских мальцевских алгебр* $\mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$, которое состоит из всех топологических мальцевских алгебр, являющихся тихоновскими пространствами.

Определение 2.5. *Свободной тихоновской мальцевской алгеброй $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ тихоновского пространства X называется алгебра из $\mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$, для которой найдётся непрерывное отображение $i_X: X \rightarrow M^{3\frac{1}{2}}(X)$, удовлетворяющее условиям:*

- 1) $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ порождается множеством $i_X(X)$;
- 2) для любой топологической алгебры $M \in \mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$ и любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow M$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: M^{3\frac{1}{2}}(X) \rightarrow M$ такой, что $f = h \circ i_X$.

Теорема 2.5. 1) *Для любого топологического пространства X определена свободная тихоновская мальцевская алгебра $M^{3\frac{1}{2}}(X) \in \mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$. Она единственна с точностью до топологического изоморфизма.*

- 2) *Отображение i_X — топологическое вложение, так что X может быть представлено как замкнутое подпространство в $M^{3\frac{1}{2}}(X)$.*
- 3) *Алгебра $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ свободно порождается множеством $i_X(X) = X$.*
- 4) *Каждая тихоновская мальцевская алгебра M является образом алгебры $M^{3\frac{1}{2}}(M)$ при непрерывном открытом гомоморфизме, являющемся ретракцией. Следовательно, каждая тихоновская топологическая мальцевская алгебра является факторпространством свободной тихоновской мальцевской алгебры.*
- 5) *Любое факторное отображение $X \rightarrow M$, где $M \in \mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$, продолжается до открытого гомоморфизма $M^{3\frac{1}{2}}(X) \rightarrow M$.*

Доказательство. Докажем пункт 1. Отметим, что в определении алгебры $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ достаточно потребовать, чтобы гомоморфизм h со свойством $f = h \circ i_X$ существовал только для непрерывных отображений $f: X \rightarrow M \in$

$\mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}(X)$, где алгебра M порождена множеством $f(X)$. Мощность любой такой алгебры M не превосходит $|X| \cdot \omega$ и, следовательно, её вес не превосходит $2^{|X| \cdot \omega}$. Легко видеть, что достаточно рассматривать отображения $f: X \rightarrow M$ с точностью до композиции с топологическими изоморфизмами на M . Таким образом, мы можем ограничиться лишь рассмотрением мальцевских алгебр M , являющихся подпространствами тихоновского куба $[0, 1]^{2^{|X| \cdot \omega}}$. Очевидно, что все такие мальцевские алгебры вместе с непрерывными отображениями f образуют множество. Теперь заиндексируем их элементами некоторого множества I : $f_\iota: X \rightarrow M_\iota$, $\iota \in I$. Положим $M^{3\frac{1}{2}}(X) = \Delta_{\iota \in I} f_\iota(X)$. Так определённая алгебра $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ вместе с непрерывным отображением $i_X = \Delta_{\iota \in I} X \rightarrow \prod_{\iota \in I} M_\iota$ будет мальцевской подалгеброй, порождённой множеством $i_X(X)$. Легко видеть, что i_X и $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ имеют требуемые свойства: всякое непрерывное отображение $f: X \rightarrow M \in \mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}(X)$ совпадает с f_ι для некоторого $\iota \in I$ (с точностью до топологического изоморфизма φ между M_ι и подалгеброй M , порождённой множеством $i_X(X)$), и искомым гомоморфизм h будет композицией сужения канонической проекции π_ι на $i_X(X)$ и φ . Единственность следует из того, что если $M_1(X)$ и $M_2(X)$ — свободные тихоновские мальцевские алгебры пространства X и $i_j: X \rightarrow M_j$ — соответствующие отображения i_X , то гомоморфизмы $h_1: M_1(X) \rightarrow M_2(X)$ и $h_2: M_2(X) \rightarrow M_1(X)$, для которых $i_2 = h_1 \circ i_1$, $i_1 = h_2 \circ i_2$, должны быть взаимно обратны и, следовательно, являться топологическими изоморфизмами.

Докажем пункт 2. Согласно теореме 1.2, существует тихоновская топология $\mathcal{T}$ на свободной абстрактной $\{\mu\}$ -алгебре $\overline{M(X)}$ множества X такая, что пространство X замкнуто вложено в $(\overline{M(X)}, \mathcal{T})$. По определению, для тождественного гомеоморфизма $f: X \rightarrow X$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: M^{3\frac{1}{2}}(X) \rightarrow \overline{M(X)}, \mathcal{T})$ такой, что $f = h \circ i_X(X)$. Отсюда видно, что i_X — топологическое вложение. Очевидно, что h — изоморфизм. Следовательно, пространства $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ и $\overline{M(X)}$ совпадают как множества, но топология на $M^{3\frac{1}{2}}(X)$ сильнее (нестрого), чем $\mathcal{T}$. Следовательно, $X = i_X(X)$ замкнуто в $M^{3\frac{1}{2}}(X)$. Отметим, что мы попутно доказали и пункт 3.

Доказательство пункта 4 повторяет доказательство пункта 3 предыдущей теоремы.

Докажем пункт 5. Пусть $M \in \mathcal{M}^{3\frac{1}{2}}$. Каждое факторное отображение $f: X \rightarrow M$ сюръективно, как и его гомоморфное продолжение $h: M^{3\frac{1}{2}}(X) \rightarrow M$. Пусть $\tilde{M}(X)$ — факторпространство топологической алгебры $M(X)$ по $\ker h$, и пусть $\tilde{h}$ — соответствующий канонический гомоморфизм. Тогда тождественное отображение $\tilde{i}: \tilde{M}(X) \rightarrow M$ — непрерывный изоморфизм и $h = \tilde{i} \circ \tilde{h}$. Отображение f совпадает с сужением гомоморфизма h на X и, как отображение множеств без топологии, оно также совпадает с суже-

нием $\tilde{h}|_X$ (так как $\tilde{M}(X)$ и M совпадают как множества). В силу того, что отображение f факторно, топология на его образе M — самая сильная среди всех топологий, относительно которых оно непрерывно. Но отображение $\tilde{h}|_X$ непрерывно по отношению к топологии на $\tilde{M}(X)$. Следовательно, топология на $\tilde{M}(X)$ слабее, чем на M , поэтому $\tilde{i}^{-1}$ непрерывно и изоморфизм $\tilde{i}$ является топологическим. Таким образом, гомоморфизм $h = \tilde{i} \circ \tilde{h}$ факторный. По теореме 2.2 он открыт. $\square$

При исследовании свободных мальцевских алгебр конструкция абсолютно свободной топологической алгебры оказывается особенно полезной. Допуская вольность речи, мы будем называть абсолютно свободную топологическую алгебру сигнатуры $\{\mu\}$, где μ — тернарная операция, *абсолютно свободной мальцевской алгеброй*. Согласно общей конструкции абсолютно свободной топологической алгебры, изложенной в параграфе 1.2, абсолютно свободная мальцевская алгебра $W^t(X)$ пространства X определяется по индукции следующим образом. Положим

$$\begin{aligned} W_0^t(X) &= X; \\ W_1^t(X) &= W_0^t(X) \times W_0^t(X) \times W_0^t(X); \\ W_n^t(X) &= \bigoplus_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ \max(i,j,k)=n-1}} W_i^t(X) \times W_j^t(X) \times W_k^t(X). \end{aligned}$$

Очевидно, $W_i^t(X) \cap W_j^t(X) = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть

$$W^t(X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} W_i^t(X).$$

Тернарную операцию μ на $W(X)^t$ зададим так:

$$\mu(x, y, z) = (x, y, z) \in W_i^t(X) \times W_j^t(X) \times W_k^t(X) \subset W_{\max\{i,j,k\}+1}^t(X).$$

Легко видеть, что эта операция непрерывна.

Определим отношение R на $W^t(X)$ следующим образом. Будем считать, что xRy , если найдётся $z \in W^t(X)$ такой, что $x = (z, z, y) = (y, z, z)$. Пусть $\sim$ — минимальная конгруэнция, содержащая R (то есть конгруэнция, являющаяся пересечением всех конгруэнций, содержащих R). Тогда $M(X) = W^t(X)/\sim$. Пусть Q — соответствующий факторный гомоморфизм. Положим

$$M_k(X) = Q(W_k^t(X))$$

при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Предложение 2.2. *Топологическое пространство X является мальцевским тогда и только тогда, когда оно является ретрактом пространства $M_1(X)$.*

Доказательство. Любое мальцевское пространство X является ретрактом пространства $M(X)$ согласно пункту 3 теоремы 2.4. Очевидно, что любое сужение ретракции на подпространство, содержащее ретракт, также является ретракцией.

Обратно: если $r: M_1(X) \rightarrow X$ — ретракция, то $r \circ Q|_{W_1(X)}: W_1(X) \rightarrow X$ — операция Мальцева (напомним, что $W_1(X) = X^3$). $\square$

Теорема 2.6. *Пусть X — тихоновское пространство и $Y \subset X$ — его замкнутое подмножество. Тогда*

- все $M_n(X)$ замкнуты в $M(X)$;
- подалгебра $\langle Y \rangle$ алгебры $M(X)$, порождённая множеством Y , замкнута в $M(X)$.

Доказательство. Пусть bX — хаусдорфова компактификация пространства X . Тогда алгебра $M(bX)$ хаусдорфова, и её подалгебра $\tilde{M}(X)$, порождённая множеством X , — топологическая мальцевская алгебра, содержащая X в качестве подпространства. Как абстрактная алгебра она совпадает с $M(X)$, но имеет более слабую топологию (по предложению 1.1). Для всех n множества $M_n(X)$ совпадают с $M_n(bX) \cap \tilde{M}(X)$. Ясно, что $M_n(bX)$ замкнуты в $M(bX)$, будучи образами компактов $W_n^t(bX)$ при непрерывном отображении $Q: W^t(bX) \rightarrow M(bX)$. Следовательно, они замкнуты в $\tilde{M}(X)$, а значит и в $M(X)$.

Пусть $Y \subset X$ замкнуто, $\bar{Y}$ — замыкание множества Y в bX и $\langle \bar{Y} \rangle$ — подалгебра алгебры $M(bX)$, порождённая множеством $\bar{Y}$. Тогда из конструкции абсолютно свободной алгебры вытекает, что $W^t(\bar{Y}) \cap W_n^t(bX)$ компактно и $Q(W^t(\bar{Y}) \cap W_n^t(bX)) = \langle \bar{Y} \rangle \cap M_n(bX)$ для каждого n . В силу следствия 1 из [4, с. 189] топология пространства $M(bX)$ является топологией индуктивного предела относительно разложения $M(bX) = \bigcup_{n \in \omega} M_n(bX)$, поэтому $\langle \bar{Y} \rangle$ замкнуто в $M_n(bX)$. Следовательно, $\langle Y \rangle = \tilde{M}(X) \cap \langle \bar{Y} \rangle$ замкнуто в $\tilde{M}(X)$ и, тем более, в $M(X)$. $\square$

2.3. Топологические груды

Накладывая на операцию Мальцева естественное условие ассоциативности, мы приходим к определению груды.

Определение 2.6. *Грудой* называется множество с тернарной операцией $[[*, *, *]]$, удовлетворяющей системе тождеств:

$$\begin{aligned} [[xyz] uv] &= [x [uzv] v] = [xy [zuv]], \\ [xyu] &= [yux] = x. \end{aligned}$$

Из теоремы Бэра–Вагнера следует, что на всякой груде существуют производные групповые операции [2]. Различие лишь в том, что в груде нет фиксированной единицы (в качестве единицы можно выбрать любой элемент груды и в зависимости от этого выбора определить умножение и инверсию).

Таким образом, топологические груды (которые можно назвать ассоциативными мальцевскими пространствами) тесно связаны с топологическими группами. Для тихоновских пространств свободную топологическую группу можно определить так:

Определение 2.7. *Свободной топологической группой* тихоновского пространства X называется топологическая группа, обладающая свойствами:

- 1) как абстрактная группа $F(X)$ является свободной группой, порождённой множеством X ;
- 2) любое непрерывное отображение $f: X \rightarrow G$ пространства X в топологическую группу G продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{f}: F(X) \rightarrow G$.

Свободную топологическую группу $F(X)$ тихоновского пространства X можно представить в виде

$$F(X) = \bigcup_{k \in \omega} F_k(X),$$

где $F_k(X) = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} : n \leq k, \varepsilon_i = \pm 1, x_i \in X\}$. Пусть $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ — гомеоморфная копия пространства X , не пересекающаяся с X , тогда каждое подпространство $F_k(X)$ является образом пространства $(X \oplus \{e\} \oplus X^{-1})^k$ при естественном отображении (умножении)

$$m_k(x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_n^{\varepsilon_n}) = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}.$$

Определим *топологическую груду* $G(X)$ как подпространство в свободной топологической группе $F(X)$:

$$G(X) = \bigcup_{n \in \omega} G_n(X), \text{ где}$$

$$G_n(X) = \{x_1 \cdot x_2^{-1} \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{2n}^{-1} \cdot x_{2n+1}\} \subset F_{2n+1}(X).$$

Операцию μ на $G(X)$ определим так: $\mu(a, b, c) = a \cdot b^{-1} \cdot c$. Отметим, что с этой операцией $G(X)$ действительно является грудой, так как

$$\mu(\mu(a, b, c), d, e) = \mu(a, \mu(d, c, b), e) = \mu(a, b, \mu(c, d, e)).$$

Теорема 2.7. Пусть $\mathcal{V}$ — полное топологическое подмногообразие многообразия $\mathcal{M}$, т.е. класс топологических мальцевских алгебр, являющийся полным топологическим многообразием. Тогда для каждого топологического пространства X свободная топологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ является топологической факторалгеброй алгебры $M(X)$. В частности, для тихоновского пространства X топологическая груда $G(X)$ — факторпространство пространства $M(X)$.

Доказательство. Пусть $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X)$ — отображение из определения свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$, и пусть $i_X: X \rightarrow M(X)$ — аналогичное отображение из определения свободной топологической алгебры $M(X)$ пространства X в многообразии $\mathcal{M}$. Случай, когда $\mathcal{V}$ состоит из единственной одноэлементной алгебры, тривиален, поэтому сразу предположим, что $\mathcal{V}$ содержит алгебры, содержащие более одного элемента (в этом случае $F_{\mathcal{V}}(X)$ свободно порождается множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$). Так как $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ непрерывно и $F_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{M}$, то найдётся непрерывный гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow F_{\mathcal{V}}(X)$ такой, что $\varphi_X^{\mathcal{V}} = h \circ i_X$. Отображение h сюръективно, так как $F_{\mathcal{V}}(X)$ порождается множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$. Следовательно, как абстрактная алгебра, $F_{\mathcal{V}}(X)$ является факторалгеброй $M(X)/\ker h$. Согласно следствию 2.1, топологическое факторпространство $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(X) = M(X)/\ker h$ — мальцевская топологическая алгебра. Она изоморфна алгебре $F_{\mathcal{V}}(X)$ как абстрактная алгебра (следовательно, все тождества, определённые в $\mathcal{V}$, выполнены и в $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$, то есть $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(X) \in \mathcal{V}$), и её топология является фактортопологией относительно отображения h . Значит, гомоморфизм $h: M(X) \rightarrow \tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$ остаётся непрерывным. Таким образом, отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow \tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$ тоже остаётся непрерывным. Следовательно, существует непрерывный гомоморфизм $f: F_{\mathcal{V}}(X) \rightarrow \tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$ такой, что $\varphi_X^{\mathcal{V}} = f \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$. Из того, что $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ — инъекция, а $F_{\mathcal{V}}(X)$ и $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$ свободно порождены множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$, следует, что f — тождественный гомоморфизм (см. замечание 0.1). Это означает, что топология алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ сильнее топологии алгебры $\tilde{F}_{\mathcal{V}}(X)$, т.е. совпадает с последней. Следовательно, $F_{\mathcal{V}}(X)$ — факторалгебра алгебры $M(X)$. $\square$

Предложение 2.3. Определённая выше топологическая груда $G(X)$ вместе с тождественным вложением $X \rightarrow G(X)$ является свободной топологической грудой пространства X .

Доказательство. Грота $G(X)$ свободно порождена множеством X , так как является алгебраической факторалгеброй свободной алгебры $M(X)$ по отношению ассоциативности. Из теоремы 2.7 и её доказательства следует, что для тихоновского пространства X грота $G(X)$ является свободной топологической гротой пространства X . Действительно, если $G_f(X)$ — свободная топологическая грота, порождённая пространством X (она существует по теореме 1.1), то тождественное вложение $X \rightarrow G(X)$ должно продолжаться до непрерывного гомоморфизма $G_f(X) \rightarrow G(X)$, и этот гомоморфизм должен быть изоморфизмом, потому что и $G_f(X)$, и $G(X)$ свободно порождены пространством X . В доказательстве теоремы 2.7 было показано, что топология на $G(X)$ является сильнейшей среди всех топологий, относительно которых операция Мальцева на $G(X)$ непрерывна и X содержится в $G(X)$ как подпространство. Таким образом, $G_f(X) = G(X)$. $\square$

Для тихоновского пространства X множество $M_1(X)$ очень похоже на подпространство $G_1(X) = \{xy^{-1}z \in F(X) : x, y, z \in X\}$ свободной топологической группы $F(X)$. Более того, рассматривая $F(X)$ как мальцевское пространство с операцией $\mu(u, v, w) = uv^{-1}w$ и продолжая непрерывное вложение $X \rightarrow F(X)$ до непрерывного гомоморфизма $h: M(X) \rightarrow F(X)$, видим, что сужение $h|_{M_1(X)}: M_1(X) \rightarrow G_1(X)$ является непрерывной биекцией. Она задаётся формулой $h(Q(x, y, z)) = xy^{-1}z$ для $x, y, z \in X$. К сожалению, данная биекция не всегда является гомеоморфизмом, соответствующий пример был построен в [21].

Пример 2.2. Пусть C — канторовское множество, и пусть $\{M\} \cup \{M_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ — разбиение пространства C на подпространства, гомеоморфные C . Чтобы построить такое разбиение, достаточно вспомнить, что $C = \{0, 1\}^\mathbb{N}$. Проиндексируем все ненулевые последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$ как $(x_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ и рассмотрим множества $M = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_{2n} = 0 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}$ и $M_\alpha = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_{2n} = x_n^\alpha \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}$. Усилим стандартную топологию канторовского множества, объявляя открыто-замкнутыми все подмножества M_α , и обозначим канторовское множество с такой топологией как X . В [21] было доказано, что построенное таким образом пространство является мальцевским, но не является ретрактом пространства $G_1(X)$. Согласно предложению 2.2, пространство X является ретрактом пространства $M_1(X)$. Получаем, что $M_1(X)$ и $G_1(X)$ не гомеоморфны.

Предложение 2.4. Пусть X — тихоновское пространство и отображение

$$\bar{m}_3 = m_3|_{X \times X^{-1} \times X} : X \times X^{-1} \times X \rightarrow G_1(X), \quad (x, y^{-1}, z) \mapsto xy^{-1}z$$

факторно, тогда $M_1(X)$ гомеоморфно пространству $G_1(X)$. Если, кроме

того, X — мальцевское пространство, то X — ретракт пространства $G_1(X)$.

Доказательство. Напомним, что через Q мы обозначаем естественный гомоморфизм абсолютно свободной мальцевской алгебры $W^t(X)$ на $M(X)$ и что $W_1^t(X) = X \times X \times X$. Положим $Q_1 = Q|_{W_1^t(X)}$. Заметим, что отображение $h \circ Q_1: X \times X \times X \rightarrow G_1(X)$ совпадает с композицией гомеоморфизма $\varphi: X \times X \times X \rightarrow X \times X^{-1} \times X$, определённого правилом $\varphi(x, y, z) = (x, y^{-1}, z)$, и отображения $\bar{m}_3$. По предположению $\bar{m}_3$ — факторное отображение, поэтому отображения $h \circ Q_1$ и $h|_{M_1(X)}$ тоже факторны, поскольку $M_1(X) = Q_1(X \times X \times X)$, откуда следует, что $M_1(X)$ гомеоморфно пространству $G_1(X)$. Более того, гомеоморфизм $M_1(X) \rightarrow G_1(X)$ согласован с сужением естественной «свободно-групповой» операции Мальцева на $M_1(X)$. Отсюда и из предложения 2.2 немедленно вытекает, что если X — мальцевское пространство, для которого операция $\bar{m}_3$ факторна, то X — ретракт пространства $G_1(X)$. $\square$

Следующий пример показывает, что условие факторности операции $\bar{m}_3$ (или m_3) — достаточное, но не необходимое условие того, что тихоновское мальцевское пространство X является ретрактом пространства $G_1(X)$.

Пример 2.3. В статье [28] было показано, что отображение $\bar{m}_3$ не является факторным для пространства рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в стандартной топологии. Однако $\mathbb{Q}$ — группа с групповой операцией Мальцева $\mu(x, y, z) = x - y + z$ и отображение $r_G: G_1(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$, определённое правилом $r_G(xy^{-1}z) = x - y + z$, является ретракцией.

Предложение 2.5. Пусть X — тихоновское пространство, для которого $M(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $M_n(X)$, $n \geq 0$. Тогда $G(X)$ является индуктивным пределом подпространств $G_n(X)$, $n \geq 0$.

Доказательство. Согласно теореме 2.7, $G(X)$ является факторным образом пространства $M(X)$. Теперь требуемое утверждение следует из предложения 0.3. $\square$

Предложение 2.6. Топологическое пространство X является ретрактом топологической группы тогда и только тогда, когда X является ретрактом груди $G(X)$.

Доказательство. Необходимость следует из того, что всякая топологическая группа является также и топологической группой (относительно производных операций). Докажем достаточность: пусть G — топологическая

группа и $r: G \rightarrow X$ — ретракция. Тогда $r(G) = X$ — подпространство группы G . Поскольку G является также и группой, тождественное гомеоморфное вложение $X \rightarrow G$ продолжается до гомоморфизма $h: G(X) \rightarrow G$. Композиция $r \circ h$ — искомая ретракция $G(X) \rightarrow X$. $\square$

2.4. Явное описание свободной мальцевской алгебры

В этом разделе мы приводим явное описание элементов свободной мальцевской алгебры, подобное хорошо известному представлению свободной группы в виде множества несократимых слов. Всюду ниже буквой X будем обозначать фиксированное непустое множество.

Примем такие обозначения. Пусть $\hat{M}_0 = X$. Множество формальных троек букв — элементов $\hat{M}_0$ — обозначим $\hat{M}_1$:

$$\hat{M}_1 = \{x_1x_2x_3 : x_i \in X\}.$$

Тройки из множества $\hat{M}_1$ будем записывать в виде $[xyz]$, где $x, y, z \in \hat{M}_0$. Для $n > 0$ положим

$$\hat{M}_n = \{x_1x_2x_3 : x_i \in \hat{M}_{n-1}\}.$$

Элементы множества $\hat{M}_n$ будем записывать в виде $[xyz]$, где $x, y, z \in \hat{M}_{n-1}$, и называть *словами*. Пусть далее

$$\hat{M} = \bigcup_{n \in \omega} \hat{M}_n.$$

На множестве $\hat{M}$ введём отношение эквивалентности $\sim$, позволяющее сокращать рядом стоящие одинаковые элементы троек:

$$x \sim [xyy] \sim [yux] \sim [[xyy]zz] \sim [zz[xyy]] \sim \dots,$$

где $x, y \in \hat{M}_n$, $z \in \hat{M}_{n+1}$ и т.д. Ниже мы приводим строгое явное определение отношения $\sim$ по индукции. Пусть сначала $x, y \in \hat{M}_0 \cup \hat{M}_1$. Тогда возникают 3 различные ситуации:

- 1) Если $x, y \in \hat{M}_0$, то $x \sim y \iff x = y$.
- 2) Если $x \in \hat{M}_0$ и $y \in \hat{M}_1$, то $x \sim y \iff y \sim x \iff$ либо существует $a \in \hat{M}_0$, для которого $y = [xaa]$, либо существует $a \in \hat{M}_0$, для которого $y = [aax]$.
- 3) Если $x, y \in \hat{M}_1$ и $x = [abc]$, $y = [a'b'c']$, то $x \sim y \iff$ либо $a \sim a'$, $b \sim b'$ и $c \sim c'$, либо найдётся $z \in \hat{M}_0$, для которого $x \sim z$ и $y \sim z$.

Рассмотрим случай, когда $x, y \in \bigcup_{i=1}^n \hat{M}_i$, где $n > 1$, считая, что на $\bigcup_{i=1}^{n-1} \hat{M}_i$ отношение $\sim$ уже определено. Продолжим $\sim$ на $\hat{M}_n$ следующим образом:

- 4) Если $x \in \hat{M}_n$ и $y \in \hat{M}_{n-1}$, то $x \sim y \iff y \sim x \iff$ существуют $a, b, y' \in \hat{M}_{n-1}$ такие, что $a \sim b$, $y \sim y'$ и либо $x = [y'ab]$, либо $x = [aby']$.
- 5) Если $x, y \in \hat{M}_n$, $x = [abc]$ и $y = [a'b'c']$, то $x \sim y \iff$ либо
 - 5а) $a \sim a'$, $b \sim b'$ и $c \sim c'$, либо
 - 5б) найдётся элемент $z \in \hat{M}_{n-1}$, для которого $x \sim z$ и $y \sim z$.
- 6) Если $x \in \hat{M}_n$ и $y \in \hat{M}_k$ ($k < n - 1$), то $x \sim y \iff y \sim x \iff$ существует элемент $z \in \hat{M}_{n-1}$, для которого $x \sim z$ и $y \sim z$.

Теорема 2.8. *Введённое отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на $\hat{M} = \bigcup_{n \in \omega} \hat{M}_n$.*

Доказательство. Рефлексивность отношения $\sim$ доказывается по индукции очевидным образом. Симметричность отношения $\sim$ вытекает из определения. В доказательстве нуждается лишь транзитивность. Для этого достаточно проверить, что для каждого $n \in \omega$ и для любых $x, y, z \in \bigcup_{i=1}^n \hat{M}_i$ верна импликация

$$(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow (x \sim z). \quad (*)$$

При $n = 0$ транзитивность следует непосредственно из определения. Будем считать, что $n > 0$ и транзитивность верна при всех меньших n . Доказательству транзитивности в этом случае предположим лемму.

Лемма 2.1. *Для любых $u_1, u_2, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \hat{M}_{n-1}$ таких, что $u_1 \sim u_2$, $a_1 \sim a_2$, и $b_1 \sim b_2$, имеем эквивалентности в $\hat{M}_n$:*

$$[u_{i_1} a_{j_1} a_{k_1}] \sim [u_{i_2} b_{j_2} b_{k_2}] \sim [a_{i_3} a_{j_3} u_{k_3}] \sim [b_{i_4} b_{j_4} u_{k_4}].$$

Здесь $i_1, j_1, k_1, \dots, i_4, j_4, k_4$ принимают значения 1 и 2. То есть элементы записи слова из $\hat{M}_n$, в которую входят рядом стоящие эквивалентные элементы, можно произвольно переставлять и менять на эквивалентные при условии, что эквивалентные элементы останутся рядом.

Доказательство. Мы покажем, что $[u_1 a_1 a_2] \sim [b_2 b_1 u_2]$; остальные соотношения доказываются аналогично.

В силу пункта 4) определения имеем $u_1 \sim [u_1 a_1 a_2]$ и $u_1 \sim [b_2 b_1 u_2]$. Из пункта 5б) следует, что $[u_1 a_1 a_2] \sim [b_2 b_1 u_2]$. $\square$

Перейдём к доказательству импликации $(*)$ в зависимости от того, каким множествам $\hat{M}_i$, $i \leq n$, принадлежат элементы x, y, z .

Пусть $x \in \hat{M}_k$, $y \in \hat{M}_l$ и $z \in \hat{M}_m$. Если $\max\{k, l, m\} < n$, то $(*)$ выполнено по индуктивному предположению.

Пусть $k = l = m = n$, т.е. $x, y, z \in \hat{M}_n$. Если $x \sim y$ по причине наличия $u \in \hat{M}_{n-1}$ такого, что $x \sim u \sim y$ (т.е. в силу условия 5б)), а $y \sim z$ — по причине эквивалентности элементов на одинаковых местах (т.е. в силу условия 5а)), то $x \sim z$. Действительно, в этом случае, согласно пункту 4):

$$x \sim u \iff \text{существуют } a, b, u' \in \hat{M}_{n-1} \text{ такие, что } a \sim b, u \sim u', \\ \text{и либо } x = [abu], \text{ либо } x = [u'ab],$$

$$y \sim u \iff \text{существуют } a', b', u'' \in \hat{M}_{n-1} \text{ такие, что } a' \sim b', u \sim u'', \\ \text{и либо } y = [a'b'u], \text{ либо } y = [u''a'b'].$$

Пусть для определённости $y = [u''a'b']$. Так как $y \sim z$ по условию 5б), то z имеет запись $[\tilde{u}\tilde{a}\tilde{b}]$, где $\tilde{u} \sim u''$, $\tilde{a} \sim a'$, $\tilde{b} \sim b'$. В $\hat{M}_{n-1}$ транзитивность имеет место по индуктивному предположению, поэтому $\tilde{a} \sim \tilde{b}$ и $\tilde{u} \sim u'$. Предположим для определённости, что $x = [abu']$. Тогда, согласно лемме, $x \sim z$ и $(*)$ доказано. Случай, когда $x \sim y$ в силу условия 5а), а $y \sim z$ в силу условия 5б), рассматривается аналогично. В случае, когда $x \sim y$ и $y \sim z$ в силу условия 5б), эквивалентность $x \sim z$ легко доказывается с помощью леммы и транзитивности отношения $\sim$ в $\hat{M}_{n-1}$. Если $x \sim y$ и $y \sim z$ по условию 5а), то $x \sim z$ по причине наличия транзитивности в $\hat{M}_{n-1}$.

Пусть теперь $k = n > l > m$, т.е. $x \in \hat{M}_n$, $y \in \hat{M}_l$ и $z \in \hat{M}_m$, где $m < l < n$. Если $l = n - 1$, то $x \sim z$ по пункту 6) определения. Пусть $l < n - 1$. Тогда, согласно пункту 6) определения, существует элемент $u \in \hat{M}_{n-1}$ такой, что $x \sim u$ и $y \sim u$. Пользуясь тем фактом, что $z, y, u \in \bigcup_{i=1}^{n-1} \hat{M}_i$, и предположением индукции о том, что транзитивность в данном множестве есть, получаем: $(y \sim u) \wedge (y \sim z) \Rightarrow (u \sim z)$. Согласно пункту 6) определения, $x \sim z$.

Пусть $k = n$ и $l = m = n - 1$. Согласно пункту 4) определения существуют $y', a, b \in \hat{M}_{n-1}$, удовлетворяющие условиям $y \sim y'$, $a \sim b$ и либо $x = [y'ab]$, либо $x = [aby']$. Пусть для определённости имеет место первый случай. Из транзитивности отношения $\sim$ на $\bigcup_{i=1}^{n-1} \hat{M}_i$ вытекает, что $y' \sim z$. Следовательно, $x \sim z$ в силу 4).

Если $k = n$, $l < n - 1$ и $m < n$, то, в силу 6) существует $z' \in \hat{M}_{n-1}$, для которого $x \sim z'$ и $y \sim z'$. В силу транзитивности отношения $\sim$ на $\bigcup_{i=1}^{n-1} \hat{M}_i$ имеем $z' \sim z$. Следовательно, $x \sim z$ согласно пункту 6). Случай, когда

$$1) \ k < n, l = n, m < n,$$

$$2) \ k = n, m \leq l < n,$$

$$3) \ k = m = n, \ l < n,$$

$$4) \ k = l = n, \ m < n,$$

рассматриваются аналогично. Таким образом, $(*)$ всегда выполняется и отношение $\sim$ действительно является отношением эквивалентности. Теорема доказана. $\square$

Фактормножество множества $\hat{M}$ по отношению эквивалентности $\sim$ обозначим M . Пусть R — соответствующее отображение факторизации:

$$M = \hat{M}/\sim, \quad R: \hat{M} \rightarrow M.$$

Определим тернарную операцию μ на M . Для этого сначала продолжим введённую выше тернарную операцию $[\cdot \cdot \cdot]$ на всё множество $\hat{M}^3$.

Пусть $x \in \hat{M}_n$, $y \in \hat{M}_k$ и $z \in \hat{M}_l$. Элемент $[xyz] \in \hat{M}_{n+1}$ был определён выше только в том случае, когда $n = k = l$. Чтобы определить операцию в случае нарушения хотя бы одного из этих равенств, введём следующее определение.

Определение 2.8. Пусть $x \in \hat{M}_n$ имеет вид $[pqr]$, тогда:

- 1) Если $n = 1$, то элементы $p, q, r \in \hat{M}_0 = X$ назовём *предшественниками* элемента x .
- 2) Если $n > 1$, то *предшественниками* элемента x назовём $p, q, r \in \hat{M}_{n-1}$ и их предшественников.

При этом p, q, r будем называть *предшественниками первого поколения элемента x* . Предшественники первого поколения для p, q, r будут *предшественниками второго поколения для x* и т.д. Само слово x назовём *предшественником нулевого поколения самого себя*.

В соответствии с этим определением всякий элемент $x \in \hat{M}_k$ имеет ровно k поколений предшественников, причём в каждом поколении имеется 3^k элементов.

Выберем произвольный элемент $a \in X = \hat{M}_0$ и введём обозначения $a^0 = a, a^1 = [aaa] \in \hat{M}_1, \dots, a^n = [a^{n-1}a^{n-1}a^{n-1}] \in \hat{M}_n$. Если $x \in \hat{M}_k$, то обозначим $x_{+0} = x, x_{+1} = [xa^ka^k], x_{+2} = [x_{+1}a^{k+1}a^{k+1}], \dots, x_{+n} = [x_{+(k-1)}a^{k+n-1}a^{k+n-1}]$.

Определение 2.9. Элементы вида x_{+l} , $l \in \omega$, назовём *добавочными по отношению к элементу $x \in \hat{M}_k$* .

Отметим, что для любых $n, m \in \omega$ $x_{+n} \sim x_{+m}$ в силу пункта 4) определения отношения эквивалентности $\sim$ и транзитивности этого отношения.

Определение 2.10. Слово $[xyz] \in \hat{M}_n$ ($n > 1$) назовём *хорошим*, если $x \not\sim y$ и $y \not\sim z$.

Хорошее слово назовём *неприводимым*, если все его предшественники хорошие.

Слово назовём *каноническим*, если оно хорошее или добавочное и среди его предшественников имеются только хорошие и/или добавочные.

Слово, не являющееся хорошим, назовём *плохим*.

В соответствии с этим определением неприводимость есть частный случай каноничности. Добавочные слова — разновидность плохих. Если слово канонично, но не неприводимо, то среди его плохих предшественников могут быть лишь добавочные.

Лемма 2.2. Пусть x_1, x_2 — канонические слова, оба принадлежащие множеству $\hat{M}_n$, причём $x_1 \sim x_2$. Тогда $x_1 = x_2$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \hat{M}_n$. Будем вести индукцию по n . При $n = 0$ утверждение очевидно. Пусть $k > 0$ и утверждение верно при всех $n = 0, \dots, k - 1$. Если $x_1 = [a_1 b_1 c_1]$ и $x_2 = [a_2 b_2 c_2]$, то, согласно, определению, соотношение $x_1 \sim x_2$ может быть выполнено, когда имеет место один из случаев 5а) и 5б) (см. определение отношения $\sim$).

Пусть $a_1 \sim a_2, b_1 \sim b_2, c_1 \sim c_2$. Все слова $a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2$ являются предшественниками первого поколения канонических слов x_1, x_2 . Значит, все эти слова — сами канонические и лежат в $\hat{M}_{n-1}$, то есть можем применить предположение индукции и получим, что $a_1 = b_1, a_2 = b_2$, и $a_3 = b_3$, или, что то же самое, $x_1 = x_2$.

Пусть теперь найдутся $z_1, z_2 \in \hat{M}_{n-1}$ такие, что $z_1 \sim z_2 \sim x_1 \sim x_2$. Пусть, например, $x_1 = [z_1 p_1 q_1]$ и $x_2 = [z_2 p_2 q_2]$, где $p_1 \sim q_1$ и $p_2 \sim q_2$, причём слова z_i, p_i, q_i ($i = 1, 2$) — каноничны и лежат в $\hat{M}_{n-1}$. Так как $p_1 \sim q_1$ и $p_2 \sim q_2$, то, по предположению индукции, $p_1 = q_1$ и $p_2 = q_2$, так что слова x_1 и x_2 плохие. В силу каноничности слов x_1 и x_2 , получаем, что x_1 и x_2 — обязательно добавочны и $p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = a^{n-1}$.

Пусть теперь $x_1 = [z_1 p_1 q_1]$ и $x_2 = [p_2 q_2 z_2]$. Так как $p_2 \sim q_2$, то $x_2 \sim x'_2 = [z_2 p_2 q_2]$. Повторяя рассуждения из предыдущего абзаца применительно к словам x_1 и x'_2 , получаем, что $p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = a^{n-1}$. Поскольку слово x_2 каноническое, но не хорошее, имеем $z_2 = q_2 = a^{n-1}$. Но тогда, согласно каноничности слов z_1, z_2 и предположению индукции, получаем, что и $z_1 = z_2 = a^{n-1}$. $\square$

Лемма 2.3. Пусть $x \in \hat{M}_n$ и z — предшественник слова x k -го поколения. Пусть $z_1 \in \hat{M}_k$ и $z_1 \sim z$, тогда элемент x_1 , полученный из x заменой z на z_1 , эквивалентен элементу x .

Доказательство. Ведём индукцию по k . При $k = 0$ $x \sim x_1$ по определению.

Пусть замена предшественников в поколении $k - 1$ не выводит из класса эквивалентности и z лежит в поколении k . Тогда, по определению, z входит в состав какой-то тройки, представляющей собой предшественника слова x $(k-1)$ -го поколения. Пусть, для определённости это будет $[zpq]$. В результате замены $z \rightarrow z_1$ данная тройка поменяется на $[z_1pq] \sim [zpq]$. По предположению индукции, $x_1 \sim x$. $\square$

Лемма 2.4. *В любом непустом классе эквивалентности $U \in M$ найдётся единственный (с точностью до выбора добавочного элемента a) элемент x^* , обладающий свойствами:*

- 1) *Если $n > 0$ и $x^* \in \hat{M}_n$, то $U \cap \hat{M}_k = \emptyset$ для всякого $k < n$. Иначе говоря, x^* имеет минимальную длину в U .*
- 2) *Элемент x^* — канонический элемент.*

Элемент $x^* \in U$ из формулировки леммы назовём *наименьшим* в классе U .

Доказательство. Рассмотрим множество $A = \{n : U \cap \hat{M}_n \neq \emptyset\}$. Так как $U \neq \emptyset$, то A — непустое подмножество в $\mathbb{N}$. Положим $N = \min A$. Докажем, что в $U \cap \hat{M}_N$ можно выбрать элемент x^* , обладающий свойствами 1) и 2).

Так как $U \cap \hat{M}_N \neq \emptyset$, то найдётся хороший элемент $x \in U \cap \hat{M}_N$ (в противном случае N не минимально). Если x каноничен, то положим $x^* = x$. В противном случае среди предшественников элемента x есть плохие, не являющиеся добавочными.

Пусть k — минимальный номер поколения, содержащий плохие элементы, не являющиеся добавочными. Это значит, что в этом поколении есть плохие элементы вида $[pqr]$, где или $p \sim q$, или $q \sim r$, или и то, и другое. В первом случае заменим эквивалентные слова p и q , а вторым и третьем — q и r в записи $[pqr]$ на a^{n-k} . В результате получится один из вариантов: $[a^{n-k}a^{n-k}r]$ (который можно сделать добавочным, проведя эквивалентную замену на $[ra^{n-k}a^{n-k}]$), и $[pa^{n-k}a^{n-k}]$ (являющийся добавочным). Проведем эту процедуру со всеми плохими словами поколения k .

Аналогичные изменения сделаем со всеми поколениями $> k$, содержащими плохие элементы, не являющиеся добавочными. В силу конечности количества поколений и количества предшественников в каждом поколении, этот процесс завершится через конечное количество шагов. В силу леммы 2.3 и транзитивности отношения $\sim$, полученное в результате данного процесса из слова x слово y будет эквивалентно слову x и, так же как и x , останется хорошим. В результате все предшественники хорошего слова y будут либо

добавочными, либо хорошими. Значит, слово y будет каноническим. Положим $x^* = y$.

В силу леммы 2.2 x^* единствен. □

Непосредственно из доказательства леммы следует

Лемма 2.5. Пусть $n \geq 1$ и $x = [pqr] \in \hat{M}_n$. Предположим, что $p^* \in \hat{M}_k$, $q^* \in \hat{M}_l$ и $r^* \in \hat{M}_m$. Тогда $x^* = [p_{+(n-k-1)}^* q_{+(n-l-1)}^* r_{+(n-m-1)}^*]$.

Замечание 2.3. Пусть $x \in \hat{M}$. Из доказательства леммы 2.4 следует, что множество предшественников самого старшего поколения (то есть принадлежащих множеству $\hat{M}_0$) элемента x^* определено однозначно. Это множество (за исключением добавочного элемента a) назовём *каркасом элемента x* . Обозначение: $\text{car}(x)$. Каркас любого элемента x непуст. Кроме того, в силу определения каркаса и единственности элемента x^* верна импликация: если $x \sim y$, то $\text{car}(x) = \text{car}(y)$. Обратное, как легко видеть, неверно.

Из леммы 2.5 и определения каркаса немедленно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.6. Если слово $[xyz]$ хорошее, то $\text{car}[xyz] = \text{car}(x) \cup \text{car}(y) \cup \text{car}(z)$.

Теперь мы определим тернарную операцию $\hat{\mu}$ на $\hat{M}$, взяв за основу частичную операцию $[\cdot \cdot \cdot]$, определённую на тройках из $\hat{M}_n^3$, $n \in \omega$. Пусть $x, y, z \in \hat{M}$. Фиксируем $a \in X = \hat{M}_0$, с помощью которого построим слова одинаковой длины $x', y', z' \in \hat{M}_n$, эквивалентные данным словам x, y и z . Именно, пусть $x^* \in \hat{M}_k$, $y^* \in \hat{M}_l$ и $z^* \in \hat{M}_m$, и пусть $n = \max\{k, l, m\}$. Положим $x' = x_{+(n-k-1)}^*$, $y' = y_{+(n-l-1)}^*$, $z' = z_{+(n-m-1)}^*$ и $\hat{\mu}(x, y, z) = [x'y'z']$. Отметим, что результат применения операции $\hat{\mu}$ зависит от выбора элемента добавленного элемента a , но его класс эквивалентности от a не зависит. Ясно также, что $\hat{\mu}(x, y, z) = \hat{\mu}(x^*, y^*, z^*)$.

Операция $\hat{\mu}$ на $\hat{M}$ согласована с определённым выше отношением эквивалентности $\sim$, т.е. $\sim$ является конгруэнцией относительно $\hat{\mu}$, поскольку для фиксированного элемента a (использованного для построения добавочных слов) $\hat{\mu}(x, y, z)$ зависит только от наименьших элементов x^* , y^* и z^* , которые, в свою очередь, зависят только от классов эквивалентности элементов x, y и z . Определим операцию $\mu: M^3 \rightarrow M$ правилом

$$\mu([x]_{\sim}, [y]_{\sim}, [z]_{\sim}) = [\hat{\mu}(x, y, z)]_{\sim} \quad \text{для } x, y, z \in \hat{M}.$$

Операция μ не зависит от выбора элемента a и представителей x, y и z классов эквивалентности $[x]_{\sim}$, $[y]_{\sim}$ и $[z]_{\sim}$, поскольку наименьший элемент данного класса эквивалентности всегда принадлежит этому классу независимо от выбора элемента a . Эта операция, как легко видеть, будет операцией

Мальцева, т.к. если, например, $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$, то $x^* = y^*$ (по лемме 2.4), а значит, $x' = y'$ и $[x'y'z'] \sim z'$. Обозначим множество M с так определённой операцией Мальцева μ через $M'(X)$, а множество $\hat{M}$ с операцией $\hat{\mu}$ — через $\hat{M}'(X)$.

Ниже мы будем обозначать $\hat{M}$ и M через $\hat{M}^X$ и M^X . Пусть $\emptyset \neq Y \subset X$. Обозначим через $\hat{M}^Y$ множество троек, построенное точно так же, как $\hat{M}^X$, но для множества Y вместо X . Отметим, что $\hat{M}^Y \subset \hat{M}^X$.

Ниже через a мы всегда обозначаем добавленный элемент, с помощью которого определяются наименьшие элементы x^* . Из доказательства леммы 2.4 следует

Лемма 2.7. *Если $x \in \hat{M}^Y$ и $a \in Y$, то $x^* \in \hat{M}^Y$. Следовательно,*

- 1) *для любых $x, y, z \in \hat{M}^Y$ $\hat{\mu}(x, y, z) \in \hat{M}^Y$;*
- 2) *множество $\hat{M}^Y$ является подалгеброй алгебры $\hat{M}'(X)$, порождённой множеством Y ;*
- 3) *если $x \in \hat{M}^X$ и $[x]_{\sim} \cap \hat{M}^Y \neq \emptyset$, то $x^* \in \hat{M}^Y$.*

В дальнейшем мы будем обозначать подалгебру $\hat{M}^Y$ алгебры $\hat{M}'(X)$ через $\hat{M}'(Y)$.

Лемма 2.8. *Пусть $a \in Y$, $x, y, z \in \hat{M}'(X)$, $u \in \hat{M}'(Y)$ и $\hat{\mu}(x, y, z) \sim u$. Тогда*

- *если $x^* \notin \hat{M}'(Y)$, то $x \sim u$ и $\hat{\mu}(x, y, z) \sim z$;*
- *если $y^* \notin \hat{M}'(Y)$, то либо $x \sim u$ и $\hat{\mu}(x, y, z) \sim z$, либо $y \sim z$ и $\hat{\mu}(x, y, z) \sim x$;*
- *если $z^* \notin \hat{M}'(Y)$, то $z \sim u$ и $\hat{\mu}(x, y, z) \sim x$.*

Доказательство. Предположим, что $x^* \notin \hat{M}'(Y)$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда по определению каркаса $\text{car}(x^*) \not\subset Y$.

Пусть $y \sim z$, тогда $y^* \sim z^*$ и $\hat{\mu}(x, y, z) \sim x$, откуда $\text{car}(\hat{\mu}(x, y, z)) = \text{car}(x) = \text{car}(x^*)$. Получаем противоречие с условием теоремы, ведь в этом случае

$$\text{car}(\hat{\mu}(x, y, z)) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset.$$

Значит, $y \not\sim z$.

Предположим, что $x \not\sim y$, тогда слово $\hat{\mu}(x, y, z) = [x'y'z']$ (см. определение операции $\hat{\mu}$) хорошее. Отсюда, пользуясь леммой 2.6, получаем $\text{car}([x'y'z']^*) = \text{car}(x') \cup \text{car}(y') \cup \text{car}(z') = \text{car}(x^*) \cup \text{car}(y^*) \cup \text{car}(z^*) \subset Y$ в противоречие с тем, что $\text{car}(x^*) \not\subset Y$.

Таким образом, $x \sim y$ и $\hat{\mu}(x, y, z) \sim z$. □

Теорема 2.9. *Алгебра $M'(X)$ является свободной мальцевской алгеброй множества X .*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение универсального свойства для алгебры $M'(X)$.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение в алгебру Y с операцией Мальцева μ_Y . Определим отображения $f_i: \hat{M}_i^X \rightarrow Y$, $i \in \omega$, так:

$$\begin{aligned} f_0 &= f; \\ f_1([xyz]) &= \mu_Y(f_0(x), f_0(y), f_0(z)) \text{ для } x, y, z \in \hat{M}_0^X, \\ &\text{т.е. для } [xyz] \in \hat{M}_1^X; \\ &\dots \\ f_i([xyz]) &= \mu_Y(f_{i-1}(x), f_{i-1}(y), f_{i-1}(z)) \text{ для } x, y, z \in \hat{M}_{i-1}^X, \\ &\text{т.е. для } [xyz] \in \hat{M}_i^X. \end{aligned}$$

Определим отображение $\hat{h}$ как объединение отображений f_i , т.е. положим

$$\hat{h} = \bigcup_{i \in \omega} f_i: \hat{M}^X = \bigcup_{i \in \omega} \hat{M}_i^X \rightarrow Y.$$

Покажем, что если $x, y \in \hat{M}^X$ и $x \sim y$, то $\hat{h}(x) = \hat{h}(y)$. Сначала проверим, что если $x \in \hat{M}_n^X$, $y \in \hat{M}_k^X$ и $x \sim y$, то $f_n(x) = f_k(y)$. Будем считать для определённости, что $n \geq k$, и применим индукцию по n . При $n = k = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно при $n = k = p - 1 \geq 1$, тогда при $n = k = p$ положим $x = [rst]$, $y = [uvw]$. Если $x \sim y$ по причине побуквенной эквивалентности (то есть по условию 5а: $r \sim u$, $s \sim v$, $t \sim h$), то, по предположению индукции, имеем

$$\begin{aligned} f_p(x) &= f_p([rst]) = \mu_Y(f_{p-1}(r), f_{p-1}(s), f_{p-1}(t)) = \\ &= \mu_Y(f_{p-1}(u), f_{p-1}(v), f_{p-1}(w)) = f_p([uvw]) = f_p(y). \end{aligned}$$

Пусть теперь $x \sim y$ по условию 5б), то есть найдётся $z \in \hat{M}_{p-1}^X$ такой, что $x \sim z$, $y \sim z$. Пусть для определённости $x = [zab]$, $y = [za_1b_1]$, где $a \sim b$, $a_1 \sim b_1$ (другие ситуации рассматриваются аналогично). Тогда, пользуясь (при надобности) леммой 2.1 и предположением индукции, получаем

$$\begin{aligned} f_p(x) &= f_p[zab] = \mu_Y(f_{p-1}(z), f_{p-1}(a), f_{p-1}(b)) = \\ &= \mu_Y(f_{p-1}(z), f_{p-1}(a), f_{p-1}(a)) = f_{p-1}(z) = \\ &= \mu_Y(f_{p-1}(z), f_{p-1}(a_1), f_{p-1}(a_1)) = \\ &= \mu_Y(f_{p-1}(z), f_{p-1}(a_1), f_{p-1}(b_1)) = f_p([za_1b_1]) = f_p(y), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай $n > k$. Пусть $n = k + 1$, тогда, по пункту 4), найдутся $a, b, y' \in \hat{M}_k$ такие, что $a \sim b$, $y \sim y'$ и либо $x = [y'ab]$, либо $x = [aby']$. В первом случае, пользуясь предположением индукции, получаем:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= f_{k+1}([y'ab]) = \mu_Y(f_k(y'), f_k(a), f_k(b)) = \\ &= \mu_Y(f_k(y), f_k(a), f_k(a)) = f_k(y). \end{aligned}$$

Второй случай рассматривается аналогично.

Пусть $n > k + 1$. Согласно пункту 6) определения отношения $\sim$ существует $z \in \hat{M}_{n-1}^X$, для которого $x \sim z$ и $z \sim y$. Имеем $f_n(x) = f_{n-1}(z)$ по уже доказанному и $f_{n-1}(z) = f_k(y)$ по индуктивному предположению.

Рассмотрим теперь отображение h , определённое следующим образом. Пусть $x \in M'(X)$ и $u \in \hat{M}^X$, причём $[u]_{\sim} = x$. Тогда положим $h(x) = \hat{h}(u)$. Согласно доказанному, если $v \sim u$, то $\hat{h}(v) = \hat{h}(u)$, то есть отображение h определено корректно. Проверим теперь, что h — гомоморфизм. Пусть $x, y, z \in M'(X)$ и $u, v, w \in \hat{M}^X$ такие, что $[u]_{\sim} = x$, $[v]_{\sim} = y$, $[w]_{\sim} = z$, причём $u \in \hat{M}_n$, $v \in \hat{M}_k$, $w \in \hat{M}_l$. Пусть далее $u', v', w' \in M_{\max\{n, k, l\}}$ — соответствующие им добавочные элементы (определённые на странице 59). Тогда $\mu(x, y, z) = [u'v'w']_{\sim}$ и

$$\begin{aligned} h(\mu(x, y, z)) &= f_{\max\{n, k, l\}+1}([u'v'w']) = \\ &= \mu_Y(f_{\max\{n, k, l\}}(u'), f_{\max\{n, k, l\}-1}(v'), f_{\max\{n, k, l\}-1}(w')) = \\ &= \mu_Y(h(x), h(y), h(z)). \end{aligned}$$

Таким образом, h — гомоморфизм. Ясно, что он является продолжением отображения f . $\square$

Из лемм 2.8 и 2.7 и теоремы 2.9 вытекает следующее полезное утверждение.

Теорема 2.10. Пусть X — непустое множество, $Y \subset X$ — его подмножество, $Q: W(X) \rightarrow M(X)$ — гомоморфизм абсолютно свободной мальцевской алгебры $W(X)$ на свободную мальцевскую алгебру $M(X)$ множества X , продолжающий тождественное отображение $X \rightarrow X$, и $\langle Y \rangle$ — подалгебра алгебры $M(X)$, порождённая множеством Y . Если $x, y, z \in W(X)$ и $\mu(Q(x), Q(y), Q(z)) \in \langle Y \rangle$, то

- если $Q(x) \notin \langle Y \rangle$, то $Q(x) = Q(y)$ и $\mu(Q(x), Q(y), Q(z)) = Q(z)$;
- если $Q(y) \notin \langle Y \rangle$, то либо $Q(x) = Q(y)$ и $\mu(Q(x), Q(y), Q(z)) = Q(z)$, либо $Q(y) = Q(z)$ и $\mu(Q(x), Q(y), Q(z)) = Q(x)$;
- если $Q(z) \notin \langle Y \rangle$, то $Q(y) = Q(z)$ и $\mu(Q(x), Q(y), Q(z)) = Q(x)$.

Доказательство. По теореме 2.10 $M(X) \cong M'(X)$, поэтому мы будем считать, что $M(X) = M'(X)$. Поскольку $\hat{M}^X$ — алгебра с тернарной операцией $\hat{\mu}$, порождённая множеством X , существует гомоморфизм $H: W(X) \rightarrow \hat{M}'(X)$, продолжающий тождественное отображение $X \rightarrow X$. Из единственности гомоморфизма $Q: W(X) \rightarrow M(X)$, продолжающего тождественное отображение $X \rightarrow X$, следует, что $Q = R \circ H$.

Предположим, что $Q(x) = R(H(x)) \notin \langle Y \rangle$. Тогда $H(x) \notin \hat{M}'(Y)$ и если $t \in \hat{M}'(X)$, $t \sim H(x)$, то $t \notin \hat{M}'(Y)$, так как $R(t) = R(H(x))$. Следовательно, $H(x)^* \notin \hat{M}'(Y)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} R(\hat{\mu}(H(x), H(y), H(z))) &= \mu(R(H(x)), R(H(y)), R(H(z))) = \\ &= \mu(Q(x), Q(y), Q(z)) \in \langle Y \rangle, \end{aligned}$$

так как R — гомоморфизм. Заметим, что Y является подмножеством порождающего множества X всех трёх алгебр $W(X)$, $\hat{M}'(X)$ и $M(X)$, и сужения гомоморфизмов Q , H и R на X и на Y тождественны. Так как подалгебра $\hat{M}'(Y)$ алгебры $\hat{M}'(X)$ порождена множеством Y , то $R(\hat{M}'(Y)) = \langle Y \rangle$. Следовательно, существует $t \in \hat{M}'(Y)$, для которого $R(t) = R(\hat{\mu}(H(x), H(y), H(z)))$, т.е. $t \sim \hat{\mu}(H(x), H(y), H(z))$. По лемме 2.8 $H(x) \sim H(y)$ и $\hat{\mu}(H(x), H(y), H(z)) \sim H(z)$, т.е.

$$R(H(x)) = Q(x) = R(H(y)) = Q(y)$$

и

$$\begin{aligned} R(\hat{\mu}(H(x), H(y), H(z))) &= \mu(R(H(x)), R(H(y)), R(H(z))) = \\ &= \mu(Q(x), Q(y), Q(z)) = R(H(z)) = Q(z). \end{aligned}$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Мы продемонстрируем применение теоремы 2.10 в конце последней главы.

3. Булевы группы кружечных пространств

3.1. Введение

Особое место в теории универсальных алгебр занимает многообразие булевых групп.

Определение 3.1. *Булевой группой* называется группа с нейтральным элементом e , в которой все элементы удовлетворяют тождеству $x \cdot x = e$.

Хорошо известно, что все булевы группы коммутативны, поэтому групповая операция в них обычно обозначается символом $+$, а нейтральный элемент обозначается 0 и называется нулём. Таким образом, многообразие булевых групп — это многообразие универсальных алгебр с сигнатурой, состоящей из одного символа 0 -арной операции 0 , одного символа унарной операции $-$ и одного символа бинарной операции $+$, в котором выполнены все тождества групп и, кроме того, тождество $x + x = 0$.

Каждая булева группа является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, а во всяком векторном пространстве есть базис. Следовательно, любая булева группа является свободной группой с некоторым базисом. Обозначим булеву группу с базисом X через $B(X)$.

Легко понять, что булеву группу $B(X)$ можно представить как множество всех конечных подмножеств множества X операцией симметрической разности Δ : для $A, B \in B(X)$

$$A + B = A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

По теореме 1.1 для любого топологического пространства X в полном многообразии $\mathcal{B}$ булевых топологических групп существует свободная булева топологическая группа $F_{\mathcal{B}}(X)$ с непрерывным отображением i_X , причём она изоморфна группе $B(X)$ и если X — тихоновское пространство, то по теореме 1.3 i_X — гомеоморфное вложение, так что можно считать, что группы $B(X)$ и $F_{\mathcal{B}}(X)$ совпадают как абстрактные группы и базис X содержится в $F_{\mathcal{B}}(X)$ как подпространство. В этой главе мы будем рассматривать только тихоновские топологические пространства, и через $B(X)$ мы будем обозначать свободную топологическую группу пространства X , т.е. булеву группу, порождённую множеством X и снабжённую сильнейшей из всех групповых топологий, индуцирующих на X исходную топологию.

В 1951 г. Джеймс Дугунджи доказал свою знаменитую теорему о существовании линейного оператора продолжения $C(F, E) \rightarrow C(X, E)$ для метризуемого пространства X , его замкнутого подпространства $F \subset X$ и произвольного локально выпуклого пространства (ЛВП) E (как обычно, $C(Y, Z)$

обозначает множество всех непрерывных отображений из Y в Z). Пятнадцать лет спустя Карлосу Борхесу [17] удалось распространить теорему Дугунджи на класс так называемых кружевных (stratifiable) пространств:

Теорема 3.1 ([17]). *Пусть F — замкнутое подмножество кружевного пространства X , а E — произвольное локально выпуклое пространство. Тогда каждое непрерывное отображение $f: F \rightarrow E$ продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}: X \rightarrow E$, причем образ $\hat{f}(X)$ продолжения $\hat{f}$ содержится в выпуклой оболочке образа $f(F)$ самого отображения f . Более того, существует линейный оператор продолжения $\Phi: C(F, E) \rightarrow C(X, E)$ такой, что для каждого $f \in C(F, E)$ $\Phi(f)(X) \subset \text{conv } f(F)$, причем оператор Φ непрерывен при наделении обоих пространств $C(F, E)$ и $C(X, E)$ топологией поточечной сходимости, равномерной сходимости и компактно-открытой топологией.*

Из этой теоремы немедленно вытекает, в частности, что всякое выпуклое подмножество произвольного ЛВП является абсолютным экстензором для класса кружевных пространств, а всякое замкнутое выпуклое подмножество — абсолютным ретрактом для этого класса (см. [13]).

Определение 3.2 ([19]; см. также [23]). Топологическое пространство X называется *кружевным*, если существует функция G , которая каждому замкнутому подмножеству $H \subset X$ ставит в соответствие набор открытых множеств $G_n(H)$, $n \in \omega$, со свойствами

- 1) $H \subset G_n(H)$;
- 2) $H = \bigcap_n G_n(H)$;
- 3) если $H \subset K$, то $G_n(H) \subset G_n(K)$;
- 4) $H = \bigcap_n \overline{G_n(H)}$.

Хорошо известно, что все метризуемые пространства являются кружевными и свойство быть кружевным пространством сохраняется любыми подпространствами и счетными произведениями, а также (в отличие от метризуемости) замкнутыми непрерывными отображениями [23]. Легко видеть также, что если X и Y — кружевные пространства, то их топологическая сумма $X \oplus Y$ тоже является кружевным пространством (достаточно рассмотреть, например, вложение $X \oplus Y \subset X \times Y \times [0, 1]$).

Класс кружевных пространств значительно шире класса метризуемых пространств. Он включает в себя многие неметризуемые ЛВП, естественно возникающие в функциональном анализе, в частности, пространство D финитных бесконечно дифференцируемых функций, а также классические

пространства D' , S' и E' обобщенных функций [31]; по этой причине он находит многочисленные применения в топологии, функциональном анализе и теории дифференциальных уравнений (см., например, [15]).

В [8] было доказано, что свободное ЛВП произвольного кружевного пространства является кружевным. Напомним, что *свободное ЛВП* $L(X)$ вполне регулярного пространства X определяется как векторное пространство с базисом X , наделенное сильнейшей из всех локально выпуклых топологий, индуцирующих исходную топологию на X . Иными словами, топология $L(X)$ — это самая слабая топология с тем свойством, что любое непрерывное отображение пространства X в произвольное ЛВП E продолжается до непрерывного линейного отображения $L(X) \rightarrow E$. Таким образом, из доказанной в [8] теоремы следует, что всякое замкнутое выпуклое подмножество пространства $L(X)$ (например, пространство вероятностных мер с конечным носителем на X) является ретрактом пространства $L(X)$, и что всякое замкнутое кружевное выпуклое подмножество любого ЛВП является ретрактом некоторого ЛВП. Кроме того, эта теорема дает сразу два принципиально разных линейных оператора продолжения $C(X, E) \rightarrow C(L(X), E)$ для всякого кружевного пространства X и любого ЛВП E , а именно, естественный оператор продолжения по линейности и оператор Дугунджи.

Векторные топологические пространства над полем $\mathbb{F}_2$ кардинально отличаются от вещественных. В частности, для таких пространств понятие выпуклости (а значит, и локальной выпуклости) не имеет смысла. Если элементы вещественного векторного пространства L , порожденного множеством X , — это вещественнозначные функции на X с конечным носителем, то элементы векторного пространства B над полем $\mathbb{F}_2$, порожденного тем же множеством X , — это булевозначные, т.е. характеристические, функции с конечным носителем на X ; операция сложения для них определяется совсем по-другому, а операция умножения на скаляры вырождается. На самом деле B — это не что иное, как булева группа, порожденная множеством X , т.е. множество $[X]^{<\omega}$ всех конечных подмножеств X с операцией симметрической разности, и топологии векторных пространств на B совпадают с групповыми топологиями. На $\mathbb{F}_2$ -векторном пространстве (булевой группе), порожденном вполне регулярным топологическим пространством X , определена свободная топология — это сильнейшая из всех групповых топологий, индуцирующих исходную топологию на X , или самая слабая топология с тем свойством, что любое непрерывное отображение пространства X в произвольное топологическое $\mathbb{F}_2$ -векторное пространство (т.е. булеву топологическую группу) B продолжается до непрерывного линейного отображения (= гомоморфизма) $B(X) \rightarrow B$ (см. [34]).

Эта глава посвящена доказательству следующей теоремы:

Теорема 3.2. *Для всякого кружевного пространства X свободное тополо-*

гическое векторное пространство $B(X)$ над полем $\mathbb{F}_2$ ($=$ свободная булева топологическая группа $B(X)$) является кружевным.

Тем самым по теореме Дугунджи–Борхеса для любого кружевного пространства X и любого ЛВП E имеется линейный оператор продолжения $C(X, E) \rightarrow C(B(X), E)$, сохраняющий выпуклые оболочки образов функций и непрерывный относительно естественных топологий на пространствах функций. Однако оператора продолжения по линейности в булевом случае нет. Стоит отметить, что свободное пространство $B(X)$ (так же как и свободное ЛВП $L(X)$) не бывает метризуемым для недискретных бесконечных пространств X , поэтому кружежность — это лучшее из известных свойств типа метризуемости, которыми могут обладать свободные топологические векторные пространства $B(X)$ и $L(X)$.

Мы будем доказывать нашу теорему, следуя схеме изложенного в [8] доказательства того, что свободное ЛВП $L(X)$ любого кружевного пространства X является кружевным. Это доказательство весьма громоздко. Оно основано на сложных построениях непрерывных псевдометрик на X и девяти технических леммах, восемь из которых, к счастью, касаются лишь структуры кружевных топологических пространств и свойств построенных псевдометрик и никак не затрагивают строения свободного ЛВП. Мы не будем здесь воспроизводить все построения и леммы и докажем лишь основную, девятую, лемму, доказательство которой для $B(X)$ принципиально отличается от доказательства для $L(X)$.

3.2. Монотонная нормальность свободной булевой топологической группы $B(X)$ на кружевном T_1 -пространстве X

В дальнейшем нам понадобится свойство монотонной нормальности, которое слабее свойства быть кружевным пространством.

Определение 3.3 ([23]). Пространство X называется *монотонно нормальным*, если каждому замкнутому в X множеству F и его открытой окрестности U можно сопоставить открытое множество $V(F, U)$ так, что $F \subseteq V(F, U) \subseteq \overline{V(F, U)} \subseteq U$ и для любой меньшей пары $F' \subseteq U'$ замкнутого и открытого множеств (т.е. такой, что $F' \subseteq F$ и $U' \subseteq U$) $V(F', U') \subseteq V(F, U)$.

Ниже мы формулируем удобный для наших целей критерий монотонной нормальности; другие критерии можно найти в [23] (там же содержатся и многие полезные сведения о кружевных и монотонно нормальных пространствах).

Критерий монотонной нормальности ([23, Theorem 5.19]). *Пространство X является монотонно нормальным, если и только если каждой точке $x \in X$ и каждой её открытой окрестности U можно сопоставить меньшую открытую окрестность $V(x, U)$ так, что из условия $V(x, U) \cap V(x', U') \neq \emptyset$ всегда следует, что либо $x \in U'$, либо $x' \in U$.*

Напомним, что *булева группа* — это группа, в которой все элементы имеют порядок 2. Легко показать, что любая такая группа автоматически является абелевой и, как уже отмечалось, представляет собой векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2$. Для вполне регулярного пространства X через $B(X)$ мы обозначаем его свободную булеву топологическую группу [34]; напомним, что как множество она совпадает с семейством всех конечных подмножеств X . Мы обозначаем операцию группы $B(X)$ обычным знаком сложения «+». Мы выделяем элементы группы $B(X)$ жирным шрифтом, чтобы не путать их с элементами X . Для $\mathbf{g} \in B(X)$, т.е. конечного подмножества множества X , через $|\mathbf{g}|$ мы обозначаем число элементов в этом подмножестве.

Мы используем обозначение $B_0(X)$ для подгруппы группы $B(X)$ индекса 2, состоящей из подмножеств X с чётным числом элементов:

$$B_0(X) = \{ \{a_1, \dots, a_{2n}\} \subset X : n \in \mathbb{N}, a_i \neq a_j \text{ для } i \neq j \}.$$

Эта подгруппа открыто-замкнута в свободной топологии, поскольку она является прообразом открыто-замкнутого в $\{0, 1\}$ множества $\{0\}$ при непрерывном гомоморфизме $B(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, продолжающем открытое непрерывное отображение $X \rightarrow \{0, 1\}$, тождественно равное 1. Кроме того, как топологическое пространство $B(X)$ является несвязным объединением двух смежных классов группы $B(X)$ по подгруппе $B_0(X)$, так что нам достаточно доказать, что группа $B_0(X)$ кружевная для кружевного X .

Для каждой непрерывной псевдометрики d на X определим полунорму $\|\cdot\|_d$ на $B_0(X)$ правилом

$$\|\mathbf{g}\|_d = \min \left\{ \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i) : x_i, y_i \in Y, \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \mathbf{g} \right\}. \quad (1)$$

Кроме того, для $a > 0$ и $x \in X$ положим

$$\begin{aligned} B_d(a) &= \{ \mathbf{u} \in B_0(X) : \|\mathbf{u}\|_d < a \}, \\ B_d(x, a) &= \{ y \in X : d(x, y) < a \}. \end{aligned}$$

(Это обычные шары относительно нормы $\|\cdot\|_d$ и псевдометрики d ; в контексте булевых групп обозначения не вполне удачны, но мы сознательно используем те же обозначения, что в статье [8], и надеемся, что путаницы

между шарами и булевыми группами не возникнет.) Все такие полунормы порождают свободную топологию группы $B(X)$ в том смысле, что единичные шары относительно них образуют базу окрестностей нуля в $B(X)$ [34].

Мы выведем нашу основную теорему из другого, формально более слабого, утверждения:

Утверждение 3.1. Пусть Y — круговое пространство и для каждой непрерывной псевдометрики d на Y найдётся непрерывная псевдометрика $d' \geq d$, обладающая следующим свойством:

$$\begin{aligned} & \text{если } a > 0, x, y \in Y \text{ и } d'(x, y) < a, \text{ то найдутся} \\ & n \in \mathbb{N} \text{ и } z_0, z_1, \dots, z_n \in Y \text{ такие, что } z_0 = x, z_n = y, \\ & d'(z_{i-1}, z_i) < 1/2 \text{ для } i = 1, \dots, n \text{ и } \sum_{i=1}^n d'(z_{i-1}, z_i) < a. \end{aligned} \quad (\star)$$

Тогда топологическая группа $B_0(Y)$ монотонно нормальна.

Доказательство. Обозначим множество непрерывных псевдометрик на Y , обладающих свойством $(\star)$, через $\mathcal{D}^*(Y)$. Для псевдометрик $d_1, d_2 \in \mathcal{D}^*(Y)$ определим такую операцию:

$$\begin{aligned} (d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2)(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d_1(z_{2i}, z_{2i+1}) + \sum_{j=1}^n d_2(z_{2j-1}, z_{2j}) : \right. \\ \left. n \in \mathbb{N}, z_0 = x, z_1, \dots, z_{2n-1} \in Y, z_{2n} = y \right\}. \end{aligned}$$

Отметим, что из определения этой операции следует, что

- 1) если $d_1, d_2 \in \mathcal{D}^*(Y)$, то $d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2 \in \mathcal{D}^*(Y)$;
- 2) если d — любая псевдометрика на Y , $d_1, d_2 \in \mathcal{D}^*(Y)$ и $d \leq d_1, d \leq d_2$, то $d \leq d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2$;
- 3) $d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2 \leq d_1$ и $d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2 \leq d_2$;
- 4) если $d'_1, d'_2 \in \mathcal{D}^*(Y)$ и $d'_1 \leq d_1, d'_2 \leq d_2$, то $d'_1 \overset{\star}{\wedge} d'_2 \leq d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2$.

Из свойств 2)–4) операции $\overset{\star}{\wedge}$ вытекает, что

$$B_{d_1}(a) + B_{d_2}(a) \subset B_{d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2}(a) + B_{d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2}(a) \subset B_{d_1 \overset{\star}{\wedge} d_2}(2a) \quad (2)$$

при условии, что $d_1, d_2 \in \mathcal{D}^*(Y)$ и $a > 0$.

Поскольку пространство Y кружевное, на нем определено *кружево в смысле Хита* [24], т.е. такая последовательность

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_n : n \in \mathbb{N}\}$$

открытых покрытий пространства Y , что для всякого n

$$\mathcal{M}_n = \{M_n(x) : x \in Y\},$$

где $M_n(x)$ — открытая окрестность x и

$$\begin{aligned} &\text{для любой точки } x_0 \text{ из } Y \text{ и любой ее окрестности } U_{x_0} \\ &\text{существует } m \in \mathbb{N}, \text{ для которого } x_0 \notin \overline{\bigcup \{M_m(x) : x \notin U_{x_0}\}}. \end{aligned} \quad (\mathcal{M})$$

Кроме того, на кружевном пространстве Y существует непрерывная метрика ρ [23, Theorem 5.9, Theorem 4.6, Corollary 2.9], причем согласно лемме 6 из [8] эту метрику и кружево $\mathcal{M}$ можно выбрать так, что будут выполнены условия

(1 ^{$\mathcal{M}$}) покрытие $\mathcal{M}_{n+1}$ вписано в покрытие $\{O_\rho(x, 1/(n+1))\}$ пространства Y открытыми шарами радиуса $1/(n+1)$ относительно метрики ρ , которое, в свою очередь, вписано в покрытие $\mathcal{M}_n$;

(2 ^{$\mathcal{M}$}) $M_{n+1}(x) \subseteq M_n(x)$ для $x \in Y$ и $n \in \mathbb{N}$.

Для проверки того, что группа $B_0(Y)$ монотонно нормальна, следует сопоставить каждому ее элементу $\mathbf{u} \in B_0(Y)$ и его открытой окрестности $U_{\mathbf{u}}$ меньшую окрестность $V(\mathbf{u}, U_{\mathbf{u}})$ и показать выполнение требования в критерии монотонной нормальности. Для этого, подобно тому, как это делается в [8], каждому $\mathbf{u} \in B_0(Y)$ мы ставим в соответствие непрерывную псевдометрику $d_{\mathbf{u}}$ с тем свойством, что $\mathbf{u} + B_{d_{\mathbf{u}}}(4) \subset U_{\mathbf{u}}$, строим непрерывную псевдометрику $D_{\mathbf{u}} \geq d_{\mathbf{u}}$ со специальными свойствами, указанными ниже, и полагаем $V(\mathbf{u}, U_{\mathbf{u}}) = \mathbf{u} + B_{D_{\mathbf{u}}}(1/2)$; ясно, что $V(\mathbf{u}, U_{\mathbf{u}}) \subset U_{\mathbf{u}}$.

Для того чтобы описать нужные нам свойства псевдометрики $D_{\mathbf{u}}$, нам все-таки придется повторить некоторые определения из [8]. Они применимы и к булевому случаю, поскольку всякий элемент $\mathbf{g} = x_1 + \dots + x_n = \{x_1, \dots, x_n\} \in B(X)$ с тем же успехом можно трактовать и как элемент $L(X)$ — а именно, как линейную комбинацию точек $x_1, \dots, x_n$ с единичными коэффициентами. Таким образом, чисто формально можно считать, что $B(X) \subset L(X)$ (разумеется, это теоретико-множественное включение, без какого бы то ни было согласования алгебраических структур и топологий).

Возьмем целое число $k_{\mathbf{u}} > |\mathbf{u}|$. Для каждого $u \in \mathbf{u}$ найдем число $l_{\mathbf{u}}(u) \in \mathbb{N}$, для которого

$$u \in U_{\mathbf{u}}(u) = Y \setminus \overline{\bigcup \{M_{l_{\mathbf{u}}(u)}(y) : y \notin B_{d_{\mathbf{u}}}(u, 1/(2k_{\mathbf{u}}))\}}.$$

Номер $l_{\mathbf{u}}(u)$ всегда найдётся по определению кружева Хита. Поскольку пространство Y вполне регулярно, существует непрерывная псевдометрика $\tilde{d}_{\mathbf{u}} \geq k_{\mathbf{u}} \cdot d_{\mathbf{u}}$ такая, что $B_{\tilde{d}_{\mathbf{u}}}(u, 1) \subset U_{\mathbf{u}}(u)$ для каждого $u \in \mathbf{u}$. Возьмем натуральное $n_{\mathbf{u}}(u) \geq l_{\mathbf{u}}(u)$, для которого

$$u \in V_{\mathbf{u}}(u) = Y \setminus \overline{\bigcup \{M_{n_{\mathbf{u}}}(y) : y \notin B_{\tilde{d}_{\mathbf{u}}}(u, 1/2)\}}.$$

Наконец, выберем натуральное число

$$n_{\mathbf{u}} \geq \max\{\{n_{\mathbf{u}}(u) + 1 : u \in \mathbf{u}\} \cup \{1/\rho(x, y) : x, y \in \mathbf{u}, x \neq y\} \cup \{k_{\mathbf{u}}\} \cup \{|\mathbf{u}|\}\}.$$

Заметим, что если $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in B_0(Y)$ удовлетворяют условию $n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}}$, то

$$\rho(h_i, h_j) \geq 1/n_{\mathbf{h}} \geq 1/n_{\mathbf{g}} \quad \text{для любых } h_i, h_j \in \mathbf{h}.$$

В [8] (см. леммы 7 и 8 и предшествующие им вспомогательные построения) доказано существование непрерывных псевдометрик $D_{\mathbf{u}}$ для всех $\mathbf{u} \in L_0(X)$ (тем более, для всех $\mathbf{u} \in B_0(X)$) с такими свойствами:

- (i) если $\mathbf{h}, \mathbf{g} \in B_0(Y)$, $d_{\mathbf{h}}$ и $d_{\mathbf{g}}$ — любые непрерывные псевдометрики на Y , $n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}}$, $h \in \mathbf{h}, g \in \mathbf{g}$ и $(D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(g, h) < n_{\mathbf{h}}$, то $d_{\mathbf{h}}(h, g) < 1/2k_{\mathbf{h}}$;
- (ii) если $\mathbf{h}, \mathbf{g} \in B_0(Y)$, $d_{\mathbf{h}}$ и $d_{\mathbf{g}}$ — любые непрерывные псевдометрики на Y , $n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}}$, $g_1, g_2 \in \mathbf{g}$, $0 < a \leq n_{\mathbf{g}}$ и $(D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(g_1, g_2) < a$, то $d_{\mathbf{h}}(g_1, g_2) < a$;
- (iii) $D_{\mathbf{g}} \geq 2n_{\mathbf{g}}^2 \rho$ для всякого $\mathbf{g} \in B_0(Y)$;
- (iv) $D_{\mathbf{g}} \geq d_{\mathbf{g}}$ для всякого $\mathbf{g} \in B_0(Y)$.

Ключевую роль в доказательстве нашего утверждения играет

Лемма 3.1. Пусть $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in B_0(X)$, $d_{\mathbf{g}}, d_{\mathbf{h}}$ — непрерывные псевдометрики на Y , $n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}}$ и $\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}}} < 1$. Тогда $\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{d_{\mathbf{h}}} < 4$.

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_{2n}\}, \quad \mathbf{h} = \{h_1, \dots, h_{2k}\}.$$

Напомним, что $\mathbf{g} + \mathbf{h} = \mathbf{g} \Delta \mathbf{h}$ — симметрическая разность. Чтобы найти $\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}}}$, нам надо, согласно (1), разбить все элементы множества $\mathbf{g} \Delta \mathbf{h}$ на пары букв так, чтобы сумма расстояний относительно псевдометрики $D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}}$ между элементами пар была минимальной. Назовем такое разбиение оптимальным. Какие-то пары в оптимальном разбиении будут целиком состоять из элементов множества $\mathbf{g}$. Пусть $(g'_1, g''_1), \dots, (g'_m, g''_m)$

— все такие пары. Аналогичные пары возникнут и для множества $\mathbf{h}$: $(h'_1, h''_1), \dots, (h'_q, h''_q)$. В оптимальном разбиении могут оказаться также пары, у которых один элемент принадлежит $\mathbf{g}$, а другой — $\mathbf{h}$. Эти «смешанные» пары будут образованы теми элементами множеств $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$, которые не вошли в «однородные» пары и в пересечение $\mathbf{g} \cap \mathbf{h}$. Для удобства мы включим в оптимальное разбиение также все пары вида (g, h) , где $g = h \in \mathbf{g} \cap \mathbf{h}$, — на сумму расстояний они не влияют. Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}}} &= \sum_{i=1}^m D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}}(g'_i, g''_i) + \sum_{i=1}^q D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}}(h'_i, h''_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^s D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}}(\tilde{g}_i, \tilde{h}_i), \end{aligned} \quad (*)$$

где $\{\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_s\} = \mathbf{g} \setminus (\{g'_1, \dots, g'_m\} \cup \{g''_1, \dots, g''_m\})$ и $\{\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_s\} = \mathbf{h} \setminus (\{h'_1, \dots, h'_q\} \cup \{h''_1, \dots, h''_q\})$. При этом по условию леммы

$$\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}}} < 1. \quad (**)$$

Положим

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{i=1}^m (g'_i + g''_i), \quad \mathbf{u}_2 = \sum_{i=1}^q (h'_i + h''_i), \quad \mathbf{u}_3 = \sum_{i=1}^s (\tilde{g}_i + \tilde{h}_i).$$

Имеем $\mathbf{g} + \mathbf{h} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$. Наша цель — оценить сверху $\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{d_{\mathbf{h}}}$. Поскольку $\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{d_{\mathbf{h}}} \leq \|\mathbf{u}_1\|_{d_{\mathbf{h}}} + \|\mathbf{u}_2\|_{d_{\mathbf{h}}} + \|\mathbf{u}_3\|_{d_{\mathbf{h}}}$, достаточно оценить по отдельности полунормы $\|\mathbf{u}_1\|_{d_{\mathbf{h}}}$, $\|\mathbf{u}_2\|_{d_{\mathbf{h}}}$ и $\|\mathbf{u}_3\|_{d_{\mathbf{h}}}$.

Сначала рассмотрим $\mathbf{u}_2$. Из предположения леммы, что $n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}}$, свойств 2)–4) операции $\overset{\star}{\wedge}$ и свойства (iii) псевдометрик $D_{\mathbf{g}}$ и $D_{\mathbf{h}}$ вытекает, что

$$(D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(x, y) \geq 2n_{\mathbf{h}}^2 \rho(x, y)$$

для $x, y \in Y$. Следовательно,

$$(D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(h'_i, h''_i) \geq 2n_{\mathbf{h}}^2 \rho(h'_i, h''_i) \geq 2n_{\mathbf{h}} > 1.$$

Таким образом, если во второй сумме в (*) имеется хоть одно слагаемое, то эта сумма заведомо больше 1, что не согласуется с условием леммы. Значит, слово $\mathbf{u}_2$ в разложении суммы $\mathbf{g} + \mathbf{h}$ отсутствует.

Рассмотрим $\mathbf{u}_3$. Для каждого $i \leq s$ выберем $j(i) \leq s$ такое, что

$$(D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(\tilde{g}_{I(i)}, \tilde{h}_i) = \min_{1 \leq i \leq s} \{(D_{\mathbf{g}} \overset{\star}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(\tilde{g}_i, \tilde{h}_i)\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \sum_{i=1}^s (\tilde{h}_i + \tilde{g}_i) = \sum_{i=1}^s (\tilde{h}_i + \tilde{g}_{j(i)} + \tilde{g}_{j(i)} + \tilde{g}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^s (\tilde{h}_i + \tilde{g}_{j(i)}) + \sum_{i=1}^s (\tilde{g}_{j(i)} + \tilde{g}_i) = \mathbf{u}'_3 + \mathbf{u}''_3.\end{aligned}$$

По определению индексов $j(i)$ и в силу соотношений $(*)$ и $(**)$ имеем

$$\sum_{i=1}^s (D_{\mathbf{g}} \overset{*}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(\tilde{h}_i + \tilde{g}_{j(i)}) < 1.$$

Из определения числа $n_{\mathbf{u}}$ для каждого $i \leq s$ получаем

$$(D_{\mathbf{g}} \overset{*}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(\tilde{g}_{j(i)}, \tilde{h}_i) < 1 \leq k_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}}.$$

Следовательно, в силу свойства (i) псевдометрик $D_{\mathbf{g}}$ и $D_{\mathbf{h}}$ имеем

$$d_{\mathbf{h}}(\tilde{h}_i, \tilde{g}_{j(i)}) < 1/2k_{\mathbf{h}}.$$

Из последнего неравенства и определения числа $k_{\mathbf{h}}$, согласно которому $k_{\mathbf{h}} > |\mathbf{h}| \geq s$, вытекает, что

$$\|\mathbf{u}'_3\|_{d_{\mathbf{h}}} \leq \sum_{i=1}^s d_{\mathbf{h}}(\tilde{h}_i, \tilde{g}_{j(i)}) < s/2k_{\mathbf{h}} < 1.$$

Надо оценить еще норму элемента $\mathbf{u}''_3 = \sum_{i=1}^s (\tilde{g}_{j(i)} + \tilde{g}_i)$. Заметим, что

$$\mathbf{u}''_3 = \sum_{i=1}^s (\tilde{g}_{j(i)} + \tilde{h}_i + \tilde{h}_i + \tilde{g}_i) = \sum_{i=1}^s (\tilde{g}_{j(i)} + \tilde{h}_i) + \sum_{i=1}^s (\tilde{g}_i + \tilde{h}_i).$$

По определению индексов $j(i)$ и в силу соотношений $(*)$ и $(**)$

$$\sum_{i=1}^s (D_{\mathbf{g}} \overset{*}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(\tilde{g}_{j(i)}, \tilde{h}_i) \leq \sum_{i=1}^s (D_{\mathbf{g}} \overset{*}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(\tilde{g}_i, \tilde{h}_i) < 1.$$

Из определения (1) полунормы следует, что

$$\|\mathbf{u}''_3\|_{D_{\mathbf{g}} \overset{*}{\wedge} D_{\mathbf{h}}} \leq \sum_{i=1}^s (D_{\mathbf{g}} \overset{*}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(\tilde{g}_{j(i)}, \tilde{h}_i) + \sum_{i=1}^s (D_{\mathbf{g}} \overset{*}{\wedge} D_{\mathbf{h}})(\tilde{g}_i, \tilde{h}_i) < 2.$$

Таким образом, найдутся положительные числа a_i , $i \leq s$, с тем свойством, что $\sum_{i=1}^s a_i < 2$ и $D_{\mathbf{g}} \overset{*}{\wedge} D_{\mathbf{h}}(\tilde{g}_i, \tilde{h}_i) < a_i$ для каждого $i < s$. Заметим, что

по определению числа $n_{\mathbf{g}}$ имеем $a_i < 2 < n_{\mathbf{g}}$, $i \leq s$. Значит, применимо свойство (ii) псевдометрик $D_{\mathbf{g}}$ и $D_{\mathbf{h}}$, согласно которому имеем $d_{\mathbf{h}}(\tilde{g}_i, \tilde{h}_i) < a_i$ для каждого $i < s$. Следовательно, $\|\mathbf{u}_3''\|_{d_{\mathbf{h}}} \leq \sum_{i=1}^s a_i < 2$.

Рассуждения для $\mathbf{u}_1$ аналогичны: из условий (*) и (**) видим, что

$$\|\mathbf{u}_1\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} = \sum_{i=1}^m (D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}})(g_i, g_i') < 1,$$

и из свойства (ii) псевдометрик $D_{\mathbf{g}}$ и $D_{\mathbf{h}}$ тем же путем, что и выше, получается неравенство $\|\mathbf{u}_1\|_{d_{\mathbf{h}}} < 1$.

Подведем итоги:

$$\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{d_{\mathbf{h}}} = \|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3' + \mathbf{u}_3''\|_{d_{\mathbf{h}}} \leq \|\mathbf{u}_1\|_{d_{\mathbf{h}}} + \|\mathbf{u}_3'\|_{d_{\mathbf{h}}} + \|\mathbf{u}_3''\|_{d_{\mathbf{h}}} < 1 + 1 + 2 = 4,$$

что и требовалось. $\square$

Вернемся к доказательству монотонной нормальности группы $B_0(X)$.

В соответствии с нашим планом для каждого элемента $\mathbf{u} \in B_0(X)$ и любой его окрестности $U_{\mathbf{u}}$ мы возьмем непрерывную псевдометрику $d_{\mathbf{u}}$ с тем свойством, что $\mathbf{u} + B_{d_{\mathbf{u}}}(4) \subset U_{\mathbf{u}}$, построим для нее псевдометрику $D_{\mathbf{u}}$ и положим $V(\mathbf{u}, U_{\mathbf{u}}) = \mathbf{u} + B_{D_{\mathbf{u}}}(1/2)$. Нам нужно проверить, что если $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in B_0(X)$ и $V(\mathbf{g}, U_{\mathbf{g}}) \cap V(\mathbf{h}, U_{\mathbf{h}}) \neq \emptyset$, то либо $\mathbf{h} \in U_{\mathbf{g}}$, либо $\mathbf{g} \in U_{\mathbf{h}}$.

Итак, пусть $\mathbf{u} \in V(\mathbf{g}, U_{\mathbf{g}}) \cap V(\mathbf{h}, U_{\mathbf{h}})$. Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{g} + \mathbf{g}' = \mathbf{h} + \mathbf{h}'$, где $\mathbf{h}' \in B_{D_{\mathbf{h}}}(1/2)$ и $\mathbf{g}' \in B_{D_{\mathbf{g}}}(1/2)$. В силу (2) имеем

$$\mathbf{g} + \mathbf{h} = \mathbf{g}' + \mathbf{h}' \in B_{D_{\mathbf{g}}}(1/2) + B_{D_{\mathbf{h}}}(1/2) \subset B_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}}(1),$$

а значит, $\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{D_{\mathbf{g}} \star D_{\mathbf{h}}} < 1$. Возможны два случая, $n_{\mathbf{h}} \leq n_{\mathbf{g}}$ и $n_{\mathbf{h}} \geq n_{\mathbf{g}}$. В первом случае в силу основной леммы имеем $\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{d_{\mathbf{h}}} < 1$ и $\mathbf{g} \in \mathbf{h} + B_{d_{\mathbf{h}}}(1) \subset U_{\mathbf{h}}$, а во втором — $\|\mathbf{g} + \mathbf{h}\|_{d_{\mathbf{g}}} < 1$ и $\mathbf{h} \in \mathbf{g} + B_{d_{\mathbf{g}}}(1) \subset U_{\mathbf{g}}$.

В любом случае критерий монотонной нормальности выполняется. $\square$

Как уже упоминалось, из доказанного утверждения немедленно вытекает монотонная нормальность топологической группы $B(Y)$.

Пусть теперь X — произвольное кружевное пространство. Согласно [8, Лемма 1] оно вкладывается в качестве замкнутого подпространства в кружевное пространство Y , на котором всякая непрерывная псевдометрика мажорируется непрерывной псевдометрикой со свойством (*). В силу утверждения 3.1 топологическая группа $B(Y)$ монотонно нормальна. Пространство Y , будучи кружевным, тоже монотонно нормально, а значит, и коллективно нормально [23, Theorem 5.18], и X замкнуто в нем; следовательно, X R -вложено в Y , т.е. любая непрерывная псевдометрика на X продолжается

до непрерывной псевдометрики на Y [27]. В [10] доказано, что свободная абелева топологическая группа $A(X)$ P -вложенного в Y подпространства является топологической подгруппой свободной абелевой топологической группы $A(Y)$. Поскольку $B(X)$ и $B(Y)$ — не что иное как топологические фактор-группы групп $A(X)$ и $A(Y)$ по их подгруппам квадратов $A(2X)$ и $A(2Y)$ [34] (при этом $A(2X) = A(X) \cap A(2Y)$), свободная булева группа $B(X)$ является топологической подгруппой (тем более, подпространством) группы $B(Y)$. Из наследственности монотонной нормальности и утверждения 3.1 немедленно вытекает

Утверждение 3.2. *Свободная булева топологическая группа любого кружевного пространства монотонно нормальна.*

3.3. Доказательство основной теоремы

Пусть $A = \{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ — обычная сходящаяся последовательность (с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$). В [23] доказано, что если для некоторого топологического пространства Z произведение $A \times Z$ монотонно нормально, то Z является кружевным [23, Theorem 5.22]. Пусть X — кружевное пространство. Поскольку последовательность A метризуема, топологическая сумма $X \oplus A$ тоже является кружевным пространством. В силу утверждения 3.2 топологическая группа $B(X \oplus A)$ монотонно нормальна. Согласно [34] имеем $B(X \oplus A) = B(X) \times B(A)$. Поскольку $A \subset B(A)$ и монотонная нормальность наследуется подпространствами, заключаем, что произведение $B(X) \times A$ монотонно нормально. Значит, $B(X)$ — кружевное пространство.

4. Квазитопологические алгебры

Определения и свойства квазитопологических алгебр в основном аналогичны определениям и свойствам топологических алгебр (мы приводим их для полноты), хотя некоторые свойства существенно отличаются (см., например, теоремы 4.1 и 4.6).

4.1. Определения и основные свойства

Определение 4.1. *Квазитопологическая алгебра сигнатуры Σ — это алгебра A с топологией, относительно которой все операции $\sigma: A^n \rightarrow A$, где $n \geq 0$ и $\sigma \in \Sigma_n$, раздельно непрерывны.*

Следующая теорема является важным свойством квазитопологических алгебр, выгодно отличающим их от топологических.

Теорема 4.1. *Пусть A — квазитопологическая алгебра, $\sim$ — конгруэнция на A и B — факторалгебра $A/\sim$ с фактортопологией относительно канонического гомоморфизма. Тогда B является квазитопологической алгеброй, то есть операции на B раздельно непрерывны.*

Доказательство. Пусть σ — произвольный символ операции из Σ арности j , σ^A и σ^B — соответствующие ему операции на A и B , $q: A \rightarrow B$ — факторный гомоморфизм. Нужно показать, что отображение $\sigma^B: B^j \rightarrow B$ раздельно непрерывно, т.е. отображение $\sigma^B: B^{\otimes j} \rightarrow B$ непрерывно. Имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes j} & \xrightarrow{\sigma^A} & A \\ q^{\otimes j} \downarrow & & \downarrow q \\ B^{\otimes j} & \xrightarrow{\sigma^B} & B \end{array}$$

Пусть $U \subset B$ открыто, тогда полный прообраз множества U при композиции $q \circ \sigma^A$ открыт в $A^{\otimes j}$ в силу факторности отображения q и непрерывности (относительно кросс-топологии) отображения σ^A . Поскольку диаграмма коммутативна, этот полный прообраз является также полным прообразом множества $\sigma^{B^{-1}}(U)$ при отображении $q^{\otimes j}$, поэтому в силу факторности отображения $q^{\otimes j}$ (см. свойства выше) и коммутативности диаграммы получаем, что $\sigma^{B^{-1}}(U)$ открыто в $B^{\otimes j}$, так что операция σ^B на B непрерывна относительно кросс-топологии на $B^{\otimes j}$, то есть раздельно непрерывна относительно обычной топологии произведения на B^j . $\square$

Определение 4.2. *Многообразием квазитопологических алгебр* называется любой класс квазитопологических алгебр, замкнутый относительно перехода к топологическим произведениям, образам гомоморфизмов с фактортопологией и топологическим подалгебрам.

Определение 4.3. *Полным многообразием квазитопологических алгебр* называется класс квазитопологических алгебр, состоящий из всех алгебр, удовлетворяющих некоторой заданной системе тождеств над Σ .

Так как топологические произведения, подалгебры и факторалгебры квазитопологических алгебр являются квазитопологическими алгебрами, то каждое полное многообразие является многообразием.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие квазитопологических алгебр, $A \in \mathcal{V}$ и B — квазитопологическая алгебра, алгебраически изоморфная алгебре A и снабжённая антидискретной топологией. Тогда $B \in \mathcal{V}$.*

Доказательство. Доказательство этой леммы аналогично доказательству предложения 0.3 статьи [30]. Рассмотрим подалгебру C топологического произведения A^ω , состоящую из всех последовательностей, принимающих постоянное значение начиная с некоторого момента. Заметим, что отображение из C в B , которое каждой последовательности из C ставит в соответствие это постоянное значение, является сюръективным непрерывным гомоморфизмом. Легко видеть, что оно также и открыто, а значит, B является топологической факторалгеброй алгебры C . Следовательно, $B \in \mathcal{V}$ по определению многообразия. $\square$

Как и в случае топологических алгебр, для квазитопологической Σ -алгебры A через $\bar{A}$ мы будем обозначать абстрактную Σ -алгебру, которая как множество совпадает с A и имеет те же операции; другими словами, $\bar{A}$ — это алгебра A без топологии. Аналогично, для многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр через $\bar{\mathcal{V}}$ мы будем обозначать класс всех абстрактных алгебр, алгебраически изоморфных алгебрам из $\mathcal{V}$; он состоит из тех же алгебр, что и $\mathcal{V}$, только без топологии.

Предложение 4.1. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие квазитопологических алгебр. Тогда $\bar{\mathcal{V}}$ является многообразием абстрактных алгебр.*

Доказательство. Очевидно, класс $\bar{\mathcal{V}}$ замкнут относительно произведений и подалгебр. Из теоремы 4.1 вытекает, что класс $\bar{\mathcal{V}}$ замкнут относительно перехода к образам гомоморфизмов. $\square$

Класс $\mathcal{W}$ всех квазитопологических Σ -алгебр является полным многообразием квазитопологических алгебр.

4.2. Свободные квазитопологические алгебры

Определение 4.4. Свободной квазитопологической алгеброй произвольно-го топологического пространства X в данном многообразии $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр назовём квазитопологическую алгебру $F_{\mathcal{V}}^q(X) \in \mathcal{V}$ вместе с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}^q(X)$ со свойствами:

- 1) алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ порождается множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$ в произвольную квазитопологическую алгебру $A \in \mathcal{V}$ найдётся непрерывный гомоморфизм $h: F_{\mathcal{V}}^q(X) \rightarrow A$ такой, что $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Аналогично предложению 1.1, получаем

Предложение 4.2. Пусть $\mathcal{T}$ — топология пространства X . Топология на $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ является самой сильной из топологий, относительно которой все операции сигнатуры раздельно непрерывны и которые индуцируют на $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ топологию $\mathcal{T}'$, относительно которой отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ непрерывно.

Определение 4.5. Пусть $\mathcal{W}$ — многообразие всех топологических алгебр данной сигнатуры Σ . Свободная квазитопологическая алгебра $F_{\mathcal{W}}^q(X)$ называется абсолютно свободной квазитопологической Σ -алгеброй пространства X и обозначается $W^q(X)$.

Теорема 4.2. Пусть $\mathcal{V}$ — (нетривиальное) многообразие квазитопологических алгебр и X — топологическое пространство. Тогда существует свободная квазитопологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ с непрерывным отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}: X \rightarrow F_{\mathcal{V}}^q(X)$. Кроме того,

- 1) абстрактная алгебра $\overline{F_{\mathcal{V}}^q(X)}$ изоморфна свободной алгебре множества X в многообразии $\overline{\mathcal{V}}$;
- 2) для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$, где $A \in \mathcal{V}$, гомоморфизм $h: F_{\mathcal{V}}^q(X) \rightarrow A$, для которого $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$, единствен;
- 3) отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ инъективно;
- 4) алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ и отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ определены однозначно с точностью до топологического изоморфизма, т.е. если алгебра F и отображение φ удовлетворяют условиям в определении 4.4, то существует изоморфизм $i: F_{\mathcal{V}}^q(X) \rightarrow F$, являющийся гомеоморфизмом, для которого $\varphi = i \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

Доказательство. Алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ и отображение $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ строятся стандартным образом. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ — множество квазитопологических алгебр такое, что $|A| \leq |X| + |\Sigma|$ для $A \in \mathcal{M}$ и для каждой алгебры $B \in \mathcal{V}$ мощности $|B| \leq |X| + |\Sigma|$ найдется квазитопологическая алгебра $A \in \mathcal{M}$, топологически изоморфная алгебре B . Такое множество строится точно так же, как в доказательстве теоремы 1.1. Рассмотрим отображение

$$\varphi_X^{\mathcal{V}} = \bigtriangleup_{A \in \mathcal{M}} \bigtriangleup_{\Phi \in C(X, A)} \Phi: X \rightarrow P = \prod_{A \in \mathcal{M}} A^{C(X, A)},$$

где $C(X, A)$ есть множество непрерывных отображений из X в A , и подалгебру $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ алгебры P , порождённую множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$. Пусть $A \in \mathcal{V}$ и $f: X \rightarrow A$ — любое непрерывное отображение. Образ $f(X)$ содержится в некоторой подалгебре B мощности $|B| \leq |X| + |\Sigma|$ алгебры A . Пусть $A_0 \in \mathcal{M}$ и $\psi: B \rightarrow A_0$ — топологический изоморфизм. Обозначим через $\pi: P \rightarrow A_0$ композицию проектирований произведения P на степень $A_0^{C(X, A_0)}$ и степени $A_0^{C(X, A_0)}$ на сомножитель, соответствующий отображению $\psi \circ f \in C(X, A_0)$. Сужение g отображения π на $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ — непрерывный гомоморфизм. Для гомоморфизма $h = \psi^{-1} \circ g$ имеем $f = h \circ \varphi_X^{\mathcal{V}}$.

1. Пусть $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{V} : \text{топология алгебры } A \text{ антидискретна}\}$. Это многообразие квазитопологических алгебр. Из леммы 4.1 вытекает, что $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Так как любое отображение в антидискретное пространство непрерывно, то абстрактная алгебра $F_{\mathcal{U}}^q(X)$, снабжённая антидискретной топологией, вместе с тождественным вложением $\varphi_X^{\mathcal{U}}: X \rightarrow F_{\mathcal{U}}^q(X)$ является квазитопологической алгеброй в $\mathcal{U}$. Значит, существует (непрерывный) гомоморфизм ψ из $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ в эту алгебру, для которого $\psi \circ \varphi_X^{\mathcal{U}} = \varphi_X^{\mathcal{V}}$. Так как алгебра $\overline{F_{\mathcal{U}}^q(X)}$ с $\varphi_X^{\mathcal{U}}$ свободна и $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ порождена множеством $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$, то ψ является алгебраическим изоморфизмом (см., например, [22, с. 167] или замечание 0.1).

2. Вытекает из пункта 1 и единственности гомоморфизма h для абстрактных алгебр $\overline{F_{\mathcal{V}}^q(X)} \cong \overline{F_{\mathcal{V}}^q(X)}$ и A .

3. Вытекает из того, что $\psi \circ \varphi_X^{\mathcal{U}} \varphi_X^{\mathcal{V}} \circ \psi \circ \varphi_X^{\mathcal{U}}$ (см. доказательство пункта 1).

4. Доказательство пункта 4 повторяет доказательство пункта 4 теоремы 1.1. $\square$

4.3. Абсолютно свободная квазитопологическая алгебра

Конструкция абсолютно свободной квазитопологической алгебры совершенно аналогична конструкции абсолютно свободной топологической алгебры, единственное отличие состоит в том, что обычные произведения пространств заменяются на кросс-произведения.

Пусть X — топологическое пространство. Из теоремы 4.2 вытекает, что существует абсолютно свободная квазитопологическая алгебра пространства X и эта алгебра изоморфна алгебре термов $W(X)$. В этом разделе мы конструктивно опишем абсолютно свободную квазитопологическую Σ -алгебру $W^q(X)$ и изоморфизм $\Phi: W^q(X) \rightarrow W(X)$.

Напомним, что Σ представляет собой объединение множеств Σ_j операций конечной ариности j :

$$\Sigma = \bigcup_{j \in \omega} \Sigma_j.$$

Будем строить $W^q(X)$ в соответствии с определением терма. На нулевом шаге рассматриваем топологическую сумму пространства X и множества Σ_0 , снабжённого дискретной топологией, то есть

$$W_0^q(X) = X \oplus \Sigma_0.$$

Элементы этого пространства являются символами переменных и 0-арными операциями (т.е. термами нулевой степени). Обозначим через Φ^0 тождественное отображение $W_0^q(X) \rightarrow T_0(X)$.

На первом шаге для каждого $j \in \omega$ и каждого $\sigma \in \Sigma_j$ обозначим через $(W_0^q(X)^{\otimes j})_\sigma$ топологическую копию пространства $W_0^q(X)^{\otimes j}$. Наборы $(t_1, \dots, t_j) \in W_0^q(X)^{\otimes j}$, рассматриваемые как элементы именно этой копии, будем обозначать $(t_1, \dots, t_j)_\sigma$. Определим пространство $W_1^q(X)$ как топологическую сумму:

$$W_1^q(X) = \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_0^q(X)^{\otimes j})_\sigma.$$

Каждый элемент каждого слагаемого $(W_0^q(X)^{\otimes j})_\sigma$, где $\sigma \in \Sigma_j$, отождествим с термом первой степени с помощью отображений

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma^1: (W_0^q(X)^{\otimes j})_\sigma &\rightarrow T_1(X), \\ \Phi_\sigma^1((t_1, \dots, t_j)_\sigma) &= \sigma(t_1, \dots, t_j) \in T_1(X) \end{aligned}$$

для $\sigma \in \Sigma_j$, $j > 0$ и $t_1, \dots, t_j \in W_0^q(X) = X \oplus \Sigma_0 = T_0(X)$.

Заметим, что сумма $\Phi^1 = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_0} \Phi_\sigma^1$ представляет собой взаимно однозначное соответствие между $W_1^q(X)$ и множеством $T_1(X)$ в всех термах первой степени.

Предположим, что $n > 0$ и мы уже определили пространство $W_{n-1}^q(X)$ и отождествили его с множеством всех термов $(n-1)$ -й степени посредством отображения Φ^{n-1} . Для каждого $j \in \omega$, каждого набора $(k_1, \dots, k_j)$, где $0 \leq k_m \leq n-1$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1$, и каждого $\sigma \in \Sigma_j$ обозначим через

$(W_{k_1}^q(X) \otimes \cdots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma$ топологическую копию пространства $W_{k_1}^q(X) \otimes \cdots \otimes W_{k_j}^q(X)$ и положим

$$W_n^q(X) = \bigoplus_{j>0} \bigoplus_{\substack{0 \leq k_1, \dots, k_j \leq n-1 \\ \max(k_1, \dots, k_n) = n-1}} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_j} (W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma.$$

Для $j > 0$, неотрицательных целых $k_1, \dots, k_j$, удовлетворяющих условию $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n-1$, $i \in I_j$ и любого набора³ $(t_1, \dots, t_j)_\sigma \in (W_{k_1}^q(X) \otimes \cdots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma$ положим

$$\Phi_{\sigma; k_1, \dots, k_j}^n(t_1, \dots, t_j) = \sigma(\Phi^{n-1}(t_1), \dots, \Phi^{n-1}(t_j)) \in T_n(X).$$

Тем самым мы определили отображение $\Phi_{\sigma; k_1, \dots, k_j}^n : (W_{k_1}^q(X) \otimes \dots \otimes W_{k_j}^q(X))_\sigma \rightarrow T_n(X)$. Сумма Φ^n всех этих отображений представляет собой взаимно однозначное соответствие между $W_n^q(X)$ и множеством $T_n(X)$ всех термов n -й ступени, так что мы можем отождествить множество $W_n^q(X)$ с множеством $T_n(X)$.

Заметим, что $W_n^q(X) \cap W_m^q(X) = \emptyset$, если $n \neq m$. В конце концов положим

$$W^q(X) = \bigoplus_{n \in \omega} W_n^q(X)$$

и

$$\Phi = \bigoplus_{n \in \omega} \Phi^n.$$

Отображение Φ осуществляет взаимно однозначное соответствие между множеством $W^q(X)$ и абсолютно свободной алгеброй $W(X) = \bigcup_{n \in \omega} T_n(X)$.

Операции $\sigma \in \Sigma$ на алгебре $W(X)$ естественным образом порождают операции на $W^q(X)$. А именно, пусть $j > 0$ и $t_1, \dots, t_j \in W^q(X)$. Для каждого $m \leq j$ элемент t_m содержится в ровно одном множестве $W_{n_m}^q(X)$. Положим $n = \max\{n_1, \dots, n_j\} + 1$ и

$$\sigma(t_1, \dots, t_j) = (t_1, \dots, t_j)_\sigma \in W_n^q(X).$$

Лемма 4.2. *Алгебра $W^q(X)$ является квазитопологической Σ -алгеброй.*

Доказательство. Мы должны проверить, что операции $\sigma \in \Sigma$, определённые на $W^q(X)$, непрерывны относительно кросс-топологии, то есть раздельно непрерывны относительно обычной топологии произведения. Из определения операций $\sigma \in \Sigma_j$ на $W^q(X)$ видно, что их сужение на каждое слагаемое $W_{n_1}^q(X) \otimes \cdots \otimes W_{n_j}^q(X)$ кросс-степени $W^q(X)^{\otimes j}$ представляет собой

³Через $(t_1, \dots, t_j)_\sigma$ мы обозначаем элемент пространства $W_{n_1}^q(X) \otimes \cdots \otimes W_{n_j}^q(X)$, рассматриваемый как элемент σ -й копии этого пространства.

гомеоморфизм между $W_{n_1}^q(X) \otimes \cdots \otimes W_{n_j}^q(X)$ и $(W_{n_1}^q(X) \otimes \cdots \otimes W_{n_j}^q(X))_\sigma$. Значит, операция $\sigma \in \Sigma_j$ непрерывна как сумма непрерывных отображений:

$$\sigma = \bigoplus_{n_1, \dots, n_j \geq 0} \sigma|_{W_{n_1}^q(X) \otimes \cdots \otimes W_{n_j}^q(X)}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Следующая лемма тоже совершенно аналогична соответствующей лемме для топологических алгебр.

Лемма 4.3. *Для любой квазитопологической алгебры $A \in \mathcal{W}$ и любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow A$ существует непрерывный гомоморфизм $\tilde{f}: W^q(X) \rightarrow A$, для которого $f = \tilde{f}|_X$.*

Доказательство. Для $j \geq 0$ обозначим операцию на A , соответствующую операции $\sigma \in \Sigma_j$ на $W^q(X)$, тем же символом. По определению операций σ на алгебре $W^q(X)$ всякий элемент множества $W_n^q(X)$ при $n > 0$ имеет вид $(x_1, \dots, x_j)_\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_j)$, где $j > 0$, $\sigma \in \Sigma_n$, $x_i \in W_{k_i}^q(X)$ для $i \leq j$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n - 1$. Определим отображения $f_n: W_n^q(X) \rightarrow A$ для $n \in \omega$ следующим образом. Положим

$$f_0|_X = f, \quad f_0|_{\Sigma_0} = \text{id}$$

(здесь id — тождественное отображение). Отображение f_0 непрерывно, поскольку f непрерывно на X , а слагаемое Σ_0 дискретно. Для $\sigma \in \Sigma_j$, $j > 0$, положим

$$f_{\sigma,1}((x_1, \dots, x_j)_\sigma) = \sigma(f_0(x_1), \dots, f_0(x_j))$$

для $x_1, \dots, x_j \in W_0^q(X) = X \cup \Sigma_0$, то есть для $(x_1, \dots, x_j)_\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_j) \in W_1^q(X)$. Каждое отображение $f_{\sigma,1}: W_1^q(X) \rightarrow A$ непрерывно, поскольку оно является композицией непрерывных отображений f_0 и σ , и оно согласовано с операцией σ в естественном смысле. Положим $f_1 = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_0} f_{\sigma,1}$. Это непрерывное отображение из $W_1^q(X)$ в A , согласованное со всеми операциями σ . Предположим, что $n > 1$ и мы уже определили для всех $k < n$ непрерывные отображения $f_k: W_k^q(X) \rightarrow A$, согласованные со всеми операциями. Для $\sigma \in \Sigma_j$, $j > 0$, положим

$$f_{\sigma,n}((x_1, \dots, x_j)_\sigma) = \sigma(f_{k_1}(x_1), \dots, f_{k_j}(x_j))$$

для элементов $x_1 \in W_{k_1}^q(X), \dots, x_j \in W_{k_j}^q(X)$, где $0 \leq k_1, \dots, k_j \leq n - 1$ и $\max\{k_1, \dots, k_j\} = n - 1$, то есть для $(x_1, \dots, x_j)_\sigma = \sigma(x_1, \dots, x_j) \in W_n^q(X)$, и $f_n = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma_0} f_{\sigma,n}$. Определим теперь отображение $\tilde{f}: W^q(X) \rightarrow A$ так:

$$\tilde{f} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} f_n.$$

Оно является гомоморфизмом, продолжающим отображение f . Притом оно непрерывно, будучи суммой непрерывных отображений f_n . $\square$

Теорема 4.3. *Для топологического пространства X квазитопологическая алгебра $W^q(X)$ вместе с тождественным вложением $\varphi_X^{\mathscr{W}} = \text{id}_X^{\mathscr{W}} : X \rightarrow W^q(X)$ является абсолютно свободной квазитопологической Σ -алгеброй. Как абстрактная алгебра $W^q(X)$ является абсолютно свободной Σ -алгеброй над множеством X .*

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из лемм 4.2 и 4.3. Второе утверждение следует из того, что отображение Φ является изоморфизмом между алгеброй $W^q(X)$, рассматриваемой как абстрактная алгебра, и абстрактной абсолютно свободной алгеброй $W(X)$. $\square$

Пусть $\mathscr{V}$ — любое многообразие квазитопологических алгебр, и пусть X — любое топологическое пространство. Так как $F_{\mathscr{V}}^q(X) \in \mathscr{W}$, то в силу теорем 4.2 и 4.3 существует единственный непрерывный гомоморфизм $Q^{\mathscr{V}} : W^q(X) \rightarrow F_{\mathscr{V}}^q(X)$, для которого $\varphi_X^{\mathscr{V}} = Q^{\mathscr{V}} \circ \text{id}_X^{\mathscr{W}} = Q^{\mathscr{V}}|_X$. Мы будем называть гомоморфизм $Q^{\mathscr{V}}$ *естественным гомоморфизмом* из $W^q(X)$ в $F_{\mathscr{V}}^q(X)$. Будем писать также Q вместо $Q^{\mathscr{V}}$, если из контекста понятно, какое многообразие $\mathscr{V}$ имеется в виду.

В следующей теореме сформулировано важное свойство, присущее только свободным квазитопологическим алгебрам и выгодно отличающее квазитопологические алгебры от топологических.

Теорема 4.4. *Для любого топологического пространства X и любого полного многообразия $\mathscr{V}$ квазитопологических алгебр топология свободной квазитопологической алгебры $F_{\mathscr{V}}(X)$ является фактортопологией относительно естественного гомоморфизма Q алгебры $W^q(X)$ на $F_{\mathscr{V}}(X)$.*

Доказательство. Обозначим через $F_{\mathscr{V}}^Q(X)$ алгебру $\overline{F_{\mathscr{V}}(X)}$ с фактортопологией относительно Q . В силу единственности свободной квазитопологической группы достаточно проверить, что $F_{\mathscr{V}}^Q(X)$ с отображением $\varphi_X = Q|_X$ является свободной квазитопологической алгеброй пространства X . Ясно, что первое условие в определении 4.4 для неё выполнено. Проверим второе. Пусть $A \in \mathscr{V}$, $f : X \rightarrow A$ — непрерывное отображение и $\tilde{f} : W^q(X) \rightarrow A$ — непрерывный гомоморфизм, продолжающий f . Поскольку $\overline{F_{\mathscr{V}}(X)}$ является абстрактной свободной алгеброй над множеством $Q(X)$, согласно определению свободной алгебры существует гомоморфизм $h : F_{\mathscr{V}}(X) \rightarrow A$, продолжающий $f \circ \varphi_X^{-1}$. Композиция $h \circ Q$ является гомоморфизмом из $W^q(X)$ в A , и притом она продолжает отображение f .

Отображение множества в алгебру продолжается до гомоморфизма свободной алгебры над этим множеством в ту же алгебру единственным образом. Значит, $\tilde{f} = h \circ Q$. Из непрерывности отображения $\tilde{f}$ и факторности отображения Q вытекает непрерывность гомоморфизма h . Ясно, что $f = h \circ \varphi_X$. Таким образом, для $F(X)$ и $\varphi_X = Q|_X$ выполнено условие 2 в определении 4.4. $\square$

В силу теоремы 4.2 для многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр свободная алгебра $F_{\mathcal{V}}(X)$ алгебраически изоморфна свободной алгебре $F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$ абстрактного многообразия $\overline{\mathcal{V}}$, объекту широко изученному и конструктивно описанному [22, Chapter 4]. Но строение топологии квазитопологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ в общем случае непонятно. В случае полного многообразия $\mathcal{V}$ теорема 4.4 позволяет конструктивно описать $F_{\mathcal{V}}(X)$.

Согласно теореме 2 из [22, с. 163] для абстрактного многообразия $\overline{\mathcal{V}}$ на алгебре термов $W(X)$ над множеством X существует конгруэнция $\sim$ такая, что $W(X)/\sim$ является абстрактной свободной алгеброй $F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$ в $\overline{\mathcal{V}}$. Это пересечение всех конгруэнций $\sim_*$ на $W(X)$, для которых $W(X)/\sim_* \in \mathcal{V}$. Отсюда и из теоремы 4.4 получаем следующую версию теоремы 4.4.

Теорема 4.5. Пусть $\mathcal{V}$ — полное многообразие квазитопологических алгебр, X — топологическое пространство, $\Phi: W^q(X) \rightarrow W(X)$ — алгебраический изоморфизм из раздела 4.3, $\sim$ — конгруэнция на $W(X)$, для которой $W(X)/\sim$ является абстрактной свободной алгеброй $F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$ в абстрактном многообразии $\overline{\mathcal{V}}$, $f: W(X) \rightarrow W(X)/\sim$ — факторотображение и $Q = \Phi \circ f$. Положим $F_{\mathcal{V}}(X) = W(X)/\sim$ с фактортопологией относительно отображения Q и $\varphi_X^{\mathcal{V}} = Q$.

Тогда $F_{\mathcal{V}}(X)$ с отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ является свободной квазитопологической алгеброй пространства X в многообразии $\mathcal{V}$.

Доказательство. Согласно теореме 2 из [22, с. 163] для абстрактного многообразия $\overline{\mathcal{V}}$ на алгебре термов $W(X)$ над множеством X существует конгруэнция $\sim$ такая, что $W(X)/\sim$ является абстрактной свободной алгеброй $F_{\overline{\mathcal{V}}}(X)$ в $\overline{\mathcal{V}}$. Это пересечение всех конгруэнций $\sim_*$ на $W(X)$, для которых $W(X)/\sim_* \in \mathcal{V}$. Отсюда и из теоремы 4.4 получаем утверждение теоремы. $\square$

Как показывает пример 2.1, свободные топологические алгебры, вообще говоря, не являются топологическими факторалгебрами абсолютно свободных.

По аналогии со случаем абстрактных свободных алгебр обозначим через $F_n(X)$ множество значений полиномов n -й степени на элементах порождающего множества $Q(X)$ в $F_{\mathcal{V}}^q(X)$. Заметим, что $F_n(X) = Q(W_n^q(X))$ и $F_{\mathcal{V}}^q(X) = \bigcup_{n \geq 0} F_n(X)$.

Ещё одно свойство, которое выгодно отличает квазитопологические алгебры от топологических, сформулировано в следующей теореме.

Теорема 4.6. *Для любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр и всякого топологического пространства X свободная квазитопологическая алгебра $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $F_{\mathcal{V}}^q(X) = \bigcup_{n \geq 0} F_n(X)$.*

Доказательство. Пространство $W^q(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $W^q(X) = \bigcup_{n \geq 0} W_n^q(X)$, поскольку она является топологической суммой своих подпространств $W_n^q(X)$, и при этом все $W_n^q(X)$ замкнуты в $W^q(X)$. Из факторности отображения Q в силу леммы 0.3 получаем, что $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ имеет топологию индуктивного предела относительно разложения $F_{\mathcal{V}}^q(X) = \bigcup_{n \geq 0} Q(W_n^q(X)) = \bigcup_{n \leq 0} F_n(X)$. $\square$

Отметим, что в многообразиях топологических алгебр эта теорема не имеет места (см. [33]).

4.4. Отделимость в квазитопологических алгебрах

Из теоремы Сверчковского (см. теорему 1.2) вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.7. *Пусть X — тихоновское пространство, $\mathcal{V}$ — полное многообразие квазитопологических алгебр и $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ вместе с отображением $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ — свободная квазитопологическая алгебра пространства X в $\mathcal{V}$. Тогда $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ — гомеоморфное вложение, $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X)$ замкнуто в $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ и $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ является хаусдорфовым пространством.*

Доказательство. Пусть $A = (F_{\overline{\mathcal{V}}}(X), \mathcal{T}_F)$ — топологическая алгебра из теоремы 1.2. В силу теоремы 4.2 A алгебраически изоморфна алгебре $F_{\mathcal{V}}^q(X)$. Так как $\mathcal{V}$ — полное многообразие и $F_{\mathcal{V}}^q(X) \in \mathcal{V}$, то $A \in \mathcal{V}$. Следовательно, существует непрерывный гомоморфизм $\psi: F_{\mathcal{V}}^q(X) \rightarrow A$, для которого $\psi \circ \varphi_X^{\mathcal{V}} = \text{id}$, где id — тождественное гомеоморфное вложение пространства X в A . Из замечания 0.1 вытекает, что ψ — непрерывная биекция. Так как A — тихоновское пространство, то $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ — хаусдорфово пространство. Из того, что $\psi \circ \varphi_X^{\mathcal{V}} = \text{id}$ и id является топологическим вложением, следует, что $\varphi_X^{\mathcal{V}}$ — топологическое вложение. Поскольку множество X замкнуто в A , множество $\varphi_X^{\mathcal{V}}(X) = \psi^{-1}(X)$ замкнуто в $F_{\mathcal{V}}^q(X)$. $\square$

Теорема 4.8. *Пусть X — функционально хаусдорфово пространство, тогда пространство $F_{\mathcal{V}}^q(X)$ тоже функционально хаусдорфово для любого полного многообразия $\mathcal{V}$ квазитопологических алгебр.*

Доказательство. Воспользуемся известным критерием функциональной хаусдорфовости: пространство X функционально хаусдорфово тогда и только тогда, когда оно допускает более слабую тихоновскую топологию. Обозначим X с такой более слабой топологией через $\tilde{X}$.

По теореме 1.2 на $F_{\mathcal{T}}(\tilde{X})$ существует тихоновская топология $\mathcal{T}$, относительно которой все операции не только раздельно непрерывны, но даже непрерывны, и при этом $\tilde{X}$ вложено в $(F_{\mathcal{T}}(\tilde{X}), \mathcal{T})$. В силу предложения 4.2 эта топология не сильнее топологии на $F_{\mathcal{V}}(\tilde{X})$, которая, в свою очередь, не сильнее топологии на $F_{\mathcal{V}}(X)$. $\square$

Замечание 4.1. Известно, что кросс-произведение сохраняет аксиомы отделимости T_1 и T_2 , а T_3 не сохраняет: если X_1, X_2 — метрические пространства, X_1 содержит в качестве подпространства сепарабельное полное метрическое пространство без изолированных точек, а X_2 не дискретно, то $X_1 \otimes X_2$ не регулярно ([25, пример 3.2]). Таким образом, свободная квазитопологическая алгебра $F(X)$ не обязана быть регулярной даже для полного сепарабельного метрического пространства X .

В качестве примера рассмотрим *свободную квазитопологическую группу* $F^q(X)$ T_1 -пространства X . Это свободная квазитопологическая алгебра пространства X в полном многообразии квазитопологических групп — универсальных алгебр, сигнатура которых состоит из 0-арной операции (единица), одной унарной операции (возведение в степень -1) и одной бинарной операции (умножение), а определяющими тождествами являются хорошо известные аксиомы из определения группы.

Замечание 4.2. Для полного сепарабельного метрического пространства X без изолированных точек свободная квазитопологическая группа $F^q(X)$ не регулярна.

Доказательство. Согласно [18, теорема 1.1], для пространства X существует замкнутое вложение $\sigma: X^{\otimes 2} \rightarrow F^q(X)$. Пространство $X^{\otimes 2}$ не регулярно [25, пример 3.2]. Следовательно, группа $F^q(X)$ содержит нерегулярное пространство $\sigma(X^{\otimes 2})$, а значит, и сама нерегулярна. $\square$

5. Квазимальцевские алгебры

5.1. Определения и основные свойства

Определение 5.1. *Квазимальцевской алгеброй* мы будем называть квазитопологическую алгебру с квазинепрерывной операцией Мальцева μ . Многообразие квазимальцевских алгебр сигнатуры $\{\mu\}$ будем называть *многообразием квазимальцевских алгебр* и обозначать через $\mathcal{M}^q$. Свободную квазитопологическую группу топологического пространства X в этом многообразии будем называть *свободной квазимальцевской алгеброй* пространства X и обозначать через $M^q(X)$.

Отметим, что, в отличие от случая топологических алгебр, из того, что среди производных операций какого-нибудь многообразия $\mathcal{V}^q$ квазитопологических алгебр имеется операция Мальцева, вообще говоря, не следует, что любая алгебра $A \in \mathcal{V}^q$ является квазимальцевской, потому что композиция раздельно непрерывных отображений не обязана быть раздельно непрерывной.

Пример 5.1. Рассмотрим алгебру A невырожденных вещественных матриц размера 2×2 с обычными операциями $\cdot$ умножения и $^{-1}$ обращения матриц, снабжённую топологией $\mathcal{T}$, базу которой составляют дополнения до конечных множеств. Обе операции раздельно непрерывны относительно $\mathcal{T}$, однако производная бинарная операция $p(x, y) = x \cdot y \cdot x^{-1}$ не является раздельно непрерывной. Действительно, рассмотрим, например, матрицы

$$x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $0 \neq a \neq b \neq 0$. Получаем, что

$$p(x, y) = xyx^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & ab^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдётся окрестность V матрицы $p(x, y)$ такая, что в любой окрестности U матрицы x найдётся матрица $\tilde{x}$ такая, что $p(\tilde{x}, y) = \tilde{y} \notin V$. Например, в качестве V можно взять окрестность, не содержащую матрицу

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В любой окрестности U матрицы x найдётся матрица $\tilde{x} = \text{diag}(c, d)$, где c и d — ненулевые числа, произведение которых равно 1.

Тем не менее в некоторых случаях композиция раздельно непрерывных операций на алгебре раздельно непрерывна. Пусть A — алгебра с топологией и $f(x_1, \dots, x_n)$ — раздельно непрерывный многочлен от переменных $x_1, \dots, x_n$ на этой алгебре. Посмотрим, что происходит при подстановке в многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ вместо переменных $x_1, \dots, x_n$ многочленов $u_1, \dots, u_n$ соответственно. Пусть многочлен u_i зависит от переменных $t_1^i, \dots, t_{k_i}^i$, что обозначим как $u_i(t_1^i, \dots, t_{k_i}^i)$. Предположим, что каждый многочлен $u_i(t_1^i, \dots, t_{k_i}^i)$ раздельно непрерывен. Скажем, что переменная t_j^i (где $j = 1, \dots, k_i$) входит в выражение для многочлена $f(u_1, \dots, u_n)$ один раз, если t_j^i входит в выражение для многочлена u_i , подставленного вместо переменной x_i , но не входит в выражения многочленов u_l при $l \neq i$. Тогда отображение

$$g_i^j(t) = f(u_1, \dots, u_i(t_1^i, \dots, t_j^i = t, \dots, t_{k_i}^i), \dots, u_n)$$

является непрерывным (значения всех переменных, за исключением t_j^i , фиксированы). Действительно, в силу раздельной непрерывности отображения $f(x_1, \dots, x_n)$ и отображений $u_i(t_1^i, \dots, t_{k_i}^i)$ для любого $t_0 \in A$ и любой окрестности U точки $g_i^j(t_0)$ найдётся окрестность V точки

$$(x_i)_0 = u_i(t_1^i, \dots, t_j^i = t_0, \dots, t_{k_i}^i)$$

такая, что $f(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n) \in U$ для любого $u \in V$. В то же время в силу раздельной непрерывности многочлена u_i найдётся окрестность W точки t_0 такая, что $u_i(t_1^i, \dots, t_{j-1}^i, t, t_{j+1}^i, \dots, t_{k_i}^i) \in V$ для любого $t \in W$. Окончательно: для любой окрестности U точки $g_i^j(t_0)$ найдётся окрестность W точки t_0 такая, что $g_i^j(W) \subset U$. Значит, отображение $g_i^j(t)$ непрерывно. Таким образом, композиция $f(u_1, \dots, u_n)$ непрерывна относительно любой переменной, входящей в выражение для $f(u_1, \dots, u_n)$ один раз. Следовательно, если каждая переменная входит в это выражение один раз, то композиция $f(u_1, \dots, u_n)$ раздельно непрерывна. Получаем, что производная операция Мальцева на группе и левой лупе с раздельно непрерывными операциями также раздельно непрерывна, ведь в многочлен $\mu(x, y, z)$ каждая из переменных x, y и z входит лишь один раз. Про квазигруппу такой факт, вообще говоря, неверен.

Как и в случае топологических алгебр, будем называть *абсолютно свободной квазимальцевской алгеброй* абсолютно свободную квазитопологическую алгебру сигнатуры $\{\mu\}$, где μ — тернарная операция. Для квазитопологических алгебр с операцией Мальцева описание абсолютно свободной

алгебры выглядит особенно просто. Положим

$$\begin{aligned} W_0^q(X) &= X, \\ W_1^q(X) &= W_0^q(X)^{\otimes 3}, \\ W_n^q(X) &= \bigoplus_{\substack{\max\{i,j,k\}=n-1 \\ i,j,k \geq 0}} W_i^q(X) \otimes W_j^q(X) \otimes W_k^q(X) \quad (n > 0). \end{aligned}$$

Очевидно, $W_i^q(X) \cap W_j^q(X) = \emptyset$ при $i \neq j$. Положим

$$W^q = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} W_i^q(X)$$

и введём на $W^q(X)$ тернарную операцию μ : для $x \in W_i^q(X), y \in W_j^q(X), z \in W_k^q(X)$ положим

$$\mu(x, y, z) = (x, y, z) \in W_i^q(X) \otimes W_j^q(X) \otimes W_k^q(X) \subset W_N^q(X),$$

где $N = \max\{i, j, k\} + 1$. Ясно, что отображение $\mu: W^q(X)^{\otimes 3} \rightarrow W^q(X)$ непрерывно, поэтому $W^q(X)$ является квазитопологической алгеброй с сигнатурой $\{\mu\}$.

Конструкция алгебры $W^q(X)$ представляет собой частный случай конструкции абсолютно свободной квазитопологической алгебры произвольной сигнатуры, описанной в разделе 1.2. Следовательно, $W^q(X)$ является абсолютно свободной квазитопологической алгеброй сигнатуры $\{\mu\}$ пространства X . В дальнейшем мы будем называть её *абсолютно свободной квазимальцевской алгеброй* (хотя она не является квазимальцевской алгеброй, поскольку никакие тождества для μ не выполнены). Ниже обозначения $W^q(X)$ и $W_n^q(X)$ мы всегда будем использовать для абсолютно свободной квазимальцевской алгебры и её подпространств.

Рассмотрим на $W^q(X)$ отношение R , определённое правилом: $(x, y) \in R$, если существует $z \in W^q(X)$, для которого $x = (z, z, y)$ или $x = (y, z, z)$. Согласно [5, с. 69], отношение R порождает конгруэнции — отношения эквивалентности на $W^q(X)$, согласованные с операцией μ . Пересечение $\sim$ всех таких конгруэнций является наименьшей конгруэнцией, согласованной с операцией μ [5, с. 69].

Факторпространство пространства $W^q(X)$ по отношению $\sim$ обозначим как $M^q(X)$, а соответствующее естественное факторное отображение обозначим Q . Поскольку конгруэнция $\sim$ согласована с операцией μ и содержит отношение R , на факторпространстве $M^q(X)$ — множестве классов эквивалентности $[x]_\sim$ — возникает операция Мальцева $\mu: (M_q(X))^{\otimes 3} \rightarrow M_q(X)$, которая определяется правилом

$$\mu([x]_\sim, [y]_\sim, [z]_\sim) = \mu(Q(x), Q(y), Q(z)) = Q(\mu(x, y, z)) = [\mu(x, y, z)]_\sim.$$

Для каждого $n \geq 0$ обозначим $M_n^q(X) = Q(W_n^q(X))$. Заметим, что как множество $M^q(X)$ — свободная алгебра в многообразии $\mathcal{M}^q$, порожденная множеством X . В дальнейшем мы будем обозначать множества $M_n^q(X)$ (без топологии) через $M_n(X)$. Когда возможна путаница, мы будем снабжать обозначение операции μ на алгебре $M^q(X)$ (с тождествами) индексом X , а обозначение операции на абсолютно свободной алгебре $W^q(X)$ оставлять без индекса.

Следующие теоремы являются частными случаями теорем, доказанных в предыдущей главе.

Теорема 5.1. *Для любого топологического пространства X квазитопологическая алгебра $M^q(X)$ с операцией μ является свободной квазимальцевской алгеброй пространства X .*

Следствие 5.1. *Для любого топологического пространства существует свободная квазимальцевская алгебра.*

Теорема 5.2. *Для любого топологического пространства X пространство $M^q(X)$ имеет топологический индуктивный предел относительно разложения $M^q(X) = \bigcup_{n \geq 0} M_n^q(X)$.*

Итак, топология свободной квазимальцевской алгебры $M^q(X)$ устроена вполне понятным образом: это индуктивный предел подпространств $M_n^q(X)$, каждое из которых является образом при естественном факторном отображении пространств, получающихся из X применением конечного числа операций кросс-произведения и топологической суммы.

5.2. Аксиомы отделимости в квазимальцевских алгебрах

Предложение 5.1. *Все T_0 -пространства, допускающие раздельно непрерывные операции Мальцева, являются также T_1 -пространствами.*

Доказательство. Пусть A — T_0 -пространство, допускающее непрерывную операцию Мальцева, $a, b \in A$. Рассмотрим открытую окрестность U точки a , не содержащую b . Предположим, что любая окрестность точки b содержит и точку $a = \mu(a, b, b) \in U$. Тогда, согласно непрерывности операции Мальцева по второму аргументу, найдётся окрестность V точки b такая, что $\mu(a, x, b) \in U$ для любого $x \in V$. Значит, если $a \in V$, то $b = \mu(a, a, b) \in U$, что противоречит выбору окрестности U . $\square$

Замечание 5.1. Фактически в предыдущем предложении доказано, что если в любом пространстве X (даже не T_0), допускающем непрерывную операцию Мальцева, у данной точки a найдётся окрестность U такая, что $b \notin U$, то у точки b найдётся окрестность V такая, что $a \notin V$.

Теорема 5.3. *Всякое T_1 -пространство X гомеоморфно вкладывается в $M^q(X)$.*

Доказательство. В [18, Theorem 1.1] было доказано, что всякое T_1 -пространство X вкладывается в свободную квазитопологическую группу $F^q(X)$. Пусть $i: X \rightarrow F^q(X)$ — соответствующее вложение. Согласно определению 4.4 определена коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F^q(X) \\ \varphi_X \downarrow & \nearrow f & \\ M^q(X) & & \end{array}$$

При этом f — непрерывный гомоморфизм, i — гомеоморфное вложение, $i(X)$ замкнуто в $F^q(X)$, а отображение φ_X инъективно и непрерывно. Покажем, что φ_X — вложение. Диаграмма коммутативна, следовательно, $f \circ \varphi_X$ — инъекция и $f(\varphi_X(X)) = i(X)$. Пусть $U \subset X$ открыто, тогда $i(U)$ открыто в $i(X)$, а значит, $\varphi_X(U) = f^{-1}(i(U))$ открыто в $\varphi_X(X) = f^{-1}(i(X)) \cap \varphi_X(X)$. Таким образом, непрерывная инъекция $f \circ \varphi_X$ переводит открытые множества в множества, открытые в её образе, т.е. является гомеоморфным вложением. $\square$

Замечание 5.2. Если X является T_0 -пространством, но не является T_1 -пространством, то X не вкладывается в $M^q(X)$.

Доказательство. В пространстве X найдутся точки a и b такие, что у точки a есть окрестность, не содержащая точку b , но любая окрестность точки b содержит точку a . Если $X \subset M^q(X)$, то для некоторого множества $\hat{U}$, открытого в $M^q(X)$, $U = \hat{U} \cap X$. Согласно замечанию 5.1, существует окрестность $\hat{V}$ точки b в $M^q(X)$, для которой $a \notin \hat{V}$. Ясно, что $V = \hat{V} \cap X$ — окрестность точки b в X и $a \notin V$ в противоречие с выбором точки b . $\square$

5.3. Ретракты квазитопологических групп

Напомним, что *квазитопологической группой* называется группа G с топологией, относительно которой умножение раздельно непрерывно, а операция взятия обратного элемента непрерывна. Мы будем обозначать свободную квазитопологическую алгебру топологического пространства X в многообразии всех квазитопологических групп через $F^q(X)$.

Определение 5.2. *Квазимальцевским пространством* называется топологическое пространство X с раздельно непрерывной операцией Мальцева.

Теорема 5.4. *Всякое квазимальцевское пространство X является ретрактом своей свободной квазитопологической группы $F^q(X)$.*

Доказательство. Пусть μ — раздельно непрерывная операция Мальцева на пространстве X . Для каждого натурального n обозначим через $F_n^q(X)$ множество слов длины, не превосходящей n в $F_n^q(X)$, а через $F_n^q(X)^o$ (через $F_n^q(X)^e$) — множество слов нечётной (чётной) длины $\leq n$. Положим $F^q(X)^o = \bigcup_n F_n^q(X)^o$ и $F^q(X)^e = F^q(X) \setminus F^q(X)^o$. Следуя работе [7], для каждого нечётного n определим по рекурсии непрерывные отображения $f_n : X^{\otimes n} \rightarrow X$. Обозначим через f_1 тождественное отображение, положим $f_3 = \mu$, а при $n \geq 3$ положим

$$\begin{aligned} f_n(x_1, \dots, x_n) = f_{n-2} & \left\{ \mu[f_1(x_1), x_2, f_{n-2}(x_3, x_4, x_5, \dots, x_n)], \right. \\ & \mu[f_3(x_1, x_2, x_3), x_3, f_{n-2}(x_3, x_4, x_5, \dots, x_n)], \\ & \mu[f_3(x_1, x_2, x_3), x_4, f_{n-4}(x_5, x_6, x_7, \dots, x_n)], \\ & \mu[f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_5, f_{n-4}(x_5, x_6, x_7, \dots, x_n)], \\ & \mu[f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), x_6, f_{n-6}(x_7, x_8, x_9, \dots, x_n)], \\ & \dots \\ & \mu[f_{n-4}(x_1, \dots, x_{n-4}), x_{n-4}, f_5(x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)], \\ & \mu[f_{n-4}(x_1, \dots, x_{n-4}), x_{n-3}, f_3(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)], \\ & \mu[f_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}), x_{n-2}, f_3(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)], \\ & \left. \mu[f_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}), x_{n-1}, f_1(x_n)] \right\}. \end{aligned}$$

Эти отображения обладают свойством:

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = f_{n-2}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \quad \text{при } x_i = x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Обозначим через X^{-1} гомеоморфную копию пространства X и для каждого $k \geq 0$ определим отображения $j_k : (X \oplus X^{-1})^{\otimes k} \rightarrow F_k(X)$ и $i_k : (X \oplus X^{-1})^{\otimes k} \rightarrow X^{\otimes k}$ правилами:

$$\begin{aligned} j_k(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}) &= x_1^{\pm 1} \dots x_k^{\pm 1}, \\ i_k(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}) &= (x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Положим $j = \bigoplus_{n \geq 0} j_n$ и $i = \bigoplus_{n \geq 0} i_n$. В [18] было показано, что отображение $j : \bigoplus (X \oplus X^{-1})^{\otimes n} \rightarrow F^q(X)$ факторно. Ясно, что i тоже факторно. Заметим, что $F^q(X)^o$ — открыто-замкнутое подмножество пространства $F^q(X)$, потому что оно является ядром непрерывного гомоморфизма в дискретную группу $\mathbb{Z}_2$, переводящего X в 1. При этом $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (X \oplus X^{-1})^{\otimes 2n-1} = j^{-1}(F^q(X)^o)$.

Значит, сужение j° отображения j на $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X^{\otimes 2n-1}$ факторно. Сужение i° отображения i на $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X^{\otimes 2n-1}$ факторно по тем же причинам. И отображение $f^\circ = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} f_{2n-1}$ непрерывно, поскольку все слагаемые f_{2n-1} непрерывны. С помощью следующей коммутативной диаграммы введём отображение r° :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (X \oplus X^{-1})^{\otimes 2n-1} & \xrightarrow{j^\circ} & F^q(X)^\circ \\ \downarrow i^\circ & & \downarrow r^\circ \\ \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X^{\otimes 2n-1} & \xrightarrow{f^\circ} & X \end{array}.$$

В силу непрерывности композиции $f^\circ \circ i^\circ$ и факторности отображения j° , отображение r° непрерывно. Искомая ретракция r определяется так:

$$r(x) = \begin{cases} r^\circ(x), & \text{если } x \in F^q(X)^\circ, \\ x_0, & \text{если } x \in F^q(X)^e, \end{cases}$$

причём в качестве x_0 берётся произвольный элемент X . Она непрерывна, так как $F^q(X)^\circ$ и $F^q(X)^e$ — открыто-замкнутые подмножества в $F^q(X)$, и отображение r° непрерывно на $F^q(X)^\circ$. $\square$

Теорема 5.5. *Всякое тихоновское квазимальцевское пространство X гомеоморфно ретракту тихоновской квазитопологической группы.*

Доказательство. В силу теоремы 4.7 мы можем считать, что X является подпространством своей свободной квазитопологической группы $F^q(X)$. В теореме 4.6 доказано существование ретракции $r: F^q(X) \rightarrow X$ для всякого квазимальцевского пространства X . По теореме 2.38 из [6] существуют квазитопологическая группа Y , являющаяся подпространством тихоновской степени X^τ пространства X для некоторого кардинала τ , сюръективный непрерывный гомоморфизм $\varphi: F^q(X) \rightarrow Y$ и непрерывное отображение $\theta: Y \rightarrow X$ такие, что имеет место следующая коммутативная диаграмма, представляющая факторизацию отображения r :

$$\begin{array}{ccc} F_q(X) & \xrightarrow{r} & X \\ \varphi \downarrow & \nearrow \theta & \\ Y & & \end{array}$$

Пусть $Z = \varphi(X) \subset Y$. Легко видеть, что сужение $\varphi|_X$ является непрерывной биекцией между X и Z . Действительно, если найдутся $x, y \in X \subset F_q(X)$ такие, что $x \neq y$, но $\varphi(x) = \varphi(y)$, то $r(x) = \theta(\varphi(x)) = \theta(\varphi(y)) = r(y)$, что

противоречит тому, что r — ретракция. Аналогично сужение $\theta|_Z: Z \rightarrow X$ — непрерывная биекция.

Пусть $U \subset Z$ открыто. Тогда $(\varphi|_X)^{-1}(U)$ открыто в $X \subset F^q(X)$ и $r((\varphi|_X)^{-1}(U)) = \theta(U)$ открыто в X , потому что r — ретракция. Таким образом, сужение $\theta|_Z$ осуществляет гомеоморфизм между Z и X . Осталось заметить, что $(\theta|_Z)^{-1} \circ \theta$ — ретракция квазитопологической группы Y на Z , и что Y является тихоновским пространством, будучи подпространством тихоновского пространства X^τ . $\square$

Следующая теорема была доказана в во второй главе для случая непрерывных, а не квазинепрерывных, операций Мальцева (см. следствие 2.2, см. также [3]). В квазинепрерывном случае доказательство ничем не отличается.

Теорема 5.6 ([3]). *Если X и Y — квазимальцевские алгебры и $f: X \rightarrow Y$ — факторный гомоморфизм, то f — открытый гомоморфизм.*

Пусть X и Y — любые множества. Напомним, что по определению порожденной множеством X свободной алгебры $\overline{M}(X)$ всякое отображение множества X в любую алгебру из многообразия $\mathcal{M}$ единственным образом продолжается до гомоморфизма на всю свободную алгебру $\overline{M}(X)$. Отсюда немедленно вытекает, что любое отображение $f: X \rightarrow Y \subset \overline{M}(Y)$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $g: \overline{M}(X) \rightarrow \overline{M}(Y)$. Следующая теорема показывает, что в случае, когда X и Y — T_1 -пространства и отображение f факторно, единственный гомоморфизм $g: M^q(X) \rightarrow M^q(Y)$, продолжающий отображение f , непрерывен и открыт.

Теорема 5.7. *Для любого факторного отображения $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств X и Y существует открытый гомоморфизм $g: M^q(X) \rightarrow M^q(Y)$, удовлетворяющий условию $\varphi_Y \circ f = g \circ \varphi_X$.*

Доказательство. Композиция $\varphi_Y \circ f$ является непрерывным отображением $X \rightarrow M^q(Y)$. По определению свободной квазимальцевской алгебры для неё существует непрерывный гомоморфизм $g: M^q(X) \rightarrow M^q(Y)$ такой, что $\varphi_Y \circ f = g \circ \varphi_X$. Напомним, что в этой главе через $W^q(X)$ и $W^q(Y)$ мы обозначаем абсолютно свободные квазимальцевские алгебры, которые представляют собой топологические суммы тройных кросс-степеней пространств X и Y . Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} W^q(X) & \xrightarrow{Q_X} & M_q(X) \\ \downarrow F & & \downarrow g \\ W^q(Y) & \xrightarrow{Q_Y} & M_q(Y), \end{array}$$

где g — гомоморфизм, продолжающий отображение f , Q_X и Q_Y — факторное отображение Q из построения квазимальцевского пространства для данных пространств (см. описание абсолютно свободной квазимальцевской алгебры) X и Y и $F = \bigoplus_n F_n$ для отображений $F_n : W_n^q(X) \rightarrow W_n^q(Y)$, определённых следующим образом:

$$\begin{aligned} F_0 &= f; \\ F_1 &= F_0 \otimes F_0 \otimes F_0; \\ &\dots \\ F_n &= \bigoplus_{\substack{\max\{i,j,k\}=n-1 \\ i,j,k \geq 0}} F_i \otimes F_j \otimes F_k \text{ для } n > 0. \end{aligned}$$

По определению, Q_X и Q_Y — факторные отображения. Покажем, что отображение F тоже факторно. Сначала докажем индукцией по n , что все отображения F_n факторны. Для $n = 0$ это верно по предположению. Пусть $n > 0$ и для всех $m < n$ отображения F_m факторны. Из определения отображения F_n видно, что для любых $i, j, k \geq 0$ таких, что $\max\{i, j, k\} = n$, выполнены равенства

$$\begin{aligned} F_n(W_i^q(X) \otimes W_j^q(X) \otimes W_k^q(X)) &= W_i^q(Y) \otimes W_j^q(Y) \otimes W_k^q(Y), \\ F_n^{-1}(W_i^q(Y) \otimes W_j^q(Y) \otimes W_k^q(Y)) &= W_i^q(X) \otimes W_j^q(X) \otimes W_k^q(X). \end{aligned}$$

Отсюда следует факторность отображения F_n , потому что слагаемые $W_i^q(X) \otimes W_j^q(X) \otimes W_k^q(X)$ и $W_i^q(Y) \otimes W_j^q(Y) \otimes W_k^q(Y)$ открыто-замкнуты в $W_n^q(X)$ и $W_n^q(Y)$ соответственно. Из того, что $F(W_n^q(X)) = W_n^q(Y)$ и $F^{-1}(W_n^q(Y)) = W_n^q(X)$ для каждого n и все слагаемые $W_n^q(X)$ и $W_n^q(Y)$ открыто-замкнуты в $W^q(X)$ и $W^q(Y)$, вытекает, что и отображение F факторно. Из выписанной выше диаграммы и факторности отображений F , Q_X и Q_Y следует факторность гомоморфизма g . Открытость этого гомоморфизма следует из предыдущей теоремы. $\square$

В случае, когда X и Y — T_1 -пространства, в силу теоремы 24 мы можем считать, что X и Y являются подпространствами алгебр $M^q(X)$ и $M^q(Y)$ соответственно, а i_X и i_Y — тождественные гомеоморфные вложения, поэтому в этом случае из доказанной теоремы вытекает такое утверждение:

Следствие 5.2. *Любое факторное отображение $f: X \rightarrow Y$ T_1 -пространств X и Y продолжается до открытого гомоморфизма $g: M^q(X) \rightarrow M^q(Y)$.*

Следствие 5.3. *Любое квазимальцевское T_1 -пространство является образом при открытой ретракции свободной квазимальцевской алгебры.*

Доказательство. Рассмотрим тождественное отображение $X \rightarrow X$. Оно факторно, следовательно, продолжается до открытого гомоморфизма $M_q(X) \rightarrow X$. Ясно, что это ретракция. $\square$

5.4. Вложения свободных квазимальцевских алгебр друг в друга

Этот раздел посвящен доказательству ещё одного естественного свойства квазитопологических мальцевских алгебр, которое не присуще топологическим мальцевским алгебрам.

Теорема 5.8. *Пусть X — тихоновское пространство и $Y \subseteq X$. Тогда тождественное вложение $Y \rightarrow X$ продолжается до замкнутого вложения $M^q(Y) \rightarrow M^q(X)$ тогда и только тогда, когда Y замкнуто в X .*

Прежде чем доказывать эту теорему, мы сделаем несколько предварительных замечаний и докажем лемму. Пользуясь тем, что пространство X тихоновское и, следовательно, вкладывается в $M^q(X)$, мы будем считать, что X является подпространством квазитопологической алгебры $M^q(X)$. Ниже через $\langle Y \rangle$ мы обозначаем квазитопологическую подалгебру алгебры $M^q(X)$, порождённую множеством $Y \subset X$. Через Q , как обычно, обозначается факторный гомоморфизм абсолютно свободной квазимальцевской алгебры $W^q(X)$ на $M^q(X)$. Заметим, что из определения пространств $W^q(X)$ и $W^q(Y)$ и замечания 0.2 немедленно вытекает, что для любого неотрицательного целого n пространство $W_n^q(Y)$ является замкнутым подпространством пространства $W_n^q(X)$.

Лемма 5.1. *Пусть X — тихоновское пространство, $Y \subset X$ — его непустое замкнутое подпространство и $n \in \omega$. Предположим, что $F \subset \langle Y \rangle$ и $Q^{-1}(F) \cap W_k^q(Y)$ замкнуто в $W_k^q(Y)$ для всех $k \leq n$. Тогда $Q^{-1}(F) \cap W_k^q(X)$ замкнуто в $W_k^q(X)$ для всех $k \leq n$.*

Доказательство. Применим индукцию по n . Для $n = 0$ утверждение очевидно, так как Y замкнуто в X . Пусть $n > 0$ и для меньших n оно верно. Пусть $F \subset \langle Y \rangle$ и $Q^{-1}(F) \cap W_k^q(Y)$ замкнуто в $W_k^q(Y)$ для всех $k \leq n$. Покажем, что $Q^{-1}(F) \cap W_n^q(X)$ замкнуто в $W_n^q(X)$, т.е. $W_n^q(X) \setminus Q^{-1}(F)$ открыто в $W_n^q(X)$. Поскольку

$$W_n^q(X) = \bigoplus_{\substack{\max\{k,l,m\}=n-1 \\ k,l,m \geq 0}} W_k^q(X) \otimes W_l^q(X) \otimes W_m^q(X),$$

достаточно проверить, что множество $W_k^q(X) \otimes W_l^q(X) \otimes W_m^q(X) \setminus Q^{-1}(F)$ открыто в $W_k^q(X) \otimes W_l^q(X) \otimes W_m^q(X)$, если $\max\{k,l,m\} = n - 1$. По определению кросс-топологии это означает, что любых таких k, l и m и любых

точек $u \in W_k^q(X)$, $v \in W_l^q(X)$ и $w \in W_m^q(X)$, удовлетворяющих условию $Q((u, v, w)) \in \langle Y \rangle \setminus F$, существуют окрестности U , V и W точек u , v и w в $W_k^q(X)$, $W_l^q(X)$ и $W_m^q(X)$ соответственно, для которых

$$\begin{aligned} U \times \{v\} \times \{w\} \cap Q^{-1}(F) &= \emptyset, \\ \{u\} \times V \times \{w\} \cap Q^{-1}(F) &= \emptyset, \\ \{u\} \times \{v\} \times W \cap Q^{-1}(F) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Мы найдём окрестность U , окрестности V и W ищутся аналогично.

Заметим, что по теореме 2.6 множество $\langle Y \rangle$ замкнуто в свободной топологической алгебре $M(X)$. Тем более, оно замкнуто в свободной квазитопологической алгебре $M^q(X)$, поскольку её топология сильнее топологии алгебры $M(X)$ по предложению 4.2. Следовательно, множество $Q^{-1}(\langle Y \rangle)$ замкнуто в $W^q(X)$.

Рассмотрим четыре возможных случая.

Случай 1: $Q(u) \notin \langle Y \rangle$. В этом случае по теореме 2.10 $Q(u) = Q(v)$ и $Q((u, v, w)) = Q(w)$. Положим $U = W_k^q(X) \setminus Q^{-1}(\langle Y \rangle)$. Для $t \in U$ имеем $Q(t^*) = Q(t) \notin \langle Y \rangle$, поэтому по теореме 2.10 либо $Q((t, v, w)) = \mu(Q(t), Q(v), Q(w)) \notin \langle Y \rangle \supset F$, либо $Q(t) = Q(v)$ и $Q((t, v, w)) = Q(w) = Q((u, v, w)) \notin F$.

Случай 2: $Q(w) \notin \langle Y \rangle$. В этом случае по теореме 2.10 $Q(v) = Q(w)$ и $Q((u, v, w)) = Q(u)$. По условию леммы $Q^{-1}(F) \cap W_r^q(Y)$ замкнуто в $W_r^q(Y)$ для всех $r \leq n$. Поскольку $k < n$, по индуктивному предположению $Q^{-1}(F) \cap W_k^q(X)$ замкнуто в $W_k^q(X)$. Положим $U = W_k^q(X) \setminus Q^{-1}(F)$. Для любого $t \in U$ имеем $Q((t, v, w)) = \mu(Q(t), Q(v), Q(w)) = Q(t) \notin F$.

Случай 3: $Q(v) \notin \langle Y \rangle$. По теореме 2.10 либо $Q(u) = Q(v)$, либо $Q(v) = Q(w)$, так что имеет место один из случаев 1 и 2.

Случай 4: $Q(u), Q(v), Q(w) \in \langle Y \rangle$. Выберем точку $y_0 \in Y$ и определим отображение $f: X \rightarrow Y \subset \langle Y \rangle$ правилом

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in Y, \\ y_0, & \text{если } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Пусть $\tilde{\tilde{f}}: W(X) \rightarrow W(Y)$ — гомоморфизм абсолютно свободных алгебр, продолжающий отображение f . Заметим, что для каждого $r \in \omega$ выполнено равенство $\tilde{\tilde{f}}(W_r^q(X)) = W_r^q(Y)$, потому что гомоморфизм $\tilde{\tilde{f}}: W^q(X) \rightarrow W^q(Y)$ просто заменяет все переменные $x \in X \setminus Y$ в термах из $W^q(X)$ на y_0 . Для каждого $s \leq k$ положим

$$C_s = \{y \in W_s^q(Z) : Q((y, v, w)) \in F\}.$$

Из того, что $Q((y, v, w)) = \mu(Q(y), Q(v), Q(w))$, следует, что $C_s = Q^{-1}(D) \cap W_s^q(Y)$, где $D = \{x \in M^q(X) : \mu(x, Q(v), Q(w)) \in F\}$. Покажем, что C_s замкнуто в $W_s^q(Y)$. Пусть $y \in \overline{C_s}$, т.е. $y \in W_s^q(Y)$ и любая окрестность точки y пересекается с C_s . Тогда любая окрестность точки $(y, \tilde{f}(v), \tilde{f}(w))$ в $W_s^q(Y) \otimes W_l^q(Y) \otimes W_m^q(Y)$ пересекается с $Q^{-1}(F)$. Действительно, любая окрестность этой точки содержит множество вида $O \times \{\tilde{f}(v)\} \otimes \{\tilde{f}(w)\}$, где O — окрестность точки y в $W_s^q(Y)$. По предположению $O \cap C_s \neq \emptyset$. Для $z \in O \cap C_s$ в силу леммы 0.2 имеем

$$\begin{aligned} Q((z, \tilde{f}(v), \tilde{f}(w))) &= \mu(Q(z), Q(\tilde{f}(v)), Q(\tilde{f}(w))) = \\ &= \mu(Q(z), Q(v), Q(w)) = Q((z, v, w)) \in F. \end{aligned}$$

Значит, $(z, \tilde{f}(v), \tilde{f}(w)) \in Q^{-1}(F)$, причём $z \in W_s^q(Y)$, $v \in W_l^q(Y)$ и $w \in W_m^q(Y)$. Так как $\max\{k, l, m\} = n - 1$ и $s \leq k$, то $(z, \tilde{f}(v), \tilde{f}(w)) \in W_r^q(Y)$ для $r = \max\{s, l, m\} + 1 \leq n$. Таким образом, любая окрестность точки $(y, \tilde{f}(v), \tilde{f}(w))$ пересекается с $Q^{-1}(F) \cap W_r^q(Y)$. По условию леммы множество $Q^{-1}(F) \cap W_r^q(Y)$ замкнуто в $W_r^q(Y)$. Следовательно, $(y, \tilde{f}(v), \tilde{f}(w)) \in Q^{-1}(F)$, откуда $Q((y, \tilde{f}(v), \tilde{f}(w))) \in F$. По лемме 0.2

$$\begin{aligned} Q((y, v, w)) &= \mu(Q(y), Q(v), Q(w)) = \mu(Q(y), Q(\tilde{f}(v)), Q(\tilde{f}(w))) = \\ &= Q((y, \tilde{f}(v), \tilde{f}(w))) \in F. \end{aligned}$$

Значит, $y \in C_s$.

Итак, множество $C_s = Q^{-1}(D) \cap W_s^q(Y)$ замкнуто в $W_s^q(Y)$ для каждого $s \leq k$. По индуктивному предположению $Q^{-1}(D) \cap W_k^q(X)$ замкнуто в $W_k^q(X)$. При этом $Q(u) \notin D$, потому что $\mu(Q(u), Q(v), Q(w)) = Q((u, v, w)) \notin F$, а значит, $u \notin Q^{-1}(D)$. Пусть U — окрестность точки u в $W_k^q(X)$, не пересекающая $Q^{-1}(D)$. Для каждого $t \in U$ имеем $Q((t, v, w)) = \mu(Q(t), Q(v), Q(w)) \notin F$. Следовательно, $U \times \{v\} \times \{w\} \cap Q^{-1}(F) = \emptyset$.

Таким образом, $Q^{-1}(F) \cap W_n^q(X)$ замкнуто в $W_n^q(X)$. То, что $Q^{-1}(F) \cap W_s^q(X)$ замкнуто в $W_s^q(X)$ для всех $s < n$, вытекает из индуктивного предположения. $\square$

Доказательство теоремы. Необходимость. Рассмотрим замкнутое вложение из формулировки теоремы $f: M^q(Y) \rightarrow M^q(X)$ и предположим, что Y не замкнуто в X . Тогда $f(M_1^q(Y)) = f(M^q(Y)) \cap M_1^q(X)$ не замкнуто в $M_1^q(X)$. Следовательно, $f(M^q(Y))$ не замкнуто в $M^q(X)$ — противоречие.

Достаточность. Пусть Y — непустое замкнутое в X подпространство, и пусть $\langle Y \rangle$ — подалгебра алгебры $M^q(X)$, порождённая множеством Y . В

силу леммы 0.1 как абстрактная алгебра $\langle Y \rangle$ изоморфна свободной алгебре $M(Y)$. Согласно предложению 4.2, топология, индуцированная на $\langle Y \rangle$ из квазимальцевской алгебры $M^q(X)$, содержится в топологии алгебры $M^q(X)$. Нам надо показать, что эти топологии совпадают, и что $\langle Y \rangle$ замкнуто в $M^q(X)$. Для этого достаточно проверить, что всякое множество, замкнутое в $M^q(Y)$, замкнуто и в $M^q(X)$. Рассмотрим множество F , замкнутое в $M^q(Y)$.

Из конструкции абсолютно свободных алгебр $W^q(X)$ и $W^q(Y)$ и замечания 0.2 следует, что квазитопологическая подалгебра алгебры $W^q(X)$, порождённая множеством Y , совпадает с $W^q(Y)$. Сужение $Q_Y = Q|_{W^q(Y)}$ гомоморфизма $Q: W^q(X) \rightarrow M^q(X)$ на $W^q(Y)$ является гомоморфизмом $W^q(Y) \rightarrow \langle Y \rangle$, продолжающим тождественное отображение $Y \rightarrow Y$. Снабдив образ этого гомоморфизма $\langle Y \rangle$ (который совпадает с $M(Y)$ как абстрактная алгебра) факторной топологией, мы получаем свободную квазитопологическую алгебру $M^q(Y)$ по теореме 4.4. Следовательно, гомоморфизм Q_Y непрерывен относительно топологии алгебры $M^q(Y)$, а значит, прообраз $Q_Y^{-1}(F) = Q^{-1}(F) \cap W^q(Y)$ замкнут в $W^q(Y)$. Отсюда вытекает, что $Q^{-1}(F) \cap W^q(Y)_k$ замкнуто в $W^q(Y)_k$ при всех $k \leq n$, $n \in \omega$. По лемме 5.1 получаем, что $Q^{-1}(F) \cap W_k^q(X)$ замкнуто в $W_k^q(X)$ для всех $k \leq n$. Из того, что $W^q(X)$ является индуктивным пределом своих подпространств $W_k^q(X)$, следует, что $Q^{-1}(F)$ замкнуто в $W(X)$. Отсюда и из факторности отображения Q получаем, что F замкнуто в $M^q(X)$. $\square$

Заключение

В диссертации содержится систематическое исследование свободных топологических алгебр с непрерывными и раздельно непрерывными операциями (ранее подобные исследования не проводились). Она вносит также заметный вклад в исследование топологических алгебр с непрерывными и раздельно непрерывными операциями.

В диссертации содержится полное доказательство существования свободной топологической алгебры $F_{\mathcal{V}}(X)$ произвольного топологического пространства X в любом многообразии $\mathcal{V}$ топологических алгебр, изучено строение абсолютно свободной алгебры и получено её явное описание. Во второй главе диссертации доказано, что на факторалгебре любой топологической алгебры из конгруэнц-перестановочного многообразия топологических алгебр (т.е. из многообразия с операцией Мальцева) все операции многообразия непрерывны относительно факторной топологии. Таким образом, в таком многообразии имеет смысл понятие топологической факторалгебры. Приведён пример многообразия топологических алгебр, в котором топологические факторалгебры существуют не всегда. Исследованы аксиомы отдельности алгебр с операцией Мальцева. Введено понятие свободной мальцевской алгебры топологического пространства (это свободная топологическая алгебра в многообразии всех топологических алгебр с операцией Мальцева). Выяснены условия, при которых топологическое пространство вкладывается в свою свободную мальцевскую алгебру (в качестве замкнутого подпространства). Введено понятие свободной тихоновской мальцевской алгебры тихоновского пространства и описаны её основные свойства. Кроме того, исследована связь между свободными мальцевскими пространствами и свободными топологическими гирдами тихоновских пространств. Наконец, приведено явное описание свободной мальцевской алгебры, которое оказывается весьма полезным техническим инструментом.

В третьей главе доказано, что свободная булева группа (т.е. свободное векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2$) кружевного T_1 -пространства является кружевным пространством.

Четвёртая и пятая главы посвящены квазитопологическим алгебрам, т.е. алгебрам с раздельно непрерывными операциями. Введены понятия квазитопологической алгебры, многообразия квазитопологических алгебр и свободной квазитопологической алгебры. Доказано существование свободной квазитопологической алгебры произвольного топологического пространства в данном многообразии квазитопологических алгебр. Получено явное описание абсолютно свободной квазитопологической алгебры произвольной сигнатуры произвольного топологического пространства. Доказано, что в любом многообразии квазитопологических алгебр определены топологические

факторалгебры, а именно, на любой факторалгебре любой квазитопологической алгебры операции раздельно непрерывны относительно фактортопологии. Особое внимание уделено свободным квазимальцевским алгебрам и их свойствам, в частности, аксиомам отделимости. Предъявлено явное описание свободной квазимальцевской алгебры данного топологического пространства. Доказано, что всякое квазимальцевское пространство является ретрактом некоторой квазитопологической группы, тогда как ретрактом топологической группы мальцевское пространство является только при дополнительных условиях. Кроме того, доказано, что если X — тихоновское пространство и Y — его замкнутое подпространство, то свободная квазимальцевская алгебра пространства Y является замкнутой подалгеброй свободной квазимальцевской алгебры пространства X .

Наконец, в диссертации установлены важные свойства, отличающие квазитопологические алгебры от топологических. Так, одним из фундаментальных отличий квазитопологических алгебр от топологических является тот факт, что топологическая факторалгебра квазитопологической алгебры является квазитопологической алгеброй. Этот факт и конструктивное описание абсолютно свободной квазитопологической алгебры позволяют получить конструктивное описание свободной квазитопологической алгебры над полным многообразием квазитопологических алгебр. Это одно из преимуществ квазитопологических алгебр перед топологическими. В диссертации показано, многие результаты о топологических алгебрах остаются верными и даже усиливаются для квазитопологических алгебр. Таким образом, диссертация открывает путь для исследования новых классов пространств, что является актуальной задачей, представляющей как теоретический, так и практический интерес.

Список литературы

- [1] М. И. Граев, *Свободные топологические группы*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **12** (3), 279–324 (1948).
- [2] А. Г. Курош, *Общая алгебра*, Физматлит, М., 1979.
- [3] А. И. Мальцев, *К общей теории алгебраических систем*, Матем. сб., **35(77)** (1), 3–20 (1954).
- [4] А. И. Мальцев, *Свободные топологические алгебры*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **21** (2), 171–198 (1957).
- [5] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М., 1970.
- [6] Е. А. Резниченко, *Группы с топологией и однородные пространства*, дисс. ... д-ра физ.-мат. наук, Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова, М., 2023.
- [7] О. В. Сипачева, *Компакты с непрерывной операцией Мальцева и ретракты топологических групп*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., № 1, 33–36 (1991).
- [8] О. В. Сипачева, *Об одном классе свободных локально выпуклых пространств*, Матем. сб., **194** (3), 25–52 (2003).
- [9] *Общая алгебра*, под ред. Л. А. Скорнякова, т. 2, Наука, М., 1991.
- [10] В. В. Успенский, *Свободные топологические группы метризуемых пространств*, Изв. Акад. Наук СССР. Сер. мат., **54** (6), 1295–1319 (1990).
- [11] В. В. Успенский, *О непрерывных образах линделёфовых топологических групп*, Докл. АН СССР, **285** (4), 824–827 (1985).
- [12] В. В. Успенский, *Ретракты топологических групп и компакты Дугунджи*, в кн.: *Топология и её приложения*, Труды Международной топологической конференции (Баку, 3–8 октября 1987 г.), Тр. МИАН СССР, **193**, Наука, М., 1992, 192–196.
- [13] В. В. Федорчук, А. Ч. Чигогидзе, *Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия*, Наука, М., 1992.
- [14] М. М. Чобан, *К теории топологических алгебраических систем*, Тр. ММО, **48**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1985, 106–149.

- [15] С. А. Шкарин, *Теорема Пеано неверна в бесконечномерных F' -пространствах*, Матем. заметки, **62** (1), 128–137 (1997).
- [16] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986.
- [17] C. J. R. Borges, *On stratifiable spaces*, Pacific J. Math., **17** (1), 1–16 (1966).
- [18] J. Brazas, S. Emery, *Free Quasitopological Groups*, Topol. Appl., **326**, 108416 (2023).
- [19] J. Ceder, *Some generalizations of metric spaces*, Pacific J. Math., **11**, 105–125 (1961).
- [20] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math., **1** (1951), 353–367.
- [21] P. M. Gartside, E. A. Reznichenko, O. V. Sipacheva, *Mal'tsev and retral spaces*, Topology Appl., **80**, 115–129 (1997).
- [22] G. Grätzer, *Universal Algebra*, Springer, New York, 2008.
- [23] G. Gruenhage, *Generalized metric spaces*, in: *Handbook of set theoretic topology*, eds. K. Kunen, J. E. Vaughan, Amsterdam, North-Holland, 1984, 423–501.
- [24] R. W. Heath, R. E. Hodel, *Characterizations of σ -spaces*, Fund. Math. **77** (3), 271–275 (1973).
- [25] C. J. Knight, W. Moran, J. S. Pym, *The topologies of separate continuity*, Proc. Camb. Phil. Soc., **68**, 663–671 (1970).
- [26] A. de Morgan, *On the syllogism: IV, and on the logic of relations*. Trans. Cambridge Philosophical Soc., **10** (1860).
- [27] T. Przymusiński, *Collectionwise normality and extensions of continuous functions*, Fund. Math. **98** (1), 75–81 (1978).
- [28] H. Fay, T. Ordmann, B. V. Smith-Thomas, *The free topological group over the rationals*, Gen. Topol. Appl. **10**, 33–47 (1979).
- [29] E. A. Reznichenko, *Extensions and factorizations of topological and semitopological universal algebras*, arXiv:2402.01418[math.GN].
- [30] W. Taylor, *Varieties of topological algebras*, J. Austral. Math. Soc., Ser. A, **23**, 207–241 (1977).

- [31] S. A. Shkarin, Russian J. of Math. Phys., **6** (4), 435–460 (1999).
- [32] S. Świerczkowski, *Topologies on free algebras*, Proc. London Math. Soc., **14** (3) 566–576 (1964).
- [33] O. V. Sipacheva, *On free topological groups with the inductive limit topologies*, Ann. N.Y. Acad. Sci., **788**, 188–196 (1996).
- [34] O. V. Sipacheva, *Free Boolean topological groups*, Axioms, **4** (4), 492–517 (2015).
- [35] V. V. Uspenskii, *The Mal'tsev operation on countably compact spaces*, Comment. Math. Univ. Carol., **30** (2), 395–402 (1989).

Публикации автора по теме диссертации

**Статьи в рецензируемых научных изданиях,
рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ
по специальности 1.1.3. Геометрия и топология и входящие в базы
цитирования Scopus, ядро РИНЦ, RSCI, Web of Science**

- [36] О. В. Сипачева, А. А. Солонков, *Свободная топологическая алгебра с раздельно непрерывной операцией Мальцева* // Функциональный анализ и его приложения. – 2023. – Т. 57, вып. 4. – С. 89–99.
EDN: EMSLQV, объём 0,688 п.л.
Перевод: O. V. Sipacheva, A. A. Solonkov, *Free topological algebra with separately continuous Mal'tsev operation* // Functional Analysis and Its Applications. – 2023. – Vol. 57, no. 4. – Pp. 337–345.
EDN: LPOPEJ, объём 0,563 п.л.
Импакт фактор 0.374 (SJR), 0.557 (РИНЦ).
А.А. Солонковым доказаны теоремы 2 и 4, а также внесён значительный вклад в формулировку и доказательство теорем 3, 5, 6. Общая доля диссертанта составляет 60%.
- [37] О. В. Сипачева, А. А. Солонков, *Оператор продолжения отображений для подпространств векторных пространств над полем $\mathbb{F}_2$* // Функциональный анализ и его приложения. – 2022. – Т. 56, вып. 2. – С. 64–74.
EDN: EZUNBA, объём 0.688 п.л.
Перевод: O. V. Sipacheva, A. A. Solonkov, *Extension Operator for Subspaces of Vector Spaces over the Field $\mathbb{F}_2$* // Functional Analysis and Its Applications. – 2022. – Vol. 56, no. 2. – Pp. 130–137.
EDN: KYZGEB, объём 0.5 п.л.
Импакт фактор 0.374 (SJR), 0.557 (РИНЦ).

А.А. Солонков доказал основную лемму и внёс значительный вклад в доказательство утверждения 1 и теоремы 1. Общая доля диссертанта составляет 75%.

- [38] О. V. Sipacheva, А. А. Solonkov, *Free topological Mal'tsev algebras* // Topology and Its Applications. – 2025. – Vol. 374. – P. 109257.
First online 15 January 2025,
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0166864125000550>
EDN: YZALWD, объем 0.938 п.л.
Импакт фактор 0.449 (SJR).
А.А. Солонковым внесён значительный вклад в доказательство теорем 1 и 2. Общая доля диссертанта составляет 50%.
- [39] А. А. Солонков, *Свободные универсальные алгебры с отдельно непрерывными операциями* // Математические заметки. – 2025. – Т. 117, вып. 5. – С. 750–763.
EDN: BSMLQR, объём 0.875 п.л.
Перевод: А. А. Solonkov, *Free Universal Algebras with Separately Continuous Operations* // Mathematical Notes. – 2025. – Vol. 117, no. 5. – Pp. 837–849.
EDN: ODWKIP, объём 0.813 п.л.
Импакт фактор 0.508 (SJR), 0.696 (РИНЦ).